



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

RIES



799 7



1191 15

Mathematik
ologie

aufgaben

von

Heinrich Poske

Lehrer am
Gymnasium

Leipzig

Verlag von B. G. Teubner



355500
Physik

mit

**Zusätzen aus der angewandten Mathematik
aus der Logik und Psychologie**

und mit

230 physikalischen Leitaufgaben

Verfaßt von

Dr. Alois Höfler

ord. Professor an der Deutschen Universität Prag

unter Mitwirkung von

Dr. Eduard Maix

weiland Hochschulprofessor
in Wien

Dr. Friedrich Poske

Professor am Kaiserlichen Lyceum
in Berlin

Mit 981 Abbildungen im Text und 12 Tafeln zum Teil
in Farben

Braunschweig

Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn

Ankündigung.

Von den Lehr- und Hilfsbüchern zur Physik und Naturlehre, verfaßt von **A. Höfler** unter Mitwirkung von **Ed. Maiß** und **Fr. Poske**, sind die nachstehenden Ausgaben erschienen:

Ausgabe A.

Physik mit Zusätzen aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie und mit **230** physikalischen Leitaufgaben. Mit 981 Abbildungen im Text und 12 Tafeln, zum Teil in Farben. XXXI und 966 Seiten. Preis geh. M. 15.—, geb. in Lnw. M. 16.—.

Daraus besonders erhältlich:

Hilfsbuch zur Physik enthaltend Zusätze aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie und **230** physikalische Leitaufgaben. VIII und 258 Seiten (Seite 697—954). Preis geh. M. 4.—, geb. in Lnw. M. 4.80.

Ausgabe B.

Naturlehre für die Oberstufe der Gymnasien, Realschulen und verwandter Lehranstalten. Mit 459 Abbildungen im Text und 9 Tafeln. XIII und 407 Seiten. Preis geh. M. 4.50, geb. in Lnw. M. 5.—.

Für Österreich: Zu beziehen von Karl Gerolds Sohn, Wien I, Barbaragasse 2. Preis geh. K. 4.60, geb. in Lnw. K. 5.—.

Laut hohem k. k. Ministerial-Erlasses vom 18. Juni 1903, Z. 17.744, zum Lehrgebrauche an Mittelschulen mit deutscher Unterrichtssprache allgemein zulässig erklärt.

Dazu erschien:

Hilfsbuch zur Naturlehre für die Oberstufe der Gymnasien, Realschulen und verwandter Lehranstalten, enthaltend Zusätze aus der angewandten Mathematik, der Logik und der Psychologie und **80** Leitaufgaben. Mit 110 Abbildungen im Text. IV und 93 Seiten. Preis kartoniert M. 1.20.

Für Österreich: Zu beziehen von Karl Gerolds Sohn, Wien I, Barbaragasse 2. Preis kartoniert K. 1.20.

Laut hohem k. k. Ministerial-Erlasses vom 14. Oktober 1904, Z. 34845, wird auf dieses Hilfsbuch zur Naturlehre aufmerksam gemacht.

Ausgabe C.

Repetitorium der Physik im Anschluß an Ausgabe A und B. Mit 241 Abbildungen im Text. VIII und 203 Seiten. Preis geh. M. 3.—, geb. in Lnw. M. 3.50.

Physik

mit

Sätzen aus der angewandten Mathematik, aus der
Logik und Psychologie

und mit

230 physikalischen Leitaufgaben

4

Lehrbuches als ein nicht unwesentliches Stück Lebensaufgabe im Auge zu behalten. Das erste Manuskriptblatt, auf dem ich mich in der Aufzeichnung meiner damaligen Lehrerfahrungen versuchte, ist vom 20. Juli 1879 datiert. Die Abfassung des vorliegenden Buches begannen Eduard Maiß und ich im Frühjahr 1893, sogleich nachdem wir die Naturlehre für die Unterstufe der Gymnasien und Realschulen als Ergebnis dreijährigen Zusammenarbeitens abgeschlossen hatten, weil uns der damalige Herr Landesschulinspektor Dr. Ferdinand Maurer als unser wahrhaft väterlicher Freund dringend aufforderte, auch ein Buch für die Oberstufe zu verfassen, da sich nach einem solchen seit langem ein sogar noch stärkeres Bedürfnis als nach einem für die Unterstufe fühlbar gemacht habe. Nach weiteren siebeneinhalb Jahren anhaltender gemeinschaftlicher Arbeit wurde mir mein Freund Maiß durch einen jähen Tod entrissen — ich werde von der dadurch geschaffenen Lage noch weiter unten zu sprechen haben — und nun sind noch einmal fast vier Jahre über die Vollendungsarbeiten des Buches dahingegangen. Es sei gestattet, hier über meine und meines Freundes Absichten nach sovieltjähriger Arbeit Rechenschaft zu geben.

Was ein Lehrbuch der Physik neben denen seinesgleichen Charakteristisches aufzuweisen haben kann, verteilt sich auf seinen wissenschaftlichen Inhalt und auf die didaktische Formgebung. Obwohl jener Inhalt letztlich auch für die didaktische Form grundlegend und bestimmend ist, so mag von ihm hier doch erst an zweiter Stelle die Rede sein.

Was aber das Didaktische eines Lehrbuches betrifft, so war es uns von jeher klar, daß dies immer nur ein kleiner Teil der didaktischen Vorbedingungen eines guten physikalischen Unterrichtes sein könne. Der entscheidende Teil des Lehrerfolges bleibt ja immer dem mündlichen Unterrichte, dem Schulversuche, der wirksamen An-eiferung des Schülers zur Beobachtung der in der Natur spontan sich abspielenden Erscheinungen vorbehalten; und schon hat die von Amerika und England ausgegangene Bewegung, den Schülerversuch zu einen wesentlichen Bestandteil der Schulung im physikalischen Denken zu machen, auch auf dem Festlande eine so erfreuliche lebendige Kraft bekundet, daß allen diesen Elementen gegenüber die Rolle des Lehrbuches zu einer sehr bescheidenen herabsinken zu müssen scheint. Jedenfalls haben wir in unserem Buch allen diesen Faktoren nicht entgegen, sondern, soweit es ein Buch eben kann, ihnen in die Hände zu arbeiten getrachtet.

Mit allen übrigen Faktoren des physikalischen Unterrichtes hat das Lehrbuch die eine Aufgabe gemeinsam, das natürliche, noch

nicht physikalische Denken auf die Pfade des physikalischen Denkens erst hinüberzuleiten. Und diese Aufgabe ist viel schwieriger als die, einen bloßen wie immer knappen oder ausführlichen Auszug aus der physikalischen Wissenschaft zu geben; denn je mehr die Physik ihre eigene Welt von Methoden und Begriffen ausbildet, um so mehr entemdet sie sich fürs erste dem naiven Anschauen und Denken über Naturdinge, wie es sich im Kinde, im Knaben und Jünglinge nicht wesentlich anders als auch in dem einer spezifisch physikalischen Bildung entbehrenden sogenannten gebildeten Erwachsenen täglich und unendlich in bestimmten Mängeln (vielleicht auch ab und zu in Vorzügen) äußert.

Der erste Fehler also, den ein Physiklehrbuch zu vermeiden hat, ist der, daß es nicht physikalische Denkweise schon dort voraussetze, wo ja alle früher genannten Faktoren ein solches Interesse erst planmäßig hervorzulocken und zu entwickeln haben. Während der ersten Jahre der Abfassung des vorliegenden Buches hatten wir die Absicht, ein möglichst knapp gefaßtes Lehrmittel herzustellen, welches dem Schüler das Lernen namentlich nur durch möglichst deutlichen logischen Aufbau, scharf gefaßte Definitionen u. dgl. hätte erleichtern sollen. Mehr und mehr aber gewannen wir während jener Arbeit den Eindruck, daß gerade durch solche Knappheit nur allzuleicht auch einem gänzlich verfehlten Unterrichtsvorgange hätte Vorschub geleistet, ja namentlich der junge, unerfahrene Lehrer zu einem solchen hätte verführt werden können. Denn ginge der Unterricht dann wesentlich auf ein Einlernen dieser Definitionen, Ableitungen usf. aus, ohne die erforderliche allmähliche psychologische Vorbereitung dieser logischen Endergebnisse, so hätte ein solcher Unterricht keinen merklich besseren Erfolg, als wenn die Definitionen fehlerhaft, die Ableitungen unstreng usf. gewesen wären. Der wissenschaftlich beste physikalische Unterricht prallt an der überwiegenden Mehrzahl der Schüler, selbst der gut begabten und fleißigen, völlig wirkungslos ab, wenn er es verschmäht, das erst zu entwickelnde physikalische Denken des Schülers in Beziehung zu setzen mit seinem übrigen schon vorhandenen Gedankenkreis. Es ist nun einmal die Tatsache nicht aus der Welt zu schaffen, daß den drei oder vier (auf deutschen Gymnasien nur zwei) wöchentlichen Stunden, während deren der Schüler in der Schule physikalisch denkt, 22 bis 27 andere gegenüberstehen, in welchen sein Gedankenverlauf ein dem exakt-physikalischen mindestens fremder, nicht selten geradezu entgegengesetzter ist. Eine für den ganzen weiteren Erfolg des Unterrichts entscheidende Aufgabe fällt hier demjenigen Teile zu, welchen die wissenschaftliche Didaktik was immer für eines Faches als die „Stufe der Vorbereitung“ bezeichnet.

Aus dieser Rücksicht heraus ergab sich im Fortgange der Arbeit der Plan, von dem Buche drei Ausgaben zu veranstalten: A eine große „Physik“, das vorliegende Buch (samt Zusätzen 954 Seiten); B eine kleinere, „Naturlehre“ (400 Seiten) für die Hand des Schülers der oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen und verwandter Lehranstalten, und C eine kleinste, „Repetitorium der Physik“.

Der auf den Titelblättern so vieler älterer Bücher gebräuchliche Zusatz „Für den Schulunterricht und zum Selbststudium“ enthielt das Bekenntnis, daß mündlicher Unterricht und Lehrbuch noch nicht in das richtige Verhältnis zu einander und zu den Bedürfnissen des Lehrers und des Lernenden getreten waren. Denn wozu ein mündlicher Unterricht, der nur das Lehrbuch nachsagt? Wozu ein Schulunterricht „nach dem Lehrbuch“, wenn jeder Leser aus dem Lehrbuche sich ebenso gut selbst unterrichten kann? Die vorliegende große Ausgabe A des Buches enthält also außer dem festen Lernstoffe, den wir in der Tat nicht nur durch möglichst scharfe Formulierungen, sondern auch durch die typographischen Mittel des Groß- und Fettdruckes schon für das Auge hervorgehoben haben, auch noch dasjenige, was der Lehrer an Vorbereitungen, historisch interessanten Notizen u. dgl. zur Belebung des Lehrstoffes hinzufügen kann.

In der Schülerausgabe B aber konnte alles dies füglich wegb bleiben, da es im Gedächtnis des Schülers ohnedies willig haftet, falls es seine Aufgabe, Interesse zu erregen, beim mündlichen Unterricht in der gehofften Weise erfüllt hat. Die Ausgabe B (die am 18. Juni 1903 die behördliche Approbation für alle österreichischen Lehranstalten erhalten hat) konnte sich also in der Tat auf jene ursprünglich beabsichtigten Definitionen, kurzen Ableitungen u. dgl. beschränken; wobei wir aber auch hier noch den unwillkommenen Nebeneindruck der Dürre zu vermeiden bestrebt waren. — Indem wir jene Zugaben, die der mündliche Unterricht (sei es in dieser, sei es in irgend einer anderen gleichwertigen Form) sich nicht wird nehmen lassen, in der großen Ausgabe beibehalten haben, mag diese als Handbuch des Lehrers¹⁾ gelten (wie sie von mehreren Freunden, die Einblick in die Druckbogen genommen hatten, genannt worden ist). Aber auch zum „Selbststudium“ mag nun die große Ausgabe A brauchbar befunden werden von jener nicht geringen Zahl von Lesern, die sich unabhängig von jedem Schülerbedürfnis für Inhalt und Methode der modernen Physik

¹⁾ Eine ausführliche Didaktik des physikalischen Unterrichtes (in der u. a. auch meine Einzelbeiträge zur Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, 1887 bis jetzt, zu sammeln wären) gedenke ich nach ausreichender Erprobung unseres Schulbuches während der nächsten Jahre zu veröffentlichen.

interessieren und mehr oder minder lebhaft es vermessen, einen guten Physikunterricht zu rechter Zeit empfangen zu haben.

Das „Repetitorium der Physik“ endlich mag dem leidigen Prüfungszweck dienen; aber auch hier wird gerade die Beschränkung auf den allerknappsten Grundstock von Formeln u. dgl. dem Wahne entgegengetreten, als könne beim Vorbereiten auf ein Physikexamen das bloße Lernen eines Buches die Hauptsache sein. Besteht dagegen das Examen zum wesentlichsten Teile im Lösen von Aufgaben, so wird ein Überblick über die bei diesen in Anwendung kommenden Formeln und Definitionen auch im letzten Augenblick noch willkommen sein.

Nach allem Gesagten also hoffen und wünschen wir, daß nach der didaktischen Seite hin das vorliegende Buch den vieljährigen Erörterungen der „Lehrbuchfrage“ gerecht geworden sei. Es war mir eine große Freude, daß zur Zeit, da unser Buch fast abgeschlossen war, nämlich 1901 auf der Hauptversammlung des Vereines zur Förderung des Unterrichtes in der Mathematik und den Naturwissenschaften

Gießen, auf jene „Frage“ folgende klare und scharfe Antwort von Friedrich Poske gegeben und durch die volle Zustimmung der Versammlung sanktioniert worden ist:

„Diese Frage ist bereits 1896 Gegenstand der Erörterung von seiten der Herren Schwalbe und Pietzker gewesen. Beide haben sich zu Gunsten einer systematischen Anordnung des Stoffes im Gegensatz zur methodischen ausgesprochen. Man kann dies gelten lassen, wenn das Systematische nicht ins einseitig Deduktive ausartet. Wenn die Anordnung zu formal-systematisch ist, so wird der Gebrauch des Lehrbuchs bei und neben dem methodischen Unterricht unbequem und die Schüler werden in dem Buche nie recht zu Hause sein . . . Ist die Anordnung zu methodisch, so wird dies leicht für den Lehrer eine Fessel und überdies für den Unterricht, der auch im Aufsuchen der richtigen Methode den Schein der Unfreiheit vermeiden sollte, geradezu ein Nachteil. Am meisten zweckentsprechend würde ein Lehrbuch sein, das den Stoff in übersichtlicher Anordnung darbietet und den methodischen Gang weder zu genau vorschreibt noch auch ihm allzu große Schwierigkeiten in den Weg legt . . . Ich bin übrigens der Meinung, welche Art von Lehrbuch man auch zur Verfügung hat, es sollte im Unterricht selbst möglichst wenig benutzt werden. Die alte Sitte, Paragraph für Paragraph zu absolvieren, dürfte mehr und mehr einer tieferen Behandlung des Gegenstandes weichen . . . Keine Lehrbuchphysik, sondern lebendige Physik muß die Lösung sein. Die Lehrbuchphysik führt zu Dogmatismus, d. h. zu dem geraden Gegenteil dessen, worin der Bildungswert der Physik besteht. In fast allen anderen Fächern lernt man aus dem Lehrbuch, hier sollen die Schüler aus den

Erscheinungen selber und aus der von Lehrer und Schülern gemeinsam vorgenommenen Bearbeitung dieser Erscheinungen lernen. Daß noch können wir das Lehrbuch, wenigstens auf der Oberstufe, nicht abbeugen, schon der systematischen Übersicht des Stoffes wegen, die der Abschluß des Unterrichts nicht fehlen darf . . . Ich möchte das Gese sagte kurz so formulieren, daß das Lehrbuch den Unterricht begleitet, aber nicht beherrschen soll. Ich könnte auch sagen: Ein Lehrbuch der Physik ist nicht dazu da, damit danach unterrichtet wird.

Übrigens wird, wenn wir uns auch in der Lehrbuchfrage zu den Systematikern zählen, der Methodiker nicht verkennen, daß wir nicht wenig Nachdenken daran gewendet haben, namentlich in den ersten Partien des Buches, wo es im Schüler sozusagen erst das Gewissen für die charakteristische Methode der Physik überhaupt zu wecken gilt, das methodischen Vorgehen ja keine Schwierigkeiten zu bereiten, sondern ihm den Weg sogar möglichst überzeugend vorzuzeichnen (Freund und Maiß hat darauf bestanden, daß jene Teile fünf- bis achtmal neu redigiert wurden). Wir haben nämlich die §§ 2 bis 13 (Phoronomik des Punktes) in drei größere didaktische Einheiten gegliedert. Die erste dieser Einheiten (§§ 2 bis 6) beschäftigt den Schüler mit den Vorstellungen von Geschwindigkeit und Beschleunigung; ausgegangen wird dabei von wirklichen *Versuchen* über solche Bewegungen (an der Fallrinne u. dgl.), in denen der Schüler veränderliche und konstante Geschwindigkeiten und Beschleunigungen sozusagen mit leiblichem Auge sehen kann, worauf erst die abstrakten mathematischen Mittel der Beschreibung solcher Bewegungen (§§ 3, 4, 5 und alles bisherige zusammenfassend § 6) folgen. In einer zweiten didaktischen Einheit lenkt § 7 durch wirkliche *Versuche* über Wurfbewegung die Aufmerksamkeit auf die Form der Bahn und damit zusammenhängend auf Richtung und Krümmung, wogegen der abschließend § 11 eine zusammenfassende Anwendung der bis dahin erworbenen mathematischen Mittel in der rechnerischen und konstruktiven Behandlung der Wurfbewegungen gibt. Eine dritte didaktische Einheit bildet endlich die kreisenden und schwingenden Bewegungen (§§ 12 und 13 wobei wieder von *Versuchen* ausgegangen und die Betrachtung bis zu den Analogien zwischen Geschwindigkeit und Richtung geführt wird. Mit dieser Analogie ist auch derjenige allgemeine beschreibende Gesichtspunkt von Geschwindigkeits- oder Richtungsänderungen erreicht, von dem aus das Trägheits- und Beharrungsgesetz in die erklärende Lehre von den Kräften, Massen, Arbeiten, Energie weiterführt. — Wiewohl diese Vorrede nicht der Ort ist, didaktische Ratschläge zu geben, sei doch bemerkt, daß wir uns den wirklichen Unterricht sogleich in der ersten Schulstunde mit eben jenem § :

klassischen Betrachtungen Galileis über die wirklichen Erscheinungen im freien Fall, an der schiefen und an der wagerechten Ebene, können denken (und seit langem auch selbst immer so in medias res eingangen sind), wogegen die zwei kurzen Absätze I und II der „Einleitung“ und der exponierende § 1 der Mechanik erst bei späterer Gelegenheit nachgetragen werden mögen. Dies eben wieder ein Beispiel, daß im mündlichen Unterricht ganz natürliche Vorgehen sich nicht ohne Weiteres in einem gedruckten Buche wiedergeben und einhalten läßt.

Indem wir nun mit allen diesen Vorbehalten das Systematische gar nicht als Anfang und Mitte, wohl aber als das erstrebenswerte Ende und Ziel der physikalischen Unterweisung und Stoffgestaltung erhalten, sind wir bei demjenigen Moment angelangt, das wir einpaß als die wissenschaftliche Eigenart eines Physikbuches von der didaktischen unterschieden haben. In einem Elementarbuch können es nämlich nur die Auswahl und die Anordnung des Lehrstoffes sein, durch die es sich wissenschaftlich von seinesgleichen unterscheidet.

In der Auswahl war es unser Bestreben, möglichst sparsam zu sein, den Stoff auf das wesentlichste, grundlegende zu beschränken. Vereinfachung und Vertiefung sollten da Hand in Hand gehen. Da wir eine Reihe ausgezeichnete Bücher besitzen — es seien nur als Beispiele Paul Reis und Dressel genannt — die es verstehen, mit elementarmathematischen Mitteln auf knappen Raum eine so erstaunliche Menge von Stoff zusammenzudrängen, daß man von relativer Vollständigkeit des physikalischen Inhaltes sprechen kann, so dürfen wir jeden Leser, der, nachdem er sich an unserem weitgehend vereinfachten Stoffe klare physikalische Grundbegriffe geholt hat, auf die stoffreicheren Bücher behufs Ausbau seines Wissens verweisen. Nur wird erst, wer es in den Grundvorstellungen zu einer ihn selbst befriedigenden Klarheit gebracht hat, den ihm täglich aus Zeitungen, Feuilletons u. dgl. überreich zufließenden Stoff allerneuester physikalischer Einzelheiten mit eigentlichem Genuß jenem Grundstocke seines Wissens angliedern. Dies die Rechtfertigung so mancher Weglassung, die auch uns keineswegs immer leicht fiel. Immerhin aber haben wir es uns schon wieder aus didaktischen Rücksichten unzulässig, die Sparsamkeit soweit zu treiben, daß sie aus dem lebendigen Ganzen der physikalischen Anschauungs- und Denkwelt schließlich nur ein trockenes Gerippe herauslöst. Denn erfahrungsgemäß ist der Schüler nur selten in dieser Weise vereinfachten Lehrstoff überhaupt nicht mehr fähig. Ein bloßes Gerippe ist nun einmal nicht lebendig. Für das Lernen der Elemente muß sich der Schüler jeweils dadurch belohnen lassen, daß er sich bis zu einer gewissen Höhe und Freiheit der physi-

kalischen Betrachtung emporgeführt sieht. So gipfelt unsere Darstellung der Dynamik des Punktes im engeren Sinn (§§ 15 bis 21) im Emporführen der Einzellehren von den Galilei-Newtonschen Prinzipien bis hinauf zu dem universellen Gesichtspunkt der allgemeinen Schwere. Parallel mit diesem Fortschreiten an der Hand der Leitbegriffe α) „Kraft“ und „Masse“ führen dann die Leitbegriffe β) „Arbeit“ und „Energie“ gleichsam auf einen zweiten ebenso hohen Gipfel, nämlich zum Begriff des Potentials, zunächst des Gravitationspotentials (§ 24).

Die angeführten Beispiele in Sachen der Auswahl führten von selbst auch auf das zweite wissenschaftliche Moment, die Anordnung des ausgewählten Stoffes; es möchte vielleicht dasjenige sein, worin das vorliegende Buch am meisten neue Wege zu beschreiten versucht hat. Gerber (Stargard) sagte kürzlich in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht (XIII, S. 187): „Die übliche Gliederung der Lehrbücher befriedigt gewiß niemanden; ein Ersatz durch Besseres ist jedoch viel schwieriger als usw.“. Nicht wenige sonst verdienstvolle Bücher scheinen im Gegensatz zu diesem Ausdrucke der Unbefriedigung vielmehr die Absicht zur Schau zu tragen, daß die logische Anordnung eines so realen Stoffes, wie es der physikalische ist, überhaupt etwas Gleichgiltiges sei; und vielleicht ließe sich dieser bewußte Gegensatz zur unendlichen Sorgfalt, die man in der Mathematik von jeher auf die rationale Anordnung der einzelnen Wahrheiten verwendet hat, aus dem erkenntnistheoretischen Gegensatz realer und idealer Erkenntnisgegenstände begründen. Wieder aber ist es mindestens von didaktischer Seite her zweifellos, daß es dem Schüler der Physik einen verwirrenden und darum abstoßenden Eindruck machen muß, von einer Einheit zur anderen ohne einen ihm verständlichen Plan mehr geworfen als geführt zu werden. Vielleicht darf aber neben diesem didaktischen Interesse an einer einleuchtenden Gliederung und neben dem fachwissenschaftlichen Interesse an physikalischen Einzelheiten auch diejenige Seite „philosophischen“ Interesses zu Worte kommen, die sich in der Richtung auf ein Ganzes äußert, und die hervorgeht aus dem Bedürfnisse, ganze große Gegenstandsgebiete gedanklich überzeugend zu beherrschen, wofür das natürliche äußere Zeichen eben doch immer wieder die ungezwungene und durchsichtige systematische Anordnung ist. Hier zur raschen vorläufigen Orientierung des Lesers nur wenige Bemerkungen über die gewählten Anordnungsprinzipien.

Daß wir nicht mit den „Allgemeinen Eigenschaften“ u. dgl. begannen, bedarf heute nachgerade keiner Rechtfertigung mehr. Aber auch Auseinandersetzungen über die „Methode der Physik“ und wieder eine Vorführung aller Meßapparate, die zum Teil selbst ein halbes Jahr später dem Schüler zum erstenmal entgentreten (so der

onius beim Barometer), scheinen uns keine passende Einführung in die Physik, wenigstens keine solche, die vor dem eigentlichen physikalischen Unterrichte auf Verständnis rechnen, geschweige denn das Interesse des Schülers wecken können. So beginnen wir denn sogleich mit der Mechanik. Daß hier die einstige Trennung von „Statik“ und „Dynamik“ nicht in den Vordergrund gestellt wurde, bedarf ebenfalls kaum mehr einer Rechtfertigung. Um so schärfer ist der Gegensatz zwischen Phoronomie (welche Bezeichnung deutlicher ist als „Kinematik“) und Dynamik hervorgekehrt, und zwar im ersten Abschnitte, der Mechanik des Punktes, auch in äußerer Abgrenzung, dagegen in den übrigen Abschnitten, z. B. der Mechanik der starren Systeme, der Wellenlehre, wenigstens so, daß der Schüler überall weiß, ob er es mit einer rein beschreibenden Untersuchung der räumlichen und zeitlichen Eigenschaften allein, oder auch der Erklärung dieser Erscheinungen aus Kräften und Energien zu tun hat. Die Mode, welche über alles „Erklären“, über die Begriffe der Ursache, der Kraft den Bann gesprochen hat, machen wir in völlig bewußter Weise nicht mit; wir hoffen aber, daß, wo in dem Buch von Kräften und Energien die Rede ist, der Schüler nicht den Eindruck bekommen kann, als seien das „bloße Wörter“, oder, was nicht wesentlich besser wäre, bloße Zahlformeln. Wir meinen, daß durch die beharrlichen Hinweise auf die sachliche Grenze zwischen Beschreibung und Erklärung das logische Gewissen des Schülers für den Unterschied zwischen Tatsachen und Gesetzen einerseits, Hypothesen und Theorien andererseits, viel empfindlicher gemacht wird, als durch eine dogmatische Versicherung, die Mechanik (und dergleichen jedes andere Kapitel der Physik) habe es seit dem Jahre 1874, da Kirchhoff sein bekanntes Wort gesprochen, nur mehr mit dem „Beschreiben“ zu tun. Wie sehr uns das Trennen von Beschreiben und Erklären, von Tatsache und Theorie, im Herzen gelegen ist, wird der Leser in allen Teilen des Buches in concreto bemerken; so in der Wärmelehre, wo zwischen der Tatsache des Wärmeäquivalentes und der kinetischen Wärmehypothese eine scharfe Grenze gezogen ist; in der Lehre vom Licht, wo innerhalb der zwei ersten Abschnitte grundsätzlich auf jede Vorwegnahme der Wellenlehre des Lichtes verzichtet ist; in der Lehre von den elektrischen Erscheinungen, wo die „Fluida“ auch als Hilfsvorstellungen ganz hinter die energetische Behandlung mittelst des Potentialbegriffes zurücktreten, in der Chemie, wo die Atomhypothese Schritt für Schritt aus den einzelnen Tatsachen und Gesetzen gerechtfertigt wird. In demselben Sinne dürfte es noch als eine Abweichung vom Herkömmlichen, schon innerhalb der Mechanik, zu erwähnen sein, daß wir alles die Molekularmechanik Betreffende erst im V. Abschnitte dargestellt haben. Die

Wellenlehre folgt als VI. und letzter Abschnitt der Mechanik (wie so häufig als ein Einschub in die Akustik); dies schon deswegen weil an den Vorstellungen aus der Wellenlehre ganz ebenso wie Akustik auch die Optik und die Elektrizitätslehre interessiert sind.

Die Zerlegung des gesamten physikalischen Lehrstoffes schien am natürlichsten auf drei große Abschnitte zu führen: I. Mechanik, II. Lehre von Wärme, Schall und Licht, als die „Physik der Sinnesqualitäten“, III. Elektrische und magnetische Erscheinungen. Sprechen überwiegende Gründe dafür, daß die Elektrizitätslehre wie es jetzt häufig geschieht, der Optik vorangestellt wird, sondern sie den Abschluß des gesamten physikalischen Unterrichtes bildet, hoffe, die wissenschaftlichen und didaktischen Gründe hierfür bald legen zu können in einem Aufsätze „Über die natürlichste Anordnung der Kapitel im physikalischen Unterricht und über die Elektrizitätslehre als immanente Wiederholung des gesamten physikalischen Lehrstoffes“).

Die drei dann noch folgenden Abschnitte „Aus der Astronomie“, „Aus der Meteorologie“, „Aus der Chemie“ können und sollen aus bekannten Gründen des Zeitmangels (für Chemie hat das österreichische Obergymnasium nur drei bis vier Wochen!) ein Mindestmaß von Lehrstoff vorführen, dieses aber immerhin in einer Auswahl und Anordnung, daß sie sich dem übrigen Unterricht möglichst leicht und wirkungsvoll einfügen lassen. Als Beispiel dafür, was hier dem Herkömmlichen gegenüber wünschenswert scheint, wolle man den Aufsatz „Die Meteorologie an unseren Mittelschulen“ (Vierteljahresber. des Wiener Vereins zur Förderung des physikalischen und chemischen Unterrichtes) vergleichen. Was speziell aus dem astronomischen Lehrstoff aufzufallen wird, fällt erst in den letzten Wochen des letzten Schuljahres (oder auch nicht) durchgenommen, sondern organisch mit der Lehre von den Planetenbewegungen verbunden, bzw. ihr vorausgeschickt werden muß, s. Fußnote S. 78 (und S. 51 der behördlich approbierten Ausgabe I).

Neuerungen inhaltlicher Art sind ferner die Zusätze aus der angewandten Mathematik, aus der Logik und Psychologie, und die Leitaufgaben. Diese Zusätze werden für den Gebrauch der Schüler in stark gekürztem Ausmaße als besonderes Hilfsbuch der Naturlehre (zur Ausgabe B, 93 Seiten) herausgegeben.

Der mathematische Anhang beabsichtigt einerseits, die köstliche Einleitung zur Physik um die Vorwegnahme der Messungen (z. B. des Nonius) zu entlasten; andererseits wünscht dieser Anhang ein innigeres Verhältnis zwischen der Mittelschulmathematik und Mittelschulphysik anzubahnen, worüber an anderen Orten schon

Treffliches gesagt worden ist; es seien vor allem die unermüdlichen Bemühungen Felix Kleins mit innigstem Danke und dem Wunsche vollen Erfolges genannt. Im einzelnen hier nur soviel, daß wir z. B. von „Krümmung“ im Physikunterricht bei Planetenbewegungen, bei Spiegeln und Linsen, bei elektrostatischen Apparaten u. dgl. sprechen — von „einhüllenden Flächen“ bei der Katakaustik, beim Huygens'schen Prinzip — von „Trajektorien“ bei Niveauflächen und Kraftlinien usw., daß aber der bisherige mathematische Unterricht all diesen Dingen sorgfältig aus dem Wege gehen zu müssen meinte. Im Gegensatz zu solchen vorübergehenden Ausblicken in die „höhere Mathematik“ (die aber in Wahrheit nirgends über das hinausgehen, was schon innerhalb des gegenwärtig eingebürgerten mathematischen Lehrstoffes, z. B. der analytischen Geometrie, ganz wohl in Form von interessanten Übungsaufgaben zur Sprache kommen kann) wollen andere ganz primitive Darstellungen (z. B. die Einführung in die Goniometrie zunächst nur durch konkrete Anwendungen der Funktion Tangens) eine Anregung dazu geben, daß und wie der herkömmliche mathematische Unterricht von gewissen Pedanterien (z. B. dem peinlichen Durchsprechen aller Kombinationen von positiven und negativen Winkeln vor der ganzen Goniometrie, oder auch nur der sogleich möglichst allgemein sein wollenden Definitionen aller Funktionen für alle Quadranten) ohne Schaden für das mathematische Denken, aber sehr zum Nutzen des mathematisch-physikalischen entlastet werden könnte.

Im logischen Anhang werden diejenigen Begriffe von Induktion, Gesetz u. dgl., die bisher in den Einleitungen zur Physik wirkungslos bleiben mußten, in solchem Zusammenhange dargestellt, daß sie während des Unterrichtes bei passenden Gelegenheiten herangezogen werden können. Im psychologischen Anhang werden einige Dinge, wie z. B. das Stereoskopischsehen, die Kontrasterscheinungen, die über bloße Physik gewiß hinausgehen und innerhalb dieser leicht in physiologisch und psychologisch sehr anfechtbarer Weise zur Sprache kommen, unter gleichmäßiger Berücksichtigung des physikalischen und des psychologischen Anteiles der Erscheinungen behandelt. Durch das Hinausrücken dieser philosophischen Grenzgegenstände an oder außer die Grenzen des Lehrbuches und Verweisung in das Hilfsbuch soll dem sehr verschiedenen Geschmacke der Lehrer an solchen halb außerphysikalischen Gegenständen der weiteste Spielraum gewahrt bleiben. Möge man aber diese philosophischen Beigaben auch als eine Konzession an das Lieblingsfach des Verfassers, die Philosophie, freundlich tolerieren. Daß wir nach wie vor nicht von der Verquickung, sondern von der reinlichen Scheidung der Naturwissenschaft und Philosophie das bleibende Heil beider Wissenschaftsgruppen erwarten, wurde

jüngst eingehend begründet in der Abhandlung: „Zur gegenwärtigen Naturphilosophie“¹⁾).

Endlich die Leitaufgaben: Über sie habe ich in der Zeitschrift für den physikalischen und chemischen Unterricht, Jahrgang XV, S. einiges ausgeführt. Als wichtigster Gesichtspunkt gilt uns der, durch diese vorwiegend den theoretischen Lehrstoff der Physik ergänzenden Aufgaben (zum Unterschied von gewöhnlichen Übungsaufgaben) dem sehr verschiedenen Ausmaß der Begabung und Arbeitswilligkeit der verschiedenen Schülerindividualitäten weitestgehende Rechnung getragen werden kann und soll.

Und nun nach diesem sachlichen Bericht über das während meiner als zehnjähriger Arbeit an dem Buche Erstrebte noch ein Wort innigsten Dankes an die Vielen, die an ihm mitgearbeitet haben. Unter ungewöhnlich harten äußeren Bedingungen, unter denen ich bis zum Herbst 1903 zu arbeiten hatte, hätten mir ohne jene Mitwirkung zur Vervollendung dieser meiner Lieblingsarbeit überhaupt unmöglich gemacht. Was Eduard Maiß (der — wohl infolge jahrzehntelanger Überanstrengung — am 13. September 1900 einem Herzschlage erlegen — an dem Buche getan hat, habe ich im Anschluß an den von Karl Haas verfaßten Nekrolog²⁾) in der „Vierteljahrsschrift des Wiener Vereins zur Förderung des physikalischen und chemischen Unterrichtes“ mitzutellen versucht. Mögen die Manen des der Wissenschaft und Schule bis in den Tod Getreuen die Widmung dieses Buches als Zeichen einer über das Grab hinaus treuen Freundschaft und dankbar freundlich annehmen. . . Nur das hilfsbereite Eintreten unseres gemeinsamen Kollegen und Freundes Karl Haas (Wien) hat mir nach jenem Schicksalsschlag den Mut zu den Vollendungsarbeiten des Buches gegeben, und zugleich mit dem herzlichsten Dank für die während anderthalb Jahren geleistete Unterstützung spreche ich mein Bedauern aus, daß es ihm durch eine Überlastung mit dienstlichen und literarischen Verpflichtungen unmöglich war, auch bis zum Ende meiner Arbeit an dem Buche zu bleiben. Doppelt wertvoll wurde mir die stets bereite besonnene Hilfe meines Freundes Friedrich Posner, der schon in vorausgegangenen Jahren das allmähliche Werden des Manuskriptes mit seinem beständigen Rat begleitet hatte. Während der Drucklegung führte er dem Buche auch die Unterstützung

¹⁾ Abhandlungen zur Didaktik und Philosophie der Naturwissenschaften Sonderheft 2 der Zeitschr. f. den physik. u. chem. Unterr. Berlin, Springer, (136 Seiten).

²⁾ Sonderabdrücke der beiden Aufsätze sind Haas und ich an Teilnehmer abgegeben bereit.

Herrn M. Koppe (Berlin) bei der Anfertigung der astronomischen Tafel zu; desgleichen die Anteilnahme des Herrn Hahn-Machenheimer (Berlin) an der Korrektur des Buches. An dieser nahmen ferner teil meine lieben ehemaligen Schüler Maryan Smoluchowski (Lemberg), Fritz Hasenöhrle (Wien), mein alter Freund Ludwig Lechner (Baden bei Wien) und Herr Dr. Götting (Göttingen); ferner an Teilen der Korrektur die Herren Prof. Jul. Schönach und Dr. Oskar Straté. Die Ausführung des Abschnittes „Aus der Elektrotechnik“, sowie die einschlägigen Leitaufgaben übernahm mein lieber ehemaliger Schüler Robert Edler (Wien), den größten Teil der Zeichnungen mein lieber ehemaliger Schüler William Unger stud. techn.; beim mathematischen Anhang war mir Herr Dr. Carda (Wien) behilflich. Die Bogen des Abschnittes „Aus der Astronomie“ lasen Prof. Oppenheim (Prag) und Prof. Nabelek (Kremsier), die „Aus der Meteorologie“ Prof. Trabert (Innsbruck) und Hauptmann Th. Scheimpflug, die dieser beiden Abschnitte Prof. Spitaler (Prag), die des Abschnittes „Aus der Chemie“ Prof. Bamberger (Wien) und Ing. Böck (Wien). Zahlreiche wertvolle Ratschläge konnten so während der Korrektur noch berücksichtigt werden; andere, namentlich tiefer in den Aufbau der Darstellung eingreifende, hoffe ich im Falle einer neuen Auflage zu verwerten.

Der Verlagshandlung Friedr. Vieweg & Sohn in Braunschweig danke ich nicht nur für die Bereitwilligkeit gegen alle meine Wünsche hinsichtlich der Anfertigung von 390 neuen Holzschnitten, zum teil kostspieliger Tafeln, farbiger Illustrationen im Text u. dgl. m., sondern auch für ihr einträchtiges Zusammenarbeiten mit der Verlagshandlung Karl Gerolds Sohn, die an der Ausgabe für Österreich beteiligt ist. Ich bin stolz darauf, die beiden Firmen zu gemeinschaftlicher Förderung unseres physikalischen Unterrichtes gewonnen und insbesondere die altberühmten Illustrationsschätze des erstgenannten Verlages auch der Mittelschuljugend meines Vaterlandes gegen einen mäßigen Preis des Buches zugänglich gemacht zu haben.

Das Schicksal hat es gefügt, daß ich dieses Buch der Mittelschule fast in demselben Augenblicke übergebe, da ich nach siebenundzwanzigjähriger Lehrtätigkeit am Gymnasium zur Fortführung und zum Abschlusse meines Lebenswerkes an die Hochschule berufen wurde. Möchten meine lieben, verehrten Kollegen von der Mittelschule mir und dem Buche immerdar so freundlich gesinnt bleiben, wie sie es mir in wertvollen Kundgebungen so oft bezeigt haben.

Prag-Wien, Weihnachten 1903.

Alois Höfler.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

	Seite
I. Naturerscheinungen	1
II. Naturlehre	1

Erster Teil.

Mechanik.

§ 1. Gegenstand und Aufgabe der Mechanik	3
--	---

I. Mechanik des Punktes.

A. Beschreibung einiger Hauptarten von Bewegungen. (Phoronomie des Punktes.)

§ 2. Bewegung im freien Falle, an der schiefen Ebene und an der wag- rechten Ebene	4
§ 3. Abhängigkeit des Weges von der Zeit (Weg-Zeit-Gesetz).	10
§ 4. Geschwindigkeit	12
§ 5. Beschleunigung	14
§ 6. Gleichmäßig beschleunigte Bewegungen (Zusammenfassung)	16
§ 7. Bewegung geworfener Körper	18
§ 8. Gestalt der Bahn. — Richtung. Krümmung. — Vektoren der Bewegung	21
§ 9. Relative und absolute Bewegung	23
§ 10. Zerlegung und Zusammensetzung der Bewegungen	25
§ 11. Konstruktion und Berechnung der Wurfbewegungen (Zusammenfassung)	27
§ 12. Kreisende und schwingende Bewegungen	32
§ 13. Normalbeschleunigung (zentripetale Beschleunigung)	40
§ 14. Mechanische Spannung. — Übergang von der Phoronomie zur Dynamik	43

B. Dynamik des Punktes.

a) Erklärung mechanischer Erscheinungen mittels der Begriffe Kraft und Masse (Dynamik im engeren Sinne).

§ 15. Die drei Prinzipien der Dynamik des Punktes	47
§ 16. Messung der Kräfte und Massen. Die Grundgleichung der Dynamik $f = mw$. — Absolutes Gewicht. Spezifisches Gewicht und Dichte	51
§ 17. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften mit gemeinsamem Angriffs- punkt. — Begriff des Gleichgewichtes	64

	Seite
§ 18. Anwendung der Kräftezerlegung auf die schiefe Ebene und das einfache Pendel. — Kräfte bei Sinusschwingungen	67
§ 19. Kräfte bei krummlinigen Bewegungen. Zentralbewegungen	70
§ 20. Die irdische Gravitation (Zusammenfassung)	75
§ 21. Allgemeine Gravitation	78

β) Erklärung mechanischer Erscheinungen mittels der Begriffe
Arbeit und Energie (Energetik).

§ 22. Mechanische Arbeit	87
§ 23. Lebendige Kraft. — Aktuelle und potentielle Energie. Verwandlung und Erhaltung mechanischer Energien	94
§ 24. Gravitationspotential	104

II. Mechanik starrer Systeme.

§ 25. Starre Systeme und feste Körper	112
§ 26. Rein fortschreitende und rein drehende Bewegung. Kraftwirkungen an starren Systemen	113
§ 27. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften an starren Systemen	117
§ 28. Schwerpunkt. Gleichgewicht an schweren Körpern. Massenmittelpunkt	121
§ 29. Kraftmoment (Drehmoment, statisches Moment). — Hebel. Hebelwagen	123
§ 30. Arbeit an starren Systemen: Maschinen	133
Näheres zur Phoronomie und Dynamik der Drehbewegungen.	
§ 31. Winkelgeschwindigkeit, Winkelbeschleunigung. — Trägheit und Beharrung bei Rotationen starrer Systeme	140
§ 32. Massenmoment (Trägheitsmoment)	145
§ 33. Das physische Pendel. Drehschwingungen	148
§ 34. Erhaltung der Rotationsebene	151
§ 35. Überleitung von der Geomechanik zur Hydro- und Aëromechanik. — Charakteristische Eigenschaften der vollkommenen (idealen) Flüssigkeiten und Gase	155

III. Hydromechanik.

§ 36. Die Prinzipien der Hydromechanik	157
§ 37. Druck nach abwärts. Bodendruck	159
§ 38. Druck nach seitwärts und aufwärts	161
§ 39. Innendruck. Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche. Kommunizierende Gefäße	162
§ 40. Archimedisches Gesetz. Schwimmen	164
§ 41. Hydrostatische und andere Methoden zur Bestimmung spezifischer Gewichte	167
§ 42. Einige Bewegungserscheinungen an Flüssigkeiten	170

IV. Aëromechanik.

§ 43. Die Prinzipien der Aëromechanik	176
§ 44. Luftdruck. — Barometer	178
§ 45. Boyles (Mariottes) Gesetz	181
§ 46. Auftrieb in Gasen. Wägen im luftleeren Raume. Gewicht der Gase. Dichteverteilung in hohen Gassäulen	185
§ 47. Aëromechanische Apparate	188

	Seite
8. Die Luftpumpen	191
9. Einige Bewegungserscheinungen an Gasen	195

V. Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen.

0. Abweichungen der Naturkörper von den Grenzbegriffen starrer Systeme, vollkommener (idealer) Flüssigkeiten und Gase	196
1. Elastizität	197
2. Festigkeit, Teilbarkeit, Kohäsion fester Körper; Adhäsion fester und flüssiger Körper	202
3. Kristallisation	204
4. Zusammendrückbarkeit (Volumselastizität) der tropfbaren Flüssigkeiten	205
5. Kohäsionserscheinungen an tropfbaren Flüssigkeiten. — Kapillarercheinungen	207
6. Diffusion von Gasen und von Flüssigkeiten. Osmose. Mischen und Lösen. Absorption	212
7. Die Molekularhypothese	215
8. Nähere Beschreibung und Analyse der Vorgänge beim Stoß fester, flüssiger und gasförmiger Körper	219
9. Nähere Analyse der „Bewegungshindernisse“	222

VI. Mechanische Schwingungen und Wellenbewegungen.

0. Wasserwellen. Seilwellen. Einleitendes über Wellenbewegungen im allgemeinen	224
a) Schwingungen einzelner Punkte (Wiederholung und Erweiterung).	
1. Sinusschwingungen und andere Schwingungsformen	228
2. Zusammensetzung von Sinusschwingungen	230
b) Wellenbewegungen in eindimensionalen Punktreihen.	
3. Phoronomische Beschreibung der Wellenbewegungen	234
4. Dynamische Bedingungen für Wellenbewegungen in eindimensionalen Punktreihen	239
5. Superposition von Wellen. Interferenz	240
6. Reflexion der Wellen	244
c) Wellenbewegungen in zwei- und dreidimensionalen Medien.	
7. Kreiswellen, Kugelwellen. Wellenstrahlen. Ebene Wellen	245
8. Huygens' Elementarwellen	246
9. Beugung. Reflexion und Brechung	247

Zweiter Teil.

Wärme, Schall, Licht.

(Physik der Sinnesqualitäten.)

Wärmelehre (Thermik und Kalorik).

0. Wärmeempfindungen und physikalische Wärmeerscheinungen	251
A. Wärmegrade und Wärmemengen.	
1. Wärmegrad und Temperatur: Thermoskope und Thermometer (Thermometrie)	252
2. Wärmemenge und spezifische Wärme (Kalorimetrie)	257

B. Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Wärmegrad, Volumen und mechanischer Spannung.

	Seite
§ 73. Das Volumengesetz	261
§ 74. Boyle (Mariotte) — Gay-Lussacs (Charles) Gesetz	267

C. Abhängigkeiten zwischen Wärmegraden, Wärmemengen und Aggregatzuständen.

§ 75. Übersicht der Erscheinungen. — Die Aggregatregel	271
§ 76. Schmelzen und Erstarren	272
§ 77. Verdunsten und Verdampfen; Sieden, Kondensieren. Dämpfe und Gase. — Dampfwärme. — Kritischer Punkt	273

D. Ausbreitung der Wärme.

§ 78. Ausbreitung der Wärme durch Leitung, bei Strömung und durch Strahlung	280
§ 79. Wärmeleitung	281
§ 80. Strömungen in erwärmten Flüssigkeiten und Gasen; Wärmeübertragung durch Konvektion	283

E. Wärmequellen. Mechanische Wärmetheorie.

§ 81. Überblick über die Arten der Entstehung und des Verbrauches von Wärme	284
§ 82. Das mechanische Wärmeäquivalent	286
§ 83. Die kinetische Wärmehypothese	287
§ 84. Dampfmaschinen. — Eismaschinen	290

Lehre vom Schall (Physikalische Akustik).

§ 85. Schallempfindungen und physikalische Schallerscheinungen	293
--	-----

A. Die Erregung des Schalles.

a) Abhängigkeit der Tonhöhe von der Schwingungszahl.

§ 86. Relative und absolute Schwingungszahlen	294
---	-----

b) Schwingungen einiger musikalischer Klangerreger.

§ 87. Tönende Saiten	298
§ 88. Tönende Platten und Stäbe	302
§ 89. Tönende Luftsäulen (Pfeifen)	303

c) Abhängigkeit der Klangfarbe von den Teilschwingungen.

§ 90. Klangfarbe und Teiltöne. Schwingungsform und Teilschwingungen	307
---	-----

B. Ausbreitung des Schalles.

§ 91. Die Wellentheorie des Schalles	309
§ 92. Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles	311
§ 93. Reflexion und Brechung, Beugung und Interferenz des Schalles	314
§ 94. Mittönen und Resonanz. Absorption und Intensität des Schalles	317

C. Die Wahrnehmung des Schalles.

§ 95. Aus der Anatomie des Gehörorganes	318
§ 96. Aus der Physiologie des Gehörorganes	320

Lehre vom Licht (Physikalische Optik).

§ 97. Lichtempfindungen und physikalische Lichterscheinungen	321
--	-----

A. Geometrische Optik.

	Seite
98. Lichtstrahl	323

I. Geradlinige Ausbreitung des Lichtes.

99. Schatten und Dunkelkammer	325
100. Optische Bilder	326

II. Reflexion des Lichtes.

101. Reflexionsgesetz	328
102. Ebene Spiegel (Planspiegel)	329
103. Kugelspiegel (Sphärische Spiegel)	331

III. Brechung des Lichtes.

104. Das Brechungsgesetz	335
105. Bilder, erzeugt durch Brechung an einer ebenen Fläche	337
106. Optische Prismen und Platten	338
107. Sphärische Linsen	340
108. Bau und physikalische Leistung des Auges	346
109. Akkommodation	349
110. Sehwinkel. Gemeinschaftlicher Zweck der Mikroskope und Fernrohre	350
111. Mikroskope	351
112. Fernrohre	352
113. Vergrößerung, Schärfe, Lichtstärke und Gesichtsfeld von Mikroskopen und Fernrohren	354

B. Leuchtende, wärmende, chemische und andere Strahlen.

114. Physikalisch einfache und zusammengesetzte Strahlung. — Farbenstrahlen	357
115. Einteilungen der Spektren. — Spektralanalyse	362
116. Dispersion. Achromasie. — Absorption. Körperfarben. Diffusion	366
117. Messung der Leuchtkraft und Beleuchtungsstärke	370
118. Unsichtbare Strahlen (Vorbeurteile)	374
119. Wärmestrahlung	375
120. Chemische Strahlung. Photographie	378
121. Fluoreszenz, Phosphoreszenz. — Lumineszenz, Kaloreszenz. — Ätherstrahlung	379

C. Erklärung der einfachsten Lichterscheinungen aus der Wellenlehre.

122. Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes	381
123. Emissions- und Undulationstheorie des Lichtes	382
124. Beugung des Lichtes. — Wellenlängen und Schwingungszahlen der physikalisch einfachen Lichtstrahlen	385
125. Erklärung der Emission und Absorption, Phosphoreszenz und Fluoreszenz aus der Wellenlehre	389

D. Einige weitere Erscheinungen der Interferenz. Polarisation, Doppelbrechung des Lichtes.

126. Interferenzspiegel und -Prisma	391
127. Farben dünner Plättchen	392
128. Polarisirtes und unpolarisirtes Licht	394
129. Doppelbrechung	398

Elektrische und magnetische Erscheinungen.**Einleitung: Geschichtliches; Grunderscheinungen und vorläufige
Hilfsvorstellungen.**

§ 130.	Elektrische und magnetische Körper. — Gut- und Schlechtleiter. Positive und negative Ladungen	401
§ 131.	Elektroskope und Elektrometer	407
§ 132.	Elektrisierung durch Verteilung	411
§ 133.	Sitz der Ladung und ihre Ausbreitung an der Oberfläche von Leitern	414
§ 134.	Leidener Flasche; Kondensatoren. — Elektrophor; Influenzmaschine	416

**I. Mechanische Erscheinungen an elektrischen Körpern und an
elektrischen Ladungen.**

§ 135.	Coulombs Gesetz für elektrische Kräfte. — Maß der elektrischen Ladungsmenge	421
§ 136.	Arbeit und Potential im elektrischen Felde. — Das Potential als Maß des elektrischen Ladungsgrades	425
§ 137.	Potential und elektrostatische Grundbedingung	429
§ 138.	Potential und Elektrisierung durch Verteilung	433
§ 139.	Potential und Kapazität. — Elektrische Kondensatoren	435
§ 140.	Potential und elektrischer Strom	436
§ 141.	Anziehung und Abstoßung zwischen stromdurchflossenen Leitern. — Übergang von den elektrischen zu den magnetischen Erscheinungen	443

II. Mechanische Erscheinungen an magnetischen Körpern.

§ 142.	Magnetpole. Vorläufiges über das magnetische Kraftfeld der Erde	445
§ 143.	Coulombs Gesetz für magnetische Kräfte. Maß der magnetischen Menge (Polstärke)	447
§ 144.	Potential und Kraftlinien im magnetischen Felde	449
§ 145.	Magnetisieren durch Verteilung. Arbeitsleistungen beim Magnetisieren und Entmagnetisieren. Paramagnetische und diamagnetische Stoffe	451
§ 146.	Das magnetische Kraftfeld der Erde (Erdmagnetismus). — Absolute Maße für irdische Magnete	455

**III. Mechanische Kräfte zwischen Strömen und Magneten.
Magneto- und Elektro-Induktion.**

§ 147.	Bewegung und Erregung von Magneten durch Ströme. — Übersicht der Wechselwirkungen zwischen Magneten und Strömen. — Äqui- valenz von Magnetstäben und Kreisströmen	466
§ 148.	Kraftgesetze für Pole und Stromelemente. — Elektromagnetisches Maß der Stromstärke	471
§ 149.	Ohms Gesetz. Messung von Widerständen und von elektromotorischen Kräften	475
§ 150.	Magneto- und Elektro-Induktion	488
§ 151.	Einige Maßbestimmungen für Induktionsströme. Wechselströme, Mehrphasenströme	489

IV. Beziehungen der elektrischen zu den thermischen, chemischen und optischen Erscheinungen.

A. Stromarbeit und Wärme.

	Seite
§ 152. Umsetzung von Stromenergie in Wärme. Kalorisches Maß der Stromstärke	493
§ 153. Umsetzung von Wärme in Stromenergie. Peltiers und Thomsons Phänomene	495

B. Stromarbeit und chemische Arbeit.

§ 154. Aufwand von Stromenergie bei der Elektrolyse. Chemisches Maß der Stromstärke	499
§ 155. Umsetzung chemischer Energie in Stromenergie und Wärme. — Galvanische Elemente und Batterien	505

C. Elektrizität und Licht.

§ 156. Lichterscheinungen bei Entladung durch Gut- und Schlechtleiter. — Disruptive Entladungen. — Kaltes Licht	512
§ 157. Elektrische Wellen und Lichtwellen. — Die Hypothesen von Maxwell und die Versuche von Hertz	515
§ 158. Kathodenstrahlen, Röntgenstrahlen, Becquerelstrahlen u. s. f.	521

Anhang:

§ 159. Elektrische Vorgänge im lebenden tierischen Körper	523
---	-----

V. Aus der Elektrotechnik.

A. Anwendungen der elektromagnetischen und Induktionswirkungen.

I. Telegraphie, Telephonie, Signalwesen		525
§ 160. Einige Arten von Telegraphen		526
§ 161. Telephon und Mikrophon		531
II. Generatoren und Motoren		534
§ 162. Generatoren für Gleichstrom (Dynamomaschinen)		534
§ 163. Elektromotoren für Gleichstrom. — Prinzip der elektrischen Kraftübertragung. Elektrische Eisenbahnen		541
§ 164. Generatoren für Wechselstrom		544
§ 165. Wechselstrommotoren: Einphasenmotoren und Drehstrommotoren . .		547
§ 166. Transformatoren und Umformer		550

B. Anwendungen der thermischen Wirkungen.

§ 167. Glühlampen	552
§ 168. Bogenlampen	554

C. Anwendungen der elektrochemischen Wirkungen.

§ 169. Galvanostegie und Galvanoplastik	556
§ 170. Akkumulatoren (Sekundärbatterie, Stromsammelr)	557

D. Leitungen. — Meß- und andere Nebenapparate.

§ 171. Leitungen. — Schutzvorrichtungen	558
§ 172. Meßinstrumente	561
§ 173. Elektrische und elektrotechnische Nebenapparate	564

Vierter Teil.

Astronomische, meteorologische, chemische Erscheinungen
Aus der Astronomie.

§ 174. Geschichtlicher Überblick (Rück- und Vorblick)	569
A. Beschreibung der Bewegungen von Fixsternen, Sonne und Erde in bezug aufeinander.	
§ 175. Die drei Himmels-Koordinatensysteme. — System des Horizontes . .	573
§ 176. System des Äquators. — Die tägliche Drehung des Fixsternhimmels, bezw. der Erde	575
§ 177. System der Ekliptik. — Der jährliche Umlauf der Sonne, bezw. der Erde	580
§ 178. Gestalt und Größe der Erde	583
§ 179. Das Gradnetz der Erdkugel	586
§ 180. Rückschreiten der Tag- und Nachtgleichenpunkte; Vorschreiten der Tag- und Nachtgleichen (Präzession)	586
§ 181. Zeitrechnung. Siderisches und tropisches Jahr. Zeitgleichung. Ortzeit, Zonenzeit, Weltzeit; Datumgrenze	587
§ 182. Messungen kosmischer Distanzen	590
B. Beschreibung der Bewegungen von Planeten und Monden.	
§ 183. Planeten	593
§ 184. Monde	596
§ 185. Kometen, Sternschnuppen, Meteoriten	601
C. Aus der physischen Astronomie.	
§ 186. Körperlichkeit der Gestirne. — Geschwindigkeit des Sternenlichtes .	603
§ 187. Physikalische Eigenschaften der Planeten, Monde und Kometen . .	606
§ 188. Physikalische Eigenschaften der Fixsterne und Nebel	606

Aus der Meteorologie.

§ 189. Meteorologie. Wetterkunde und Klimatologie. — Meteorologische Elemente	611
A. Aëromechanische Zustände und Vorgänge im Luftmeere an und über der Erdoberfläche.	
§ 190. Aërostatische Verteilung des Luftdruckes zu je einem Zeitpunkte . .	613
§ 191. Strömungen und Wirbelbewegungen im Luftmeer	616
B. Wärmeerscheinungen in der Atmosphäre. — Die Niederschläge im weitesten Sinne (Hydrometeore).	
§ 192. Die Lufttemperatur	623
§ 193. Absolute und relative Feuchtigkeit. Hygrometer	626
§ 194. Nebel, Wolken, Regen, Schnee, Hagel, Tau, Reif	627
§ 195. Erklärung einiger Luftströmungs- und Niederschlagserscheinungen aus der mechanischen Wärmetheorie	631
§ 196. Einstrahlung seitens der Sonne. Absorption und diffuse Reflexion in der Luft und im Erdboden. Die Sonnenwärme als bewegende Kraft in der Atmosphäre	634

C. Aus der meteorologischen Optik.

	Seite
7. Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung. Luftspiegelungen	641
8. Helligkeit und Farbe des Himmels, Morgen- und Abendrot, Dämmerung	642
9. Höfe und Ringe um Mond und Sonne. Regenbogen	643

D. Elektrische Erscheinungen der Atmosphäre.

0. Elektrische Potentiale der Erde und ihrer Atmosphäre	650
1. Gewitter, Blitzableiter. — Polarlichter	651
2. Zusammenfassung. — Wetterprognose	653

Aus der Chemie.

A. Vorversuche und Vorbegriffe.

3. Gruppe I: Eisen, Kupfer, Schwefel. — Chemische Verbindung (Synthese)	656
4. Gruppe II: Wasser, Wasserstoff, Sauerstoff. — Chemische Zerlegung (Zersetzung, Analyse)	657
5. Gruppe III: Natrium und Ätznatron. — Chemische Ersetzung (Austausch, Substitution). — Basen	658
6. Gruppe IV: Schweflige Säure und Schwefelsäure. — Säuren	659
7. Gruppe V: Eisenvitriol, Kupfervitriol. — Salze	659

B. Chemische Hypothesen und Theorien.

8. Grundstoffe, einfache Stoffe, chemische Elemente	661
9. Die Atomhypothese	662
0. Wertigkeit (Valenz) und Verwandtschaft (Affinität)	668
1. Chemische Namen, Formeln und Gleichungen	669
2. Beziehungen zwischen Physik und Chemie	674

C. Einige Grundstoffe und deren Verbindungen.

3. a) Einige Metalle	675
4. b) Einige Nichtmetalle. Sauerstoff (Oxygenium, O = 16, Wertigkeit = II)	677
5. Wasserstoff (Hydrogenium, H = 1, Wertigkeit = I)	680
6. Chlor (Cl = 35,5, Wertigkeit = I). — Die Halogene	681
7. Säuren und Salze. — Basen	682
8. Schwefel (Sulfur, S = 32, Wertigkeit = II)	683
9. Phosphor (P = 31, Wertigkeit = III oder V)	685
0. Stickstoff (Nitrogenium, N = 14, Wertigkeit = III)	685
1. Kohlenstoff (Carbonium, C = 12, Wertigkeit = IV)	687
2. Aus der Chemie der Kohlenstoffverbindungen	689
3. Gärungen	691
4. Wärmeentwicklung und Wärmeverbrauch bei chemischen Vorgängen	692
5. Chemische Vorgänge bei Atmung und Ernährung	693

Anhang.

A. Zusätze aus der angewandten Mathematik.

1. Maße und Messen	705
2. Messung von Winkeln	706
3. Messung von Raumstrecken	707
4. Messung von Zeitstrecken	707
5. Messung von Massen	707
6. Geometrische (und arithmetische) Dimensionen	707
7. Physikalische Dimensionen	707
8. Vektoren. Vektorgrößen und Skalengrößen	707
9. Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel	707
10. Arithmetische und geometrische Reihen. Interpolation und Extrapolation	707
11. Koordinatensysteme und Koordinaten. Graphische Darstellungen	707
12. Begriff der mathematischen Funktion	707
13. Ausdrücke von der Form $\frac{y'-y}{x'-x}$ für $x'=x$ (Differentialquotienten)	707
14. Maxima und Minima der Funktionen	707
15. Summen von unendlich vielen unendlich kleinen, nach einem bestimmten Gesetze sich ändernden Größen (Integrale).	707
16. Die Funktion $y = x^m$	707
17. Die Funktionen $y = a^x$ und $z = \log x$	707
18. Die goniometrischen Funktionen	707
19. Näheres über die Funktionen $y = \sin x$ und $z = \cos x$	707
20. Darstellung einer gegebenen Kurve durch Superposition von Sinuskurven (Fouriers Satz)	707
21. Annähernde Größenbestimmungen in der Physik	707
22. Axial-symmetrische und zentral-symmetrische Gebilde	707
23. Parabel, Ellipse, Hyperbel. — Kegelschnitte	707
24. Zykloiden	707
25. Schraubenlinien	707
26. Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt	707
27. Einhüllende Linien und Flächen	707
28. Trajektorien	707
29. Übersichtstafel einiger physikalischer Größen und Zeichen	707

B. Zusätze aus der Logik und Psychologie.

30. Physische und psychische Erscheinungen	714
a) Aus der Logik (und Erkenntnistheorie).	
31. Methode der Physik: Die einer Erfahrungs- (empirischen) Wissenschaft	714
α) Aus der induktiven Logik.	
32. Die beiden Hauptaufgaben der Forschung: Beschreiben und Erklären	716
33. Beobachtung. Experiment	717
34. Begriff eines wissenschaftlichen Gesetzes	719
35. Die Begriffe Ursache, Kraft und Energie. — Kausalgesetze	723
36. Hypothese; Exklusion, Verifikation. — Indirekte induktive Methode. — Wissenschaftliche Fiktion	726
37. Begriff einer wissenschaftlichen Theorie. — Prinzipien. Definitionen	730

β) Aus der deduktiven Logik.

	Seite
ge Begriffe und Kunstausrücke aus der logischen Elementarlehre .	795
b) Aus der Psychologie (und Physiologie).	
allgemeinen Aufgaben der physikalischen, der physiologischen und	
er psychologischen Empfindungslehre	798
ndlichkeit. — Die Messung des Psychischen	800
Vorstellungselemente der Mechanik: Raum, Zeit, Spannung	802
der psychologischen und physiologischen Wärmelehre	804
der psychologischen und physiologischen Akustik	805
der psychologischen und physiologischen Optik	807
logien zwischen physikalischen und psychischen Erscheinungen.	
renzen zwischen Physik und Philosophie	815

Leitauaufgaben.

leichförmige und beschleunigte Bewegungen	817
urfbewegungen	820
reisende und schwingende Bewegungen	825
räfte und Massen	834
rdische und allgemeine Gravitation	837
echanische Arbeit und Energie	845
ur Mechanik starrer Systeme	852
echanische Maschinen	859
assenmomente (Trägheitsmomente)	864
hysisches Pendel. Drehschwingungen im allgemeinen	869
arbeit und Energie bei Rotationen	873
ogenannte ablenkende Kraft der Erdrotation	874
ydromechanik	875
eromechanik	880
echanik der sogenannten Molekularwirkungen	883
chwingungen und Wellenbewegungen	887
Wärmelehre.	892
hall	902
icht	905
lektrische Maßgrößen.	913
agnetische Maßgrößen	918
lektromagnetismus und Induktion	919
beziehungen der elektrischen zu den kalorischen, chemischen und	
optischen Erscheinungen	927
ur Elektrotechnik	931
ur Astronomie	939
ur Meteorologie	946
r	955

Einleitung.

I. Naturerscheinungen.

Leuchten, Tönen, ein Blitz, ein Knall, die Bewegungen einer Maschine, das Wachsen und Welken einer Pflanze, das Zucken eines Muskels, die Leistungen unserer Sprechwerkzeuge . . sind **physische Erscheinungen** oder **Naturerscheinungen** im engeren Sinne.

Zu den Naturerscheinungen im weiteren Sinne gehören auch die Erscheinungen der psychischen Natur, kürzer: die **psychischen Erscheinungen**; über sie vergl. Anhang Nr. 30.

Anh. 30.

Im besonderen heißen die oben angeführten Vorgänge an einer Pflanze, im Muskel und überhaupt alle physischen Erscheinungen, welche lebenden Körpern eigentümlich sind, **physiologische Erscheinungen**. Dagegen erfolgt z. B. die Fallbewegung eines lebendigen Körpers (der Sturz eines Menschen in einen Abgrund...) nach den nämlichen Gesetzen, wie die Fallbewegung eines leblosen Körpers (eines Steines, Regentropfens...).

Die den lebendigen und leblosen Körpern gemeinschaftlichen Erscheinungen heißen **physikalische** (im weitesten Sinne).

Besondere Gruppen physischer Erscheinungen, und als solche den im engeren Sinne physikalischen beigeordnet, sind die chemischen, die astronomischen, meteorologischen u. s. f.

II. Naturlehre.

Schon die alltägliche (kunstlose, vorwissenschaftliche) Erfahrung macht uns mit vielen physikalischen (astronomischen, physiologischen...) Erscheinungen bekannt. Werden diese Erfahrungen zu einer möglichst vollständigen Beschreibung der Einzelercheinungen weitergebildet und wird auf Grund einer solchen Beschreibung die Erklärung aller dieser Erscheinungen nach festen Methoden gesucht, so bildet der jeweilige Inbegriff solcher Erkenntnisse die **Naturwissenschaft**. Ihre einzelnen Disziplinen werden je nach der Besonderheit der von ihnen erforschten Erscheinungskreise als Physik, Chemie, Astronomie, Physiologie, Zoologie, Botanik, Mineralogie... bezeichnet. — Man faßt die vorwiegend beschreibenden Disziplinen

Zoologie, Mineralogie, Botanik (ferner Geognosie...) unter dem Namen **Naturgeschichte**, die auch erklärenden, namentlich Physik und Chemie (ferner Geologie...), unter dem Namen **Naturlehre** zusammengefasst.

Die physikalische Betrachtung der Naturerscheinungen unterscheidet sich von der aufserwissenschaftlichen namentlich durch sorgfältige Beachtung quantitativen Merkmale der Erscheinungen. Deshalb ist eine der unentbehrlichsten Hilfswissenschaften der Physik die Mathematik. — Einige Haupttheile des auf Physik angewandten Mathematik vergl. Anhang Nr. 1 — 29¹⁾.

Durch den Fortgang der physikalischen Forschung selbst hat sich als die natürlichste Abgrenzung und Reihenfolge einzelner Gruppen physikalischer Erscheinungen die folgende ergeben:

- I. **Mechanische** Erscheinungen,
- II. **Wärme-, Schall- und Licht-Erscheinungen**,
- III. **Elektrische und magnetische** Erscheinungen.

Diesen drei Teilen der Physik (im engeren Sinne, umfassend Mechanik, Thermik, Akustik, Optik, Elektrik, Magnetismus) werden in diesem Buche angeschlossen grundlegende Lehren aus

IV. **Astronomie, Meteorologie, Chemie.**

Über die Methode der Naturwissenschaft überhaupt, der Physik besonders, vergl. Anhang, namentlich Nr. 31 ff.

¹⁾ Die beigesetzten Zeichen **Anh.** und **LA** beziehen sich auf

- a) den Anhang „Zusätze aus der angewandten Mathematik, der Logik und Psychologie“,
- b) die Leitaufgaben am Ende des Buches.

Erster Teil:

Mechanik.

§ 1. Gegenstand und Aufgabe der Mechanik.

Gegenstand der Mechanik sind die **Bewegungen** (nebst den **mechanischen Spannungen**) §§ 14, 17).

Als sich bewegend bezeichnen wir bekanntlich einen Körper (aber auch 3. einen körperlosen Licht- oder Schattenfleck), der seinen Ort im Raume binnen bestimmter Zeiten verändert. — Mechanische Spannungen finden z. B. in den Muskeln eines Pferdes und in den Strängen statt, wenn es einen Wagen in Bewegung setzt, desgleichen in der Brücke, über die der Wagen fährt. . .

Die Aufgabe, welche der Mechanik angesichts der Bewegungs- und Spannungs-)Erscheinungen erwächst, ist, diese Erscheinungen auf die einfachste und vollständigste Weise zu beschreiben und sie auf Grund solcher Beschreibung (durch Rücksichtnahme auf die Beziehungen zu den umgebenden Körpern) zu erklären (Anh. Nr. 32). Anh. 32.

Für die Einteilung der Mechanik bieten sich als besonders zweckmäßig zwei Einteilungsgründe dar:

Erstens die Unterscheidung der **Phoronomie**, welche bloß die Beschreibung der Bewegungen zum Gegenstande hat, und der **Dynamik**, welche die Bewegungs- und Spannungszustände durch die Wirkung von „mechanischen Kräften“ und „mechanischen Energien“ erklärt (§ 14 ff.).

Über die Einteilung dynamischer Vorgänge und Zustände in **kinetische** und **statische** vergl. § 14, § 17 ff.

Der zweite Einteilungsgrund für die Gliederung der Mechanik ist gegeben in dem Unterschiede fester, flüssiger und gasförmiger Körper (**Geo-, Hydro-, Aeromechanik**); da aber an jedem Körper eine Vielheit von Punkten sich unterscheiden läßt, deren jeder im Allgemeinen verschiedene Bewegungen zeigen kann, so empfiehlt es sich, mit einer **Mechanik des Punktes** zu beginnen.

Dabei wird zunächst der bewegte „Punkt“ (das Bewegliche, der materielle Punkt, Massenpunkt) wie ein mathematischer Punkt ohne jede Ausdehnung gedacht. Aber auch die Bewegungen von Körpern, welche keineswegs „sehr klein“ (Molekeln, Atome) zu sein brauchen, werden in der Mechanik des Punktes abgehandelt, insoweit wir von den Verschiedenheiten der Bewegungen, die den einzelnen Punkten des Körpers zukommen, „in erster Annäherung“ absehen.

Anh. 36. (Anhang Nr. 36). Wenn wir z. B. sagen, daß sich Jupiter in einer Ellipse bewegt, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht, so kann das nur von einem Punkte des Jupiterkörpers und des Sonnenkörpers wirklich gelten. Aber selbst die Dimensionen des riesigen Jupiterkörpers sind so klein im Vergleich zu den Dimensionen der Bahnen, die irgendwelche Punkte jenes Körpers beschreiben, daß jene Beschreibung in erster Annäherung auf alle Punkte des Jupiter paßt. Die Annäherung wird besser, wenn wir als Repräsentanten aller dieser Punkte, d. h. des ganzen Körpers, den „Massenmittelpunkt“ (Schwerpunkt, § 28) des Jupiter wählen; bei Berücksichtigung der „Störungen“ (§ 21), welche Jupiter seitens der übrigen Planeten erfährt, gelangen wir zu noch genaueren Beschreibungen u. s. f. — Dagegen müssen wir über die Mechanik des Punktes jedenfalls hinausgehen, sobald wir auch auf die Rotation des Jupiter um seine Achse, auf die Bewegung der wolkenartigen Gebilde an seiner Oberfläche u. s. f. Rücksicht nehmen wollen (— desgleichen auch schon bei der Rotation eines einzelnen Atoms).

Nach der Mechanik des Punktes (I. Kap.) folgt eine Mechanik der starren Systeme (II. Kap.), der vollkommenen Flüssigkeiten (III. Kap.), der vollkommenen Gase (IV. Kap.), und erst nach Untersuchung dieser künstlich vereinfachten Gebilde kann die Mechanik der wirklichen festen, flüssigen und gasförmigen Körper im Zusammenhange mit der Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen (V. Kap.) behandelt werden. Eine zusammenhängende Mechanik der Schwingungen und Wellenbewegungen (VI. Kap.) bildet den Abschluß der Mechanik und zugleich eine Hauptgrundlage für alle späteren Abschnitte der Physik, namentlich der Lehren vom Schall und vom Licht.

I. Mechanik des Punktes.

A. Beschreibung einiger Hauptarten von Bewegungen. (Phoronomie des Punktes.)

§ 2. Bewegung im freien Falle, an der schiefen Ebene und an der wagrechten Ebene.

Geschichtliches. In vorgeschichtliche Zeiten reichen die Erfahrungen zurück, daß Körper Gewicht haben, und daß sie fallen; ferner daß ein fallendes Baumblatt hin und her flattert, ein losgelassener Stein in einer lotrechten Geraden abwärts fällt. Der Stein zeigt dabei eine „beschleunigte“ Bewegung (aus je größerer Höhe er gefallen ist, um so stärker trifft uns sein Stofs); bei fallenden Regentropfen kann die Beschleunigung des Sinkens unmerklich, d. h. das

sinken annähernd gleichförmig werden; noch kleinere Tröpfchen (bei „Nebelreissen“) schweben annähernd ruhig in der Luft; Rauch steigt empor.

Im Hinblick auf solche alltäglichen Erfahrungen glaubten die griechischen Naturphilosophen, „schwere“ und „leichte“ Körper unterscheiden zu sollen, je nachdem sie „von Natur“ ein Bestreben haben, möglichst tiefe, bezw. hohe Stellen unter, an und über der Erdoberfläche aufzusuchen. (Heute erklären wir die Erscheinungen des Aufsteigens „leichter“ Körper aus dem „Auftrieb der Körper in der Luft“, § 46, und nennen alle Körper „schwer“.) ARISTOTELES (384 bis 322 v. Chr.) lehrte, daß ein zehnmal so großer Körper zehnmal so schnell falle (im nämlichen Mittel, z. B. Luft).

GALILEI (1564 bis 1642) zeigte gegenüber diesen Lehren zunächst durch Schlüsse aus „Gedankenexperimenten“ (indem er Steine einzeln und zusammen lassend dachte), daß vielmehr „alle Körper gleich schnell fallen“. [Dies hatte schon früher auch BENEDETTI gelehrt. Heute sagen wir: Die Fallzeit ist vom Gewicht und von der stofflichen Beschaffenheit unabhängig und nur von der Fallstrecke (Fallhöhe) abhängig.] Nach späteren Erzählungen soll bei allerversuchen am schiefen Turm zu Pisa z. B. eine Kanonenkugel von 100 Pfund und eine Kugel von $\frac{1}{2}$ Pfund nach einer Fallhöhe von 200 Fuß „kaum eine Hand breit“ voraus gewesen sein. Solche kleinen Abweichungen, sowie das beträchtliche rückbleiben „leichter“ Körper erklärte GALILEI aus dem Unterschiede des Luftwiderstandes. [Versuch mit dem auf einer Münze liegenden und mit ihr fallenden Pierblättchen. Nach Erfindung der Luftpumpe (um 1650) wurden jene Galileischen Grundlehren mittels der Newtonschen „Fallröhre“ noch direkter bestätigt (Versuch!).]

GALILEI legte sich überdies die Frage vor, nach welchem mathematischen Gesetze die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers zunehme.

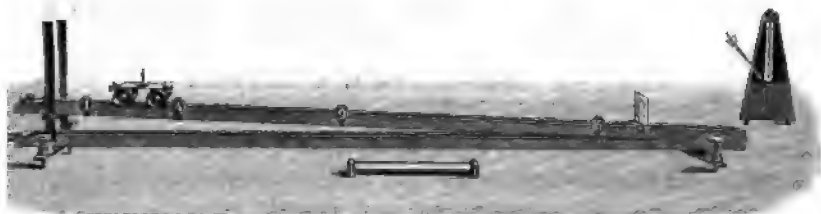


Fig 1. Schienenapparat als schiefe Ebene. — Libelle. — Metronom.

vermutete zuerst fälschlich, daß die Geschwindigkeit proportional dem zurückgelegten Wege, und dann richtig, daß sie proportional der verfloßenen Zeit sei (1604). Um diese, zunächst die veränderliche Geschwindigkeit betreffende Vermutung mittelbar zu prüfen, stellte er Versuche über die während verschiedener Fallzeiten durchlaufenen Wege an. Er ließ Kugeln längs einer glatten Rinne („allrinne“), die wenig gegen den Horizont geneigt war, hinabrollen, maß die während der Bewegung verstreichenen Zeiten (mittels einer Art Wasseruhr) und die vom Ausgangspunkt an zurückgelegten Wege. Indem er hierbei die für die Bewegung an der schiefen Ebene gefundenen Gesetze als eine Bestätigung seiner Vermutung über den freien Fall ansah, benutzte er den Gedanken (über seine nachträgliche Rechtfertigung vergl. § 6), daß die Bewegung im freien Falle und an der schiefen Ebene einander mechanisch ähnlich seien und sich nur in einer konstanten Weise, z. B. der Fallstrecke der ersten Sekunde, voneinander unterscheiden. —

Diesen grundlegenden Versuchen mit der Fallrinne entsprechen die folgenden:

I. *Versuche 1 a).* Ein Wägelchen rollt über eine Schienenbahn [Fig. 1 (a. v. S.); in Ermangelung: eine Kugel über ein geneigtes Brett] herab, während ein Metronom Sekunden schlägt. Wir erteilen der Bahn zunächst durch Ausprobieren z. B. eine solche Neigung, daß der Wagen in 4 sec eine Strecke von 80 cm zurücklegt. Er durchmisst dann binnen

der Fallzeiten von	1	2	3	4	5	. . .	sec
die Fallstrecken von	5	20	45	80	125	. . .	cm.

Setzen wir hierin statt der besonderen Zahlen der ersten Reihe allgemein t sec, so lassen sich die besonderen Zahlen der zweiten Reihe allgemein durch $5 \text{ cm} \cdot t^2$ darstellen; und wir erhalten (durch „logische Induktion“, Anh. Nr. 31, 32, 34) als die gesuchte mathematische Beziehung zwischen den Fallstrecken und Fallzeiten

$$s = 5 t^2,$$

worin wir allgemein mit s die Maßzahl der Fallstrecke (kurz: des „Weges“ s , *spatium*) in Centimetern bezeichnen, die während der ganzen Fallzeit von t Sekunden (kurz: während der „Zeit“ t , *tempus*) zurückgelegt worden ist.

Jene Gleichung $s = 5 t^2$ erlaubt noch eine zweite Verallgemeinerung auf Grund folgender Überlegungen und Versuche: Hätten wir die Schienen mehr oder weniger steil eingestellt, so hätten wir nach allbekannten Erfahrungen über das Rollen oder Gleiten von Körpern über schiefe Ebenen erwarten dürfen, daß s 1, 2 . . . t sec mehr, bzw. weniger als 5, 20 . . . $5 t^2$ cm zurückgelegt werden. Wir bestätigen jene Erfahrungen und Erwartungen durch folgende

Versuche 1 b). Erteilen wir der Bahn durch Ausprobieren solche Neigungen, daß die „Fallstrecke der ersten Sekunde“ (der „Anfangsweg“) statt 5 cm andere Strecken, z. B. 10 cm, 1 cm, allgemein a cm, beträgt, so treten an Stelle der Zahlenreihe 5, 20, 45, 80 . . . cm nunmehr: 10, 40, 90, 160 . . . cm, bzw. 1, 4, 9, 16 . . . cm; ebenso tritt an Stelle der Gleichung $s = 5 t^2$ die allgemeinere Beziehung zwischen Fallstrecke s cm, Anfangsweg a cm und Fallzeit t sec:

$$s = a t^2 \quad (\text{Gesetz 1});$$

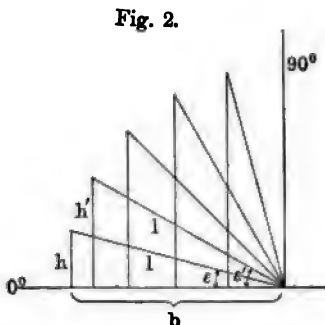
in Worten: Die von einem Körper beim Fallen längs der schiefen Ebene zurückgelegten ganzen Fallstrecken wachsen wie die Quadrate der ganzen Fallzeiten.

II. Den jeweiligen Grad der Steilheit der schiefen Ebene können wir messen entweder durch die Neigungswinkel ε , ε' . . . (Fig. 2) oder aber durch das Verhältnis der „Höhe“ h , h' . . . zur jeweiligen „Länge“ l der schiefen Ebene $\frac{h}{l} = \sin \varepsilon$, welches als „Neigung“ („Steigung“) der Ebene bezeichnet wird.

So gibt man auch bei Eisenbahnen das Verhältnis der vertikalen Erhebung zur durchlaufenen Bahnstrecke an. — Ein anderes

Maß wäre $\frac{h}{b} = \operatorname{tg} s$, wo b die „Basis“ der schiefen Ebene ist; wir nennen dieses Verhältnis insbesondere das Gefälle der schiefen Ebene; vergl. § 24 über das Gefälle von Bergabhängen ¹⁾.

Die untere Grenze aller schiefen Ebenen ist die wagrechte Ebene, für welche $s = 0$ und $h = 0$, also $\sin s = 0$ ($\operatorname{tg} s = 0$) ist; die obere Grenze ist die lotrechte Ebene, für welche $s = 90^\circ$ und $h = l$, also $\sin s = 1$ ($\operatorname{tg} s = \infty$) ist.



Welche Größe für s , bzw. $\sin s$ beim bisherigen Ausprobieren gewählt werden mußte, damit ein bestimmter Anfangsweg a (allgemeiner ein bestimmtes s bei bestimmtem t) erzielt werde, hängt sehr von der Größe der Reibung an den Achsen des Wagens und an den Schienen ab (in viel geringerem Maße vom Widerstande der Luft. Sehr wesentlich ist es aber auch, ob ein größerer oder kleinerer Teil des sich bewegendes Körpers nicht bloß fortschreitende, sondern auch drehende Bewegungen macht; so legen namentlich rollende Kugeln, noch auffälliger Reifen, binnen gleicher Zeiten viel kleinere Wege zurück, als die ohne Reibung gleitend gedachten Körper, LA 93, wie auch GALILEI'S rollende Kugeln hinter dem rollenden Wagen zurückgeblieben wären. Im folgenden wird von den Drehungen der Räder des Wägelchens abgesehen). — Wird eine sehr starke Neigung (sehr steile Bahn), d. h. h beinahe so groß wie l gewählt, so sind die Versuche nicht mehr wohl ausführbar, da dann die Bewegung zu rasch verläuft; sie geht für $s = 90^\circ$, also $\sin s = 1$ und $h = l$ in den freien Fall über. — Suchen wir aber zunächst nur die allgemeine Erfahrung, daß dem größeren Winkel s auch der größere Anfangsweg a , und dem freien Falle der größte solche Wert $a_{90} = a$ entspricht, wieder schärfer zu fassen als eine mathematische Beziehung zwischen Anfangsweg und Neigung (wie GALILEI diese Aufgabe löste, vergl. § 6), so liegt am nächsten die Vermutung, daß die Anfangswege auf schiefen Ebenen sich verhalten wie deren Neigungen; also $a_s : a_{s'} = \frac{h}{l} : \frac{h'}{l'}$, oder wenn speziell $l' = l$ gewählt wird, $a_s : a_{s'} = h : h'$.

Diese Vermutung wird bestätigt, wenn wir darauf achten, wie groß die Höhe h der schiefen Ebene bei gegebener Länge gewählt werden muß, damit ein vorgeschriebener Anfangsweg, z. B. $a_s = 5$ cm, zu stande komme, und wenn wir bei gleicher Länge l das h jetzt 2, 3 . . . mal so groß als früher wählen: wir finden dann das a_s auch 2, 3 . . . mal so groß; nämlich für eine Bahn und einen Wagen von bestimmter (noch ziemlich großer) Reibung etwa durch

Versuche 2): $l = 100$ cm, $h = 2,5$ cm, also $\frac{h}{l} = \frac{1}{40}$; $a_s = 5$ cm

$l = 100$ cm, $h' = 5$ cm, also $\frac{h'}{l} = \frac{1}{20}$; $a_{s'} = 10$ cm.

Ist so durch Ausprobieren der zu einer bestimmten Neigung gehörige Anfangs-

¹⁾ Hiernach spricht man dann auch vom Druckgefälle § 49, 191, Potentialgefälle § 24, Temperaturgefälle § 79, die alle nach tg , nicht nach \sin gemessen werden.

weg gefunden, so würde sich auch der Anfangsweg für den freien Fall aus der Proportion $a_s : a = h : l$ ergeben; nämlich z. B. $5 \text{ cm} : a \text{ cm} = 1 : 40$, also $a = 200 \text{ cm}$. Da aber diese Zahl ohne Rücksicht auf die Reibung an der schiefen Ebene erschlossen ist, so muß für den freien Fall, wo es keine Reibung gibt, der Anfangsweg noch größer sein. Bezeichnen wir mit a den wahren, aber einstweilen noch nicht genau bekannten Wert der Fallstrecke in der ersten Sekunde beim freien Fall, so bilden den zusammenfassenden Ausdruck für die gesuchte Beziehung zwischen Anfangsweg und Neigung an einer schiefen Ebene für alle Werte von $\varepsilon = 0^\circ$ bis $\varepsilon = 90^\circ$ die Gleichungen:

$$a_s = a \cdot \frac{h}{l} \quad \text{oder} \quad a_s = a \cdot \sin \varepsilon \quad (\text{Gesetz 1});$$

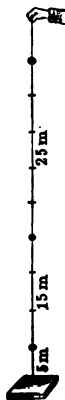
in Worten: Der von einem Körper (ohne Drehung und ohne Reibung) beim Fallen längs der schiefen Ebene zurückgelegte Anfangsweg (Fallstrecke der ersten Sekunde) ist in dem Verhältnisse der Neigung kleiner als der Anfangsweg in der 1. Sekunde beim freien Fall.

LA 1. Diskussion der Gleichungen (2) in Bezug auf h , l und ε . — LA 1.

Die für die ganze Physik wichtige GröÙe a scheint zwar leicht unmittelbar (d. h. auch ohne Berechnung des a aus a_s) bestimmbar, indem man einen Körper

Fig. 3. von so großer Höhe über dem Boden oder sonst einem festen Ziel frei fallen läßt, daß die Fallzeit genau 1 sec beträgt; oder schon minder unmittelbar auf Grund der Gleichung $s = at^2$, indem man zu irgend welchen t die zugehörigen s mißt. [GALILEI gibt „100 Ellen für 5 sec“ an — das wäre für 1 sec nur 4 Ellen \neq 8 Fuß statt der richtigen $a \neq 15\frac{1}{2}$ Fuß! ¹⁾.] Durch solche mehr oder minder unmittelbaren Versuche ist aber nur geringe Genauigkeit zu erzielen, da infolge der absehbaren sehr großen Geschwindigkeiten kleinen Unterschieden der gemessenen Zeitstrecken schon große Unterschiede in den Wegen entsprechen. Es bedarf daher entweder bei mäßig kleinen Fallstrecken besonderer Vorrichtungen zur genauen Messung sehr kleiner Zeitunterschiede (Chronoskope, vergl. Anhang Nr. 34) oder bei mäßig großen Fallsitzen sehr großer Fallstrecken; hier machen sich aber dann wieder andere Schwierigkeiten (Luftwiderstand, Abweichung infolge der Erddrehung. § 34) geltend.

Anh. 34.



An Neumanns Fallmaschine (einer Vereinfachung der Apparate von Babo, Lippich und anderen) zeichnet eine schwingende Feder, welche mit einem Block frei fällt, auf ein ruhendes Blatt „Fallkurven“, aus denen sich das Fallgesetz $s = at^2$ und annähernd auch a selbst ableiten

LA 19. läßt (LA 19). Ähnliches leisten noch einfacher Augusts Fallkugeln (Fig. 3).

Noch weniger genaue Werte als die unmittelbare Methode zur Bestimmung von a im freien Falle liefert die mittelbare Methode mittelst wirklicher schiefer Ebenen (da es reibungslose nicht gibt): Gleichwohl lassen sich die vollkommensten Versuche zur Bestimmung von a , nämlich die mit Pendeln (§ 12 und § 33) vergleichen mit dem Hin- und Herfahren des Wägelchens auf einer Folge von schiefen Ebenen, nämlich auf einem Kreisbogen, Fig. 4. — Durch solche Pendelversuche ergab sich der Wert von a für verschiedene Orte der Erdoberfläche etwas verschieden. Den für mittlere geographische Breiten geltenden Wert von $a = 4,905 \text{ m} = 490,5 \text{ cm}$ (§ 6) runden wir einstweilen ab zu folgendem Wert der Fallstrecke in der 1. sec beim freien Fall $a \neq 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$.

Anh. 21.

¹⁾ Über das Zeichen \neq für annähernde Gleichheit vergl. Anhang Nr. 21.

III. Wie der freie Fall die obere, so stellt die Bewegung auf der wag-

rechten Ebene eine untere Grenze für die Bewegungen auf der schiefen Ebene dar. — Befindet sich auf einer wagrechten Ebene ein Körper in Ruhe, so gerät er be-
merklich nicht „von selbst“ in Bewegung. Um den Körper schon mit einer bestimmten Geschwindigkeit auf die wagrechte Ebene bringen zu lassen, werde die eine Seite des Blechstreifens nach Fig. 4 gerade gestreckt, wobei der Wagen in stetigem Übergange von dem krummen auf den wagrechten geraden Streifen gelangt; aber auch die geringe Un-
gleichheit schadet nicht bei diesem

Fig. 4.

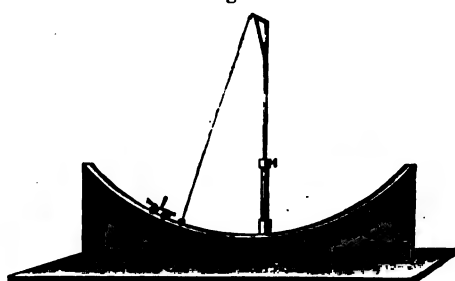
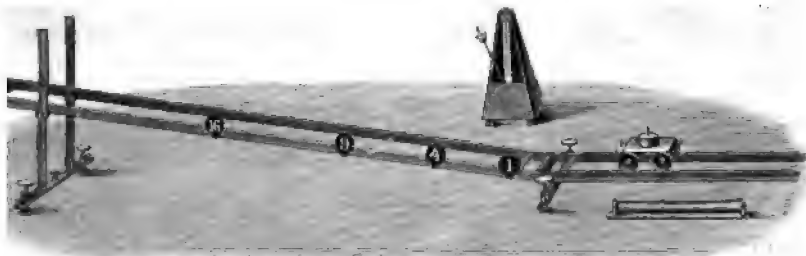


Fig. 5.



Versuch 3). An die eine Seite der Ebene darstellenden Schiene (welche bei den früheren Versuchen immer nur wenig geneigt sind) stoßen in einem rechten Knie wagrechte Schienen (Fig. 6), auf welche das Wägel-

Fig. 6.



aus kleinerer oder größerer Höhe herabrollt und in gleichen oder ungleichen Wege zurücklegt, kurz: in „gleichförmiger Bewegung“ verläuft. War dabei die Neigung der schiefen Ebene und die Fallhöhe so gewählt, daß auf der wagrechten Ebene während der ersten Sekunde a cm zurückgelegt werden, so besteht zwischen den

während 1 2 3 ... t sec

zurückgelegten Wegen von a $2a$ $3a$... ta cm die Beziehung

$$s = at^2 \quad \dots \quad \text{(Gesetz 3);}$$

gilt. Vortext: Die von einem Körper bei der Bewegung längs einer wagrechten reibungslosen Ebene zurückgelegten Wege wachsen quadratisch mit den Zeiten. — LA 1.

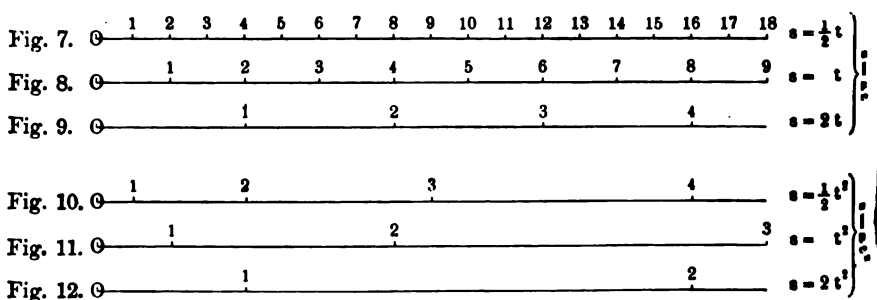
Ist bei den Versuchen 3) die Reibung beträchtlich, so legt auf der wagrechten Bahn der Wagen in jeder folgenden Sekunde einen kleineren Weg zurück als in der vorhergehenden: seine Bewegung ist nicht mehr annähernd gleichförmig, sondern merklich verzögert, und er kommt allmählich zur Ruhe. Man kann diesen Einfluß der Reibung „kompensieren“, wenn man den zweiten Teil der Schienenbahn statt wagrecht ebenfalls etwas nach abwärts geneigt einstellt.

Was wird geschehen, wenn wir den Wagen von schief abwärts geneigten Schienen auf schief aufwärts gestellte hinüberlaufen lassen? (Vergleichung mit der Bewegung des Wägelchens nach Fig. 4.) Vergleiche die Höhen des Ab- und Ansteigens bei verschiedenen Neigungen der schiefen Ebenen! —

Die in diesem Paragraphen auf einige besondere Arten wirklicher Bewegungsvorgänge angewendeten Methoden der mathematischen Beschreibung werden im folgenden ausgedehnt auch auf andere, allenfalls selbst bloß gedachte Bewegungen (Vergleichung mit der Ausmessung wirklicher und bloß „geometrischer“ Flächen und Körper!).

§ 3. Abhängigkeit des Weges von der Zeit (Weg-Zeit-Gesetz).

I. Eine ähnliche Bewegung, wie der Wagen auf der wagrechten Ebene im Versuch 3 des vorigen Paragraphen, macht auch z. B. eine Bleistiftspitze, die wir



längs der Geraden in Fig. 7, 8, 9 so bewegen, daß sie sich, während wir Sekunden zählen (sprich: 3, 2, 1, 0, 1, 2, 3, 4 . . .), zu den Zeitpunkten 0, 1, 2, 3, 4 . . . in den Bahnpunkten 0, 1, 2, 3, 4 . . . befindet. — Hierbei muß aber jede rückweise Verschiebung des Bleistiftes möglichst vermieden werden, d. h. wir erhalten nur dann eine „gleichförmige“ Bewegung, wenn nicht nur während der ganzen Sekunden z. B. an Fig. 8 je ein ganzes Centimeter zurückgelegt wird, sondern wenn auch auf jede 0,1, 0,01 . . . sec die gleichen Wege von 0,1, 0,01 . . . cm entfallen. Somit definieren wir allgemein:

Eine gleichförmige Bewegung hat ein Punkt, wenn er in (beliebig kleinen) gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt. — Alle gleichförmigen Bewegungen werden beschrieben durch Gleichungen von der Form $s = at$, wobei a die Maßzahl des während je 1 sec, s die Maßzahl des während t sec zurückgelegten Weges ist.

II. Eine ähnliche Bewegung wie der Wagen auf der schiefen Ebene in Versuch 1 des vorigen Paragraphen macht auch z. B. eine Bleistiftspitze, welche entsprechend Gleichungen von der Form $s = at^2$ längs der Geraden in Fig. 10, 11, 12 bewegt wird. Hierbei werden (nicht wie bei den gleichförmigen Bewegungen in gleichen Zeiten gleiche, sondern) **in gleichen aufeinander folgenden Zeiten immer größere Wege** zurückgelegt; solche Bewegungen heißen **beschleunigte**.

Um wieviel die Wege der aufeinander folgenden Sekunden wachsen, läßt sich aus der Gleichung $s = at^2$ berechnen. Ist nämlich z. B. $s = 1 \text{ cm} \cdot t^2$, so entfallen auf die 1. Sekunde, 2. Sekunde, 3. Sekunde . .

1 cm, 4 cm — 1 cm = 3 cm, 9 cm — 4 cm = 5 cm

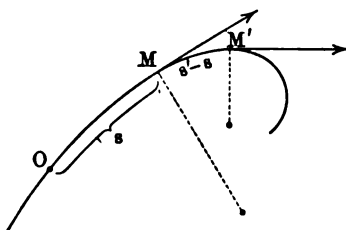
Allgemein: Für $s = at^2$ ist der Weg in der t^{ten} Sekunde $\sigma = at^2 - a(t-1)^2 = a(2t-1)$, wobei $(2t-1)$ die t^{te} ungerade Zahl darstellt (Anh. Nr. 10). — Aus diesen „Sekundenwegen“ finden wir durch nochmalige Subtraktion, um wieviel mehr Weg in jeder folgenden Sekunde zurückgelegt wird als in der vorausgehenden: nämlich z. B. speziell für $s = 1 \cdot t^2$ ist $3 - 1 = 2$, $5 - 3 = 2 \dots \text{cm}$. Allgemein: Für $s = at^2$ ist $3a - a = 2a$, $5a - 3a = 2a$, $\dots (2t-1)a - (2t-3)a = 2a \text{ cm}$. Da also bei Bewegungen, welche dem Gesetze $s = at^2$ entsprechen, die in gleichen aufeinander folgenden Zeiten zurückgelegten Wege immer um den gleichen Betrag $2a$, d. i. um das Doppelte des Weges der ersten Sekunde wachsen, und diese Maßzahl $2a$ zugleich die Maßzahl der „Beschleunigung“ einer solchen Bewegung ist (§§ 5, 6), so heißt diese besondere Art beschleunigter Bewegungen **gleichmäßig beschleunigte Bewegung** (LA 1).

LA 1.

Die Beispiele I und II sind die einfachsten Vorbilder für folgende allgemeine Methode zur mathematischen Beschreibung von Bewegungsvorgängen:

Die Bewegung eines Punktes (sei es, daß sie in der Natur wirklich vorkommt oder daß sie nur gedacht wird) ist vollständig beschrieben, wenn gegeben ist: 1. die **Bahn** (§ 8), d. h. die vom Punkte zu durchlaufende Linie (Fig. 1 und Figg. 3 bis 13); 2. ein Punkt O der Bahn als **Anfangspunkt** für die „Wege“, z. B. OM , später OM' ¹⁾; 3. ein **Anfangszeitpunkt** für die „Zeiten“; 4. eine **mathematische Beziehung zwischen der Maßzahl s des Weges und der Maßzahl t der Zeit**. Diese Beziehung nennen wir das **Weg-Zeit-Gesetz**.

Fig. 13.



Dabei setzen die Maßzahlen s und t bestimmte Maßeinheiten voraus. Im C-S-G-System (sprich: Centimeter-Sekunden-Gramm-System, Anhang Nr. 1) ist Längeneinheit (LE) das Centimeter ($= 1/100$ Meter, Anh. 1.

¹⁾ Der physikalische Gebrauch des Wortes „Weg“ weicht manchmal von dem gewöhnlichen ab. Geht z. B. ein Wanderer längs einer Straße von O über M nach M' und von da nach M zurück, so hat er nach gewöhnlicher Ausdrucksweise den Weg $OMM'M$ zurückgelegt; nach der physikalischen Ausdrucksweise ist, sobald er von M' nach M zurückgekehrt ist, auch jetzt sein „Weg“ nur die Länge des Bogens OM .

Anh. 3. Anhang Nr. 3); Zeiteinheit (ZE) ist die Sekunde mittlerer Sor
 Anh. 4. zeit ($= \frac{1}{86400}$ des mittleren Sonnentages, Anhang Nr. 4).

Jede mathematische Beziehung zwischen s und t [von der Form $s =$
 Anh. 12. Anhang Nr. 12] kann als ein Weg-Zeit-Gesetz angesehen werden. In der
 ist nur ein kleiner Teil solcher denkbaren Beziehungen mehr oder minder
 nähernd verwirklicht, z. B. $s = at^2$ (annähernd) im freien Fall und dergl., s
 bei Bewegungen auf reibungslosen wagrechten Ebenen (allgemein bei Bewegungen
 gemäß dem Trägheitsgesetz, § 15), $s = a \sin at$ bei einfachen Schwingungen
 (§ 12) u. s. f. —

Dabei haben wir in § 2 die Gesetze $s = at^2$ und $s = at$ aus Einzel-
 achtungen durch Verallgemeinerung (induktiv) gefunden. Ist umgekehrt zuer-
 Anh. 21. allgemeines Weg-Zeit-Gesetz gegeben, so können wir (deduktiv, Anh. N
 durch Einsetzen beliebig vieler spezieller Werte von t (als der unabhängig
 änderlichen Größe) die zugehörigen speziellen Werte von s (als der abhängig
 änderlichen Größe) ermitteln, wobei die „Konstanten“ (z. B. a in $s = at^2$
 $s = at^2$, ebenso a und α bei $s = a \sin at$) als gegeben zu betrachten sind. —
 den verschiedenen Werten von s lassen sich dann auch die Werte für die ein-
 Sekunden, Zehntel-, Hundertstelsekunden u. s. f. berechnen, so daß wir -
 Feststellungen 1, 2, 3 vorausgesetzt — schon durch das Weg-Zeit-Gesetz
 allein die Bewegung vollständig beschreiben könnten.

Tatsächlich fassen wir aber außer Zeit und Weg auch noch andere Eigenschaften
 der Bewegung, namentlich Geschwindigkeit und Beschleunigung, an
 einer Bewegung mehr oder weniger unmittelbar auf, deren Größen aber
 aus dem Weg-Zeit-Gesetze ebenfalls durch bloße Rechnung (rein deduktiv)
 leiten lassen.

§ 4. Geschwindigkeit.

Die Bewegung einer Schnecke nennen wir „langsam“, die eines Eilzuges „schnell“
 — Jeder Bewegung kommt eine Geschwindigkeit zu, deren Größe bemessen
 nach der Größe des Weges, der binnen bestimmter Zeit zurückgelegt wurde.

Die Einheit der Geschwindigkeit (Geschwindigkeitseinheit GE) schreiben wir einem Punkte zu, der die Einheit des Weges
 der Einheit der Zeit zurücklegt. Im C-S-G-System wird als 1 GE
 Geschwindigkeit eines Punktes gewählt, welcher 1 cm in 1 sec (1 cm per
 zurücklegt¹⁾, also z. B. die Geschwindigkeit des Punktes nach F.

Über die Abhängigkeit der Größe jeder anderen Geschwindigkeit von
 Größen des Weges und der Zeit setzen wir allgemein fest:

1. Legt ein Punkt 2, 3 ... s cm in 1 sec zurück, so ist
 Geschwindigkeit 2, 3 ... s GE.

¹⁾ Ein kurzer Name für diese GE wäre *Cel* — von *celeritas*, woher auch die Bezeichnung c , vorzugsweise für *constante* Geschwindigkeit) nach Analogie von Dyn (§ 16, § 22) u. dergl.; weniger bequem Secundencentimeter nach Analogie von Kilogramm u. dergl. — Allgemein bezeichnet man eine *variable* (oder konstante) Geschwindigkeit mit v ; das Merkwort *velocitas* ist übrigens sprachlich völlig gleichbedeutend mit *cel*.

Das in der gewöhnlichen Sprache als mit „Geschwindigkeit“ gleichbedeutend gebrauchte Wort „Schnelligkeit“ ist in der Physik nicht gebräuchlich.

2. Legt ein Punkt die s cm in 2, 3 ... t sec zurück, so ist seine Geschwindigkeit $c = \frac{s}{2}$, $c = \frac{s}{3}$... $c = \frac{s}{t}$ GE. Aus dieser Gleichung für die

konstante Geschwindigkeit $c = \frac{s}{t}$ folgt: $s = ct$, $t = \frac{s}{c}$;
 die drei Gleichungen in Worten!

Man pflegt häufig abkürzend zu sagen: 1. Geschwindigkeit ist der Weg in **r Zeiteinheit**. 2. Geschwindigkeit ist Weg **dividiert durch Zeit**. Eigentlich meint sind in diesen Fällen (und in allen ähnlichen der Geometrie und der Physik) die Beziehungen zwischen den Maßzahlen. So z. B. besagt der Satz 1: **die Maßzahl der Geschwindigkeit ist gleich der Maßzahl des in der Zeiteinheit zurückgelegten Weges**. Dabei stimmt die Gleichung $s = ct$ der Form nach überein mit der Gleichung $s = at$, welche in vorigen Paragraphen als Weg-Zeit-Gesetz für die gleichförmige Bewegung bezeichnet worden ist. Die GröÙe a war dort wirklich die Maßzahl des in der ersten und ebenso in jeder folgenden Sekunde zurückgelegten Weges; die Linien-GröÙe a ist also maßzahlengleich mit der Geschwindigkeits-GröÙe c . Die Maßeinheiten sind dagegen verschieden, und die Gleichung $c = a$ sagt nur: Die Geschwindigkeit enthält ebenso viele Geschwindigkeitseinheiten, wie der in einer Sekunde zurückgelegte Weg Längeneinheiten enthält; welches denn auch erst der vollständige Sinn des obigen abgekürzten Satzes 1 ist.

Ähnliches gilt von dem abgekürzten Satze 2; insbesondere ist es (nach welchen Sätzen über das Dividieren „benannter Zahlen?“) unmöglich, den Weg selbst durch die Zeit selbst zu dividieren. — Dies ist namentlich auch festzuhalten, wenn für die Geschwindigkeits-Einheit selbst die Dimensionsbezeichnung $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ oder cm sec^{-1} benutzt wird (ähnlich wie man die Flächeneinheit durch cm^2 , die Volumeinheit durch cm^3 symbolisiert — vergl. math. Anhang Nr. 6, 7).

Anh. 6, 7.

Für sehr große Geschwindigkeiten empfehlen sich auch andere Einheiten statt 1 cm sec^{-1} . So wird die Geschwindigkeit eines Eisenbahnzuges gemessen nach der Geschwindigkeit eines Punktes, der in je einer Stunde 1 km zurücklegt, die zu bezeichnen ist durch 1 km h^{-1} . So ist die durchschnittliche (nicht zu verwechseln mit der „mittleren“, s. u.) Geschwindigkeit eines Lastzuges 30 bis 50 km h^{-1} , die größte eines Eilzuges 90 km h^{-1} . In gleicher Weise gelten die Geschwindigkeitsgrößen einiger annähernd gleichförmiger Bewegungen nach LA 2.

LA 2.

Die bisherigen Definitionen und Gleichungen haben alle stillschweigend eine gleichförmige Bewegung vorausgesetzt. Die weitaus meisten der wirklich vorkommenden (und sonst noch denkbaren) Bewegungen sind **ungleichförmig** (Bewegung eines Eisenbahnzuges beim Ausfahren aus der Station, auf der Strecke, beim Einfahren in die nächste Station). Maßformeln der Geschwindigkeit für solche ungleichförmigen Bewegungen lassen sich, anknüpfend an die für die konstante Geschwindigkeit, gewinnen durch Einführung der Begriffe **mittlere Geschwindigkeit innerhalb einer bestimmten Zeitstrecke** und **Geschwindigkeit in einem bestimmten Zeitpunkt (augenblickliche Geschwindigkeit)**; nämlich so:

Hat ein Punkt binnen t sec längs seiner Bahn $OM = s$ cm (Fig. 13) und binnen t' sec den Weg $OM' = s'$ cm zurückgelegt, so

entfällt auf die Zeitstrecke $\tau = (t' - t)$ sec die Wegstrecke $\sigma = (s' - s)$ cm und seine Geschwindigkeit wäre, wenn überall konstant, zu messen durch $c = \frac{\sigma}{\tau} = \frac{s' - s}{t' - t}$ cm sec⁻¹. Eben diese GröÙe wählen wir aber auch für alle (ungleichförmigen oder gleichförmigen) Bewegungen des Punktes von M bis M' als Maßzahl seiner

mittleren Geschwindigkeit (für die Zeitstrecke von t bis t'):

$$v_m = \frac{s' - s}{t' - t}.$$

Mittels dieser Gleichung läßt sich eine um so genauere Beschreibung der wirklichen Bewegung des Punktes geben, für je mehr und je kleinere Zeitstrecken $(t' - t), (t'' - t')$. . . die zugehörigen Wegstrecken $(s' - s), (s'' - s')$. . . bekannt sind (LA 3, 4). — Eine vollkommen genaue Angabe der Geschwindigkeit, mit welcher der bewegte Punkt den Punkt M der Bahn durchläuft, erhält

Anh. 13. man erst durch folgende Methode (vergl. math. Anhang Nr. 13):

Wir wählen den Punkt M' unendlich nahe bei M . Es wird dann sowohl die Wegstrecke $(s' - s)$ wie die Zeitstrecke $(t' - t)$ unendlich klein, und es ergibt sich folgende Maßzahl für die nach Verlauf von t sec erreichte

augenblickliche Geschwindigkeit (im Zeitpunkte t):

$$v = \frac{s' - s}{t' - t} \text{ für } t' = t.$$

Wie auf Grund dieser Definitionsgleichung die Geschwindigkeit v in jedem beliebigen Zeitpunkte für je eine Bewegung mit gegebenem Weg-Zeit-Gesetz sich ermitteln läßt, wird zunächst ersichtlich aus folgenden zwei Anwendungen:

1. Für $s = at$ ist $v_m = \frac{at' - at}{t' - t} = a$. D. h.: Bei Bewegungen nach dem

Weg-Zeit-Gesetz $s = at$ ist die Maßzahl der Geschwindigkeit gleich der Maßzahl des in je einer Sekunde zurückgelegten Weges. — Die Geschwindigkeit $v = a$ ist ferner in diesem (und nur in diesem) Falle unabhängig von t , d. h. sie ist zu allen Zeiten die gleiche; also: die Bewegung nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at$ ist gleichförmig, oder: von konstanter Geschwindigkeit $v = c = a$. —

2. Für $s = at^2$ ist $v_m = \frac{at'^2 - at^2}{t' - t} = a(t' + t)$. Für $t' = t$ wird somit $v = 2at$. Die Geschwindigkeit dieser Bewegungen wächst also gleichmäßig (einfach proportional) mit der Zeit; die Bewegungen nach dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2$ sind gleichmäßig beschleunigt, oder: von konstanter Beschleunigung.

§ 5. Beschleunigung.

Folgen wir dem auf der geneigten Schienenbahn herabrollenden Wagen mit dem Blicke, so fällt uns nicht nur seine jeweilige Geschwindigkeit auf, sondern auch, daß diese Geschwindigkeit in bestimmtem Maße wächst, oder daß er eine bestimmte Beschleunigung hat. Und zwar erkennen wir, daß bei starker

Anwendung zunächst auf die im § 4 betrachteten zwei Bewegungen:

1. Für $s = at$ war $v = a$, somit ist $w_m = \frac{a - a}{t' - t} = 0$ und daher auch $w = 0$; d. h. die gleichförmigen Bewegungen oder die Bewegungen von konstanter Geschwindigkeit haben die Beschleunigung Null.

2. Für $s = at^2$ war $v = 2at$ und daher ist $w_m = \frac{2at' - 2at}{t' - t} = 2a$ und also auch $w = 2a$; d. h. bei Bewegungen mit dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2$ ist die Beschleunigung konstant (von der Zeit t unabhängig). Da diese Bewegungen für die ganze Physik von besonderer Bedeutung sind, so behandeln wir sie im folgenden Paragraphen noch einmal im Zusammenhange.

- LA 6. 3. Die Bewegungen mit anderen Weg-Zeit-Gesetzen, z. B. $s = at^3$ (LA 6), $s = a \sin at$ (§ 12) ergeben auch den Wert von w noch abhängig von t , d. h. sie zeigen zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Beschleunigungen; u. sv. sind alle Bewegungen ausser denen nach den Weg-Zeit-Gesetzen $s = at$ und LA 5. $s = at^2$ (und dem verallgemeinerten $s = at^2 + Ct + S$, LA 5) **ungleichmässig beschleunigt**. — Sie lassen sich weiter unterscheiden in solche, bei denen die Beschleunigung wächst, und solche, bei denen sie abnimmt. Auch die Gesetze einer solchen Zu- bzw. Abnahme können wieder sehr mannigfaltige sein. — Insbesondere nicht mit dem Begriff einer positiven, aber abnehmenden Beschleunigung ist zu verwechseln der Begriff der

Verzögerung = Abnahme der Geschwindigkeit. Ihre absolute Gröfse wird gemessen durch die Anzahl der GE, um welche sich die Geschwindigkeit in je 1 sec vermindert.

Inwiefern Verzögerung = negative Beschleunigung, vergl. § 8. — Ein Beispiel einer verzögerten Bewegung gibt die Bewegung eines über eine **schief** Ebene (auch eine krumme Bahn, vergl. Fig. 4) nach einmaligem Anstofs **hinaus** rollenden Wagens oder die eines vertikal aufwärts geworfenen Körpers (§ 11).

§ 6. Gleichmässig beschleunigte Bewegungen (Zusammenfassung).

Durch Anwendung der allgemeinen Formeln für v und w auf das **speziell** Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2$ erhielten wir in den beiden vorigen Paragraphen die Anh. 15. natürliche Reihe von Beziehungen (math. Anhang Nr. 13):

$$s = at^2 \dots (1a) \quad v = 2at \dots (2a) \quad w = 2a \dots (3).$$

Die Gleichung (3) besagt, dass Bewegungen, bei denen der Weg s mit dem Quadrate der Zeit t wächst, eine **konstante Beschleunigung** haben, deren **Mafszahl b** das Doppelte der **Mafszahl a** des Weges der 1. Sek. (kurz des „Anfangsweges“) ist; also

$$2a = b \quad \text{oder} \quad a = \frac{b}{2}.$$

Wenn wir daher in die beiden obigen Gl. (1a) und (2a) statt der **konstanten** Gröfse a die konstante Gröfse b einführen, so erhalten wir für alle beliebigen gleichmässig beschleunigten Bewegungen die beiden Hauptgleichungen:

Gesamtweg $s = \frac{b}{2} t^2$ (1b), **Endgeschwindigkeit** $v = bt$ (2b); in Worten!

Da diese zwei Gleichungen die vier Größen t , b , v , s enthalten, so ergeben sich 12 Aufgaben (LA 7); besonders fruchtbar werden (§§ 22, 23) die Beziehungen: LA 7.

$$s = \frac{v^2}{2b} \quad \text{und} \quad v = \sqrt{2bs} \quad (\text{in Worten!})$$

Da auch der freie Fall nach dem Gesetze $s = at^2$ erfolgt (§ 2), wo für alle Körper derselbe Wert $a \neq 500 \text{ cm} = 5 \text{ m}$ gilt, so ist speziell für den freien Fall $b \neq 1000 \text{ cm sec}^{-2} = 10 \text{ m sec}^{-2}$ ein annähernder Wert der „Schwerebeschleunigung“ g (*gravitas*).

Für Orte mittlerer Breite ergaben Pendelbeobachtungen (§ 12, 33):

$$g = 981 \text{ cm sec}^{-2} \neq 1000 \text{ cm sec}^{-2} = 10 \text{ m sec}^{-2}.$$

Somit gelten speziell beim freien Fall die Gleichungen für die Fallstrecke $s = \frac{g}{2} t^2$ (1 c), Fallgeschwindigkeit $v = gt$ (2 c); in Worten!

Da ferner auch der Fall an der schiefen Ebene nach dem Gesetze $s = a_s t^2$ erfolgt (§ 2, Versuch 2), so ist auch diese Bewegung gleichmäßig beschleunigt; und zwar ist für sie

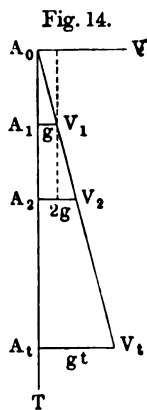
$$b = 2a_s = g_s = g \sin \varepsilon = g \cdot \frac{h}{l} \quad \dots \quad (4)$$

Als Folgerungen hieraus verschiedene hübsche Beziehungen, z. B. das Gesetz vom „Sehnenfall“ (LA 8). —

LA 8.

Ergänzung zum Geschichtlichen. Nach § 2 gingen bei GALILEI der wirklichen Durchführung seiner klassischen Versuche an der Fallrinne mehrere einstweilen noch unbewiesene Vermutungen voraus. Es werde nun nachträglich von den drei wichtigsten gezeigt (und zwar in der uns heute, noch nicht aber GALILEI geläufigen Formelsprache), daß sie mit den Tatsachen im Einklang waren:

1. Aus dem vorerst nur vermuteten Gesetze $v = gt$ leitete GALILEI das durch seine Versuche erst direkt zu bestätigende Gesetz $s = \frac{1}{2} gt^2$ ab durch folgende graphische Methode: Die Fallzeiten 1, 2 ... sec seien längs der Geraden $A_0 T$ (Fig. 14) durch die Strecken $A_0 A_1$, $A_0 A_2$..., die Fallgeschwindigkeiten g , $2g$... durch die zu $A_0 T$ normalen Strecken $A_1 V_1$, $A_2 V_2$... versinnlicht. Hätte die Endgeschwindigkeit g der ersten Sekunde schon zu Beginn und während der ganzen ersten Sekunde bestanden und wäre also die Bewegung gleichförmig erfolgt, so wäre der zurückgelegte Weg (nach der Gleichung $s = ct$) gleich $g \cdot 1$ und somit dargestellt durch das ganze Rechteck aus $A_0 A_1$ und $A_1 V_1$. Da aber nach der Annahme $v = gt$ die Geschwindigkeit vom Anfangswerte nur allmählich, und zwar in gleichmäßigem Wachsen bis zum Endwerte g zunahm, so wird der zurückgelegte Weg nur durch das halbe Rechteck aus $A_0 A_1$ und $A_1 V_1$, d. i. durch das Dreieck $A_0 A_1 V_1$ dargestellt. Ähnlich der Weg während einer späteren Sekunde durch je ein Trapez, z. B. $A_1 A_2 V_2 V_1$; der ganze Weg während t sec also wieder durch das Dreieck $A_0 A_t V_t$, dessen Fläche gleich ist $\frac{1}{2} t \cdot gt = \frac{g}{2} t^2$. — Dieselbe Gleichung ergibt sich auch arithmetisch (LA 9). LA 9.



2. Indem GALILEI das Gesetz $s = \frac{g}{2} t^2$ für die frei fallenden Körper als durch die Versuche mit den an schiefen Ebenen rollenden Kugeln erwiesen annahm, hatte er stillschweigend mit angenommen, daß beiderlei Bewegungen einander mechanisch ähnlich seien. In der Tat gilt dies von allen gleichmäßig beschleunigten Bewegungen, indem je eine solche durch den Wert ihrer „charakteristischen Beschleunigung“ b bestimmt und von allen übrigen unterschieden ist. Sind z. B. für zwei solche Bewegungen die Beschleunigungen b_1 und b_2 , so entsprechen je einem und demselben Werte von t die Beziehungen:

$$s_1 = \frac{b_1}{2} t^2 \quad s_2 = \frac{b_2}{2} t^2 \quad \text{also } s_1 : s_2 = b_1 : b_2 \dots (5) \text{ (in Worten!)}$$

$$\text{und } v_1 = b_1 t \quad v_2 = b_2 t \quad \text{also } v_1 : v_2 = b_1 : b_2 \dots (6) \text{ (in Worten!)}$$

3. Zur Beziehung $a_s = a \sin s$ oder $a_s : a = h : l$, aus welcher sich alle übrigen Beziehungen zwischen freiem Fall und schiefen Ebenen ableiten lassen, gelangte GALILEI, indem er von dem Satze ausging, daß ein Körper beim Durchfallen derselben Niveaudifferenz im freien Falle und auf einer schiefen Ebene (auch auf einem Kreisbogen, wie z. B. ein Pendelkörper, vergl. Fig. 75, S. 103) dieselbe Endgeschwindigkeit erlange. Dieser Satz ergibt sich sofort als ein besonderer Fall der Gleichung $v = \sqrt{2bs}$, nämlich:

$$v_s = \sqrt{2gs} = \sqrt{2g \cdot \frac{h}{l} \cdot l} = \sqrt{2gh} = v.$$

Merkwürdig ist, daß GALILEI jenen Satz in den „*Discorsi*“ noch nicht aus allgemeineren Sätzen ableitete (erst von GALILEI'S Nachfolgern wurde er aus dem Satze vom Kräfteparallelogramm abgeleitet, § 17), sondern er scheint ihn genial erschaut zu haben in Übereinstimmung mit den Überlegungen, welche wir heute als energetische (§ 23, S. 102) bezeichnen.

§ 7. Bewegung geworfener Körper.

Geschichtliches. Wiewohl man gewiß von jeher, z. B. beim Ballspiele, beobachtet hatte, daß ein in wagerechter oder schiefer Richtung geworfener Ball eine gewisse krumme Linie beschreibt (deren Gestalt und Größenverhältnisse den Spieler beim Werfen und Auffangen der Bälle sogar einigermaßen geläufig sein mußten), so war doch die theoretische Beschreibung solcher Wurfbewegungen bis auf GALILEI so sehr im Dunkeln, daß noch in einem Buche vom Jahre 1561 behauptet wurde, eine Kanonenkugel gehe so lange in gerader Linie fort, bis ihre Geschwindigkeit ganz erschöpft sei, worauf sie dann lotrecht herabfalle. Etwas später wurde behauptet, der Weg einer Kanonenkugel sei zuerst eine gerade Linie, dann ein Kreisbogen und zuletzt falle sie lotrecht herab.

GALILEI schloß an die Darstellung der Bewegung frei und an schiefen Ebenen fallender Körper (Dritter Tag der *Discorsi*) unmittelbar die der Bewegung geworfener Körper (Vierter Tag der *Discorsi*). Das wesentlich Neue seiner Methode war, die wirklich vorkommenden Bewegungen in Gedanken zu „zerlegen“ in eine gleichförmige Bewegung nach der Richtung der dem geworfenen Körper erteilten „Anfangsgeschwindigkeit“ und in eine gleichmäßig beschleunigte in der Richtung des freien Falles. —

Als „geworfen“ bezeichnet die Physik nicht nur z. B. einen Stein, dem wir mit der Hand eine Bewegung erteilen und den wir dann loslassen, sondern

ch die Bewegung eines Projektils, nachdem es das Geschütz verlassen hat; die Bewegung einer Kugel, welche über eine wagrechte oder schiefe Tischplatte gleitet war und über deren Rand hinabstürzt; die Wassertropfen des Strahles, welcher aus dem Spritzenschlauche strömt u. dgl. m. Dabei ist z. B. die Bewegung des Projektils „Wurfbewegung“ von dem Zeitpunkte an, da es den Lauf verlassen hat und nicht mehr dem Drucke der Pulvergase, sondern nur noch der Schwerkraft unterworfen ist. — Ohne jetzt schon auf diese „Kräfte“ („dynamisch“) einzugehen, können wir nach GALILEI'S Methode die Bewegung selbst auf folgende Art (rein „phoronomisch“) beschreiben, und zwar zunächst den

Fig. 15.

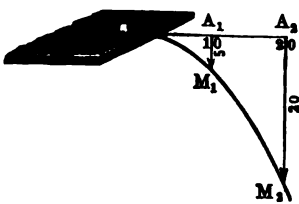
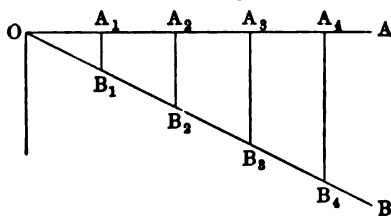


Fig. 16.



Horizontalen Wurf. War z. B. eine Kugel über eine wagrechte Tischplatte in gerader Linie gerollt (Fig. 15), so beschreibt sie vom Rande des Tisches an eine krumme Linie in der durch jene Gerade eindeutig bestimmten vertikalen Ebene, der „Wurfebene“. Von jener wagrechten Geraden als Tangente zweigt die krumme Bahn nach abwärts so ab, daß ihre konkave Seite nach unten gewendet ist.

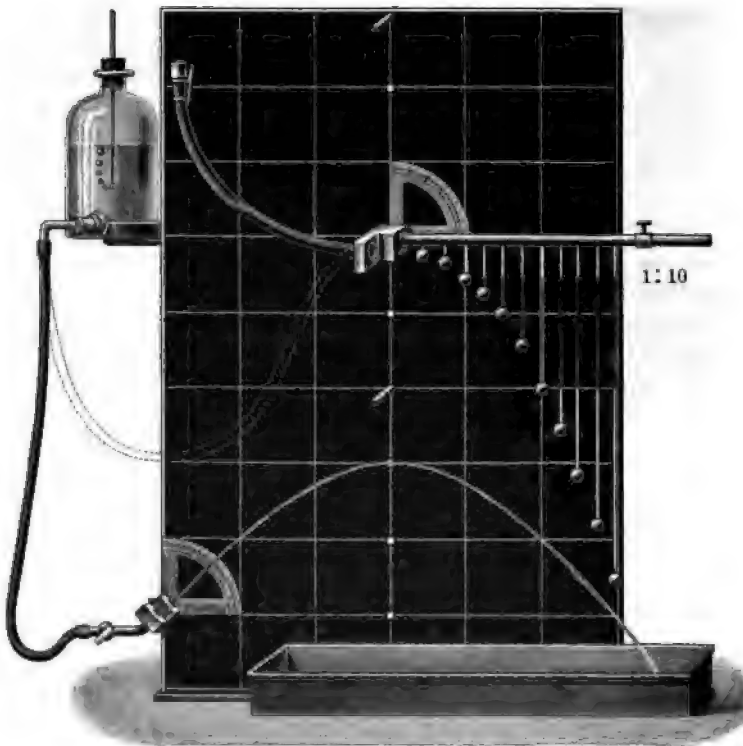
Würde die Kugel sogleich vom Rande an längs einer Geraden, also unter einem bestimmten endlichen Winkel AOB (Fig. 16), von der Horizontalen abzweigen, so kämen auf die wagrechten Strecken $OA_1, OA_2, OA_3 \dots$ (Fig. 16) die ihnen proportionalen lotrechten Strecken $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 \dots$. Schon in flüchtiger Blick auf die von geworfenen Körpern wirklich durchlaufenen krummen Bahnen zeigt dagegen, daß auf die wagrechten Strecken $OA_1, OA_2 \dots$ (Fig. 15) Senkungen $A_1M_1, A_2M_2 \dots$ kommen, welche in rascherem Verhältnis als jene bei der Geraden $AB_1B_2B_3 \dots$ wachsen. — Es liegt nahe, zu vermuten, daß diese Senkungen oder Fallstrecken bei geworfenen Körpern die gleichen seien wie bei frei fallenden Körpern. Diese Vermutung läßt sich bestätigen durch

Versuche (Fig. 17 a. f. S.): Eine Reihe von Loten sind (an einer in einer geschlitzten Röhre ausziehbaren Spiralfeder) so angebracht, daß die oberen Enden eine (wagrechte oder schiefe) Gerade bilden, und die Lote bald kleinere, bald größere, aber immer untereinander gleiche Abstände, somit vom Anfang O der Reihe solche Abstände haben, die sich verhalten wie $1 : 2 : 3 \dots$. Die Lotlängen sind nach dem Verhältnisse $1 : 4 : 9 \dots$ gewählt, so daß die Lotkörper in eine nach unten konkave Kurve zu liegen kommen: es ist eine Halbparabel (math. Anh. Nr. 23). — Erteilt man einer Kugel (indem man sie durch eine gekrümmte Röhre Anh 23. herabrollen läßt, oder mittels einer Federkanone ...) in der Richtung der wagrechten Geraden, von welcher an die Lotlängen gezählt werden, eine entsprechende Anfangsgeschwindigkeit, so hält sich die Kugel an die durch die Lotkörper vorgezeichnete Halbparabel. Sind z. B. die Lotlängen $A_1M_1 = 5 \text{ cm}$,

$A_1M_1 = 20\text{ cm}$, $A_2M_2 = 45\text{ cm}$. . ., so entsprechen diesen Fallstrecken F_1 von 0,1, 0,2, 0,3 . . . sec; sind dann die Abstände $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 \dots =$ so bilden die Pendelkörper eine Parabel vom „Parameter“ $p = 10\text{ cm}$. die Spiralfeder so weit zusammengeschoben, daß $OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 \dots =$ sind, so ist für diese steilere Parabel $p = 2,5\text{ cm}$. Damit die geworfene sich an die so vorgezeichneten Parabeln hält, müssen die Anfangsgeschw. 11. 100, bzw. 50 cmsec^{-1} betragen (LA 11). — Parabolische Wasserst.

Wird die Spiralfeder schief oder (nahezu) lotrecht gestellt, so bilden die Pendelkörper die dem „schiefen Wurf“ entsprechenden Parabeln, bzw. (u

Fig. 17.



die dem „vertikalen Wurf“ entsprechende vertikale Gerade. Beachte in letzten Fällen die Symmetrie des auf- und absteigenden Astes der — Konstruktion von Wurfparabeln bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit

14, 15. Richtung (LA 14, 15). —

So bilden die Wurfbewegungen ein erstes Beispiel für mehrere allgem. teils phoronomische, teils dynamische Begriffe und Sätze. Phoronomisch: Gestalt der Bahn (einschließlich „Richtung“, „Krümmung“, folgraph), die Zerlegung und Zusammensetzung von Beweg. (§ 10). Dynamische: das Trägheitsprinzip (§ 15), das Unabhängigkeitsprinzip (§ 15).

b. Gestalt der Bahn. — Richtung. Krümmung. — Vektoren der Bewegung.

Geraden bewegen sich alle Punkte eines frei fallenden (vertikal geraden) oder an schiefer Ebene gleitenden Körpers, eines auf geraden Schienen an Eisenbahnzuges (mit Ausnahme der Punkte der Räder, welche „Zykloiden“, Anh. 24, beschreiben, sowie mehrerer Teile der Lokomotive); in Parabeln beschreiben sich Körper, welche in horizontaler oder schiefer Richtung geworfen werden; in Kreisen bewegen sich die Teilchen eines Schleifsteines, einesrades; in Ellipsen die Mittelpunkte der Planeten in Bezug auf Sonne und Fixsterne. . . . Sehr verwickelt sind die Bahnen der Planeten in Bezug auf die Erde mit Rücksicht auf Drehung und Umlauf der Erde um die Sonne, eines der Mondoberfläche u. s. f. — um so mehr die Bewegung eines Punktes auf dem eigenen Leibes während einer Turnstunde (in Bezug auf das Zimmer, den Raum . . .) u. dergl. m.

Nach der Frage, ob alle geometrisch denkbaren Linien auch für bewegte Punkte werden können, ist zu unterscheiden, ob das Objekt als ein „materieller Punkt“ vorausgesetzt wird oder nur als ein unkörperlicher Lichtstrahl oder Lichtfleck u. dergl. — Ein materieller Punkt hat nur 1. in einer überall zusammenhängenden Linie bewegen, welche 2. keine scharfen Ecken (keine Unstetigkeiten der Richtung) hat. In der Natur gegebenen Kräfte wäre die Bewegung eines materiellen Punktes z. B. längs der Bahn AC (Fig. 18) höchstens dann verträglich, wenn die Geschwindigkeit bis zur Ecke B hin sich auf Null verkleinert und von der Ecke an wieder stetig wächst (so in dem Grenzfall eines geworfenen Körpers, bei welchem der höchste Punkt eine Art Ecke der auf- und absteigenden Bahn bildet). — Dagegen kann ein Licht- oder Schattenstrahl z. B. in dem Versuch nach Fig. 30, der ein Bewegliches dient) von dem Schirm, auf dem sich längs 1, 2 (Fig. 19) bewegt, überspringen auf einen dahinter stehenden Schirm 2, 3. Desgleichen springt ein Spiegel- oder Linsenbild (§§ 103, 107) im Übergang von $+\infty$ nach $-\infty$. — Auf einem geknickten Schirm kann auch eine Unstetigkeit in der Richtung eintreten. Mit Rücksicht auf letztere Beispiele wird für die uns einstweilen noch allein beschäftigende rein phoronomische Theorie der Bewegungen allgemein sagen:

Alle denkbaren Linien können **Bahnen** für die (wirklichen oder gedachten) Bewegungen von Punkten sein.

Eine Bahn kann in zweierlei Sinn durchlaufen werden (z. B. eine Eisenbahn hin und zurück). Ungenau wird statt vom „Sinne“ einer Bewegung von der „Richtung“ („Richtung“ Wien—Graz, „Richtung“ Graz—Wien) Gebrauch gemacht. Genau sollte der Ausdruck „Richtung“ nur verwendet werden wie folgt:

Fig. 18.

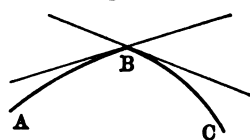
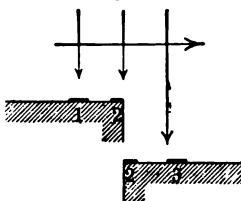


Fig. 19.



Mit der Gestalt der Bahn eines Beweglichen ist auch für jeden Punkt der Bahn die **Richtung** des Linienelementes und hiermit die Richtung der Bewegung des Beweglichen in diesem Bahnelement gegeben. Ist nämlich die Bahn eine Gerade, so ist die Richtung der Bewegung an jeder Stelle die Richtung der Geraden selbst. Da sich ferner der Begriff der „Richtung“ von der Geraden auf krumme Linien dadurch übertragen läßt, daß man sich in jedem Punkte der

Anh. 18.

krummen Linie die Tangente gelegt denkt (Anhang Nr. 13), so bezeichnet man als die Richtung der Bewegung, welche dem Beweglichen beim Passieren des Tangierungspunktes zukommt, die Richtung dieser Tangente selbst (Fig. 13).

Die Bewegungen in geraden Bahnen sind Bewegungen von **konstanter Richtung**, die Bewegungen in krummer Bahn sind Bewegungen von **veränderlicher Richtung**.

Je nachdem schon nach kürzerem oder längerem Bahnstücke Richtungsänderungen von bestimmter GröÙe (gemessen durch den Winkel zwischen den Tangenten am Anfangs- und am Endpunkte des Bahnstückes) auftreten, heißt dieses Bahnstück **mehr oder weniger gekrümmt**. (Fig. 13, S. 11. — Über das Maß der Krümmung vergl.

Anh. 26.

Anhang Nr. 26.)

Die auf die Geschwindigkeit und auf die Richtung bezüglichen GröÙen zeigen zu einander gewisse Analogien, indem einander entsprechen:

Phoronomisch:	Geometrisch:
1. Das Weg-Zeit-Gesetz , als Beziehung zwischen s und t [$s=f(t)$].	1. Die Gleichung der Linie als Beziehung zwischen y u. x [$y=F(x)$].
2. Die Geschwindigkeit , gemessen durch $v = \frac{s' - s}{t' - t}$ für $t' = t$ (konstante, veränderliche Geschwindigkeit).	2. Die Richtung , gegeben durch $tg \tau = \frac{y' - y}{x' - x}$ für $x' = x$ (konstante, veränderliche Richtung).
3. Die Beschleunigung (kleinere, größere; konstante, veränderliche).	3. Die Krümmung (kleinere, größere; konstante, veränderliche).

Vektoren der Bewegung. — Der Abstand zweier Punkte A und B ist als solcher zwar eine GröÙe, aber noch keine Richtung. Aber schon wenn wir uns einen Punkt M von A nach B binnen beliebiger Zeit (gleichförmig oder ungleichförmig) verschoben denken, kommt dieser Verschiebung (Dislokation) als Strecke oder geradliniger „Weg“ gedacht eine **Richtung** zu. — Wir können ferner die (im § 4 zunächst nur ihrer GröÙe nach bestimmte) Geschwindigkeit mit dem im vorliegenden Paragraphen entwickelten Begriff der Richtung einer Bewegung zu einem einheitlichen Begriffe so verbinden, daß der Geschwindigkeit in diesem erweiterten Sinne auch Richtung zukommt; ähnlich wie man sehr häufig bei einer Strecke an ihre Länge und Richtung zugleich denkt.

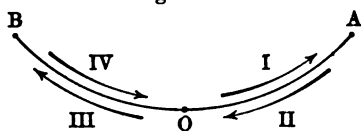
Auf gleiche Weise kommt auch jeder Beschleunigung sowohl GröÙe als Richtung zu.

Alle gerichteten GröÙen (im Gegensatze zu den richtungslosen GröÙen

oder Skalengrößen) lassen sich sehr zweckmäßig veranschaulichen durch Pfeile (Vektoren, Anhang Nr. 8), deren Richtung direkt die Richtung dieser Größen Anh. 8. angibt. Überdies kann die Länge des Pfeiles auch noch direkt die Größe von Verschiebungen, dagegen nur nach an sich willkürlichen Maßstäben auch die von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen angeben. Vergl. z. B. die Pfeile in Fig. 18, S. 11.

In welcher Weise insbesondere positive und negative Richtungen aller dieser Größen unterschieden und miteinander in Einklang gebracht werden können, erhele aus folgendem Beispiele der Bewegung eines Wägelchens, das auf einer nach oben konkaven Bahn (dem gekrümmten Blechstreifen, Fig. 4, § 2 und Fig. 20) hin- und herrollt, so daß O der tiefste Punkt eines in vertikaler Ebene liegenden Kreisbogens ist. Drücken die krummen Pfeile zunächst nur den jeweiligen Bewegungs-Sinn aus, so sind überdies folgende Vektorgrößen zu unterscheiden:

Fig. 20.



1. Wege. Werden Wege auf dem Bahnstück rechts von O (von O bis A , in I und II) als positiv gerechnet, so sind die links von O (von O bis B , in III und IV) negativ.

2. Geschwindigkeiten. Wird die Bewegung im Sinne von B über O gegen A (in IV und I) als Vorwärtsbewegung oder als eine Bewegung mit positiver Geschwindigkeit gerechnet, so ist die Rückwärtsbewegung von A über O nach B (in II und III) eine mit negativer Geschwindigkeit (vergl. § 12, Gl. 6).

3. Beschleunigungen. Würde die Bewegung bei wachsender Geschwindigkeit — von deren verschiedenen Vorzeichen zunächst abgesehen — (beim Bergabfahren in II und IV) als positiv beschleunigte gezählt, so wäre die mit abnehmender Geschwindigkeit (beim Berganfahren in I und III) eine mit negativer Beschleunigung. Mit Rücksicht auf (2.) ist aber die Beschleunigung in II negativ, in III positiv zu zählen (vergl. § 12, Gl. 7).

Beachte, daß die Vorzeichen von Weg (1.) und Beschleunigung (3.) in diesem Beispiele in allen vier Vierteln der Bewegung einander entgegengesetzt sind. — Wie wären die Vorzeichen von Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung auf einer nach oben konvexen Bahn (z. B. wenn ein mit hinreichender Geschwindigkeit herankommender Wagen über eine gewölbte Brücke fährt)? — Allgemein gilt:

Da wir im § 5 Bewegungen mit abnehmender Geschwindigkeit als verzögerte bezeichnet haben, so sind Verzögerungen als negative Beschleunigungen und die Beschleunigungen in dem (im § 5 zunächst allein vorausgesetzten) engeren Sinne der Zunahme einer Geschwindigkeit als positive Beschleunigungen zu bezeichnen.

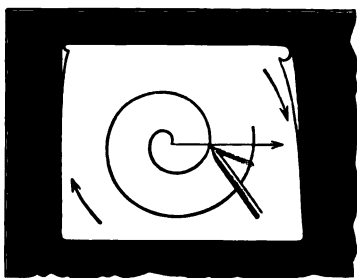
§ 9. Relative und absolute Bewegung.

In den bisherigen Betrachtungen wurde von der Bewegung bezw. Ruhe eines Punktes oder Körpers so gesprochen, als wäre sie eine ihm selbständig zukommende („absolute“) Eigenschaft. Bei einiger Überlegung werden wir dagegen bald inne, daß meistens (oder immer?, Anhang Nr. 41) ein zweiter Körper, der Anh. 41. „Bezugskörper“ (ein „physisches Koordinatensystem“, vergl. Anhang Nr. 11), Anh. 11.

ausdrücklich oder stillschweigend mitgedacht wird, in Bezug auf welchen die relative Bewegung oder Ruhe stattfindet; so in folgenden Beispielen:

1. Wenn z. B. die Bewegungen nach Fig. 7 bis 9 (S. 10) als geradlinige gleichförmige bezeichnet wurden, so hieß das, daß sich die Bleistiftspitze in Bezug auf

Fig. 21.



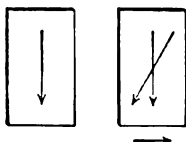
das Papier geradlinig gleichförmig bewegt habe; ebenso bei allen Nachbildungen von Bewegungen auf dem Papier oder der Schreibtafel. Für den wirklichen freien Fall, die Wurfbewegung u. dergl. ist Bezugskörper die Erde, für die Bewegung des Wägelchens (Fig. 1, 6, 36, 37, 38 . . .) das Schienenpaar (und die Erde . . .) u. s. f.

2. Solange bei jenen Bewegungen nach Fig. 7 bis 9 das Papier in Bezug auf die Tischplatte in Ruhe ist, hat sich die Bleistiftspitze ebenso wie in Bezug auf das Papier auch in Bezug auf die Tischplatte gleichförmig geradlinig bewegt.

Wird dagegen das Papier um eine durch den Anfangspunkt gehende zur Papierfläche normale Gerade (Fig. 21) gleichförmig gedreht, so zeichnet die Bleistiftspitze, indem sie in Bezug auf die Tischplatte sich immer noch gleichförmig geradlinig bewegt, auf die Papierfläche eine Spirale. (Eine solche Spirale erhalten wir auch, wenn wir uns die Fig. 7 auf dem Lineal vorzeichnen und, während wir den Bleistift in Bezug auf das Lineal bewegen, das Lineal in Bezug auf das Papier entsprechend drehen.)

Ähnlich: Fallen Regentropfen lotrecht zur Erde, so erzeugen sie an dem

Fig. 22. Fig. 23.



Fenstern eines ruhenden Eisenbahnzuges lotrechte Streifen (Fig. 22); bewegt sich der Zug mit konstanter Geschwindigkeit, so sind die Streifen schief (Fig. 23). Die gleichen schiefen Streifen an den Fensterscheiben zeigen sich aber auch, wenn der Eisenbahnzug ruhig steht, die Tropfen aber in schiefer Richtung zur Erde niedergehen, falls nämlich zur Fallbewegung noch eine seitliche Bewegung infolge eines Windes kommt, welche entgegengesetzte Richtung, aber

gleiche Geschwindigkeit wie früher der Eisenbahnzug hat. — Das Ergebnis, daß die Bewegung des Eisenbahnzuges (A) ersetzbar ist durch eine entgegengesetzte Bewegung der Tropfen (B), läßt sich allgemeiner so ausdrücken:

Ist A in Bezug auf C (Fig. 24) in Bewegung, B in Bezug auf C in Ruhe, so ist die relative Bewegung von A in Bezug auf B die

Fig. 24.

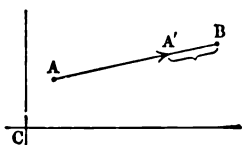
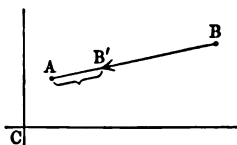


Fig. 25.



gleiche, wie wenn A in Bezug auf C in Ruhe wäre (Fig. 25) und B eine der früheren Bewegung von A gleiche entgegengesetzte Bewegung hätte.

Insoweit für die Zwecke einer Betrachtung bloß die relative Lage von A und B in Betracht kommt, sind die Bewegungen nach Fig. 24 und 25 vollständig gleichwertig; nicht mehr aber, wenn die Lagen A , B und C in Betracht gezogen

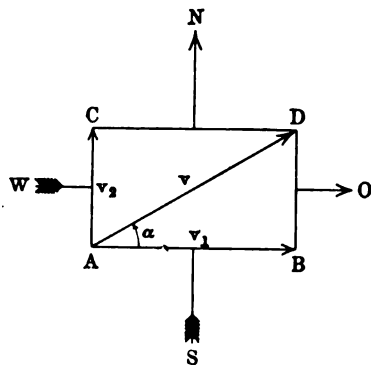
werden sollen. — So bei den bekannten Täuschungen, daß uns die Brücke stromaufwärts zu schwimmen, die Karussellwände sich zu drehen scheinen, wobei die weitere Umgebung (Flußufer, Baugrund des Karussells und dessen sonstige Umgebung) den mehr oder weniger deutlich mitgedachten Bezugskörper C darstellen. — Inwieweit der Gegensatz zwischen der vor- und nachkopernikanischen Auffassung, z. B. eines Sonnenaufganges, dem Schema der Figuren 24 und 25 entspricht, vergl. § 179 ff.

§ 10. Zerlegung und Zusammensetzung der Bewegungen.

Befinde ich mich in der Ecke A des Zimmers $ABDC$ (Fig. 26), so ist es mir offenbar unmöglich, mich zugleich längs AB und längs AC zu bewegen; der Begriff einer „Zusammensetzung zweier (oder mehrerer) Bewegungen“ würde, so gefaßt, eine Unverträglichkeit einschließen (nämlich die, daß derselbe Körper an zwei verschiedenen Orten gleichzeitig sein soll). — Bewege ich mich dagegen von A längs der Diagonale nach D , so hat es einen durchaus anschaulichen Sinn, mir diese Bewegung in die zwei Bewegungen längs AB und längs AC „zerlegt“ zu denken. Ist nämlich das Zimmer z. B. nach den Hauptrichtungen des Horizontes WO und SN orientiert, so habe ich mich während der Bewegung von A nach D wirklich streng gleichzeitig sowohl der östlich wie der nördlich gelegenen Wand genähert (bezw. von der westlich wie von der südlich gelegenen Wand entfernt).

Ähnlich wie die geradlinige Bewegung längs AD konnten wir uns auch die krummlinige Bewegung der geworfenen Körper (Fig. 15, 17) in zwei Bewegungen zerlegt denken. — Am nächsten dürfte es dabei den Meisten liegen, sich den horizontal geworfenen Körper hauptsächlich als mit der wagrechten Anfangsgeschwindigkeit weitergehend und nur nebenher während dieser wagrechten Bewegung sich allmählich mehr und mehr senkend vorzustellen. Mit gleichem Rechte können wir uns aber auch umgekehrt vorstellen, daß der Körper, während er in einer Vertikalen fällt, sich mit dieser Vertikalen seitlich nach horizontaler Richtung verschiebt (— auch das Nebeneinandersetzen der Lote am Wurfapparate entspricht dieser zweiten Vorstellungsweise). Wollen wir schließlich keiner der beiden Teilbewegungen vor der anderen einen Vorzug einräumen, so denken wir uns die wagrechte und die lotrechte geradlinige Bahn parallel zu sich verschoben, und in dem so stetig sich vergrößernden Rechtecke befindet sich der geworfene Körper in der jeweiligen „vierten Ecke“ (d. h. in der dem Ausgangspunkt diagonal gegenüber liegenden). — So gelangen wir zum allgemeinen

Fig. 26.



Satz von der Gleichwertigkeit aufeinander folgender und gleichzeitiger Verschiebungen: Wird ein Punkt zuerst längs der Parallelogrammseite AB (Fig. 27) und irgend wann später längs der anstossenden Seite BD verschoben, so ist seine Endlage D in Bezug

auf A dieselbe, als ob gleichzeitig mit seiner Bewegung von A nach B diese Strecke parallel zu sich aus der Lage AB nach CD verschoben worden wäre. — Die Verschiebung von A nach B und von B nach D heißen die **komponierenden Verschiebungen**, Verschiebung von A nach D die **resultierende Verschiebung**.

Indem hier von den Verschiebungen (Dislokationen), noch nicht von den wirklich durchlaufenen Wegen die Rede ist, ist nur die Endlage D als vier Ecken des „Verschiebungsparallelogramms“ in Bezug auf die Anfangslage A bestimmt. — Zeige, daß sich dieselbe Endlage auch ergibt, wenn zuerst die Verschiebung AC und dann CD eintreten, ferner wenn der Punkt abwechselnd ein Stück parallel AB , dann parallel AC , dann wieder parallel AB u. s. f. sich bewegt. Ob sich der Punkt von A nach D wirklich längs der geradlinigen Diagonale des Parallelogramms bewegt, hängt ganz von ab, ob die beiden Bewegungen gleichartig (d. h. beide gleichförmig oder beide gleichmäßig beschleunigt — vergl. jedes z. B. auch die Zusammensetzung zweier „Sinusschwingungen“ zu einer geradlinigen Schwingung, Fig. 245, S. 231), oder aber ungleichartig sind. — Nämlich:

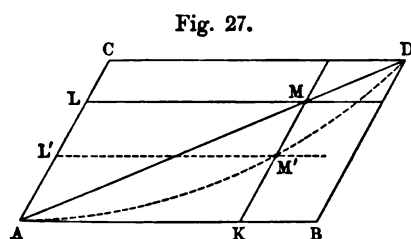


Fig. 27.

1. Stellen im Parallelogramm (Fig. 27) die Seiten AB und AC die in gleicher Zeit zurückgelegten Wege nach Länge und Richtung dar, so ist die Gerade AD der resultierende Weg: **Parallelogramm der Wege**.

Beweis: a) Die Bedingung, daß die Bewegungen längs AB und AC gleichartig seien, läßt sich ausdrücken durch $AB : AK = AC : AL$, wenn K und L diejenigen Orte sind, in welchen sich der bewegliche Punkt für jede der beiden Teilbewegungen in demselben Zeitpunkt befinden müßte. Indem er sich dann gemäß dem Gesetze von der Gleichwertigkeit der Verschiebungen wirklich im Punkte M befindet, gilt weiter: $\triangle AKM \sim \triangle ABD$ (oder ebenso: $\triangle ALM \sim \triangle ACD$); da hiernach $\angle BAD = \angle KAM$, so liegt M auf der Geraden AD . b) Sind die Bewegungen ungleichartig, so besteht z. B. für L' nicht mehr die obige Proportion wie für L , und es liegt dann auch M' nicht auf der Geraden AD .

2. Stellen in Fig. 27 AB und AC die in gleichförmigen Bewegungen binnen je einer Sek. zurückgelegten Wege, also zugleich auch die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 dieser Bewegungen dar, stellt die Diagonale AD die resultierende Geschwindigkeit dar: **Parallelogramm der Geschwindigkeiten**.

Auch wenn die zwei sich zusammensetzenden Bewegungen nicht beide gleichförmig, ja wenn sie nicht einmal gleichartig sind, wenn aber für einen bestimmten Zeitpunkt sich die komponierenden Geschwindigkeiten v_1 und v_2 verhalten wie die Seiten AB und AC , so wird durch die Diagonale AD immer noch die resultierende Geschwindigkeit v für diesen Zeitpunkt dargestellt. —

Für zwei zueinander normale Geschwindigkeiten (Fig. 26) ist $v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Anwendung auf die veränderliche Geschwindigkeit beim horizontalen Wurf § 11.

und die Winkel $\widehat{v_1} = \alpha$, $\widehat{v_2} = \beta$, so ist $v_1 = v \cos \alpha$, $v_2 = v \cos \beta = v \sin \alpha$. Die Gleichungen bilden die Lösung der Aufgabe: Eine gegebene Geschwindigkeit in zwei zueinander normalen Richtungen zu zerlegen, oder: Aus einer nach Richtung und Grösse gegebenen Geschwindigkeit eine Komponente nach anderer gegebener Richtung auszusondern. Für $\alpha = 0^\circ$ ist $v_1 = v$; für $\alpha = 90^\circ$ ist $v_1 = 0$; in Worten?

3. Stellen in Fig. 27 AB und AC die Beschleunigungen b_1 und b_2 zweier gleichmäfsig (oder auch für je einen gegebenen Augenblick ω_1 und ω_2 zweier ungleichmäfsig) beschleunigter Bewegungen dar, so stellt die Diagonale AD die resultierende Beschleunigung b (bzw. ω) dar: **Parallelogramm der Beschleunigungen**.

Beweis ähnlich wie bei 2., indem gemäß den Gleichungen (5) und (6) in § 6 sich ebenso wie die Wege auch die Beschleunigungen verhalten. — Wieder ist (wie bei den Geschwindigkeiten v , v_1 , v_2) $b_1 = b \cos \alpha$, $b_2 = b \sin \alpha$.

Von letzterer Gleichung ist der wichtigste besondere Fall die aus den Versuchen des § 2 und den Rechnungen des § 6 gefundene Gleichung $g_s = g \sin \epsilon$ für die Beschleunigung an der schiefen Ebene.

Durch einen ähnlichen Schluss wie aus 1. auf 2. und 3. wird endlich im § 17 die Parallelogrammkonstruktion auch auf die Kräfte übertragen werden („**Kräfteparallelogramm**“; im Gegensatz zu diesem fasst man die dreierlei Parallelogramme der Wege, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen auch zusammen unter dem Namen der „**Bewegungsparallelogramme**“). Dort (§ 17) auch erst die allgemeinen Formeln für die Abhängigkeiten zwischen Gröfsen und Richtungen von „**Vektoren**“ überhaupt. Für jetzt nur folgende einfachste Sätze:

Die Resultierende zweier gleich-, bzw. entgegengesetzt gerichteter Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen ist gleich deren Summe bzw. Differenz.

Eine praktische Anwendung dieses Satzes über die Addition der Geschwindigkeiten bietet z. B. die amerikanische Stufenbahn. Man tritt von dem Strafsenpflaster auf einen mäfsig bewegten Streifen, von diesem auf einen zweiten schneller bewegten, u. s. f. auf einen dritten und vierten, welcher dann in Bezug auf das Strafsenpflaster eine so grofse Geschwindigkeit hat, dafs es nicht mehr ohne Gefahr wäre, von der Strasse direkt ihn zu betreten und sich mit ihm vorwärts bewegen zu lassen. — Zugleich bietet diese Einrichtung ein Beispiel für den Satz: Bewegen sich zwei Punkte A und B längs derselben Geraden mit den absoluten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (wobei, genauer genommen, diese Geschwindigkeiten in Bezug auf einen beliebigen Punkt C dieser Geraden verstanden sind), so ist ihre relative Geschwindigkeit bei entgegengesetzter Richtung gleich ihrer Summe, $v = v_1 + v_2$, bei gleicher Richtung gleich ihrer Differenz, $v = v_1 - v_2$ (Bewegung zweier Eisenbahnzüge, die einander entgegen-, bzw. nebeneinander herfahren). — Ähnliche Sätze über relative Beschleunigungen.

II. Konstruktion und Berechnung der Wurfbewegungen (Zusammenfassung).

Nachdem wir in § 7 die in der Natur wirklich vorkommenden Wurfbewegungen in eine gleichförmige und in eine gleichmäfsig beschleunigte Komponente

$$s = -ct + \frac{g}{2}t^2 \dots (5), \quad v = -c + gt \dots (6).$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Spezialisierung:

1. Die Steigzeit t_1 : Der Körper steigt so lange, bis $v = 0$ geworden ist. Setzen wir also in Gl. (6) an Stelle von v und t die speziellen Werte 0 und t_1 , so ergibt sich: $0 = -c + gt_1$ und $t_1 = \frac{c}{g} \dots (7)$.

2. Die Steighöhe h : Wir setzen in (5) $t = t_1$ und $s = h$, dann folgt $h = -c \cdot \frac{c}{g} + \frac{g}{2} \cdot \frac{c^2}{g^2}$ oder: $h = -\frac{1}{2} \frac{c^2}{g} \dots (8)$, worin das Zeichen „-“ nur besagt, daß die Erhebung in der der Richtung des freien Falles entgegengesetzten Richtung stattgefunden hat. — Somit nach (7) und (8):

Beim vertikalen Wurf aufwärts wächst die Steigzeit wie die erste, die Steighöhe wie die zweite Potenz der Anfangsgeschwindigkeit; Steigzeit und Steighöhe sind der Schwerebeschleunigung einfach verkehrt proportional.

LA 10. Eine numerische Erläuterung dieser und der folgenden Gesetze in LA 10

3. Welche Zeit t_2 braucht der Körper, um aus der Steighöhe wieder in den Anfangspunkt zurückzufallen? — Antwort: In der Gleichung $s = \frac{g}{2}t^2$ setzen wir $s = h$ und $t = t_2$, woraus folgt: $t_2 = \frac{c}{g} = t_1$ (in Worten?). — Zum gleichen Ergebnis führt auch die Gleichung (5) allein, indem man $s = 0$ setzt, worauf die Gleichung zweiten Grades $-ct + \frac{g}{2}t^2 = 0$ für t die beiden Wurzeln 0 und $2 \cdot \frac{c}{g}$ gibt. Hier entspricht $t = 0$ dem ersten, $t = 2 \cdot \frac{c}{g} = t_1 + t_2$ dem zweiten Durchgange durch das Anfangsniveau.

4. Mit welcher Geschwindigkeit v_2 kommt der aufwärts geworfene Körper wieder in seinem Ausgangspunkt an? — Antwort: Wir setzen in Gleichung (6) $t = \frac{2c}{g}$, woraus folgt: $v_2 = -c + g \cdot \frac{2c}{g} = +c$ (in Worten; was bedeutet hier das Zeichen „+“?). — Oder: $v_2 = \sqrt{2g \cdot h} = \sqrt{2g \cdot \frac{c^2}{2g}} = c$. —

Den vertikalen Wurf abwärts beschreiben die Gleichungen $v = c + gt$ und $s = ct + \frac{g}{2}t^2$; sie liefern keine besonders bemerkenswerten Spezialisierungen.

III. Schiefer Wurf. Ein Körper habe eine Anfangsgeschwindigkeit von $c \text{ cm sec}^{-1}$ in einer Richtung, die mit der wagrechten den „Elevationswinkel“ ε^0 einschließt (Fig. 29). — Die Konstruktion der Bahn unterscheidet sich von der beim horizontalen Wurf nur dadurch, daß die Strecken $c, 2c, 3c, \dots, tc$ cm längs der schiefen Richtung aufzutragen sind; die Senkungen um $\frac{g}{2}, 4 \cdot \frac{g}{2}, \dots, t^2 \cdot \frac{g}{2}$ cm erfolgen aber ebenfalls in vertikaler (nicht etwa in der zu jener Anfangs-

LA 14. richtung normalen) Richtung. — LA 14.

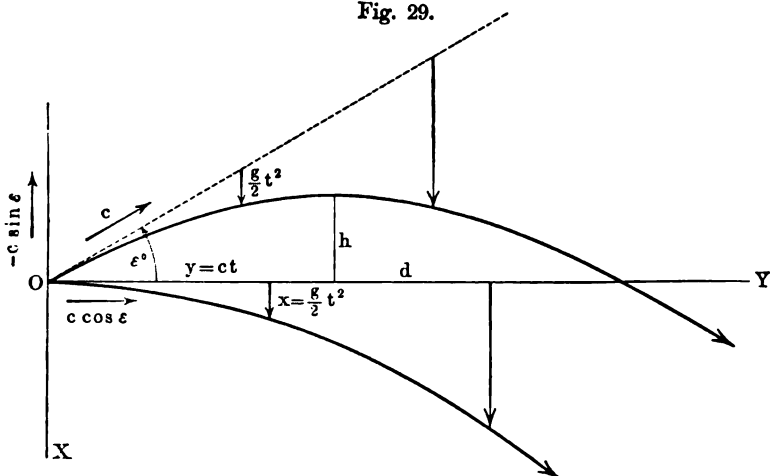
Behufs Berechnung der den schiefen Wurf beschreibenden Größen zerlegen die Anfangsgeschwindigkeit c in eine horizontale Komponente $c \cos \varepsilon$ und eine **vertikal** aufwärts gerichtete $-c \sin \varepsilon$. Diese vertikale Komponente der Anfangsgeschwindigkeit setzt sich zusammen mit der Fallgeschwindigkeit; so daß der **schiefe** Wurf auch als vertikaler Wurf, zusammengesetzt mit einer horizontalen Verschiebung, die von der Fallbeschleunigung unbeeinflusst ist, angesehen werden kann. — Die Gleichungen für den vertikalen Wurf lauten somit:

$$\begin{aligned} x &= -c \sin \varepsilon \cdot t + \frac{g}{2} t^2; & v_x &= -c \sin \varepsilon + g t; \\ y &= c \cos \varepsilon \cdot t; & v_y &= c \cos \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Ableitung der Gleichung der Wurfparabel für diesen allgemeinen Fall vgl. LA 16. — Aus diesen Gleichungen ergeben sich durch Spezialisierungen (in LA 16. in derselben Reihenfolge wie beim vertikalen Wurf) zunächst die Gesetze 1 bis 4:

1. Die **Steigzeit** $t_1 = \frac{c}{g} \sin \varepsilon$. — 2. Die **Steighöhe** $h = \frac{c^2 \sin^2 \varepsilon}{2g}$.
3. Die Zeit des Sinkens aus der größten Höhe in das Anfangsniveau ist der Steigzeit gleich.
4. Der Körper kommt **in das Anfangsniveau mit der Anfangsgeschwindigkeit**. (Beachte auch die Symmetrie der Richtungen!)

Fig. 29.



Dem schiefen Wurf eigentümlich sind ferner die Gesetze 5 bis 7:

5. Die **Wurfweite** $d = c \cos \varepsilon \cdot 2 \cdot \frac{c \sin \varepsilon}{g} = \frac{c^2}{g} \sin 2\varepsilon$.
6. Die größte Wurfweite entspricht dem Elevationswinkel 45° ; denn das Maximum von $\sin 2\varepsilon = 1$ gehört zu $2\varepsilon = 90^\circ$.
7. Zu komplementären Elevationswinkeln gehören gleiche Wurfweiten; denn $\sin 2(45^\circ - \alpha) = \sin 2(45^\circ + \alpha)$.

Inwiefern bilden der vertikale und der horizontale Wurf Grenzfälle des schiefen? Zeige dies durch Spezialisierung der Gleichungen! — LA 14–18. LA 14–18

Aus der Ballistik. Die bisher behandelten Wurfgesetze bilden nur die erste Annäherung an das tatsächliche Verhalten der Projektile, deren möglichst genaue Kenntnis dem Artilleristen unentbehrlich ist. Vor allem erfahren die Wurfbahnen eine wesentliche Abänderung durch den Luftwiderstand, so dass z. B. beim schiefen Wurf der absteigende Ast der Wurflinie steiler ist als der aufsteigende („ballistische Kurve“). Ferner weichen die Geschosse merklich aus der durch die Anfangsrichtung bestimmten Vertikalebene ab. Dies erklärt sich zum Teil aus der Rotation der Erde (vergl. § 34), zum Teil aus dem Einfluss des Luftwiderstandes auf die bei gezogenen Geschützen in schnelle Rotation um ihre Achse versetzten Spitzgeschosse (vergl. § 28, Fig. 110).

§ 12. Kreisende und schwingende Bewegungen.

Geschichtliches. GALILEI soll (nach einer Erzählung seines Schülers Viviani) in seinem 17. Lebensjahre (1581) im Dome zu Pisa an einer schwingenden Ampel beobachtet haben, dass trotz allmählicher Abnahme der Schwingungsweite die Schwingungsdauer sich nicht merklich ändere. Später verglich GALILEI zwar schon die Bewegung des Pendelpunktes im Kreisbogen mit der Bewegung eines Körpers beim Hinab- und Hinaufgleiten an schiefen Ebenen (vergl. Fig. 4, S. 9, hierzu LA 24); aber er gab noch in seinem letzten großen Werke, den *Discorsi* (1638), ein Gesetz

für die Schwingungsdauer des Pendels an, wonach $T = 8\sqrt{\frac{l}{g}}$ wäre, in welcher Formel aber der Faktor 8, wie sich gegen Ende dieses Paragraphen zeigen wird durch 2π zu ersetzen ist. — Es könnte scheinen, dass sich diese Abweichung durch direkte Versuche hätte verraten (bezw. der Faktor 2π empirisch hätte finden lassen) müssen, wenn beobachtet worden wäre, wie groß bei gegebenem l und g das jeweilige T ist. Tatsächlich war aber durch GALILEI'S direkte Versuche über den freien Fall und den Fall an schiefen Ebenen der Wert von T hierfür noch nicht hinreichend genau bekannt. Auch heute noch wird ja umgekehrt erst durch Messungen von T und l an Pendeln der Wert von g bestimmt (§ 33), worin die hauptsächlichste Bedeutung des Pendels für die theoretische Physik liegt.

Die richtige Theorie des Pendels (und zwar des einfachen wie des zusammengesetzten, über letzteres vergl. § 33) hat erst HUYGENS (1629—1695) in der wichtigen Schrift „*Horologium oscillatorium*“ (1673) gegeben. —

Das einfache (punktuelle, mathematische) Pendel wird gedacht als ein schwerer Massen-Punkt an einem masse- und schwerlosen Faden von bestimmter unveränderlicher Länge, der „Pendellänge“

Anh. 36 Zu dieser wissenschaftlichen Fiktion (log. Anh. Nr. 36) sind wir dadurch ge-
nötigt, dass jedes wirkliche, „physische“ Pendel (z. B. ein Uhrpendel) schon
nicht mehr ein einfaches, sondern ein zusammengesetztes Pendel ist, bei dem
der Begriff der „Pendellänge“ nicht mehr ohne weiteres anwendbar wäre. (Ins-
besondere lässt sich zeigen, dass nicht etwa der Abstand des Mittelpunktes
LA 98. einer Pendelkugel vom Aufhängepunkte als Pendellänge gelten darf, LA 98).

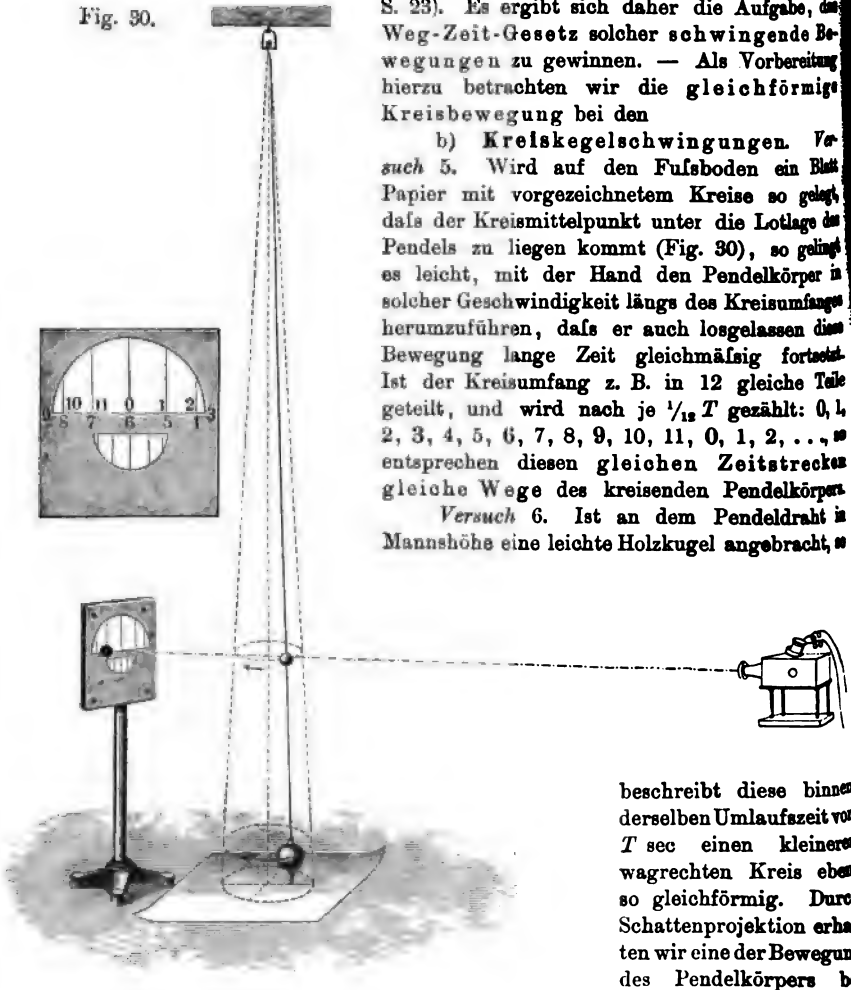
Vorversuche mit einem annähernd einfachen Pendel (einem Blei- oder
Platinkügelchen an einem möglichst leichten und dünnen Faden oder Draht)
1. Unabhängigkeit der Schwingungsdauer von der Schwingungsweite
(speziell auch bei deren Abnahme infolge Luftwiderstand und Reibung; umgekehrt

Pendelfaden oder Draht beschreibt je nach der Art der Aufhängung und des Pendelkörpers eine Ebene (diese läßt sich namentlich sichern durch die „Aufhängung“ des Pendelkörpers), teils elliptische Kegel- oder Kugelmäntel (bei biegsamem Faden oder „Cardanischer Aufhängung“ des Pendels). Die Gesetze der a) ebenen Schwingungen, b) Kegelschwingungen hängen miteinander in engem Zusammenhange, wie aus den Versuchen 4 bis 6 durch rechnerischen Behandlung (s. u. I, II) erhellen wird.

Ebene Schwingungen des Pendels. *Versuch 4.* Der Körper wird aus seiner tiefsten Lage, der **Lotlage (Mittellage)**, höher gehoben und von dieser ohne jeglichen seitlichen Anstoß gelassen (Herausheben mittels Fadens, der dann durchgebrannt wird). Das Pendel bewegt sich so in einer vertikalen Ebene, der **Schwingungsebene**, und zwar, da der Aufhängepunkt des Fadens und die Pendellänge als unveränderlich vorausgesetzt sind, bewegt sich jeder Punkt in einem Kreisbogen hin und her, indem er dieselbe Bahn wiederholt in gleicher Weise („periodisch“, schwingend, oszillierend) durchläuft. — In verschiedenen Zeitpunkten bildet der Bogen mit der Lotrechten verschiedene Winkel; diese (bezw. die zugehörigen Bogen) heißen die jeweiligen **Elongationen** des Pendels. Die erreichte Elongation heißt die **Schwingungsweite** (Amplitude), der Hergang des Pendels **volle Schwingung**, ihre Dauer von der Elongation zur Elongation **Schwingungsdauer** (Schwingszeit, Periode). Das Steigen aus der Elongation in die Grenzlage, wie das Sinken aus der Grenzlage in die Lotlage, erfordert je $\frac{T}{4}$ sec. — Ist $T = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \dots \frac{1}{n}$ sec, so führt das Pendel 1, 2, 3 ... n Schwingungen in je 1 sec aus; allgemein ist seine **Schwingungszahl** $n = \frac{1}{T} \dots (1)$; daher auch $T = \frac{1}{n} \dots (2)$; in Worten!

den Grenzlagen klein, nahe der Lotlage groß ist. (Das Pendel übt auf die entgegengehaltene Hand dort einen schwachen, hier einen starken Stofs aus; ähnlich wie ein sich selbst schließender Türflügel, der um seine Mittellage hin und her schwingt, leichter nahe der Grenz- als der Mittellage aufzuhalten ist; alles ähnlich dem auf der Kreisbahn hin und her fahrenden Wägelchen Fig. 4, S. 9 und Fig. 2, S. 23). Es ergibt sich daher die Aufgabe, das

Fig. 30.



Weg-Zeit-Gesetz solcher schwingende Bewegungen zu gewinnen. — Als Vorbereitung hierzu betrachten wir die gleichförmige Kreisbewegung bei den

b) **Kreis kegelschwingungen.** Versuch 5. Wird auf den Fußboden ein Blatt Papier mit vorgezeichnetem Kreise so gelegt, daß der Kreismittelpunkt unter die Lotlage des Pendels zu liegen kommt (Fig. 30), so gelingt es leicht, mit der Hand den Pendelkörper in solcher Geschwindigkeit längs des Kreisumfangs herumzuführen, daß er auch losgelassen diese Bewegung lange Zeit gleichmäßig fortsetzt. Ist der Kreisumfang z. B. in 12 gleiche Teile geteilt, und wird nach je $\frac{1}{12} T$ gezählt: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 0, 1, 2, ... entsprechen diesen gleichen Zeitstrecken gleiche Wege des kreisenden Pendelkörpers.

Versuch 6. Ist an dem Pendeldraht in Mannshöhe eine leichte Holzkugel angebracht, so

beschreibt diese binnen derselben Umlaufszeit von T sec einen kleineren wagrechten Kreis eben so gleichförmig. Durch Schattenprojektion erhalten wir eine der Bewegung des Pendelkörpers

Versuch 4 annähernd ähnliche schwingende Bewegung des Schattens der Holzkugel, wenn wir in möglichst großem Abstände von der Holzkugel in gleicher Höhe eine kräftige Lichtquelle aufstellen, so daß die Holzkugel auf einen hinter dem Pendel normal zu den Lichtstrahlen aufgestellten Schirm einen Schatten wirft. Der Schattenfleck bewegt sich längs einer wagrechten Geraden, welche (falls die Lichtstrahlen als parallel zueinander einfallend gedacht werden) gleich ist dem Durchmesser des Kreises, in dessen Umfang die Holzkugel sich bewegt. Diese Bewegung des Schattenflecks ist ungleichförmig, und zwar (wieder ähnlich

uch 7. Läßt man beim Versuch 5 das Pendel in einem Kreise von (z. B. halbem) Halbmesser kreisen, so bleibt trotzdem dessen Umlaufs- : annähernd) gleich; bei Versuch 6 schwingt daher der Schatten auch leichen Schwingungsdauer längs des ngen Durchmessers. —

bisher gewonnenen physikalischen An- n fassen wir nun in folgende phoro- Begriffe von Kreisungen und Sinus- ungen:

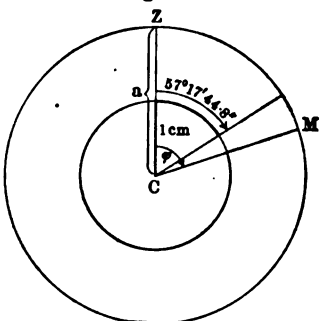
Die gleichförmige Kreisbewegung reisende Bewegung oder Krei- Längs des Umfanges eines Kreises 1 Halbmesser (Fig. 31) bewege sich t M (die Spitze des Bleistifts, eines rs ...) mit gleichbleibender Ge- gkeit $c \text{ cm sec}^{-1}$. Die Zeit, binnen

er Punkt M den vollen Umfang $2\pi a \text{ cm}$, z. B. von Z bis ach Z , einmal zurücklegt, heißt die **Umlaufszeit**; beträgt , so hat der kreisende Punkt M die Geschwindigkeit oder

chwindigkeit $c = \frac{2\pi a}{T} \text{ cm sec}^{-1} \dots (3)$, also $T = \frac{2\pi a}{c} \text{ sec}$.

kelgeschwindigkeit. Bekanntlich haben z. B. alle Minutenzeiger, 1 lange, in gewissem Sinne gleiche Geschwindigkeiten, nämlich geschwindigkeiten von 360° per Stunde“, wiewohl die Spitzen kurzer Zeiger lie Spitzen langer große Geschwindigkeiten in dem bisherigen es Wortes (§ 4 ff.) haben, die wir von jetzt an zum Unterschiede von schwindigkeit“ auch „Bahngeschwindigkeit“ oder „lineare Geschwindig- ennen werden. Näheres über Winkelgeschwindigkeit und Winkel-

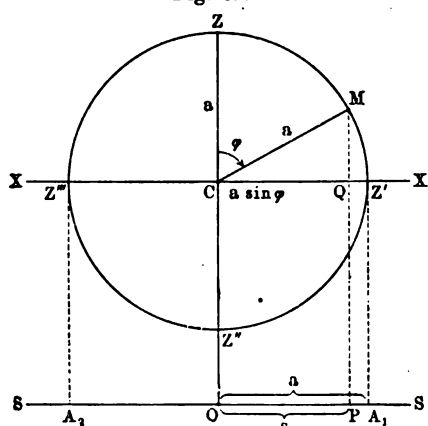
Fig. 31.



Winkelgeschwindigkeit $\alpha = \frac{2\pi}{T}$, somit $\alpha T = 2\pi$, $T = \frac{2\pi}{\alpha}$

Durch Einführung dieser Hilfsgröße α in die obige Gleichung c wird einfacher $c = \alpha a$. — Durchstreicht während t sec der Leitstrahl den $ZCM = \varphi$ WE, so ergibt sich als Beschreibung der gleichförmigen

Fig. 32.



Drehung des Leitstrahls $\varphi = \frac{2\pi}{T} t$ (dies analog dem We

Gesetz $s = ct$ eines in beliebig formter Bahn gleichförmig sich bewegendes Punktes, also auch gleichförmig kreisenden Punktes).

II. Die Sinusschwingung (einfache, harmonische Schwingung). — Der län gere Teil eines Kreises vom Halbmessergleichförmig kreisenden Punkt M (Fig. 32) werde auf der Ebene des Kreises in die Gerade, z. B. XX oder SS , projiziert. Entsprechend Q , bzw. P projiziert. Entsprechen dann einander die

des kreisenden Punktes M in Z, Z', Z'', Z''', Z, Z' , und des schwingenden Punktes P in O, A_1, O, A_2, O, A_1 . Ferner ist die Umlaufzeit T des kreisenden Punktes gleich der Schwingungsdauer des schwingenden Punktes, und der Radius des Kreises (Leitstrahl) ist gleich der Amplitude der Schwingung. Die Elongation $OP = s$ hängt von der seit dem letzten Durchgang durch den Punkt Z , bzw. O verflossenen Zeit t ab nach den Gleichungen $OP = CQ = CM \sin (\angle QMC) = a \sin \varphi$, also

$$s = a \sin \alpha t \quad \text{oder} \quad s = a \sin \frac{2\pi}{T} t \dots (5)$$

Wegen dieses Weg-Zeit-Gesetzes werden die aus der Projektion einer gleichförmigen Kreisbewegung hervorgehend gedachten Schwingungen „Sinusschwingungen“ genannt.

Setzen wir in Gleichung (5) z. B. speziell $t = \frac{T}{4}$, so wird $\frac{2\pi}{T} t = \frac{\pi}{2}$ und $\sin \frac{\pi}{2} = \sin 90^\circ = 1$; somit $s = a$. Ebenso für $t = \frac{T}{12}$ wird $s = a \sin 30^\circ = \frac{a}{2}$ u. s. f. Bewegte sich z. B. bei Versuch 5 die Holzklammer auf einem Kreise von a cm Halbmesser, so entsprechen für die schwingende Bewegung des Schattens im Versuch 6 einander:

$$\frac{-a \sin \alpha t}{-t} = a \frac{2 \cos \frac{\alpha t' + t}{2} \sin \frac{\alpha t' - t}{2}}{t' - t} = a \cos \alpha \frac{t' + t}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \frac{t' - t}{2}}{\alpha \frac{t' - t}{2}},$$

für $t' = t$ wird ¹⁾: $v = a \cos \alpha t \dots (6)$. — Hieraus folgt weiter:

$$\frac{-a \cos \alpha t}{-t} = a \frac{-2 \sin \frac{\alpha t' + t}{2} \cdot \sin \frac{\alpha t' - t}{2}}{t' - t} = -a \sin \alpha \frac{t' + t}{2} \cdot \frac{\sin \alpha \frac{t' - t}{2}}{\alpha \frac{t' - t}{2}},$$

für $t' = t$ folgt: $w = -\alpha^2 a \sin \alpha t$ oder $w = -\alpha^2 s \dots (7)$.

Die herleitungen der Gleichungen (6) und (7) vgl. LA 20.

Besondere besagt die überaus fruchtbare Gleichung (7) (analog wie für s nach dem Weg-Zeit-Gesetze $s = at^2$ folgte, daß die Beschleunigung weder von t noch von s abhängt, sondern daß sie konstant sei):

jeder Sinusschwingung ist die Beschleunigung w proportional, und zwar so, daß w der jeweiligen Elongation s im gegebenen Punkte von der Mittellage direkt proportional, entgegengesetzt gerichtet ist.

Umgekehrt hiermit den Gegensatz der Vorzeichen für Wege und Bewegungen bei der Bewegung des Wägelchens, Fig. 20, S. 23. — Aus der (7) folgt weiter als besonders merkwürdige Eigenschaft der

Isosynchronismus von Sinusschwingungen. Als sich bei Versuch 6 und 7 ein Wägelchen einmal in einem Kreise von a cm, ein andermal nur von $\frac{1}{2}a$ cm Halbwegte, waren die Umlaufzeiten des Pendelkörpers gleichwohl von nicht merklich verschieden, und daher war auch bei diesen Versuchen verschiedenen Amplituden a und $\frac{1}{2}a$ die Schwingungsdauer die gleiche oder: die Schwingungen waren **isochron**. Dementsprechend ist auch in den Zeit-Gesetzen beider Bewegungen, $s = a \sin \alpha t$ und $s = \frac{a}{2} \sin \alpha t$, die

Schwingungsdauer nur von $\alpha = \frac{2\pi}{T}$, nicht von der Amplitude a , bzw. $\frac{a}{2}$

5. — Nach der in Gl. 7 ausgesprochenen Haupteigenschaft der Sinus-

$w_1 = -\alpha^2 \cdot (-1) = \alpha^2$ und $\alpha = \sqrt{w_1}$. Hiermit nehmen Gl. (7) und Gl. (4) die physikalisch noch bedeutsameren Formen an:

$$w = -w_1 s \dots (8) \quad \text{und} \quad T = 2\pi \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{2\pi}{\sqrt{w_1}} \dots (9)$$

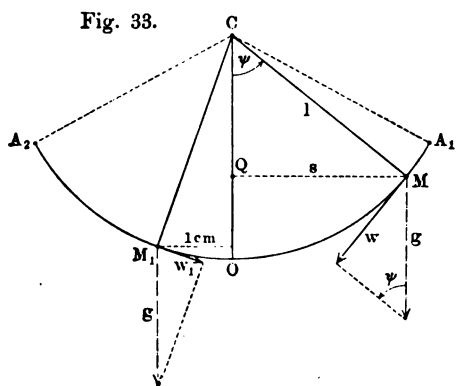
Durch Umkehrung des obigen Satzes über die in Gleichung (7) oder (8) ausgedrückte Grundeigenschaft der Sinusschwingungen erhalten wir nämlich den folgenden Satz, welcher die Ableitung der Schwingungsdauer einer Sinusschwingung bloß aus deren charakteristischer Beschleunigung erlaubt:

Ist bei einer Bewegung die Beschleunigung w der jeweiligen von einer Mittellage O aus gezählten Elongation s direkt proportional, aber entgegengesetzt gerichtet, so ist die Bewegung eine Sinusschwingung. Hat der Punkt in 1 cm Abstand von der Mittellage die charakteristische Beschleunigung w_1 , so ist, unabhängig von der Amplitude der Schwingung, die

Schwingungsdauer der Sinusschwingung $T = 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{w_1}} \dots (9)$

Eine der wichtigsten Anwendungen der Gleichung (9) besteht in der Lösung der Aufgabe: Die ebenen Schwingungen des einfachen Pendels von der Länge l cm an einem Orte mit der Schwerebeschleunigung $g \text{ cm sec}^{-2}$ sind zu beschreiben durch die Schwingungsdauer T (ferner durch die Schwingungszahl n und durch das Weg-Zeit-Gesetz).

Auflösung: Da infolge der unveränderlichen Pendellänge l der Pendelkörper auf einem Kreisbogen zu bleiben gezwungen ist, so entspricht jeder beliebigen



durch den Winkel ψ (Fig. 33) gemessenen Elongation ein Element des Kreisbogens, welches dieselbe Neigung gegen die wagrechte Richtung hat, wie eine schiefe Ebene von der Neigung ψ . Dasselbe ist gemäß dem Gesetz 4, § 6, die Komponente der Schwerebeschleunigung

$$w = -g \sin \psi = -g \cdot \frac{s}{l}, \quad \text{also}$$

$$w = -\frac{g}{l} \cdot s \dots \dots \dots (10)$$

wobei das Minuszeichen besagt, daß der Winkel ψ von der Lotlage weg, die Beschleunigung w gegen die

Lotlage hin gezählt wird. Die Vergleichung der Formel (10) mit der allgemeineren (8) zeigt, daß für das einfache Pendel die charakteristische Beschleunigung $w_1 = \frac{g}{l}$ ist. Daraus ergibt sich sofort durch Einsetzung in Gleichung (9) die

Schwingungsdauer des einfachen Pendels $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (11)$

und die Schwingungszahl des einfachen Pendels $n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (12)$

Bezeichnen wir speziell die Länge des Sekundenpendels mit l_1 , ergeben sich wegen $T = 2 \text{ sec}$ die besonderen Beziehungen:

$$l_1 = \frac{g}{\pi^2} \quad \text{und} \quad g = \pi^2 l_1 \quad \dots \quad (13)$$

Über die Verwertung dieser Beziehungen bei der praktischen Ermittlung von g an verschiedenen Orten der Erde vgl. § 33.

Indem in Gleichung (11) T nur von l und g , nicht von der Amplitude a abhängt, scheint in dieser Gleichung selbst auch schon der Beweis für den Isoperiodismus der Pendelschwingungen zu liegen. Doch ist zu bemerken, daß bei ihrer Herleitung s nur annähernd, nicht genau dieselbe Bedeutung hat wie in der allgemeinen Gleichung für Sinusschwingungen. Denn in Gleichung (7) bedeutete s den vom schwingenden Punkte wirklich zurückgelegten (geradlinigen) Weg; bei der Ableitung der Pendelformel aber bedeutet s die Halbsehne, während der wirklich zurückgelegte Weg jetzt der Kreisbogen ist. Die Ableitung trifft also nur mit demselben Maße von Annäherung zu, als für den Sinus der Bogen gesetzt werden darf, also auch um so genauer, je kleiner der Amplitudenwinkel ist (— eine bessere Annäherung vgl. LA 25).

LA 25.

Nur insoweit jede Pendelschwingung von beliebiger Amplitude a mit einer wirklichen Sinusschwingung übereinstimmt, gilt auch

für das einfache Pendel das Weg-Zeit-Gesetz $s = a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot t\right)$. . . (14)

Eben diese Gleichung gibt nun auch die vollständige Beschreibung für die Bewegung z. B. des Wägelchens auf der (reibungsfrei gedachten) krummen Bahn in Fig. 4, S. 9. — Wie groß die Amplitude beim Wägelchen oder beim Pendel wirklich wird, hängt ab entweder von der Grenzlage, aus welcher wir die Bewegung beginnen lassen, oder von der Stärke des Anstoßes, mit welchem wir es mit bestimmter Geschwindigkeit durch die Mittellage gehen lassen. —

Der Zusammenhang zwischen Pendelschwingung und geradliniger Sinusschwingung läßt sich anschaulich verfolgen, wenn wir beim obigen Versuch 6 einen Pendelkörper statt in einem Kreise in einer ellipsenartigen (aber doppelt gekrümmten [math. Anh. Nr. 26]) Linie sich bewegen lassen, so daß die große Achse der Ellipse der Ebene des Schirmes parallel zu liegen kommt. Der Schatten der Holzkugel bewegt sich dann nicht mehr auf einer Geraden, sondern die Bahn des Schattens krümmt sich nach abwärts (Versuch 8). Lassen wir schließlich die kleine Achse der Ellipse (welche zur Ebene des Schirmes normal steht) immer kleiner und zuletzt Null werden, so ist die Kreisung der Holzkugel ebenfalls in eine Pendelschwingung übergegangen, welche nun mit der des Schattens kongruent ist (Versuch 9). —

Anh. 28.

Andere Beispiele von Sinusschwingungen: Die Projektion kreisender Gestirne, z. B. der Jupitertrabanten, auf das Himmelsgewölbe (§ 187), des Kolbens bei Kurbelbewegung (§ 30), die Bewegung eines zwischen Spiralfedern eingespannten, auf wagrechten Schienen fahrenden Wägelchens (§ 18), überhaupt die Schwingungen sehr vieler elastischer Körper, z. B. jedes Punktes der Spiralfeder an Jollys Federwaage (§ 51, LA 30), die Schwingungen einer Kette unter dem Träger der Atwoodschen Fallmaschine (LA 27), die Bewegung der Körper in einem Schachte längs des Erddurchmessers (Galileis Aufgabe, LA 30), die Schwingungen einer Flüssigkeit in einer kommunizierenden Röhre (LA 28).

LA 30.

LA 27.

LA 30.

LA 28.

Näheres über Schwingungen überhaupt, speziell auch über Zusammensetzung von Sinusschwingungen, vgl. im ganzen VI. Abschnitt, namentlich § 62.

§ 13. Normalbeschleunigung (centripetale Beschleunigung).

Geschichtliches. Sowie GALILEI die Wurfbewegung in eine gleichförmige Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit nach der wagrechten Richtung OY (vergl. Fig. 34 mit Fig. 28, S. 28) und eine gleichmäßig beschleunigte in der lotrechten, also zu ersterer normalen Richtung OX der fallenden Körper zu zerlegen lehrte (§ 7), so hat HUYGENS (in dem schon genannten Werke „*Horologium oscillatorium*“ 1673) auch die gleichförmige Kreisbewegung in eine nach der Richtung der Kreistangente OY und eine dazu normale Bewegung ON zerlegt. NEWTON löste bald darauf die allgemeinere Aufgabe Bewegungen in beliebigen (weder parabolischen, noch kreisförmigen) Bahnformen mit beliebigen (konstanten oder veränderlichen) Geschwindigkeiten, und konnte so auf Grund der speziellen HUYGENSSCHEN Aufgabe die annähernd kreisförmige Bewegung des Mondes um die Erde, und weiterhin allgemeiner elliptischen Bewegungen der Planeten um die Sonne mit der Bewegung eines der Erdoberfläche geworfenen Körper vergleichen. —

Bei der Bewegung eines von O aus horizontal geworfenen Körpers muß nach der konkaven Seite der Bahn gerichtete lotrechte Bewegung schon Anfangspunkte O die volle Beschleunigung $g \text{ cm sec}^{-2}$, aber die Anfangsgeschwindigkeit Null haben; denn sonst würde sich die Wurfbahn nicht an die wagrechte Anfangsrichtung anschließen, sondern unter einem endlichen Winkel von ihr abzweigen (vergl. Fig. 16, S. 19). Ebenso haben wir uns jeder krummlinigen Bewegung zur tangentialen Geschwindigkeit und Normalbeschleunigung oder centripetale Beschleunigung hinzukommen zu denken. — Die Größe dieser Normalbeschleunigung wird bei der gleichförmigen Kreisbewegung wegen der überall gleichen Geschwindigkeit Krümmung einen konstanten Wert $b_{\perp} \text{ cm sec}^{-2}$, bei den übrigen krummlinigen Bewegungen wird sie einen veränderlichen Wert w_{\perp} haben (b_{\perp} lies: b normal, w_{\perp} lies: w normal). — Wir beginnen daher mit folgender

Speziellen Aufgabe: Wie groß ist die Normalbeschleunigung eines Punktes, der auf dem Umfange eines Kreises von $r \text{ cm}$ Halbmesser binnen der Umlaufzeit $T \text{ sec}$ mit der konstanten Bahngeschwindigkeit $c \text{ cm sec}^{-1}$ sich bewegt?

Erste Ableitung: Denken wir uns den Kreis in vertikaler Ebene und bewegliche den obersten Punkt des Umfanges passierend. Es entspricht dann Element des Kreises vom Radius r dem Elemente nächst dem Scheitel. Anh. 26. Parabel vom Parameter $p = r$ (Fig. 34; Anh. Nr. 26). Nun hatte sich bei der Berechnung des horizontalen Wurfs inversen Aufgabe (§ 11) aus den gegebenen Größen p und c als die zum Bahnelemente des Scheitels der Parabel notwendige Beschleunigung ergeben $g = \frac{c^2}{p}$. Da nun für den Kreis $g = b_{\perp}$, $p = r$, so auch für das Kreiselement die

$$\text{konstante Normalbeschleunigung } b_{\perp} = \frac{c^2}{r} \dots (1)$$

Durch diese erste Ableitung wird auch erst anschaulich, mit welchem Resultate wir die Gleichung $s = \frac{b}{2} t^2$ anwenden in der folgenden

zweiten Ableitung: Legt der bewegliche Punkt den Kreisbogen

Fig. 34.

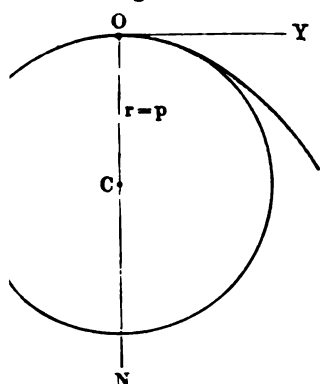


Fig. 35.

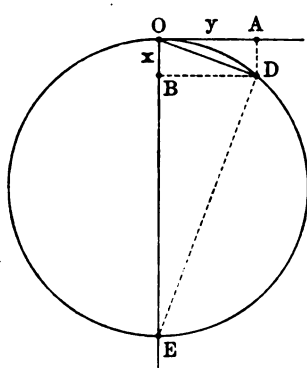


Fig. 35) binnen der kleinen Zeit τ zurück, so können wir uns Bewegung zerlegt denken in die gleichförmige längs der Tan- mit der Geschwindigkeit $c \text{ cm sec}^{-1}$ und in die gleichmäßig be- nigte längs OB mit der Beschleunigung $b_{\perp} \text{ cm sec}^{-2}$. Es sei

$= BD = y$, $OB = x$. Dann ist $y = c\tau$, $x = \frac{1}{2} b_{\perp} \tau^2$. Wegen $= \overline{OB} \cdot \overline{BE} \neq \overline{OB} \cdot \overline{OE}$ ist $c^2 \tau^2 = \frac{1}{2} b_{\perp} \tau^2 \cdot 2r$, woraus: $b_{\perp} = \frac{c^2}{r}$.

berdies ist wegen $c = \frac{2\pi r}{T}$ [§ 12, Gl. (3)] $b_{\perp} = \frac{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2}{r}$,

auch $b_{\perp} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ oder $b_{\perp} = 4\pi^2 \frac{r}{T^2}$ (2)

ie Gleichung (1) besagt durch das Auftreten des c im Zähler, dafs, wenn m und demselben Kreise ein Punkt längs des Umfanges langsamer, bzw. er sich bewegt, die zu dieser Geschwindigkeit hinzukommende Beschleuni- leiner bzw. gröfser anzunehmen ist. (Ähnlich müfsten wir an der Mond- che einen Stein mit kleinerer Geschwindigkeit horizontal werfen als an der rfläche, wenn er dort und hier kongruente Parabeln beschreiben sollte.

die Analogie für die folgenden einzelnen Gesetze durch!) — Wird dagegen akt mit derselben Bahngeschwindigkeit zuerst in einem grofsen, dann in kleinen Kreise bewegt, so ist in letzterem die Centripetalbeschleunigung . (Ist es ein Widerspruch, dafs die Gröfse r in Gleichung (1) im Neuner- chung (2) im Zähler auftritt?) Noch drei andere Ableitungen der Normal- unigung und ihre Beziehungen zu einander vergl. LA 31.

LA 31.

Wie und warum zu einer gleichförmig geradlinigen Bewegung eine zu rmale Beschleunigung hinzukommen müsse, damit eine gleichförmig nde Bewegung resultiere, läfst sich (aufer durch die Analogie zur Wurf- ung) noch auf mancherlei Art veranschaulichen. Z. B. War ein Käfer einen en Blechstreifen entlang gelaufen, so mufs sich seine Bewegung trotz

gleicher Geschwindigkeit ändern, wenn der Streifen krumm gemacht wird. Insbesondere lehrreich sind folgende drei

Anwendungen: 1. Wie erklärt es sich, daß bei dem Versuch 5, S. 8, zwischen dem Halbmesser a und der Bahngeschwindigkeit c des kreisenden Pendelkörpers eine bestimmte Beziehung bestehen muß, damit das Kreisen in wa 32. rechter Ebene gleichmäßig fort dauere? Vgl. LA 32.

2. Ein in geringer Höhe über der Erde wagrecht abgeschossenes Projektil fällt bei immer größerer Anfangsgeschwindigkeit an immer entfernteren Stellen auf 33. Boden. Würde die Anfangsgeschwindigkeit c so groß (rund 8000 m sec^{-1} , LA 33), daß $\frac{c^2}{R} = g$, also $c = \sqrt{gR}$, wo R der Erdradius ist, so ginge es als neuer Trabant um die Erde in einem Kreise. (Warum ist ein solcher Versuch nicht ausführbar?)

3. NEWTONS „Mondrechnung“. Dem Monde kommt infolge seiner Bewegung um die Erde annähernd im Abstände $a = 60$ Erdradien binnen der Umlaufzeit 34. $T = 27\frac{1}{2}$ d eine centripetale Beschleunigung γ zu, welche rund $3600 = 60^2 \text{ m sec}^{-2}$ so klein ist als die Beschleunigung g der an der Erdoberfläche frei fallenden oder geworfenen Körper (LA 34). — Weittragende Folgerungen aus dieser Beziehung vgl. § 21

Allgemeine Aufgabe: Ein Punkt bewege sich längs einer Bahn von veränderlicher Krümmung (Fig. 13, S. 11) mit veränderlicher Geschwindigkeit. Wie groß ist die (nun im allgemeinen ebenfalls veränderliche) Normalbeschleunigung w_{\perp} in einem Bahnelemente mit der Krümmungshalbmesser ρ , wenn daselbst die Bahngeschwindigkeit v ist?

Diese Aufgabe findet z. B. Anwendung bei der Bewegung der Planeten, die in Ellipsen (also Kurven veränderlicher Krümmung) mit veränderlicher Geschwindigkeit (nach KEPLERS „Flächensatz“, § 19) erfolgen. — Vorausgesetzt, daß sowohl die Geschwindigkeit v wie die Krümmung $\frac{1}{\rho}$ sich nur stetig von Element zu Element der Bahn ändern, zeigt eine tiefer gehende Überlegung, daß sich 21. von w_{\perp} nur um unendlich kleine Größen höherer Ordnung (math. Anh. Nr. 2) unterscheiden kann. — Deshalb erweitert sich Gl. (1) zu folgendem

allgemeinen Wert der Normalbeschleunigung: $w_{\perp} = \frac{v^2}{\rho}$. . . (2)

Indem auch bei nicht kreisförmigen Bewegungen die Normalbeschleunigung noch immer auch centripetale Beschleunigung genannt wird, ist unter dem „Centrum“, gegen welches das Bewegliche „hinstrebt“ (*petit*), der jeweilige 26. Krümmungsmittelpunkt (Anhang Nr. 26) verstanden, der nur beim Kreise zusammenfällt mit dem „Mittelpunkte“ kurzweg. (Über eine dritte Bedeutung von „Centrum“ = Centralpunkt bei Centralbewegungen vgl. § 19.)

Zusammenfassung: Wie nach § 8 (Ende) zwischen Geschwindigkeit und Richtung mehrere Analogieen bestehen, so entsprechen einander bei gegebenem Weg-Zeit-Gesetz und gegebener Bahnform auch die

Änderung der Bahngeschwindigkeit, gemessen durch die Beschleunigung längs der Bahn, d. i. die Tangentialbeschleunigung.	Änderung der Bewegungsrichtung, gemessen durch die Beschleunigung normal zur Bahn, d. i. die Normalbeschleunigung.
---	--

Im erweiterten Sinne bedeutet somit „Beschleunigung“ teils Änderung (Vergrößerung oder Verkleinerung) der Geschwindigkeit, teils A

kung. In diesem Sinne können wir auch von nun an sämtliche denkbaren Bewegungen eines Punktes einander gegenüberstellen als

1. **konstante Bewegungen** (gleichförmige im allgemeinen Sinne), bei denen Geschwindigkeit und Richtung konstant ist: sind die **gleichförmigen geradlinigen Bewegungen**;

2. **veränderliche Bewegungen** (ungleichförmige oder beschleunigte im allgemeinen Sinne), bei denen sich die Geschwindigkeit oder die Richtung (oder beides) ändert: es sind die **ungleichförmig geradlinigen, die gleichförmig krummlinigen und die ungleichförmig krummlinigen Bewegungen**.

§ 14. Mechanische Spannung. — Übergang von der Phoronomie zur Dynamik.

Die bisher erörterten Begriffe von Weglänge, Zeitstrecke, Geschwindigkeit, Beschleunigung, Zusammensetzung von Bewegungen, Bahnformen, Bahnkrümmungen u. s. f. führen ausschließlich auf **Raum** und **Zeit** als Vorstellungselemente zurück (psych. Anh. Nr. 41). Diejenigen physikalischen Erscheinungen aber, Anh. 41. welche man unter dem Namen „mechanische Erscheinungen“ zusammenfaßt, weisen außer jenen räumlichen und zeitlichen Merkmalen noch ein drittes auf, zu dessen Bezeichnung die gewöhnliche Sprache am ungezwungensten das Wort **Spannung** darbietet (psych. Anh. Nr. 41). Ziehen z. B. Pferde einen Wagen, so Anh. 41. können die Gestalt der Bahn, die Geschwindigkeit dieser Bewegung u. s. f. ganz so nämlichen sein, wenn der Wagen leicht oder schwer beladen ist; im letzteren Falle aber zeigen die Muskeln der Pferde, die Stränge, die Radachsen etc. viel stärkere Spannungen als bei geringer Belastung. Auch wird z. B. eine Kettenbrücke, über die der schwer beladene Wagen fährt, in stärkere Spannung geraten als unter dem leicht beladenen. — Mit diesen Spannungszuständen gehen zwar immer Hand in Hand Deformationen (da es absolut starre Systeme nicht gibt, 50); aber die Verlängerung, welche z. B. ein Kautschukstreifen durch Ziehen an beiden Enden erfährt, ist nicht selbst die Spannung des Streifens. Über Spannungszustände bei „Gleichgewicht“ vergl. § 17. —

Ist das mechanische Verhalten eines Körpers (Punktes) nach seinen räumlichen, zeitlichen und Spannungsmerkmalen vollständig beschrieben, so erklären wir es, indem wir über den einen Körper hinaus auch auf die „Umgebung“ achten, in welcher und durch welche der Körper gesetzmäßige Änderungen dieses Verhaltens erfährt. Beachten wir z. B. an einem frei fallenden Körper und ebenso an einem durch sein Gewicht eine Schnur spannenden Körper, daß zu allen Zeiten und an allen Orten diese Bewegung bzw. Spannung gegen die Erde hin (genauer: normal zur Erdoberfläche) gerichtet ist, so schliessen wir aus dieser beobachteten Regelmäßigkeit mit Recht, daß Stein und Erde in einer **Abhängigkeitsbeziehung zu einander** stehen. Diese meinen wir im Grunde, wenn wir sagen, zwischen Stein und Erde wirke die „Schwerkraft“. — Allgemein: Daß zwischen zwei Körpern *A* und *B* eine **mechanische Kraft** (log. Anhang Nr. 35) Anh. 35. wirke, schliessen wir, wenn wir die Bewegungs- und Spannungszustände von *A* in gesetzmäßiger Weise sich ändern sehen mit bestimmten Änderungen der gegen-

weitert, daß immer schwierigere Aufgaben auf Grund der nämlichen physikalischen Einsichten mathematisch lösbar wurden.

Vor GALILEI waren es nur Aufgaben des Gleichgewichts, der sogen. Statische, die mit Erfolg gelöst wurden. So sprach ARCHIMEDES, zunächst jedenfalls auf Grund praktischer Beobachtungen, die Gesetze für das Gleichgewicht am Hebel (§ 29), für das Schwimmen der Körper (§ 40) u. dgl. aus, machte aber die Gesetze zum Gegenstande streng wissenschaftlicher Untersuchung, indem er auch sie auf verhältnismäßig einfache Tatsachen (das Gesetz des gleichartigen Hebels, das Gesetz des Auftriebes) zurückzuführen, bzw. aus diesen abzuleiten unternahm. —

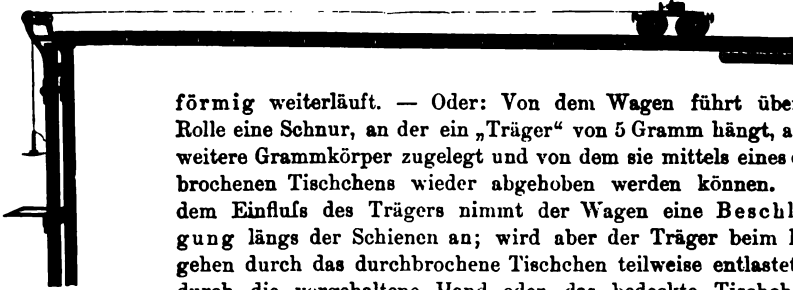
Gegenwärtig werden die Gesetze der Statik als spezielle Fälle (oder Grenzfälle) der Kinetik behandelt; es ist deshalb nicht mehr nötig, die Dynamik in Statik und Kinetik auch äußerlich zu trennen. —

Ehe wir an der Spitze des folgenden Abschnittes die drei Prinzipien der Dynamik in strenger Fassung formulieren, um dann die mehr oder minder speziellen mechanischen Gesetze und Erscheinungen aus ihnen zu deduzieren, veranschaulichen wir diese Prinzipien durch folgende drei

Vorversuche: Die bei den Versuchen des § 2 benutzte Schienenbahn und die Wägelchen werden nach Fig. 36 so aufgestellt, daß durch schwache Neigung der Schienen der Einfluß der Reibung wieder kompensiert wird. Es entspricht dann

I. **Trägheitsprinzip**, daß das Wägelchen auf einmaligen Anstoß gleichförmig weiterläuft. — Oder: Von dem Wagen führt über eine Rolle eine Schnur, an der ein „Träger“ von 5 Gramm hängt, an dem ein weiterer Grammkörper zugelegt und von dem sie mittels eines durchbrochenen Tischchens wieder abgehoben werden können. Durch den

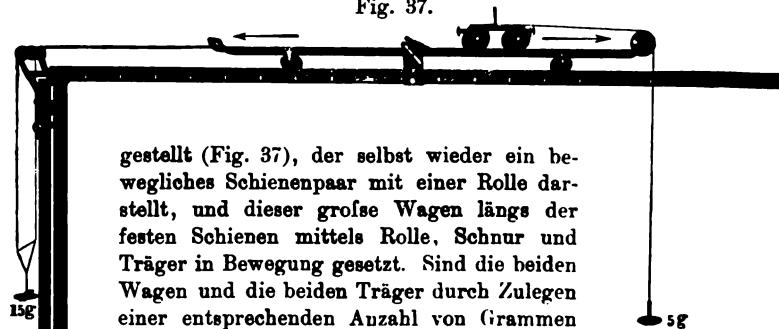
Fig. 36.



Einfluss des Trägers nimmt der Wagen eine Beschleunigung längs der Schienen an; wird aber der Träger beim Durchgehen durch das durchbrochene Tischchen teilweise entlastet, so bewegt sich der Wagen mit kleinerer Beschleunigung, bzw. gleichförmig weiter.

II. **Unabhängigkeitsprinzip:** Der kleine Wagen wird auf einen länglichen Wagen aufgestellt (Fig. 37), der selbst wieder ein bewegliches Schienenpaar mit einer Rolle darstellt, und dieser große Wagen längs der festen Schienen mittels Rolle, Schnur und Träger in Bewegung gesetzt. Sind die beiden Wagen und die beiden Träger durch Zulegen einer entsprechenden Anzahl von Gramm-

Fig. 37.



belastet, daß die Beschleunigung des kleinen Wagens in Bezug auf den großen gleich und entgegengesetzt ist der Beschleunigung des großen Wagens in Bezug auf die Schienen, so bleibt bei gleichzeitigem Wirken der Träger der kleine Wagen in Bezug auf die Schienen in Ruhe.

III. Gegenwirkungsprinzip: Die Schienen werden horizontal ausgereckt,

Fig. 38.



wischen beiden Wagen eine Spiralfeder gespannt (Fig. 38) und dann die beiden Wagen so auseinander gezogen, daß in der Spiralfeder eine Zugspannung entsteht. Losgelassen laufen die beiden Wagen gegeneinander. Haben die beiden Wagen samt entsprechender Belastung die gleiche Zahl von Gramm, so nehmen sie gleiche Beschleunigungen in Bezug auf die Schienen an und beschreiben daher gleiche Wege in gleichen Zeiten. Hat dagegen der eine Wagen z. B. dreimal so viel Gramm als der andere, so ist der von ihm zurückgelegte Weg dreimal so klein als der des anderen. — Abänderung des Versuches für Druckspannung!

Das Wort „Gramm“ wurde im vorstehenden ganz im Sinne des alltäglichen Sprachgebrauches, nämlich für diejenigen Messing- (Aluminium-, Platin-) Körper verwendet, welche vom Mechaniker mit der Bezeichnung 1 g (ähnlich wie Dekagramm, Kilogramm mit $10\text{ g} = 1\text{ dkg}$, $1000\text{ g} = 1\text{ kg}$) geliefert werden. Über die Definition des Gramms als Masseneinheit vergl. § 16.

B. Dynamik des Punktes.

a) Erklärung mechanischer Erscheinungen mittels der Begriffe Kraft und Masse (Dynamik im engeren Sinne).

§ 15. Die drei Prinzipien der Dynamik des Punktes.

I. Trägheits- und Beharrungsprinzip: a) Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so hat er keine Beschleunigung.



Ist hiernach ein Massenpunkt M (Fig. 39) von einem bestimmten Zeitpunkte an „sich selbst überlassen“, d. h. jeder mechanischen Einwirkung entzogen, und hatte er in jenem Zeitpunkte eine Bewegung mit bestimmter Geschwindigkeit c nach bestimmter Richtung MX , so bewegt er sich geradlinig gleichförmig mit jener Geschwindigkeit in jener Richtung weiter. — Daß ein in Ruhe befindlicher Massenpunkt nicht „von selbst“ in Bewegung gerät, d. h. so lange

in Ruhe verbleibt, als er jeder mechanischen Einwirkung entzogen ist. Er läßt sich als ein besonderer Fall (Grenzfall) des Gesetzes für die Bewegung auffassen, nämlich für $c = 0$.

b) **Hat ein Massenpunkt Beschleunigung, so wirken auf ihn Kräfte.** — Nach der verallgemeinerten Bedeutung, welche der Begriff „Beschleunigung“ zu Ende des § 13 erhalten hat, besagt die Satz b), daß, so oft wir an einem Massenpunkte eine Veränderung der Geschwindigkeit oder der Richtung (oder beides zugleich) beobachten, wir auch in seiner Umgebung bestimmte Ursachen (Kräfte) für das Zustandekommen dieser Geschwindigkeits- und Richtungsänderungen entdecken können. Eben diese Ursachen der Beschleunigungen bezeichnen wir dann als „mechanische Kräfte“ (Über die Arten mechanischer Kräfte vergl. den folgenden Paragraphen).

Wie aus dem Gesetze a) das Gesetz b), so folgt aus b) auch a); beide Gesetze sind also sachlich äquivalent (aber darum noch nicht logisch identisch).

Anh. 38. Anhang Nr. 38).

Nicht zulässig wären die beiden folgenden noch denkbaren Umkehrungen der Sätze a) und b): c) „Wirken auf einen Massenpunkt Kräfte, so hat er Beschleunigung“. Dieser Satz gilt nämlich deshalb nicht, weil die Kräfte einzeln das Gleichgewicht halten können; die Bedingungen, unter welchen dies geschieht, werden im § 17 entwickelt. — Eben deshalb gilt auch nicht die Umkehrung d): „Hat ein Massenpunkt keine Beschleunigung, so wirken auf ihn keine Kräfte“. Vielmehr sind es in Wirklichkeit meistens gerade die Fälle eines solchen Gleichgewichts von Kräften, in denen sich ein Körper so bewegt, wie wenn er bloß infolge der Trägheit bewegt (— nur unterläge er dann keiner Spannung).

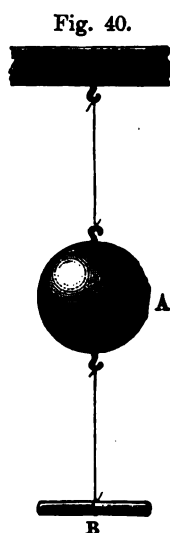
Beispiele: Ein Dampfbahn-, ein Pferdebahnwagen fährt von der Haltestelle mit zunehmender Geschwindigkeit ab, durchheilt mit nahezu konstanter Geschwindigkeit die „Strecke“ und läuft mit abnehmender Geschwindigkeit in der nächsten Haltestelle ein. Die Dampfkraft der Lokomotive, bzw. die Muskelkraft der Pferde hat zu Beginn der Fahrt Beharrungswiderstand und Reibung zu überwinden; nach erlangter Fahrgeschwindigkeit steht sie mit der weiterhin allein zu überwindenden Reibung im Gleichgewichte; durch Verwendung der Bremsen wird die Reibung vor dem Anhalten gesteigert, so daß sie über die Beharrung das Übergewicht erlangt (Gegendampf). — Auch bei den Vorversuchen zu Ende des vorigen Paragraphen war die gleichförmige Bewegung des Wägelchens nicht eine solche ohne alle Kräfte; sondern der Schwerkraft, die sonst das Wägelchen von den (durch die) Schienen hätte hinabfallen machen, wurde durch den Widerstand der Schienen das Gleichgewicht gehalten. Indem überdies jener gleichförmigen Bewegung eine beschleunigte vorausging und eine verzögerte folgte, als das Wägelchen aufgehalten wurde und in stetigem Übergange aus der Bewegung zur Ruhe gelangte, erläutert jener Vorversuch auch die folgenden, technisch viel gebräuchteren Begriffe

Anlauf, stationärer Gang, Endlauf. Ist ein Massenpunkt anfangs im Ruhezustande, so kann er aus diesem nur durch (gleichmäßig oder ungleichmäßig) beschleunigte Bewegung, im sogenannten **Anlauf**, in den Zustand der Bewegung geraten. Solange dann diese

Bewegung gleichförmig ist, wird sie als **stationärer Gang** bezeichnet. Der Punkt aus diesem Bewegungszustande wieder zur Ruhe zurückzukehren, so kann das nur in (gleichmäÙig und ungleichmäÙig) veränderter Bewegung, im sogenannten **Endlauf** (Auslauf), geschehen.

Als augenfällige Beispiele für das Trägheits- und Beharrungsgesetz pflegen angeführt zu werden: Das Ausspritzen einer Feder, das Spritzen der Räder, Leifsteine, das Befestigen des Hammerkopfes an dem Stiel (das AufstoÙen des Stieles auf den Amboss; das Umfallen eines Menschen beim raschen Anfahren oder Anhalten des Wagens (das Spritzen in der Richtung der Fahrt!); das Überfließen des Wassers einer rasch in Bewegung, bzw. rasch in Ruhe verbleibenden Wanne; ein Laufender kann nicht augenblicklich stehen bleiben (Bremsen der Wagen); Schwungräder. — Durchschießen einer Fensterscheibe: bei großer Geschwindigkeit macht das Projektil ein scharf abgegrenztes kleines Loch, bei kleiner Geschwindigkeit zertrümmert es die Scheibe. Ähnlich: Die Masse *A* wird sich zwischen zwei Fäden (Fig. 40). Wird unten an *B* nachgezogen, so reißt der untere, wird an *B* langsam gezogen, so reißt der obere Faden. Wird auf einen Menschen ein Amboss gelegt und auf diesen heftig gehämmert, so empfindet der Mensch sehr schwach. — Bei den letzteren Versuchen ist die Übertragung des Bewegungsimpulses durch verhältnismäßig große Massen hindurch von den zwischen den Massen wirkenden Molekularkräften mit abhängig (§ 58).

Inwieweit machen sich in diesen Erscheinungen neben dem auch das II. und das III. Prinzip der Dynamik geltend?



II. Unabhängigkeitsprinzip: Die durch eine Kraft an einem Massenpunkte hervorgerufene Beschleunigung ist unabhängig von dem jeweilig schon vorhandenen Bewegungszustande des Punktes.

Die auffallendsten Beispiele für dieses Prinzip geben, wie schon erwähnt (§ 45), die Wurfbewegungen. So zeigen z. B. *Versuche* am Wurfapparat (Fig. 17, S. 20), daß eine Kugel, mit beliebiger Anfangsgeschwindigkeit horizontal geworfen, nicht früher und nicht später ein bestimmtes tieferes Niveau erreicht als eine nur frei fallende. Das Sinken beider Kugeln schreiben wir derselben Schwerkraft zu. Diese findet den Körper, der sich zum freien Fall anschickt, in Ruhe, den horizontal geworfenen aber schon in Bewegung; gleichwohl erhalten beide die gleichen Beschleunigungen, und nur deshalb erreichen sie auch zum Sinken aus dem einen in das andere Niveau die gleiche Zeit. — Ein noch einfacheres, wenn auch weniger auffallendes Beispiel gibt aber schon der freie Fall selbst. Denn auch bei ihm findet die Schwerkraft den Körper anfangs mit der Geschwindigkeit Null, später mit immer größeren Geschwindigkeiten vor, erteilt ihm aber doch immer die gleichen Geschwindigkeitszunahmen binnen gleicher Zeiten. —

III. Gegenwirkungsprinzip: Jede mechanische Einwirkung eines Punktes *A* auf einen anderen *B* ist begleitet von einer gleichgroßen Gegenwirkung des *B* auf *A*.

Beim Vorversuch zum III. Prinzip (S. 46) veranschaulichte uns die zwischen den beiden Wägelchen (*A* und *B*) gespannte Spiralfeder die eine gegenseitige Wirkung, welche gleichzeitig zwischen dem einen und dem anderen Wagen stattfand. Würde z. B. *B* losgebunden und die Feder nicht anderweitig befestigt, so käme es innerhalb des bloß aus dem Wagen *A* und der Feder bestehenden Systems zu keiner Spannung und keiner Beschleunigung mehr; ebenso beim Losbinden des *A*. Dafs wir hier die von der gespannten Feder auf beide Wagen ausgeübten Kraftwirkungen als gleich bezeichnen, entspricht folgender Vorstellung: Anstatt *A* seitens *B* und *B* seitens *A* mittels einer und derselben Feder sich zu lassen, denken wir uns zuerst *A* allein und dann *B* allein durch die Schwerkraft und einen passend belasteten Träger wie beim Versuch für das I. Prinzip beschleunigt. Es würde dann beidemal die gleiche Belastung dem grofsen Wagen und dem kleinen Wagen die grofse Beschleunigung erteilen.

NEWTON hat das zuerst von ihm ausdrücklich ausgesprochene Gegenwirkungsprinzip erläutert durch den Hinweis auf die Anziehung zwischen Eisen und Magnet. Nicht nur der Magnet (den man sich mit Vorliebe als „aktiv“ denkt) wirkt auf das Eisen, sondern auch das (scheinbar „passive“) Eisen auf den Magnet. Schwimmen beide mittels je einer Korkscheibe auf Wasser (*Versuch!*), so nehmen in Bezug auf das Wasser beide eine beschleunigte Bewegung gegeneinander an und üben nach erfolgter Berührung beide einen Druck aufeinander aus. Ebenso gewöhnte man sich erst seit NEWTON an die Auffassung, dafs nicht die Erde den Stein, sondern auch der Stein die Erde „anzieht“. Dafs solche Anziehungen einander gleich seien, beweist NEWTON durch Hinweis darauf, dafs, wenn z. B. ein Berg durch die Erde stärker angezogen würde, als er die Erde anzieht, beide zusammen eine Bewegung in der Richtung Berg—Erde annehmen müßten.

Oft können wir uns vorstellen, dafs durch die Wirkung die Gegenwirkung hervorgerufen werde. So wenn eine Schnur an einem in einer Mauer steckenden Haken befestigt ist, und wir in dem Mafse, wie wir mit der Hand an der Schnur den Haken aus der Mauer herauszuziehen suchen, umgekehrt die Hand zur Mauer hingezogen empfinden. — Ebenso: Wenn ein Arbeiter einen Eisenbahnwagen zu verschieben hat und so unvorsichtig ist, seine Hand gegen eine herausragende scharfe Ecke oder einen Nagel wirken zu lassen, so empfindet er die Gegenwirkung des Wagens so, wie wenn dieser ihm die Spitze in die Hand drücken wollte. Auch der Wagen auf den festen Schienen „weckt“ durch seinen Druck nach abwärts in diesen einen Gegendruck nach aufwärts. — Ein besonderer Fall solcher Gegenwirkung im engeren Sinne ist es auch, was wir im Anschluß an das Gesetz I b als „Beharrungswiderstand“ bezeichnen. An sich sagt das Gesetz I b nur, dafs, wenn ein Massenpunkt sich nicht geradlinig und gleichförmig bewegt, er durch äufsere Kräfte zu den Abweichungen von der Geradlinigkeit und Gleichförmigkeit der Bewegung veranlaßt wird. Es ist eine darüber schon hinausgehende und unter das Gesetz III fallende Tatsache, dafs er auf diese Kräfte, von denen jene Einwirkung ausging, ebenfalls eine Einwirkung ausübt. Nur in diesem Sinne darf man den (von KEPLER zuerst gebrauchten) Ausdruck *vis inertiae*, „Kraft der Trägheit“, verstehen; denn ihrem ursprünglichen Begriffe nach stellt „Trägheit“ einen Gegensatz zu „Kraft“ dar (weshalb man auch z. B. nicht sagen soll: „die Trägheit bewirkt, dafs ein horizontal geworfener Körper diese Bewegungskomponente beizubehalten sucht“ u. dergl.; sondern nur etwa: „der Körper bewegt sich infolge der Trägheit“ in horizontaler Richtung weiter“ oder noch besser: er bewegt sich „gemäß dem Trägheitsgesetze“).

der mit weiteren 5 g belastete Träger statt der Gesamtmasse 500 g eine von 1000 g in Bewegung zu versetzen hat. — Um weiter statt der Beschleunigung $b = 10 \text{ cm sec}^{-2}$ z. B. $b = 20 \text{ cm sec}^{-2}$ zu erhalten, wird entweder in

Versuch 3 die Kraft verdoppelt, d. h. wir legen zur Masse des Trägers noch 5 g und belasten den Wagen bis 490 g; oder es wird in

Versuch 4 die Masse halbiert, d. h. wir lassen die Masse des Trägers sein und belasten den Wagen bis 245 g.

Ist also z. B. die Masse des unbelasteten Wagens 180 g und nennen wir die Anzahl der an der Schnur sinkenden Gramme m , die Gesamtzahl der zu beschleunigenden Gramme M , so gehören folgende Zahlen zusammen:

$m_1 = 5$	$M_1 = 5 + 180 + 315 = 500;$	$b_1 = 10 \text{ cm sec}^{-2}$
$m_2 = 10$	$M_2 = 10 + 180 + 810 = 1000;$	$b_2 = 10 \text{ cm sec}^{-2}$
$m_3 = 10$	$M_3 = 10 + 180 + 310 = 500;$	$b_3 = 20 \text{ cm sec}^{-2}$
$m_4 = 5$	$M_4 = 5 + 180 + 65 = 250;$	$b_4 = 20 \text{ cm sec}^{-2}$

Größer als g kann b bei unseren Versuchen nie werden, wohl aber kann b bei Wahl von sehr kleinen m und sehr großen M beliebig nahe der Null kommen. — Allgemein ist bei allen jenen Versuchen $b = \frac{m}{M} g \text{ cm sec}^{-2}$. Hier nur das Verhältnis $m:M$ vorkommt, so setzt diese Formel noch kein bestimmtes Maßsystem für m und M voraus. —

Um nun für die bei diesen Versuchen sowie bei sämtlichen mechanischen Erscheinungen auftretenden Massen und Kräfte feste Maßeinheiten und Maßzahlen zu bekommen, schließen wir so: Legen wir die Träger, statt sie in Beschleunigung sinken zu lassen, ruhig auf die Hand, so empfinden wir einerseits bei $m_1 = m_4 = 5 \text{ g}$ einen schwächeren, bei $m_2 = m_3 = 10 \text{ g}$ einen stärkeren Druck; desgleichen einen Zug, wenn wir die Schnur oberhalb des Trägers fassen oder ihn an einer Spiralfeder aufhängen.

Denken wir uns andererseits, jene 5 oder 10 g (oder was immer für ein anderer Körper) erhielten statt der Beschleunigung $g = 1000 \text{ cm sec}^{-2}$ an irgend einem Punkte des Weltraumes nur eine Beschleunigung von 500 cm sec^{-2} (wie es bei hinreichender Höhe über der Erdoberfläche wirklich ist, § 20, desgleichen an der Oberfläche des Mondes 6 mal so klein, an der Oberfläche der Sonne 28 mal so groß als an der Erdoberfläche), so würden wir die auf jene Körper wirkende beschleunigende Kraft 2 mal so klein (bzw. 6 mal so klein, 28 mal so groß) nennen.

Wir messen also die Größe der Kraft einerseits (statisch) nach der Druck- oder Zug-Spannung; andererseits (kinetisch) nach der Beschleunigung, welche ein und derselbe Körper infolge dieser Kraft erfährt. — Dabei können sich an dem Körper manche seiner Eigenschaften ändern (z. B. sein Wärmegrad und infolgedessen sein Volumen, desgleichen sein Volumen durch Zusammendrücken und dergl., seine Farbe infolge Beleuchtung mit verschiedenfarbigem Licht und dergl.), ohne daß die für sein mechanisches Verhalten allein maßgebende Größe, seine „Masse“, sowie das nach der Größe dieser Masse sich richtende „Gewicht“ (d. i. die statische Wirkung der Schwerkraft) sich ändert.

Bei der Feststellung aller Maßsysteme, welche über die Messung von Raum- und Zeitgrößen hinausgehen, war die erste Sorge, einen möglichst unveränderlichen oder immer wieder in genauer Kopie herstellbaren Normalkörper behufs Vergleichung von Stoffmengen festzustellen (Afs, Pfund der verschiedenen Staaten Unze, Gran, . . .). Im folgenden wird, wie auch schon früher (§ 3 ff), das

meter-Sekunde-Gramm-System (Anh. 1) zu Grunde gelegt, in welchem Anh. 1. folgenden Definitionen gelten:

Einheit der Masse ist im C-S-G-System die Masse des „Grammvers“, d. i. die Masse desjenigen Körperchens, das nach wissenschaftlicher Prüfung (nämlich mittelbarer Vergleichung mit dem Pariser grammkörper, der wieder nach 1 dm³ reinen Wassers von 4° C gefertigt wurde, math. Anh. 5), die Bezeichnung **1 Gramm** (1 g) ^{Anh. 5.} erhalten hat. — Ebenso schreiben wir allen, wie immer sonst befehlten Körpern die Masse von 1 g, bzw. von mg zu, welche an einer guten Wage (§ 29) einem, bzw. m solchen Grammkörperchen Gleichgewicht halten.

Einheit der Kraft ist die Kraft, die der Einheit der Masse die Einheit der Beschleunigung erteilt. Im C-S-G-System wird als **Einheit 1 Dyn** gewählt, d. i. die **Kraft, die der Masse von 1 g Beschleunigung von 1 cmsec⁻² erteilt** (LA 35). — Wie ferner LA 35. obig große Kräfte in Dyn gemessen werden, zeigt zunächst die Aufgabe: Mit wieviel Dyn wirkt die Schwerkraft auf eine Masse von mg , indem sie ihr die Beschleunigung von g cm sec⁻² erteilt?

1. Empfinge 1 g nur 1 cm sec⁻², so wirkte die Schwere mit 1 Dyn;
 empfängt 1 g g cm sec⁻², so wirkt die Schwere mit g Dyn;
 empfangen mg g cm sec⁻², so wirkt die Schwere mit mg Dyn.

Da wir uns dieselbe Anzahl mg Dyn auf die mg auch noch wirkend denken, so müssen diese der Schwere nicht im freien Falle folgen können, sondern wenn sie eine feste wagerechte Unterlage denjenigen Druck ausüben, welchen man das **totale Gewicht** (*pondus*) des Körpers nennt, so können wir die gefundene Anzahl mg der beschleunigenden Schwerkraft auch der Maßzahl p des Gewichtes gleichsetzen und erhalten als Maßformel für die

konstante Kraft der Schwere an einer Masse von mg (lies: m Gramm):

$$p = mg \text{ Dyn; somit } g = \frac{p}{m}, \quad m = \frac{p}{g} \text{ (in Worten!).}$$

Dafs die Schwere eine „konstante Kraft“ sei, heifst vollständiger: legen wir einen Körper, z. B. einen Stein, ein Buch, . . . , an verschiedene Orte A, B, C . . . einer über einer Stelle der Erdoberfläche errichteten Loten (und zwar zu beliebigen Zeiten), und lassen wir ihn von diesen verschiedenen Punkten aus einerseits frei fallen, so beginnt jede dieser Bewegungen mit der gleichen Beschleunigung; halten wir andererseits den Körper an jenen Orten fest, so übt er überall den gleichen Zug (Druck) aus (dafs beide Tatsachen nur annähernd zutreffen, vergl. § 20). Gesetzt nun, der Körper werde im Punkte A frei fallen gelassen, so dafs er in dem tiefer gelegenen Punkte B mit einer Endgeschwindigkeit v ankommt, und wäre von B an die Geschwindigkeit Null, so würde der Körper nach dem Trägheitsprinzip (§ 15, I.)

Bewegung mit der Geschwindigkeit v gleichförmig fortsetzen (vergl. die Bewegung des Wagens am Schienenapparat bei Aufhalten des Trägers, sowie an der Fallmaschine — s. u. — nach Abheben des Übergewichtes). Da aber in B wieder die Schwere in gleicher (kinetischer wie statischer) Gröfse wirkt, erhält er nach dem Unabhängigkeitsprinzip (§ 15, II) auch hier die

gleiche Beschleunigung, wie wenn er von B aus mit der Anfangsgeschwindigkeit Null sich zu bewegen begonnen hätte; und so in allen tiefer gelegenen $C, D \dots$ — So erklärt es sich also aus dem I. und II. Prinzip der Mechanik, auch allgemein, daß überhaupt an demselben Körper eine konstante Beschleunigung erzeugt.

(Eine logisch noch strengere Ableitung der Gleichung $p = mg$ und Verallgemeinerung $f = mw$ hätte ausschließlich aus den Definitionen „Kräfte“, „gleicher Massen“, „gleicher Beschleunigungen“ und den drei Prinzipien der Dynamik zu erfolgen; vgl. log. Anh. Nr. 37.

Die Gleichung $p = mg$ läßt sich zuerst verallgemeinern auch für konstante Kräfte, welche mit der Schwere nichts zu tun haben; z. B.

Fig. 41.



das Wägelchen längs der wagrechten Schienenbahn, durch den sinkenden Träger ziehen zu lassen, durch die Kraft unserer Hand so ziehen, daß eine zwischen dem Wägelchen gespannte Feder während der gleichförmigen Bewegung immer dieselbe Verlängerung solchen Fällen empfiehlt es sich, statt der Buchstaben p und w welche speziell auf die Schwere sich beziehen (*p*ondus, *g*ravitas = Schwere), allgemeiner zu setzen k (konstant) und b (Beschleunigung, bleibend). Jene Gleichung $p = mg$ verallgemeinert sich dann zu dem Satze:

Um an einer Masse von m g eine konstante Beschleunigung von b cm sec⁻² hervorzubringen bedarf es einer

konstanten Kraft $k = mb$ Dyn; da

$$b = \frac{k}{m}, \quad m = \frac{k}{b}, \quad \text{in Worten!}$$

Ein Beispiel zu dieser allgemeineren Gleichung bilden die obigen Versuche 1 bis 4 am Schienenapparat. Die Kraft, mit welcher die Schwere an den m g des Trägers zieht ist $p = mg$, wenn p die Anzahl der Dyn bedeutet, mit welcher die Schwerkraft den Träger abwärts zieht. Diese p Dyn ist zugleich jene Kraft von k Dyn dar, welche der Gesamtheit die Beschleunigung b cm sec⁻² erteilt, so daß $k = p$ hier $p = k$, also $mg = Mb$, so ist wieder $b = \frac{m}{M}g$

die Versuche 1 bis 4 ergaben.

Wie durch den Schienenapparat lassen sich die Beziehungen zwischen p , m und g , bzw. k und b auch veranschaulichen durch

Atwoods (eigentlich Schobers, 1771) Maschine (Fig. 41). Diese besteht in der That aus einer in vertikaler Ebene angeordneten fixen Rolle (auf einer etwa 2 m hohen Säule mit Maßstab), um welche eine Seilbahn mit zwei Trägern von je m g gelegt ist. Wenn ein Träger losgeknüpft, so würde der andere mit der Beschleunigung $g \neq 1000$ cm sec⁻² fallen.

einen gemeinschaftlichen Kraftbegriff zusammengefaßt. Und erst NEWTON faßt die ganze Mannigfaltigkeit der ihrer Herkunft nach höchst verschiedenen Kräfte (elektrische, magnetische Anziehungen und Abstosungen, irdische und kosmische Schwere, elastische und sonstige „Molekularkräfte“ — s. u. —) unter dem Namen einen allgemeinen Begriff der „beschleunigenden Kraft“ zusammen, welcher nur mehr nach der einheitlichen Wirkung, nämlich auf Grund des Bewegungsgesetzes I b (§ 15) durch das eine Merkmal definiert ist, daß die Wirkung einer mechanischen Kraft in einer Beschleunigung, d. i. Abänderung der Geschwindigkeit oder (und) Richtung einer bewegten Masse besteht; wozu auch die ebenfalls einheitliche mechanische Spannung im Falle des Gleichgewichts zweier oder mehrerer Kräfte (§ 17) kommt.

Ein vollständiger Überblick über die ganze Mannigfaltigkeit der unter dem Namen einen Kraftbegriff fallenden mechanischen Kräfte ist noch nicht hier, sondern erst auf Grund der ganzen Physik zu geben, indem nicht nur alle Arten mechanischer Vorgänge (Stoß bewegten Wassers, bewegter Luft, Auftrieb in Flüssigkeiten und Gasen, Kapillarscheinungen, . . .), sondern auch viele außermechanische Vorgänge von Beschleunigungen oder (und) mechanischen Spannungen begreifen sind. So besitzt heißer Dampf „Spannkraft“, ein sich abkühlender Radialdruck drückt die Teile des Rades mit großer Kraft zusammen und hält sie auch nach der Abkühlung beisammen; zwei gleich- oder ungleichnamig elektrische Funken erteilen einander Beschleunigungen und Ablenkungen aus der Lotlage entgegen der Schwere u. s. f. — Eine feste Einteilung der mechanischen Kräfte ist auch deshalb nicht zu geben, weil die Physik vielfach mit Erfolg bemüht war und noch immer ist, einzelne dieser Kräfte aufeinander zurückzuführen: z. B. die „Steigkraft“ eines Luftballons auf den Auftrieb der Luft, diesen auf deren Gewicht und Druck; ferner wird nach der kinetischen Wärmehypothese (§ 88) die Expansivkraft des heißen Dampfes im Cylinder einer Dampfmaschine (aber auch der Luft in jedem anderen Gase bei jeder Temperatur) auf den Stoß der einzelnen Gasteile gegen den beweglichen Kolben, die unbeweglichen Wände u. s. f. zurückgeführt. So ist auch die Zurückführbarkeit der elektrischen und magnetischen „Anziehungs- und Abstosungen“, die so lange als „fernwirkende Kräfte“ galten, auf Übertragungen von Druck und Zug durch einen zwischen den bewegten Massen befindlichen Stoff, den „Äther“, wahrscheinlich geworden; dagegen ist eine analoge Zurückführung auch der irdischen und der von NEWTON entdeckten allgemeinen Schwere bisher nicht gelungen. — Von diesen Theorien und Hypothesen über die Zurückführbarkeit der Kräfte bleibt die Mechanik unabhängig, solange sie nur Betracht zieht, was alles man in Dyn messen kann: irdische und kosmische Schwere, elastische Kräfte (einer Spiralfeder, eines zusammengedrückten Billardballes, eines unter irgend welchem äußeren Druck stehenden Gases . . .); Kohäsion fester Körper (Zug-, Druck-, Bruchfestigkeit . . .); Gegendruck und -schiebung fester Körper beim Einwirken von Kräften (Widerstand wagerechter und schiefer Ebenen gegen das Gewicht der auf ihnen liegenden oder sich bewegenden Körper, Spannung des Pendelfadens . . .), hydrostatischen Druck, Luftdruck, Auftrieb; Druck einander berührender Massen von verschiedener Geschwindigkeit (während des Stoßes unelastischer und elastischer Körper), Druck Wasser- und Luftströmungen (bei Wasser-, Windmühlen . . .), Kraft des Radialstoßes (Turbinen, Raketen . . .), Reibung und Luftwiderstand (allgemein Widerstand des Mittels), Adhäsion zwischen festen, zwischen festen und flüssigen Körpern, Oberflächenspannung, Kapillarkräfte, osmotischen Druck; mechanische Kräfte bei Wärmeerscheinungen (erhitzte Gase, gefrierendes Wasser), K

bei chemisch-thermischen Erscheinungen (Explosivstoffe), Muskelkraft von Menschen und Tieren, mechanischen Druck und Zug bei elektrostatischen, magnetischen, elektromagnetischen, elektrodynamischen Erscheinungen.

Inwiefern wir überdies in Dyn auch solche Gröfsen messen dürfen, die wir nicht für eigentliche „Kräfte“ halten, zeigen folgende Beispiele: 1. Die „Reibung“; geht ein Wagen von wagrechter auf eine ansteigende Strecke über, so ist durch die Muskelspannung der Pferde hier, wo Reibung und Schwerkraftskomponente zusammenwirken, nur ein gröfserer, aber qualitativ gleichartiger, Widerstand zu überwinden als dort, wo nur die Reibung wirkte. (Über die einzelnen Kräfte, welche sich zusammen als „Reibung“ äufsern, vergl. § 59). — 2. Die „Fliehkraft“ (§ 19); obwohl sie nur eine Gegenwirkung gegen die z. B. einen Stein an einem Faden im Kreise herumschwingende Centripetalkraft der Hand ist, äufsert sie sich doch in der Spannung des Fadens so, wie wenn an dem ruhenden Faden nach entgegengesetzten Seiten wirkliche Kräfte zögen. Ebenso 3. auch jede andere „Kraft der Beharrung“ („*vis inertiae*“ § 15, Ende), wie sie jede Masse äufsert, während ihr eine Kraft eine Beschleunigung erteilt.

Der einstmals angenommene Gegensatz zwischen „bewegenden Kräften“ (z. B. der Schwerkraft, welche jederzeit bereit ist, einen losgelassenen Stein in positive, einen vertikal aufwärts geworfenen in negative Beschleunigung zu versetzen) und „Bewegungshindernissen“ (welche, wie die Reibung, nur einem schon in Bewegung befindlichen Körper eine Verzögerung, nicht aber eine positive Beschleunigung erteilen zu können schien) ist kein durchgreifender, indem z. B. beim „Mitnehmen durch Reibung“ (wenn etwa beim Vorversuch 2, § 46 unter dem kleinen Wagen der grofse weggezogen und dadurch der kleine in Bewegung gesetzt wird) auch die Reibung Geschwindigkeiten vergrößert. —

Desgleichen ist auch der einstmals angenommene Gegensatz von „Momentankräften“, die durch das Produkt mc , und kontinuierlichen Kräften, die durch das Produkt mb gemessen werden, nicht aufrecht zu erhalten; denn jede Kraft braucht zu ihrer Wirkung endliche (und durch hinreichend feine Mittel mefsbare) Zeit. Auch z. B. die Spannkraft der Pulvergase wirkt auf die Kugel während der allerdings sehr kurzen Zeit, in der diese von dem hinteren bis an das vordere Ende des Laufes sich bewegt; desgleichen die elastischen Kräfte zweier Billardbälle während der kurzen Zeit ihrer Berührung im Stofs. — Unabhängig von dem Begriff der „Momentankraft“ ist übrigens das Kraftmafs mc , welches als „Bewegungsgröfse“ bezeichnet wird, doch nützlich, wo uns nicht die Vorgänge während des Wirkens einer Kraft (gleichviel übrigens, ob sie nur kurze oder lange Zeit wirkt), sondern nur die nach Aufhören der Kraft erlangte Endgeschwindigkeit c einer Masse m interessiert. Dies ist namentlich der Fall bei allen im engeren Sinne sogen. Stofswirkungen. Dafs gleichwohl auch dieses Kraftmafs mc nur eine Folge der Grundgleichung der Dynamik $f = mc$ ist, zeigen folgende Gleichungen und ihre Ableitung:

Stofsen zwei Körper (die hier als Massenpunkte aufgefaßt werden, vergl. § 58) von m_1 und m_2 g Masse mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 aneinander, indem sie sich längs derselben Geraden in derselben Richtung so bewegen, dafs $c_1 < c_2$, so suchen sie ihre Geschwindigkeiten auszugleichen, bis ein Mittelwert (Anh. Nr. 9) erreicht ist, dessen Gröfse

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \dots (1) \text{ der Gl. } m_1 (c - c_1) = m_2 (c_2 - c) \dots (2)$$

entspricht. Hier besagt (2): **Der Zuwachs an Bewegungsgröße bei dem einen Körper ist gleich der Abnahme an Bewegungsgröße beim anderen.** Diese Zunahme bzw. Abnahme von Geschwindigkeit des einen und anderen Körpers erfolgt gemäß dem Gegenwirkungsprinzip (§ 15, III), vermöge dessen in jedem Zeitpunkt die Größe des Druckes, den der eine Körper vom anderen erfährt, dem Gegendrucke gleich ist.

Denken wir uns hiernach die Zeit der gegenseitigen Einwirkung beider Massen zerlegt in die sehr kurzen Zeiteilchen $\tau, \tau', \tau'', \dots$, so können wir die Größe des Druckes und Gegendruckes als während dieser Zeiten konstant annehmen, und es erhalten daher z. B. während des Zeiteilchens τ die beiden Massen Beschleunigungen γ_1 und γ_2 gemäß der Gleichung $m_1\gamma_1 = m_2\gamma_2$; ebenso im zweiten Zeiteilchen gemäß $m_1\gamma'_1 = m_2\gamma'_2$ u. s. f. Es ist dann die gesamte

Geschwindigkeitszunahme für m_1 folgende: $c - c_1 = \gamma_1\tau + \gamma'_1\tau' + \gamma''_1\tau'' + \dots$
daher: $m_1(c - c_1) = m_1\gamma_1\tau + m_1\gamma'_1\tau' + m_1\gamma''_1\tau'' + \dots$

Geschwindigkeitsabnahme für m_2 folgende: $c_2 - c = \gamma_2\tau + \gamma'_2\tau' + \gamma''_2\tau'' + \dots$
daher: $m_2(c_2 - c) = m_2\gamma_2\tau + m_2\gamma'_2\tau' + m_2\gamma''_2\tau'' + \dots$

Da die rechten Seiten dieser Gleichungen gliedweise gleich sind, so ist die Gleichung (2), also auch (1), aus der Grundgleichung der Dynamik $f = mw$, speziell $k = mb$, abgeleitet. — Da hier die Größe mc schon in der Dimension ($\text{cm sec}^{-1}\text{g}$) sich von der Dimension der Dyn ($\text{cm sec}^{-2}\text{g}$) unterscheidet, so ist ersichtlich, daß Bewegungsgrößen nicht in Dyn gemessen werden können. —

Ebenfalls nicht in Dyn (sondern in Erg, § 22) werden die während des ganzen (ebenfalls wieder gleichviel, ob kurz- oder langdauernden) Wirkens von mechanischen Kräften vollzogenen Gesamtleistungen, die **mechanischen Arbeiten**, gemessen; z. B. die der Finger eines Klavierspielers beim Anschlagen der Tasten u. dergl. Es ist hier unzulässig, die „Gesamtkraft“ eines Klavierspielers der ein Stück von 10 000 Tönen auf Tasten gespielt hat, die durch je 100 Gramm LA 54. gramm niederzuhalten sind, mit $10\,000 \times 100$ Gramm angeben zu wollen (LA 54) denn wenn auch zum Niederhalten einer Taste durch den auf eine bestimmte Stelle drückenden Finger eine Kraft von k Dyn erforderlich ist, so ist dagegen zum Verschieben der Taste von ihrer Ruhelage bis in die tiefste Lage eine gewisse Arbeit derjenigen Kraft erforderlich, welche während dieses Verschiebens gegen den Widerstand der Tasten geleistet wird. — Desgleichen wirkt zwar in jedem Zeitpunkte während der kurzen Zeitstrecke des sich Stosens zweier Billardbälle zwischen ihnen eine elastische Kraft von einer bestimmten Anzahl Dyn; aber während der Zeitstrecke von der ersten Berührung bis zur größten Abplattung (und ebenso wieder von da bis zum Auseinanderlaufen) der Bälle hat nicht eine bestimmte „Gesamtkraft“ gewirkt, sondern es wurde eine bestimmte „Gesamtarbeit“ geleistet. Ebenso vom Rammbären, während er den Pfahl bis zu gewisser Tiefe in die Erde treibt, u. dergl. m.

Nur für die in Dyn zu messenden mechanischen Größen gelten folgende

Bestimmungsstücke einer Kraft: 1. Der **Angriffspunkt**, d. h. derjenige Punkt, welcher, wenn er nicht mit den übrigen Punkten des Körpers durch Kräfte verbunden wäre, während des Wirkens der Kraft allein eine Beschleunigung annähme; in Wirklichkeit pflegt aber der Angriffsort von Kräften meistens eine Fläche (z. B. beim Vorwärt

hieben eines Wagens mit der Hand) oder der ganze oder ein Teil des Raumes zu sein, den der Körper einnimmt (so bei der Schwere). —

Die **Richtung** der Kraft, d. i. die Richtung jener Beschleunigung. — Die **Größe** der Kraft, welche gemessen wird durch eine Anzahl von Dyn (bezw. Kraftgramm, Kraftkilogramm, s. u.).

Die Instrumente zur Messung von Kräften sind: 1. Die Hebelwage (§ 29), 2. die Federwage (§ 51), 3. das **Dynamometer** (Fig. 42). Dabei werden 2. und 3. benutzt, indem ihre elastische Kraft mehr oder minder mittelbar verglichen wird mit den Schwerkraftwirkungen an der Hebelwage. — Bei sehr vielen Kräften, wie Luftdruck, Druck in Wasserleitungen, Öhren . . ., kommt nebst der Anzahl der wirkenden Dyn noch die Anzahl der Quadratcentimeter der gedrückten Fläche in Betracht. Solche Wirkungen werden in Dyn per Quadratcentimeter (nach dem absoluten System, s. u., häufiger aber nach dem irdischen System in Atmosphären, at, § 44) gemessen. Die Instrumente zu solchen Messungen sind die Manometer (§ 47) und speziell für den Luftdruck die Barometer.

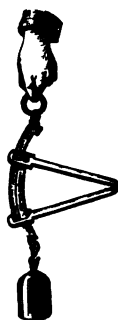
Kräfte lassen sich durch **Pfeile** (Kraftvektoren, § 8, Anh. Nr. 8) darstellen, wobei Angriffspunkt und Richtung unmittelbar, die Kraftgröße aber nur verhältnismässig, d. h. das Verhältnis je zweier Kräfte durch das Verhältnis der Pfeillängen, dargestellt werden. — Den Unterschied von Druck- und Zugkräften kann man durch den Sinn der Pfeile andeuten. Insoweit es aber nur auf Größe und Richtung der Kräfte ankommt, z. B. bei der Konstruktion des Kräfteparallelogramms (§ 17), ist es meist zweckmässig, alle Kräfte durch Zugkräfte zu ersetzen, d. h. die Kräfte immer vom Angriffspunkt weg wirkend zu denken. — In der Darstellung der Kräfte durch Pfeile ist nicht mit inbegriffen

4. die **Dauer** der Kraftwirkung. Die Kraft kann während der immer endlichen Zeit ihrer Wirkung Richtung und Stärke behalten (z. B. die Schwerkraft nahe der Erde) oder sie verändern (wie die auf einen Planeten während seines Umlaufes um die Sonne wirkende Gravitation dem Raume nach, die elektrische Anziehung der Abstossung einer sich allmählich entladenden Sammelkugel der Zeit nach).

Zur Entwicklung des Massen-Begriffes. Die gewöhnliche Sprache bedient sich des Wortes „Masse“ manchmal, um überhaupt nur irgendeine „Menge“ zu bezeichnen, z. B. „eine Masse Menschen“ („Konkursmasse“); wieder eine ganz andere Bedeutung ist die bei Bezeichnung von Stoffen; so, wenn wir von einer Fahrbahn aus „Zementmasse“ oder von der Einhüllung eines Dampfrohres in eine „Wärmeschutzmasse“ u. dergl. reden.

Der Begriff, welchen die gegenwärtige wissenschaftliche Physik mit dem Worte „Masse“ verbindet, hat einen von dem angeführten Sprachgebrauch ganz abweichenden logischen Inhalt, der sich nur sehr allmählich aus den Erfahrungen und Theorien der Mechanik selbst erst entwickelt hat. — Wir sind geneigt, ein Gramm Wasser eine kleine, eine Tonne Kohle eine große Masse zu nennen. Welches quantitative Merkmal haben wir bei dieser Vergleichung im Auge? das Volumen? das Gewicht? — Indem DESCARTES (1596 — 1650), um von größerer oder kleinerer Masse zu sprechen, nur die Ausdrücke *corpus majus* und *corpus minus* (größere, kleinere Körper) benutzte, scheint er zunächst nur das Volumen — dem GALILEI (1564 — 1642) das verschiedene mechanische Verhalten der Körper

Fig. 42.



Anh. 8.

durch den Ausdruck *pondus* bezeichnete, scheint er nur das Gewicht im Auge zu haben. Erst NEWTON (1642—1726) gebraucht den Ausdruck *massa* in bestimmter Unterscheidung von *corpus* und *pondus*; und wiewohl NEWTONS Fassung *Massa est quantitas materiae* (Masse ist Menge der Materie) selbst noch formell unvollkommen war, ist es doch der von NEWTON gemeinte Begriff, in welchem — trotz zahlreicher Anstrengungen, das Wort „Masse“ von Grund aus neu zu definieren (z. B. als bloße Zahl, als Quotienten aus Kraft und Beschleunigung u. s. w.) — bis heute den wissenschaftlichen Begriff der Masse ausmacht. Um diesen Begriff aus den Erscheinungen zu entwickeln, gehen wir aus von Beispielen für die uns am nächsten verwandten, aber doch wohl voneinander zu unterscheidenden Begriffe

Körper, Stoffe, Materie; Massen. Eine Kupfermünze, ein Wassertropfen, eine Luftblase sind verschiedene **Körper**. An jedem derselben unterscheiden wir die räumlichen Eigenschaften (Volumen und Gestalt) und nebst diesen noch die vielerlei Qualitäten: die Farbe, des Gewichtes, des Verhaltens beim Erwärmen, bei chemischen Einflüssen u. s. w. Im Hinblick auf die letzteren Eigenschaften und abgesehen von den räumlichen nennen wir Kupfer, Wasser, Luft verschiedene **Stoffe** und sagen, daß z. B. eine Kupfermünze und ein Kupferkessel aus dem gleichen Stoffe bestehen. Alle Körper best. aus Stoffen fassen wir zusammen unter der Bezeichnung **Materie**.

Wenn nun NEWTON jedem Körper eine bestimmte „Quantität der Materie“ als „Masse“ zuschreibt, so ist diese Definition nicht zu verwerfen, sondern nur zu ergänzen, damit sie sich mit dem gegenwärtigen Begriffe der Masse deckt. Wenn wir uns z. B. von 1000 einzelnen Kubikcentimetern Wasser versichert haben, daß sie aus gleichem Stoffe bestehen (d. h. die gleichen chemischen Eigenschaften des reinen Wassers haben, unter gleichem Druck stehen, gleiche Temperatur besitzen...), und sie nun zu einem Körper von 1 Liter vereinigen, so enthält dieser eine Körper einerseits eine 1000 mal so große „Menge“ Wasser als 1 cm³, anderseits stellt er auch nach dem gegenwärtigen Begriffe eine 1000 mal so große „Masse“ Wasser dar. Auch wenn wir einen Körper, ohne von seinem Stoffe etwas wegzunehmen, auf kleineres Volumen bringen (z. B. das Mehl in der Lade), ihn „verdichten“, bleibt seine Stoffmenge und zugleich seine Masse unverändert; ähnlich beim „Verdünnen“ (der Luft in einem Cylinder durch Hinein- oder Herausschieben des Kolbens, durch Abkühlen oder Erwärmen). — Aber derselbe Körper hat außer Volumen und „Dichte“ auch noch weitere quantitative Eigenschaften: Gewicht, Beharrungswiderstand, chemische Wirkungsfähigkeit gegenüber anderen Stoffen u. s. f. Es muß ausdrücklich festgestellt werden, nach welcher dieser Eigenschaften die „Quantität der Materie“ eines Körpers bemessen werden soll. Für die Mechanik werden wir eine Eigenschaft wählen müssen, welche derselbe Körper unter den verschiedensten mechanischen Umständen (räumliche Lage gegen andere Körper, Spannungszustände u. s. f.) unverändert behält. Seit NEWTONS Entdeckung des Gravitationsgesetzes wissen wir aber vor allem, daß auch das Gewicht, nach welchem man im praktischen Leben so häufig die Menge eines Stoffes bestimmt (z. B. beim Einkaufen von Fleisch, Kohlen u. s. w.) die geforderte Konstanz nicht besitzt. Denn derselbe Körper hätte (§ 21) an der Oberfläche der Sonne ein 28 mal so großes Gewicht, an der Oberfläche des Mondes ein 6 mal so kleines Gewicht als an der Erdoberfläche; ja derselbe Körper hat schon nahe den Erdpolen ein größeres Gewicht als am

Nach $k = mb$ kommt der „Kraft“ die Dimension $g \cdot \text{cm sec}^{-2}$ zu, und man kann schreiben: $1 \text{ Dyn} = 1 \text{ cm sec}^{-2} g$.

Vor GAUSS (1833) war man vom Gewichtsdrucke des jeweiligen Normalkörpers (z. B. der mancherlei „Pfund“) als Krafteinheit ausgegangen; auch die Einführung des Kilogrammkörpers (1800) hatte man unter „Gramm“ zuerst eine Krafteinheit (Kraftgramm, g^1) nämlich den Gewichtsdruck verstanden, den ein Grammkörper, z. B. 1 cm^3 Wasser, auf eine horizontale ruhende Unterlage ausübt. Da dieser Gewichtsdruck dem Grammkörper nicht unabhängig von der besonderen Art der den Druck bewirkenden Kraft, sondern nur infolge der Anziehung zwischen Grammkörper und Erde zukommt, so heisst das Kraftgramm als dynamischer Grundeinheit ausgehende Maßsystem ein irdische (terrestrische) Maßsystem. — In diesem System war also die Masseneinheit eine abgeleitete GröÙe, und zwar stellte $\frac{1}{981}$ eines Kubikcentimeters Wasser diejenige Masseneinheit dar, welche, da ihr die Erde in 45° geogr. Breite 981 cm sec^{-2} Beschleunigung erteilt, an diesen Orten einen Gewichtsdruck

von $mg = \frac{1}{981} \cdot 981 = 1 g$ ausübt. — Da nun aber die numerischen Werte von g in den vorhin festgesetzten Grundeinheiten (Centimeter und Sekunden) für verschiedene Orte der Erdoberfläche beträchtlich verschieden sind (an den Polen 983, am Äquator 978 u. s. f., vergl. § 31), so muß, damit das Kraftgramm überhaupt eine bestimmte KraftgröÙe darstelle, nicht nur die Lage des Grammkörpers zur Erde, sondern sogar zu einem ganz speziellen Orte auf der Erdoberfläche in seine Definition aufgenommen werden.

Die Bezeichnung „absolut“ des anderen, neueren Maßsystemes besagt also, daß in den von der Masseneinheit, nicht von einer Gewichtsdruckeinheit ausgehenden Systemen nur die Festsetzung eines Normalkörpers, nicht auch die eines bestimmten Ortes, an dem sich dieser Körper befindet, zur Messung der Massen und hiernach erst der Kräfte (sowie der mechanischen Arbeiten, § 22 u. s. f. erforderlich ist. — Trotz dieses wissenschaftlichen Vorteiles des absoluten Systems (das man deshalb gegenwärtig oft auch das physikalische System nennt, zumal es sich auch in anderen Kapiteln der Physik, z. B. der Elektrizitätslehre, bewährt) bedient man sich doch auch des terrestrischen vielfach mit Vorteil; z. B. sagt man in der Technik noch immer, es herrsche in den Gurten einer Kettenbrücke eine Spannung von 1000 kg , indem man jene elastische Kraft unmittelbar mit dem Gewichtsdruck einer 1000 kg -Masse vergleicht, u. zw. mit den

¹⁾ Wir haben bezeichnet und werden bezeichnen mit

$1 g$ das Massengramm (1 kg das Massenkilogramm, 1 mg das Massenmilligramm),

$1 g$ das Kraftgramm (1 kg das Kraftkilogramm),

g die Maßzahl der Schwerebeschleunigung (und zwar in der Regel die Zahl 981; ist für einen speziellen Ort mit der Breite φ gemeint, so schreiben wir g_φ ; § 31). —

1 mg lies: 1 Milligramm. — $p = mg$ lies: Die Maßzahl p der Gewichtseinheiten ist gleich der Maßzahl m der Masseneinheiten mal der Maßzahl g der Beschleunigungseinheiten.

Diese verschiedene Bedeutung von g und g ergibt sich von selbst aus der in diesem Buche (gemäß dem immer mehr durchgreifenden Gebrauche) festgehaltenen Bezeichnung Maßzahlen durch *Kursiv*, der Maßeinheiten durch Antiqua-Lettern. — Wenn bei Schreiben die Zeichen g und g verwechselt zu werden drohen (was aber bei richtigem gleitendem Denken und Sprechen nicht zu befürchten ist), so mag der Anfänger statt vorübergehend schreiben gr (die behördliche Bezeichnung für Gramm bleibt aber g).

Die Bezeichnungen g und kg (schreibe g und kg) mag daran erinnern, daß das irdische Maßsystem ein älteres ist, aber voraussichtlich ebenso dem absoluten weichen wird die Frakturschrift der Antiquaschrift.

einem beliebigen Orte der Erde, weil auch die größten Unterschiede, welche die Gewichtskräfte gegeneinander aufweisen können, geringfügig zu sein pflegen die Elastizitätskräfte selbst (und namentlich gegen die Unterschiede zwischen der aus Sicherheitsgründen gewählten Tragfähigkeit und der wirklichen Beanspruchung). Auch in der Hydro- und Aerostatik ist es noch üblich zu sagen, eine Wasser-, Quecksilbersäule, die Luft drücke mit 1, 2 . . . Atmosphären (at), d. i. annähernd gleich dem Gewichtsdruck von 1, 2 . . . Kraftkilogramm auf je 1 cm².

Überhaupt bleiben auch nach dem Ausgehen von der Masseneinheit 1 g die dynamischer Grundeinheit doch die Kräfte (und zwar vor allen die Schwerkraft) diejenigen Größen, mit deren Hilfe praktisch sogar jene Masseneinheit bestimmt und kopiert wird. Denn indem man sich beim Herstellen des ersten irrischen Kilogrammkörpers sowie seiner Kopien und aller in den Handel gebrachten Gewichtssätze der Wage bedient, wird erst aus der Gleichheit von Kräften den Gewichtsdrucken auf die Schalen einer richtigen gleicharmigen Hebelwage, 29) auf die Gleichheit der Massen geschlossen.

Auch die absolute Kräfteinheit, das Dyn, veranschaulicht man sich am unmittelbarsten als den Gewichtsdruck, den der 981ste Teil eines Kubikcentimeters Wasser auf eine wagrechte Unterlage ausübt; annähernd also ist 1 Dyn der Druck, den wir empfinden, wenn wir 1 mg-Körperchen auf ein wagrechtet Stückerhen unserer Haut drücken lassen (allerdings ist dieser Druck schon beinahe unmerklich). Andere Versinnlichungen der Gröfse „1 Dyn“ (LA 35).

Für die Umrechnung von Massen- und Kraftangaben aus dem absoluten Systeme ins irdische und umgekehrt dienen nach allem Gesagten folgende Beziehungen:

- 1 irdisches Kraftgramm (1 g) = 981 Dyn; 1 Dyn = $\frac{1}{981}$ g \neq 1 mg;
- 1 absolutes Massengramm (1 g) = 981 irdische Masseneinheiten;
- 1 irdische Masseneinheit = $\frac{1}{981}$ g \neq 1 mg.

Vorläufiges über Dichte und spezifisches Gewicht (Näheres vergl. 41): Aus den Einheiten für Masse und Kraft ergeben sich zusammen mit der Einheit des Volumens, 1 cm³, auch Mafseinheiten und Mafsformeln für die spezifische Masse (Volummasse, Dichte) und für das spezifische Gewicht (Volumgewicht) je eines Stoffes, nämlich:

Die Einheit der Dichte (DE) kommt dem Wasser bei 4° C. zu, da dieser Stoff als derjenige gewählt wurde, von dem die eine Volumeneinheit (1 cm³) erfüllende Menge eine Masseneinheit (1 g) bilden soll.

Da nun z. B. 1 cm³ Kupfer 9 g, 1 cm³ Quecksilber 13,6 g Masse besitzt (wie ich durch direkte Wägung, bequemer und genauer durch indirekte hydrostatische Methoden ergibt, § 41), so legen wir dem Kupfer eine 9mal, dem Quecksilber eine 13,6mal so große Dichte bei als dem Wasser; oder: Kupfer hat eine Dichte 9, Quecksilber 13,6 (nämlich eine Dichte von 13,6 DE). — Da ferner z. B. in 5 cm³ Kupfer 45 g, in 10 cm³ Kupfer 90 g Masse enthalten sind, so gilt allgemein:

Zwischen den Mafszahlen (m , v , d) für Masse, Volumen und Dichte eines bestimmten Körpers bestehen die Beziehungen:

Dichte (spez. Masse) $d = \frac{m}{v}$, daher $m = d \cdot v$, $v = \frac{m}{d}$ (in Worten!).

Ebenso: Spez. Gewicht $s = \frac{p}{v}$, daher $p = s \cdot v$, $v = \frac{p}{s}$ (in Worten!),
 0 p (pondus) das absolute Gewicht heifst (im Gegensatz zum spezifischen Gewicht s). — Ferner ist wegen $p = mg$ auch $s = dg$; in Worten!

§ 17. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt. — Begriff des Gleichgewichtes.

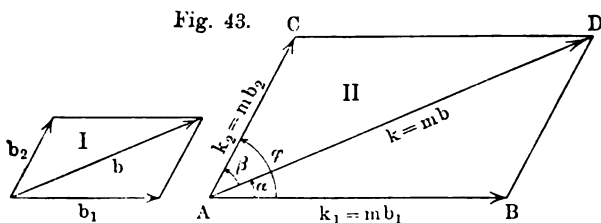
Schieben mehrere Männer zugleich einen großen Stein, so wirken auf zwar mehrere Kräfte, aber er kann trotzdem nur eine einzige Bewegung annehmen. — Welches nun auch die Angriffspunkte, Richtungen und Stärken der Kräfte dieser Männer waren, so wäre es doch (abgesehen von dem besonderen Falle der „Kräftepaare“, § 26) immer möglich, auch durch eine einzige Kraft (z. B. die eines Pferdes) jenen Stein ebenso schnell und nach derselben Richtung fortzuschleifen, wie dies durch die Kräfte der Männer wirklich geschehen ist.

Eine Kraft, welche dieselbe Wirkung hervorbringt wie zwei oder mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte, heisst die Resultierende jener Kräfte; diese heißen die Komponenten. Zu mehreren gegebenen Kräften die Resultierende suchen, nennt man die Kräfte zusammensetzen; zu einer Kraft zwei oder mehrere Komponenten suchen, nennt man jene Kraft zerlegen.

Man darf den Ausdruck „Zusammensetzen“ der Kräfte nicht so auffassen, daß aus mehreren Kräften wirklich eine wird, sondern nur so, daß, wenn statt der mehreren wirklich vorhandenen Kräfte nur die Resultierende da wäre, sie dasselbe leisten würde, was die ersteren zusammen wirklich leisten.

Obige Definitionen gelten sowohl für die Zusammensetzung von Kräften an ganzen Körpern wie an einzelnen Punkten. Die folgenden Bestimmungen dagegen setzen gemeinsamen Angriffspunkt voraus (übrigens gleichviel, ob dieser selbst wieder als ein einzelner Punkt in einem starren oder flüssigen System oder ob er als einzelner Massenpunkt angenommen ist; wie sich die Aufgaben über verschiedene Angriffspunkte an einem starren System auf die mit gemeinsamem zurückführen lassen vergl. § 27).

Zwei Bewegungen mit Beschleunigungen b_1 und b_2 ergeben eine Bewegung mit der resultierenden Beschleunigung b , deren GröÙe und Richtung durch die Diagonale des Beschleunigungsparallelogrammes rein phoronomisch (§ 10) gefunden wird. Nehmen wir zu jener phoronomischen (also rein mathematischen) Betrachtung das dynamische Unabhängigkeitsprinzip § 15, II (als Erfahrungstatsache) hinzu, so folgt weiter, daß, wenn die durch die Pfeile AB und AC (Fig. 43) dargestellten Kräfte von k_1 und k_2 Dyn an derselben Masse von m g



angreifen, sie an ihr die Beschleunigungen $b_1 = \frac{k_1}{m}$, $b_2 = \frac{k_2}{m}$ cm sec⁻² nicht nur hervorrufen, falls sie jede für sich wirken, sondern nach dem Unabhängigkeitsprinzip auch dann

wenn sie zugleich wirken. Sind dann die komponierenden Beschleunigungen b_1 , b_2 und die resultierende b durch die Pfeile des Parallelogramms I dargestellt, so stellen die entsprechenden Stücke des nach dem Verhältnis 1 : m ähnliche

Statt zu sagen, zwei Kräfte halten einander das Gleichgewicht, sagt man auch häufig, „die Kräfte heben einander auf“ (kompensieren, neutralisieren sich). Es ist aber zu bemerken, daß dies nur von den Bewegungswirkungen (den **kinetischen**, nämlich den Beschleunigungen) gilt, nicht aber von den **statischen Wirkungen, den mechanischen Spannungen**, die (wenigstens an Punktsystemen, von welchen der einzelne Massenpunkt ein Grenzfall ist) bei dem Zusammenwirken zweier oder mehrerer Kräfte, außer wenn alle gleich gerichtet sind, jederzeit auftreten. Ihrer Richtung nach äußern sie sich als **Zug- oder Druckspannungen**, je nachdem die Kräfte aus- oder zueinander gerichtet sind. — Auch hinsichtlich der Größe dieser statischen Wirkungen ist es bekanntlich keineswegs gleichgültig, ob z. B. an den beiden Enden eines Seiles je eine Kraft von 1 Dyn oder die gleichen Kräfte zweier Männer oder zweier Pferde ziehen. Je größer die einzelnen (einander ganz oder teilweise „aufhebenden“) Kräfte, desto größer die Spannung. Bei einem bestimmten Betrage ziehender Kräfte erfolgt sogar das Zerreißen des Seiles; desgleichen bei zwei einander entgegenwirkenden Drücken Zerdrücktwerden. (Über Zug-, Druckfestigkeit und einige andere Arten von Festigkeiten vergl. § 52.)

Speziell bezüglich des Aufhebens der Bewegungswirkungen zweier gleich einander entgegengerichteter Kräfte ist auch zu bemerken, daß dieses **Gleichgewicht** nicht immer „Ruhe“ bedeutet; denn falls ein Körper, während ihm zwei oder mehrere einander das Gleichgewicht haltende Kräfte **angreifen** schon in Bewegung war, setzt er diese in **stationärem Gange** fort (§ 15, I).

Das Gleichgewicht der Kräfte ist das physikalisch bequemste Mittel, die Gleichheit zweier Kräfte zu erkennen. Um z. B. zu entscheiden, ob die Muskelkraft meines Armes auf einen Stein, den ich bewege, mit der gleichen Stärke wirkt wie die Schwerkraft, müßte ich behufs direkter Messung nach der Beschleunigungswirkung gemäß der Grundformel der Dynamik $f = mw$ (bzw. $k = mb$, $p = mg$, § 16) beobachten, ob ihm meine Hand eine Beschleunigung von 981 cm sec^{-2} erteilt oder nicht, was nur schwer durch messende Versuch festzustellen wäre. Halte ich dagegen den Stein mit ausgestreckter Hand so, daß er sich weder ab- noch aufwärts bewegt, so weiß ich, daß meine hierbei angewendete Muskelkraft gleich ist der Kraft, mit welcher die Erde auf ihn wirkt. Noch vollkommener können wir ein solches Gleichgewicht mit einer guten Waage bestimmen. Ist z. B. an die Federwaage (Fig. 208, S. 201) ein Körper gehängt, wird, sobald Gleichgewicht eingetreten ist, der elastische Gegenzug der Feder gleich

Fig. 46.



sein der Kraft, mit der dieser Körper gegen die Erde gezogen wird. An einer gleicharmigen Hebelwaage schließen wir aus der wagrechten Stellung des Wagebalkens oder dem „Einspielen“ der Zunge, daß die Schwerkraft die Belastungen beider Schalen mit gleicher Stärke abwärts zieht; vergl. § 29.

Zerlegung von Kräften. Suchen wir durch die Kraft der Hand (Fig. 46) z. B. eine glatte harte Kugel gegen ein glattes hartes Brett zu drücken, so erzeugt die zu diesem **normale** Komponente nur eine **Druckwirkung** und nur die zum Brette parallele Komponente eine Bewegungswirkung. — Allgemeiner: Ist einem Massepunkte m eine feste Bahn vorgeschrieben (vergl. in § 18 die Beispiele der schiefen Ebene und der Pendelbahn), und schließt die Ric

abwärts bewegendende Kraftkomponente $P = Q \sin \varepsilon = Q \cdot \frac{h}{l} \dots (1)$

Zu 2. Da $Q = mg$ und $P = mg \cdot \sin \varepsilon$, so sind in die allgemeine Gleichung für konstante Kräfte $k = mb$ einzusetzen: $k = P = mg \cdot \sin \varepsilon$ und $b = g$, daher $mg \cdot \sin \varepsilon = mg$, und wegen Ausfalles des Faktors m ist die

Beschleunigung längs der schiefen Ebene $g_s = g \sin \varepsilon \dots (2)$

Es ergibt sich also aus der vorstehenden dynamischen Betrachtung die Erklärung für die in § 2 durch GALILEI'S Versuche an der Fallrinne zunächst nur als phoronomische Tatsache bestätigten beschreibenden Gesetzes für die Fallstrecken $a_s = a \sin \varepsilon = a \cdot \frac{h}{l}$, aus denen sich dann in § 6 durch ebenfalls rein phoronomische Ableitungen das beschreibende Gesetz für die Beschleunigungen: $g_s = g \sin \varepsilon = g \cdot \frac{h}{l}$ ergeben hat. —

Zu 3. Für die der Komponente P das Gleichgewicht haltende Kraft (P) kann vorgeschrieben sein, daß sie a) parallel zur Länge, b) parallel zur Basis der schiefen Ebene, c) allgemein: unter einem beliebigen Winkel β gegen die Länge der schiefen Ebene wirken soll.

Im Falle a) ist $(P) = P$; daher gilt wie bei (1):

a) An einer schiefen Ebene herrscht Gleichgewicht, wenn die parallel zur Länge der schiefen Ebene aufwärts wirkende Kraft

$$(P_s) = Q \cdot \sin \varepsilon = Q \cdot \frac{h}{l} \dots (3); \text{ in Worten}$$

Im Falle b) ergibt sich aus dem Zerlegungs-dreieck Fig. 49

b) An einer schiefen Ebene herrscht Gleichgewicht, wenn die parallel zur Basis wirkende Kraft

$$(P_b) = Q \cdot \operatorname{tg} \varepsilon = Q \cdot \frac{h}{b} \dots (4); \text{ in Worten!}$$

Die allgemeine Aufgabe c) läßt sich auf a) zurückführen, indem von (P_s) in die Richtung der Länge der schiefen Ebene die Komponente $(P) \cos \beta$ entfällt, so daß zum Gleichgewicht erforderlich ist $(P) \cos \beta = Q \sin \varepsilon$, somit allgemein (Fig. 50)

$$(P) = Q \frac{\sin \varepsilon}{\cos \beta} \dots (5).$$

Wird hier $\beta = 0$, so ergibt sich wieder a); wird $\beta = \varepsilon$, so ergibt sich wieder $(P) = Q \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon} = Q \operatorname{tg} \varepsilon$, also b).

Diskussion der Gleichungen (1) bis (5) für verschiedene Werte von ε , einschließlich 0° und 90° . — Alle bisher entwickelten theoretischen Gleichungen werden in Wirklichkeit mehr oder minder modifiziert durch die

Reibung an schiefen Ebenen. In den vorstehenden Rechnung wurde reibungsloses Gleiten angenommen (vgl. § 2). Es bietet aber die schiefe Ebene auch das praktisch bequemste Mittel, die Größe der Reibung zwischen einem Körper K und einer Fläche F in D (oder I_9) zu messen. Hatte nämlich die Fläche zuerst eine waagrechte Lage und war der Körper auf ihr in Ruhe, so bleibt er auch in Ruhe, wenn die Fläche unter einem gewissen „Grenzwinkel“

geschlossen in derselben Hohlrinne des Pendels, wodurch gleicher Luftwiderstand hergestellt war) schwingen liefs.

III. Verallgemeinerung: Kräfte bei Sinusschwingungen. — Versuch: Auf wagerechter Schienenbahn sei das (bei den Versuchen §§ 2, 14 benutzte) Wägelchen zwischen zwei elastische Spiralfedern gespannt, zwischen denen es

Fig. 52.



eine bestimmte Mittellage O (Fig. 52) einnimmt. Durch Anbringung von Zugkräften (wie in Fig. 36, S. 46) zeigt sich, daß zu einer Verschiebung um $1, 2, 3 \dots s$ cm Kräfte von $x, 2x, 3x \dots sx$ Dyn erforderlich sind, gegen welche die elastischen Federn eine gleich große Gegenwirkung ausüben. Hat das (entsprechend belastete) Wägelchen mg , so erfährt es in dem jeweiligen Abstände s cm von O unter dem Einflusse der jeweiligen Kraft $f = -xs$ eine Beschleunigung $w = \frac{f}{m} = -\frac{x}{m}s$, und führt somit (vgl. § 12, Gl. 8) Sinusschwingungen aus von der

$$\text{Schwingungsdauer } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{x}} \dots \dots \dots (6)$$

Aus dieser allgemeineren Formel ergibt sich wieder die spezielle für das einfache Pendel, indem hier $x = \frac{mg}{l}$. — Weitere Beispiele LA 27, 28, 29, 30.

§ 19. Kräfte bei krummlinigen Bewegungen. Centralbewegungen.

In § 13 wurde gezeigt, daß jeder Punkt, der sich in einer krummen Linie bewegt, eine Normalbeschleunigung (centripetale Beschleunigung) besitzt, deren Größe speziell für die gleichförmig kreisenden Bewegungen (Kreisungen) $w_{\perp} = \frac{c^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r$ cm sec⁻² und allgemein $w_{\perp} = \frac{v^2}{\rho}$ cm sec⁻² ist.

Indem wir nach dem Beharrungsgesetze (§ 15, Ib) jede Beschleunigung als durch eine Kraft bewirkt auffassen, deren Größe $f = mw$, bzw. spezieller $k = mb$ ist, werden wir auch die centripetale Beschleunigung durch eine den beweglichen Punkt aus seiner jeweiligen Richtung ablenkende Centripetalkraft bewirkt zu denken haben. Ist die Masse des sich bewegenden Punktes mg , so wirkt auf ihn die

$$\text{Centripetalkraft } f_{\perp} = m \cdot \frac{v^2}{\rho} \text{ Dyn} \dots \dots \dots (1);$$

$$\text{speziell bei Kreisungen: } k_{\perp} = m \cdot \frac{c^2}{r} = m \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r \text{ Dyn} \dots \dots (2a, b).$$

Beispiele: 1. Ein Stein von mg Masse wird mittels eines Fadens von der Länge r cm binnen T sec einmal im Kreise gleichförmig herumgeschwungen. Dann ist in demselben Sinne, in welchem wir z. B. die Erde als „Sitz der Schwerkraft“

empfangenen Anstoßes beim Verschieben) auf glatten wagrechten geraden Schienen mit bestimmter (mäßiger) Geschwindigkeit und geht hinter ihm der Arbeiter mit gleicher Geschwindigkeit einher, so empfindet dieser, wenn er die Hand an den Wagen legt, weder einen Druck noch einen Zug von seiten des Wagens. Sucht aber der Arbeiter den Wagen schneller oder langsamer zu bewegen, indem er ihm mit der Hand eine Beschleunigung oder eine Verzögerung erteilt, so empfindet er sogleich den Druck oder Zug des Wagens (und zwar sehr empfindlich, wenn er z. B. gegen eine scharfe Spitze des Wagens drückt). Sobald dann der Druck der Hand gegen den Wagen aufhört, setzt nun nicht etwa der Wagen den Druck gegen die Hand eine Zeitlang fort, sondern es hört auch diese Gegenwirkung genau gleichzeitig mit der Wirkung auf, und der Wagen bewegt sich mit der nunmehr erworbenen größeren, bzw. kleineren Geschwindigkeit fort. — Es ist also die Gegenwirkung, welche bei Richtungsänderungen durch die „Centrifugalkraft“ ($= \text{Masse} \times \text{Normalbeschleunigung}$) gemessen wird, durchaus analog derjenigen, welche bei Geschwindigkeitsänderungen der „Masse“ als Beharrungswiderstand ($= \text{Masse} \times \text{Bahnbeschleunigung}$) gemessen wird. — Daß gleichwohl der Name Centrifugalkraft sich als zweckmäßig bewährt hat, und daß man diesen bloßen Beharrungswiderstand auch durch die Gl (3) wie wirkliche Kräfte messen kann, hat den guten physikalischen Sinn, daß, um z. B. an einer ruhenden Schleuder dieselbe mechanische Spannung hervorzubringen wie durch das Herumschwingen im Kreise, an beiden Enden Kräfte nach entgegengesetzten Richtungen in gleichem Betrage von $k = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r$ wirken müßten.

Über Fliehkräfte speziell bei der Rotation starrer Systeme (so bei den meisten Versuchen mit der „Schwungmaschine“) vgl. § 31.

Bei krummlinigen Bewegungen in denen Kurven als im Kreise ist die Centripetalkraft an jeder Stelle der Bahn nach einem anderen Punkte (dem jewei-

Abb. 26. ligen Krümmungsmittelpunkte, Anh. Nr. 26) gerichtet. Ihre Größe $f_{\perp} = m \frac{v^2}{\rho}$ wird dort Null, wo $\rho = \infty$ ist, d. h. an geraden Teilen der Bahn; an scharfen Ecken, wo $\rho = 0$, müßte sie unendlich groß werden, solange v endlich ist; d. h. keine endliche Kraft vermag eine plötzliche (unstetige) Richtungsänderung zu bewirken (so wenig wie eine unstetige Geschwindigkeitsänderung).

Ganz allgemein ist als Centripetalkraft (— zu unterscheiden von der Centralkraft, s. u.) nur eine solche zu bezeichnen, welche rein normal zum jeweiligen Bahnelemente und somit auch nur rein ablenkend wirkt, d. h. gar keinen (— nicht etwa einen „unendlich kleinen“) Beitrag zur Bahnbeschleunigung oder zur Bahngeschwindigkeit liefert. Das hierin vielleicht liegende Paradoxe löst sich, wenn man bedenkt, daß ja z. B. auch bei einem horizontal geworfenen Körper die Schwerkraft im Scheitel der Bahn zwar sogleich den vollen Betrag der vertikalen Schwerebeschleunigung g , aber gar keinen Geschwindigkeitszuwachs längs des horizontalen Bahnelementes daselbst bewirkt. —

Ein spezieller Fall der krummlinigen Bewegungen sind die **Centralbewegungen**, bei denen der bewegte Massenpunkt aus seiner jeweiligen Richtung nur durch eine „Centralkraft“, d. i. eine Kraft abgelenkt wird, die stets gegen einen als unbewegt angenommenen Punkt, den „Centralpunkt“, gerichtet ist.

Ein spezieller Fall der Centralbewegungen wieder sind die gleichförmig kreisenden Bewegungen oder Kreisungen (§ 13). Die Centralkraft hat

kraft von C weg) verschoben, so gelangt er statt nach D in die vierte F des Verschiebungsparallelogramms. Da nach dem Trägheitsgesetz $AB = l$ ist $\triangle ABC = BDC$; da ferner nach dem Parallelogrammgesetz DF

Fig. 54.

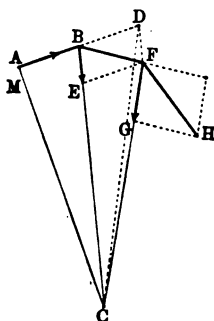
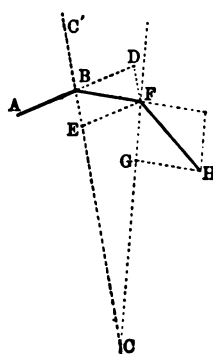


Fig. 55.



ist, so ist $\triangle BCD = BCF$ auch $\triangle ABC = BCF$. gleicher Weise ergibt sich drittes, viertes . . . Zeitteil die Gleichheit der vom Leit in gleichen Zeiten durchstrichen Flächen. — Der Satz gilt, was für Strecken BE , FG . . . alle gleich oder nach irgendeinem Gesetz zu- oder abnehmend zeitweilig gleich Null) gegen (oder ganz oder teilweise aus C weg) aufgetragen werden nach dem Flächensatz die vielfältigsten Bahnformen entspringen können. — LA 43.

LA 43.

Bemerkung: Indem bei der Konstruktion des Parallelogramms BDE geradlinige Diagonale gezogen wurde, war vorausgesetzt, daß ebenso wie Bewegung längs BD auch die längs BE eine gleichförmige sei. Die C kraft, welche diese Bewegung längs BE hervorrief, war dabei als ein Momentankraft vorausgesetzt, welche der bewegten Masse, wenn sie von A B angekommen ist, eine unendlich große Beschleunigung und hiernach wieder einer unendlich kurzen Zeit eine endliche Endgeschwindigkeit erteilt, wor plötzlich zu wirken aufhört, so daß sich die Masse schon von einem dem Pt unendlich nahen Punkte wieder mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Wo solche Momentankräfte — vgl. §. 16, S. 57 — nirgends vorkommen und alle vorkommenden Centralkräfte von endlicher Dauer und Größe sind und somit aus geradlinigen Stücken zusammengesetzte, sondern stetig gekrümmte liefern müssen, so gilt doch der Flächensatz auch für solche nicht eckig krumme, sondern gebrochene Linien; was daraus folgt, daß er eben von speziellen Voraussetzung über das Gesetz, nach welchem die Centralkraft an verschiedenen Punkten der Bahn wirkt, ganz unabhängig ist.

Die Bedingungen des Flächensatzes sind auch erfüllt bei den gleichförmig kreisenden Bewegungen; denn da hier in gleichen Zeiten gleiche Kreise zurückgelegt werden, so auch gleiche Kreisausschnitte. Dabei kann der Centrum nur der Kreismittelpunkt sein. — Desgleichen auch bei den geradlinigen gleichförmigen Bewegungen; denn da hier in gleichen Zeiten gleiche Strecken zurückgelegt werden, so sind auch alle Dreiecke CAB , CBD . . . flächengleich kann als Centralpunkt jeder beliebige nahe oder ferne Punkt des Raumes Gerade herum angenommen werden, die Centralkraft hat aber dann den Wert Null, was nur eine andere Form des Trägheitsgesetzes ist.

Wir werden nicht nur des Flächensatzes, sondern auch (namentlich in seiner Umkehrung) bedürfen. — Es sei von der Fig. 55 zunächst eine gebrochene Linie ABF als Bahn eines Massenpunktes gegeben und vorausgesetzt, daß er die beiden Strecken AB und BF binnen gleicher Zeiten τ zurücklegt. Da wir nach dem Trägheitsgesetz wissen, daß, wenn keine Kraft wirkt, ein Massenpunkt in der zweiten Zeit τ den Weg BD zurücklegen müßte, d

sie, daß vor allem die **Richtung** der Kräfte zwischen der Erde und den von „angezogenen“ Körpern annähernd normal gegen die Erdoberfläche (worin ja der auffälligste Grund dafür liegt, gerade die Erde für den „Sitz“ der Schwerkraft, genauer: für eine wesentliche Teilursache jener Erscheinungen 1., 2., 3. zu halten). Für einigermaßen größere Teile der Erdoberfläche läßt sich das Nichtparallelsein dieser Richtungen nur erschließen aus der Lage gegen den Fixsternhimmel, nämlich der Lage des Zenits; **Bleilot** (Fig. 56) und **Wasserwage** (Figg. 1 und 6) bilden daher auch wesentliche Bestandteile der „System des Horizonts“ in Beziehung stehenden astronomischen Instrumente, namentlich des Theodoliten und Zenitsektors (§ 176). Diese Instrumente sind es, durch welche in erster Annäherung die Kugelgestalt, in zweiter Annäherung die sphäroidische Gestalt und bei höchster erreichbarer Genauigkeit die wahre Gestalt des Geoids erkannt wird; wozu dann noch die aus Lotabweichung erschlossenen lokalen Ungleichmäßigkeiten in der Verteilung der Erdmasse (unterirdische Höhlungen, Anhäufung spezifisch leichterer, bzw. schwererer Gesteine u. dgl., § 178) kommen. — Nur insoweit über kleinen Teilen der Erdoberfläche **Bleilot** und **Zenitsektor** keine merklichen Unterschiede in der Lage des Zenits aufweisen, darf die Richtung der Schwere für solche Nachbarorte als konstant und die Erdoberfläche als eben angenommen werden.

Die Größe der Schwerkraft ist bei mässigen Erhebungen annähernd konstant. Indem **GALILEI** nirgends andeutet, daß er die Bewegung frei fallender Körper als eine nur annähernd gleichmäßig beschleunigte eingezeichnet habe, nahm er stillschweigend auch die Schwerkraft als nach vertikaler Richtung überall von konstanter Größe an. Auch findet sich bei ihm keine Andeutung darüber, ob er sich die Schwere in dieser Konstanz bis auf unendliche Entfernungen von der Erde oder bis zu welchen Grenzen etwa sonst gedacht hat. Dagegen war sich **GALILEI** überall bewußt, daß die Richtung der Schwere an verschiedenen Orten nicht gleich, sondern die zum Erdmittelpunkt, also z. B. die Bewegung in einer „Horizontalen“ eigentlich eine Bewegung in einem Kreissegmente ist.

In den (namentlich durch die Lehre von den magnetischen und elektrischen Kräften) neuestens gebräuchlich gewordenen Ausdrücken können wir die aus den bisher geschilderten Tatsachen erschlossenen Kraftwirkungen der Erde nach außen hin

LA 30, 49. (über die Kräfte im Erdinnern vgl. LA 30, 49) kurz so darstellen:

Über hinreichend eng begrenzten Gebieten der Erdoberfläche ist das **Gravitations-Kraftfeld der Erde homogen** (Fig. 57 a), d. h. die Richtungen der Kräfte sind überall parallel, und die Größen derselben auf je 1 g wirkenden Schwerkraften sind einander gleich.

Wir wollen das so gedachte Kraftfeld der Erde im folgenden als „**Galileisches Kraftfeld**“ bezeichnen; nur für ein solches dürfen wir ja z. B. bei horizontalen oder schiefen Wurf alle beschleunigenden Schwerkraften als parallel betrachten, und die Senkungen genau proportional den Quadraten der Fallzeiten und sonach die Bahnen als Parabeln ansehen. — Indem aber ein halbes Jahrhundert später **NEWTON** sein zunächst aus den himmlischen Bewegungen erschlossenes Gesetz der allgemeinen Gravitation wieder zurück anwendete auf die Erde, gab er strenge Beweise dafür, daß jene stillschweigende Annahme **GALILEI**s nur annähernd zuträfe, und daß vielmehr die Größe der Kraft, mit welcher die Erde je 1 g in 1, 2, 3 ... 59 ... Erdradien über der Erdoberfläche, also in 2, 3, 4 ... 60 ... Erdradien vom Erdmittelpunkte anzieht, nur $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{16}$... $\frac{1}{3600}$... der Kraft beträgt, mit welcher sie 1 g an der Oberfläche anzieht. Wir werden das so

anziehenden und abstossenden Körpern ausgebreiteten Mediums namentlich der FARADAYS und MAXWELLS Forschungen sich aufgedrängt hat (vgl. §§ 144, 145).

§ 21. Allgemeine Gravitation.

Alle kinetischen Wirkungen der Massen des Weltalls aufeinander (und auch die statischen Wirkungen, soweit solche vorkommen und zu beobachten sind) erfolgen gemäß

$$\text{NEWTONS Gravitationsgesetz: } f = \kappa \cdot \frac{Mm}{r^2} \text{ Dyn} \quad . \quad .$$

Hierin bedeutet die „Gravitationskonstante“ κ die Kraft, mit welcher je zwei zunächst als Punkte gedachte Massen von je 1 g sich aus 1 cm Abstand anziehen; der Betrag dieser Konstanten $\kappa = 6,685 \cdot 10^{-8}$ (Dyn per Gramm und Centimeter) wurde erst ein Jahrhundert nach NEWTON gefunden (s. u. VI.). — Im übrigen besagt das Gesetz: Je zwei Massen M und m wirken im Abstände r aufeinander mit einer Kraft f , deren Grösse nur von M , m und r abhängig ist (dagegen unabhängig von der stofflichen Verschiedenheit, der Zugehörigkeit zu diesem oder jenem Weltkörper, der gegenseitigen Geschwindigkeit u. s. f.). Die Richtung der Kraft ist die Verbindungsstrecke von M und m ; da die Massen sich längs dieser Geraden zu nähern suchen, wird die Kraft als „Anziehung“ bezeichnet.

Die in Gl. (1) zusammengefaßten Behauptungen gliedern sich in

$$\text{I.}^* \text{ das Abstandsgesetz: } f = \frac{C}{r^2} \quad . \quad . \quad (1r)$$

$$\text{und II. das Massengesetz: } C = \kappa \cdot Mm \quad . \quad . \quad (1m)$$

I. Das Abstandsgesetz wurde von NEWTON zuerst streng abgeleitet für die Bewegung der Planeten um die Sonne. Notwendig und ausreichend waren hierfür die drei Keplerschen Gesetze¹⁾:

1. Jeder Planet beschreibt eine Ellipse, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht. — Dieses Gesetz gibt für je einen Planeten unmittelbar die Gestalt der Bahn an. — Den kleinsten Abstand r von der Sonne hat der Planet im Perihel (Sonnennähe), den grössten R im Aphel (Sonnenferne). — Je kleiner der Unterschied von R und r im Verhältnis zum „mittleren Abstand“ a (der halben grossen Achse der Bahnellipse) ist, um so mehr nähert sich die Bahn einem Kreise, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht.

In Fig. 59 ist $r:R = 1:2$ angenommen; daher die lineare Excentricität $FO = \frac{1}{3}PO$, $e = \frac{1}{3}a$; die numerische Excentricität $\varepsilon = e:a = \frac{1}{3}$. Bei d

Anh. 25. Erde dagegen ist $\varepsilon = \frac{1}{60}$ (math. Anh. Nr. 23 und LA 45).

¹⁾ Das Nachfolgende setzt an astronomischen Anschauungen und Begriffen, die in §§ 174 — 183 geschilderten und entwickelten voraus.

den Umlaufzeiten t , bzw. T sec, so gilt für deren centripetale Beschleunigungen B_{\perp} und b_{\perp} :

$$B_{\perp} : b_{\perp} = 4\pi^2 \cdot \frac{r}{t^2} : 4\pi^2 \cdot \frac{R}{T^2} = \frac{r}{r^3} : \frac{R}{R^3} = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2} \quad (4)$$

Um die centripetale Beschleunigung für einen beliebigen Planeten nicht durch Proportion, sondern in absolutem Maße zu erhalten, schreiben wir das dritte Keplersche Gesetz in der Form $\frac{1}{t^2} = \frac{\text{konst}}{r^3}$ oder $\frac{r}{t^2} = \frac{\text{konst}}{r^2}$. . . (5)

dann ist $b_{\perp} = 4\pi^2 \cdot \frac{\text{konst}}{r^2}$ cm sec⁻², oder abkürzend $b_{\perp} = \frac{\text{Konst}}{r^2}$, w

LA 46. $\text{Konst} = 4\pi^2 \cdot 3,282 \cdot 10^{24} = 1,296 \cdot 10^{26}$ (cm, sec) . . (6) . . (LA 46)

Auch für je einen Planeten ergibt sich die nämliche Beziehung (4) wobei wir aber die Bahn nicht mehr als Kreis ansehen dürfen, da es sonst keine Verschiedenheit der r und R gäbe. Sind r und R wieder speziell die Sonnennähe und die Sonnenferne, woselbst die Krümmungshalbmesser ρ der Bahn einander gleich sind, V und v die Geschwindigkeiten daselbst, so ist (§ 13, allgemeine Aufgabe):

$$W_{\perp} : w_{\perp} = \frac{V^2}{\rho} : \frac{v^2}{\rho} = V^2 : v^2 = \frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2} \quad (7)$$

LA 47. Durch schwierigere Rechnungen (LA 47) hat NEWTON gezeigt, daß auch für irgend einen Planeten in irgend einem Punkte seiner Bahn beim Abstande von der Sonne die Beschleunigung in der Richtung dieses Abstandes:

$$w_r = \frac{\text{Konst}}{r^2}, \text{ wo wieder } \text{Konst} = 1,296 \cdot 10^{26} \text{ (cm, sec)} \quad (8)$$

Diese phoronomische Größe *Konst* ist von dynamisch grundlegender Bedeutung, da sie maßzahlgleich ist mit dem Produkte aus der Gravitations

LA 51. constante κ und der Sonnenmasse M ; s. u. VI und LA 51.

II. Wie groß die Massen der Sonne und je eines Planeten seien, ist all aus der Beschleunigung w_r , welche er gegen die Sonne hin hat, noch nicht erkennen. Denn sowie an einer bestimmten Stelle innerhalb des Kraftfeldes Erde alle Körper von beliebig großer Masse dieselbe Beschleunigung erhalten, daher aus ihrer Beschleunigung allein kein Schluss auf ihre Masse zu ziehen so wäre auch, wenn z. B. 10 Massen gleich der des Jupiter nebeneinander, ein Planet von 10facher Masse in der Jupiterbahn um die Sonne liefen, Beschleunigung gegen die Sonne keine andere als die des Jupiter selbst. Entspricht es auch, daß wenn wir umgekehrt aus der vorläufig angenommenen Gl. (1) die Beschleunigung W berechnen, welche die Masse m des Planeten gegen die Sonne hin infolge der Kraft $f = mW = \kappa \frac{Mm}{r^2}$ erhält, $W = \kappa \frac{M}{r^2}$ wird, in der Faktor m beiderseits ausfällt. (Erst wenn die Sonne eine größere Masse hielte, etwa durch Hineinstürzen von Meteoriten, wie nach J. R. MAYERS Hypothese, § 196, würde diese größere Sonnenmasse der gleichen Jupitern auch eine größere Beschleunigung erteilen. Eine solche merkliche Vergrößerung der Sonnenmasse aber, oder daß gar die Sonne bei unveränderter Masse ein stärker, einmal schwächer auf die Planeten wirke, sowie etwa ein zuerst aufgeladener und dann allmählich sich entladender elektrischer Körper auf ein

sches Pendel in seiner Nachbarschaft allmählich immer schwächer wirkt, vergl. 135, ist durch die immer merklich gleichbleibenden Umlaufzeiten der Planeten, t ihrer Bestimmung durch HIPPARCH und Frühere, ausgeschlossen.)

Ähnlich wie die Masse m des Planeten gegen die Sonne hin die obige Beschleunigung W , erhält durch die gleiche Kraft f die Masse M der Sonne gegen m Planeten hin die Beschleunigung $w = x \frac{m}{r^2}$. Da beide Beschleunigungen nander entgegengerichtet sind, haben Sonne und Planet in Bezug aufeinander nach § 9, Ende) die Relativbeschleunigung $W + w = x \frac{M}{r^2} + x \frac{m}{r^2} = x \frac{M+m}{r^2}$.

In Ruhe befindet sich also innerhalb des Systems Sonne-Planet nicht die Sonne, sondern der „Massenmittelpunkt“ (§ 14, Vorversuch 3; § 28) dieses Systems. Dieser Punkt (nicht, wie es noch KEPLER in seinem ersten Gesetz stillschweigend vorausgesetzt hatte, der Mittelpunkt der Sonne) steht im Brennpunkt der Ellipse des Planeten; ihn umkreist der Mittelpunkt der Sonne in einer der Planeten-ähn geometrisch ähnlichen Ellipse, die freilich sehr klein ist, weil M sehr groß gegen m ist. — Um wieviel der Sonnenmittelpunkt durch die Masse eines Planeten leichtsam nach der entgegengesetzten Seite von dem gemeinschaftlichen Brennpunkte weggeschoben erscheint, äußert sich am deutlichsten darin, daß die Umlaufzeit des Planeten etwas kürzer ist, indem er um den näheren Massenmittelpunkt kreist, als wenn er nach dem dritten Keplerschen Gesetze um den Sonnenmittelpunkt kreiste. Wirklich sind solche Abweichungen beobachtet worden, aber selbst für Jupiter, wo sie am größten sind, würden sie wegen ihrer Kleinheit keine sehr genaue Bestimmung des wahren Massenverhältnisses (1048 : 1) gestatten.

Dagegen läßt sich aus den gegenseitigen Beschleunigungen dreier Körper des Sonnensystems auf das Verhältnis der Massen je zweier schließen. Ein Beispiel einfachster Art bietet folgende, auf alle Planeten mit Monden anwendbare Methode (nach welcher zuerst NEWTON das Massenverhältnis Sonne : Jupiter = 1067 : 1 angab): Nehmen wir wieder an, daß die Sonne stillstehe im Mittelpunkte eines Kreises vom Halbmesser a , in welchem sich der Planet Jupiter binnen der Zeit T bewegt, und ebenso, daß ein Jupiter der äußerste Trabant in einem Kreise vom Halbmesser α binnen der Zeit t umlaufe, so ist die

beschl. des Jupiter zur Sonne $W = x \cdot \frac{M}{a^2} = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{a^2}$ oder $xM = 4\pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2}$,

beschl. des Trabanten zum Jupiter $w = x \cdot \frac{m}{\alpha^2} = 4\pi^2 \frac{\alpha^3}{t^2} \cdot \frac{1}{\alpha^2}$ oder $xm = 4\pi^2 \cdot \frac{\alpha^3}{t^2}$,

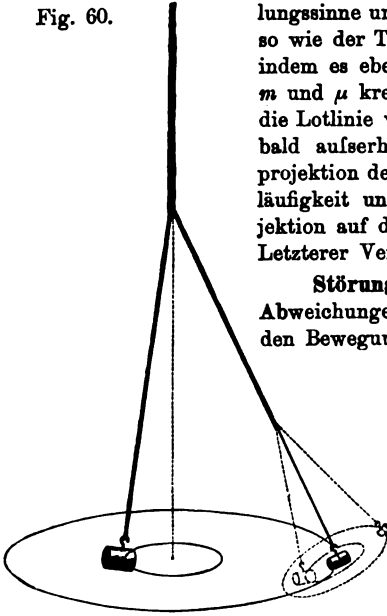
mit das Verhältnis $M : m = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^3 \cdot \left(\frac{t}{T}\right)^3 \dots (8)$.

Man kann das Teilnehmen des Centralkörpers an der Centralbewegung, sowie schon zwischen drei umeinander kreisenden Massen (M, m, μ) eintretenden Entwicklungen leicht veranschaulichen durch folgenden einfachen

Versuch (Fig. 60, a. f. S.). An der Decke des Zimmers sind zwei Schnüre befestigt, welche unten in gleicher Höhe Massen M (1000 g) und m (200 g) tragen. werden die Schnüre zusammengedreht und dann losgelassen, so versetzen sie die Massen in kreisende Bewegungen, so daß bei gleicher Umlaufzeit T ihre Abstände von der Lotlage sich verkehrt verhalten wie die Massen; $A : a = m : M$. bei kann man die zwischen den Massen wirkende Kraft versinnlichen durch eine ischen sie gespannte Spiralfeder oder einen Faden; wird dieser während sehr sch gewordenen Drehung beider Massen durchgebrannt, so fliegen diese auseinander (ähnlich wie wir es uns von den Weltkörpern des Sonnensystems denken

müßten, wenn zwischen ihnen die allgemeine Gravitation nicht mehr wirkte). Wird ferner an die Schnur der kleinen Masse m eine noch kleinere Masse μ ($= 20g$)

Fig. 60.



durch einen Faden befestigt und dieser im gleichen Wicklungssinne um die Schnur geschlungen, so kreist μ um m so wie der Trabant um den Planeten. Dabei wird m indem es ebenfalls um die gemeinschaftliche Lotlinie von m und μ kreist, nicht mehr die einfache Kreisbahn um die Lotlinie von M und m einhalten, sondern bald innerhalb bald außerhalb dieser Bahn sich befinden. (Schattenprojektion der ganzen Erscheinung, wobei auch die Rechtläufigkeit und Rückläufigkeit der Planeten in ihrer Projektion auf das Himmelsgewölbe veranschaulicht wird). — Letzterer Versuch erläutert auch den Begriff der

Störungen (Perturbationen); so nennt man alle Abweichungen der im Planetensystem wirklich stattfindenden Bewegungen von denjenigen, welche je ein Körper

gegen die als unbeweglich gedachte Sonne nach den Keplerschen Gesetzen allein ausführen würde, also allgemein die Bewegungen der Planeten, Trabanten, Kometen, Meteoriten unter Einfluss von zwei oder mehreren Massen; auch die oben aus der Anwendung des Gravitationsgesetzes erwartete und durch die Abweichungen von dritten Keplerschen Gesetze bestätigte Bewegung der Sonne läßt sich im weiteren Sinne als eine solche Störung auffassen.

Insbesondere für die in den Keplerschen Gesetzen nicht zum Ausdruck kommende Wechselwirkung der Planeten untereinander ergeben sich folgende zwei Hauptarten von Störungsproblemen: 1. Direkte: Sind z. B. die Massen von Jupiter und Mars bekannt, so läßt sich berechnen, wie stark jeder durch den anderen aus seiner elliptischen Bahn um die Sonne abgelenkt und in seiner Bahngeschwindigkeit beeinflusst wird. 2. Inverse: Sind an einem Planeten, z. B. Uranus, bestimmte Störungen beobachtet, welche sich aus der Wirkung der bekannten Planeten, namentlich seiner großen Nachbarn Saturn und Jupiter, nicht erklären lassen, so liegt die Vermutung nahe, daß ein direkt noch nicht beobachteter Planet vorhanden sei, der diese Störungen bewirkt. So berechnete in der Tat LEVERRIER (mittelbar angeregt durch BESSEL) Bahn, Umlaufzeit und Masse des Neptun, und GALLE fand den neuen Planeten ganz nahe der vorausberechneten Stelle: die berühmteste Voraussage auf Grund des Gravitationsgesetzes (1846). —

Wie noch NEWTON selbst das Gravitationsgesetz nicht nur für die Wirkung zwischen Sonne und Planeten, für welche er es aus den Keplerschen Gesetzen abgeleitet hatte, sondern auch für die Wirkung der Planeten auf die Trabanten als gültig erkannt hatte, so gelang es ihm ebenso auch für die Kometen, von denen ein Teil, „die periodischen“, geschlossene (kreisförmige oder elliptische) Bahnen, andere dagegen, „die aperiodischen“, die anderen Arten der Kegelschnittslinien (Parabel und Hyperbel) beschreiben. — Daß aber das Gravitationsgesetz auch für Körper gilt, die gar nicht mehr unserem Sonnensystem angehören, erkannte ein Jahrhundert später W. HERSCHEL; er beobachtete nämlich unter den Fixsternen die sogenannten physischen Doppelsterne (den Unterschied zwischen

sen und den bloß „optischen“ vgl. § 188), von denen einige seither schon einen oder mehrere vollständige Umläufe gemacht haben. Auch diese Bewegungen werden durch direkte Beobachtungen in gutem Einklang mit den Keplerschen Gesetzen (unter Rücksicht darauf, daß die Bahnellipsen im allgemeinen gegen unsere Sehrichtung nicht normal liegen) für die Bewegung jedes Teiles um den gemeinschaftlichen Massenmittelpunkt befunden. Sogar Voraussagen von Fixsternen (ähnlich der des Planeten Neptun) sind durch Anwendung des Gravitationsgesetzes auf die Fixsternwelt gelungen. So wurde ein Siriusbegleiter schon von **SEEL** (1844) vorausgesagt, der dann später (1862) wirklich beobachtet wurde. —

Wiewohl also durch zahllose Ableitungen des Abstands- und des Massengesetzes aus vorherigen Beobachtungen, sowie durch die auf das Gesetz gegründete Voraussage noch nicht beobachteter Tatsachen, das Gravitationsgesetz als ein das ganze Universum umfassendes erwiesen gelten darf, so ist es doch möglich, ja auch neuesten Untersuchungen (so von **SEELIGER** über das Hereinwirken des Eingriffes der übrigen Fixsterne in unsere Fixsterninsel) wahrscheinlich, daß Newtons Gesetz doch nur annähernd gilt; noch wahrscheinlicher ist es überhaupt kein einziges „Naturgesetz“ (wie es die drei Prinzipien der Mechanik sind, log. Anh. Nr. 37). Anh. 37.

Aber auch wenn das Gesetz (1) als streng gültig angenommen wird, bleibt zu fragen: In welchem Sinne und mit welchem Rechte durften überhaupt in der Gleichung (1) M und m als Punkte fingiert werden? Dieser Nachweis wird dadurch erbracht, daß wir für je zwei Körper von gegebener Gestalt und Massenverteilung unter jener Voraussetzung die aus den einzelnen Anziehungen aller Punkte des einen Körpers auf alle Punkte des anderen resultierende Gesamtanziehung berechnen und das Ergebnis mehr oder minder mittelbar mit den Beobachtungen vergleichen. Das einfachste Problem solcher Art betrifft die

III. Wirkungen von Kugeln auf äußere und innere Punkte. — Von diesen bewies schon **NEWTON**:

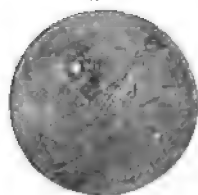
1. Eine gleichmäßig und sehr dünn mit Masse belegte Kugelfläche wirkt auf einen äußeren Punkt so, als ob die ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre.

Dies ist für die Richtung der resultierenden Kraft aus der symmetrischen Lage der Kugelschale in Bezug auf die Centrale der Kugel und des äußeren Punktes unmittelbar ersichtlich. — Beweise für die Größe der Kraft vergl. LA 48. LA 48.

2. Eine gleichmäßig und sehr dünn mit Masse belegte Kugelfläche wirkt auf einen inneren Punkt gar nicht (genauer: die von ihren einzelnen Teilen auf den Punkt ausgeübten Anziehungen halten einander das Gleichgewicht).

Beweis (Fig. 61): Denken wir uns den inneren Punkt J als gemeinschaftlichen Scheitel von lauter Doppelkegeln, welche die umschließende Kugel in Paare von Flächen-, zw. Massenteilen zerlegen. Die Wirkungen je zweier verhalten sich dann nach dem Massengesetze direkt wie die Flächen, also (nach welchem Satze über die Schnitte Pyramiden?) auch direkt wie die Quadrate der Abstände, nach dem Abstandsgesetz verkehrt wie die Quadrate der Abstände von dem angezogenen Punkt; die Anziehungen sind also gleich und ihre (kinetische) Wirkung ist Null.

Fig. 61.



Umgekehrt: Nur dann wirkt eine gleichmäßig belegte Kugel-
fläche auf einen inneren Punkt (kinetisch) nicht, wenn das Abstandsgesetz das der verkehrten zweiten Potenz und das Massengesetz das des einfachen Produktes ist.

Denn nach dem Satze über Pyramiden verhalten sich ja die Flächen jedesfalls direkt wie die zweiten Potenzen jener Abstände; und in dem Begriffe der „gleichmäßigen“ Belegung ist vorausgesetzt, daß die Massen den Flächen proportional sind. (Einen vollständigeren Beweis vgl. LA 48.)

Die Sätze 1. und 2. lassen sich erweitern α) auch für Kugelschalen von endlicher Dicke und für Vollkugeln, falls nur diese aus lauter homogenen Schalen zusammengesetzt sind; β) statt für Anziehungen auch für Abstöße (wie nach COULOMBS Gesetz für gleichnamig elektrische Körper, § 135).

Erst durch die Erweiterung α) ist es gerechtfertigt, daß schon bisher über die Abstände und Richtungen der Kräfte von den Mittelpunkten der Sonne, der Planeten und Monde gezählt wurden. — Bei Rücksicht auf die ellipsoidische Gestalt dieser Körper werden aber die Anziehungsprobleme im allgemeinen viel schwieriger. Auch die Erde werde im folgenden (IV.—VI.) wieder nur als Kugel gedacht.

IV. Die irdische Schwere als besonderer Fall der allgemeinen Schwere. — Auch die schon dem Altertum geläufige Vorstellung, den Erdmittelpunkt als „Sitz“ der Schwere zu denken, gewinnt ihre Verdeutlichung und Rechtfertigung erst durch NEWTONS Gesetz über die Anziehung der Kugeln auf äußere Punkte. Die Kraft, mit der ein Körper gegen die Erdoberfläche hingezogen wird, haben wir uns nämlich nunmehr zu denken als die Resultierende aller Kräfte, mit denen ihn die einzelnen Massenteile der Erde anziehen. — Beträgt die Summe aller dieser Massenteile Mg und die Masse eines Körpers nahe der Erdoberfläche mg , so daß sein Gewicht $p = mg$ Dyn ist, so ist in die allgemeine Formel des Gravitationsgesetzes für f speziell p , für r speziell der Erdradius R einzusetzen, und es ist dann $mg = \frac{x M m}{R^2}$, also indem der Faktor m ausfällt.

LA 66. $x M = g R^2$. . . (9) . . . (LA 66)

Da hier g und R viel leichter meßbare Größen sind als x und M , so empfiehlt es sich für die Wirkungen speziell der Erdschwere oft, die allgemeine Formel des Gravitationsgesetzes in der Form zu verwenden $f = g R^2 \cdot \frac{m}{r^2}$, wo $r \leq R$.

LA 50. So ergibt sich jetzt auch die Beschleunigung und das Gewicht einer gegebenen Masse in beliebig großen Höhen über der Oberfläche (LA 50). Theoretisch wird erst für $r = \infty$ die Schwere Null, doch beträgt sie z. B. schon in einem Abstände $1000 R$ vom Erdmittelpunkte nur ein Millionstel ihres Wertes an der Oberfläche. (Störungen des Neptun durch die Erde sind noch merklich.)

Nach dem Gesetz über die Anziehung von Kugelschalen auf innere Punkte nimmt die Schwere gegen den Erdmittelpunkt hin gleichmäßig ab (d. h. sie ist direkt proportional dem Abstände vom Mittelpunkte) und ist im Erdmittelpunkte selbst Null (LA 49).

Ähnliche Spezialisierungen ergeben sich auch für alle übrigen kugelförmigen Massen des Planetensystemes. Da deren Massenverhältnisse und Radien bekannt sind, so ergibt sich aus der Übertragung der Gleichung $x M = g R^2$. . . (9) auch der jeweilige Wert der Beschleunigung an ihrer Oberfläche. Z. B. an der Oberfläche des Mondes $g' = \frac{1}{6} g$, für die Sonne $G = 28 g$.

V. Das **Flutphänomen** besteht darin, daß an Küsten (Inseln) und offenen Meere einem relativ höchsten Wasserstande (**Flut**) nach etwas mehr als sechs Stunden ein niedrigster Wasserstand (**Ebbe**), diesem nach gleicher Zeit wieder Flut folgt u. s. w. — Daß diese so auffallende Erscheinung mit dem Mondlauf kausal zusammenhängen müsse, wurde von altersher vermutet, da der Zeitunterschied zwischen einer Flut und der zweitnächsten gleich ist einem Mond-Tage 4 Stunden 50 Minuten, § 184). Die naheliegende Erklärung, daß der Mond durch seine Massenanziehung eine Ansammlung der Gewässer weilig über derjenigen Stelle der Erdoberfläche hervorbringe, für welche er in oberer Kulmination steht, ließe es aber nicht nur unerklärt, sondern paradox erscheinen, warum nicht erst nach je einem ganzen, sondern schon nach einem halben Mond-Tage die Flut wiederkehrt, d. h. warum nicht nur auf der dem Monde zugewandten, sondern auch auf der ihm abgewandten Seite der Erdoberfläche ein Wasserberg sich bildet. NEWTON gab aber die einheitliche Erklärung auf Grund seines Gravitationsgesetzes ohne jede neue Hypothese, indem er die Gröößen der Beschleunigung in Rechnung zog, welche der Mond M der ihm zugewandten Wassermenge A (Fig. 52), dem Erdmittelpunkt C und der ihm abgewandten Wassermenge B erteilt. Es „fällt“ nämlich gleichsam A mit der größten, C und der ganze feste Erdrörper mit einer kleineren, B mit der kleinsten Beschleunigung gegen den Mond hin, und daher sucht sich sowohl A von C , wie kaum weniger auch B von C zu entfernen.

Erhält dabei eine Masse in C gegen den Mond hin die Beschleunigung $\frac{\gamma}{R^2}$, so sind die Beschleunigungen der Wasserteile A und B in Bezug auf die Erde

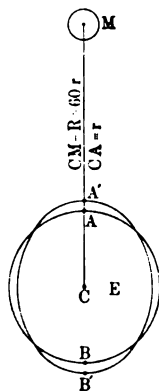
$$\text{in } A \quad \frac{\gamma}{R^2} - \frac{\gamma}{(R-r)^2} \neq - \frac{2Rr\gamma}{R^4} = - \frac{2r}{R^3} \gamma,$$

$$\text{in } B \quad \frac{\gamma}{R^2} - \frac{\gamma}{(R+r)^2} \neq + \frac{2Rr\gamma}{R^4} = + \frac{2r}{R^3} \gamma;$$

an beiden Stellen wird also das Wasser mit annähernd um ein wenig viel geringerer Kraft gegen den Erdmittelpunkt hingezogen als in den um 90° abliegenden Stellen der Erdoberfläche. Es wird somit von diesen gegen jene ein Überdruck auf das Wasser ausgeübt, infolge dessen an die Stellen der oberen und unteren Kulmination des Mondes ein Zuströmen des Wassers erfolgt.

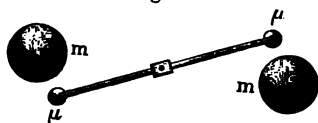
In Wirklichkeit erfährt die Erscheinung mancherlei Modifikationen (Veränderung der Flutzeit gegenüber der Kulminationszeit des Mondes, verschiedene Fluthöhen je nach der Gestalt der Küsten u. s. w.), von denen NEWTON selbst mehrere quantitativ zu erklären vermocht hatte. — (**Springflut**, **Nippflut** aus dem Zusammenwirken der Sonne mit dem Monde, bezw. Entgegenwirken gegen ihn).

Fig. 62.



VI. Bestimmung der Gravitationskonstante α , der Masse der Erde und der übrigen Massen des Planetensystems in absolutem Maße. — Lange nicht der absolute Wert von α ermittelt war, mochte gegen die Annahme einer allgemeinen Gravitation eingewendet werden, daß z. B. zwei Grammkörperchen in 1 cm Abstand keinerlei Anziehung zu einander verraten. Aus diesem Umstande war aber nicht zu schließen, daß die Kraft wirklich Null, sondern nur, daß sie für gewöhnliche Beobachtungsmittel unmerklich klein sei gegenüber der Reibung u. dergl., welche eine solche Annäherung verhindert. — Auch wenn z. B. die beiden Gramme als Pendel aufgehängt wären (vergl. den Versuch zum annähernden Nachweis des COULOMBSchen Gesetzes, § 135), so würde durch jede Anziehung eine Verschiebung aus der Lotlage und hierdurch eine solche Anziehung schon übermächtig entgegenwirkende Schwerkraftskomponente geweckt. — Gleichwohl gelang es CAVENDISH (1798), diese Anziehungen mittels der von MITCHELL (1768) erfundenen, von COULOMB (1784) zur Messung elektrischer und magnetischer Anziehungen und Abstofsungen verwendeten „Drehwaage“ nachzuweisen und zu messen (Fig. 63 im Grundriß).

Fig. 63.



An einem feinen Draht war ein leichter Holzwagen aufgehängt, an dessen Enden symmetrisch Kugeln von der Masse $\mu = 730$ g hingen; ihnen standen in r cm Abstand zwei Kugeln von je $m = 158\,000$ g gegenüber, welche jene anziehen und so den Wagebalken in wagrechter Ebene um einen meßbaren Winkel ablenkten. Aus der elastischen Rückwirkung des gedrehten Drahtes konnte die Kraft f zwischen je einem m und μ bestimmt werden, so daß in der wieder vorläufig als gültig angenommenen Gleichung $f = \alpha \frac{m\mu}{r^2}$ alle Größen bis auf α bekannt waren. Auch das Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ wurde durch die für verschiedene r gefundenen Werte von f bestätigt.

Diese Drehwaage wurde als „Weltenwaage“ bezeichnet, weil, nachdem α einmal bekannt war, zunächst auch die Masse M der Erde gemäß der Gl. (9) $\alpha M = g R^2$ bestimmt war. — Ist ferner von einem Planeten, der der Erde, die Masse M bekannt und durch die in Gl. (8) dargestellte astronomische Methode auch das Verhältnis je zweier Körper des Planetensystems, so läßt sich auch für jeden Körper dieses Systems die Masse in absolutem Maße, d. h. in Gramm oder in Tonnen ($1\,t = 1000\,kg = 10^6\,g$) angeben. — Sind ferner die scheinbaren Durchmesser und auf Grund der bekannten Abstände auch die wirklichen Halbmesser und Volumina der Weltkörper bekannt, so folgt aus $d = \frac{m}{v}$ (§ 16, S. 63) auch die mittlere Dichte aller dieser Körper. So ergeben sich die im § 187 zusammengestellten Zahlenangaben über Massen und Dichten der Weltkörper.

Das Prinzip der Methode von CAVENDISH, die Anziehung zweier ihrer Masse und Massenverteilung nach bekannten irdischen Körper bei gegebenem Abstände zu messen (welche Messungen zu den überhaupt wichtigsten, aber zugleich schwierigsten und daher gegenseitiger Kontrolle bedürftigen gehören), wurde auch durch mannigfaltige andere Methoden durchgeführt, welche meist als „Methoden zur Bestimmung der Dichte der Erde“ bezeichnet werden. So hatten MASKELYNE und HUTTON (1772–1780, also schon vor CAVENDISH) die Ablenkung eines Bleilotes südlich und nördlich von einem west-östlich streichenden Gebirge beobachtet, von dem der geologische Aufbau und somit die Masse m bekannt war. Hier stellt die Masse des Bleilotes die obige Größe μ und die aus der Größe der Ablenkung zu berechnende Schwerkraftskomponente die Kraft f dar.

der nach dem Gegenwirkungsprinzip ebenfalls k Dyn beträgt, mit der Beschleunigung $b = \frac{k}{m}$ cm sec⁻² längs einer Strecke von s cm bewegt (und ihr dabei die Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2bs}$ erteilt), hat jene Kraft eine Arbeit von ks Erg geleistet. —

In den Beispielen 1, 2, 3 war I. der zu überwindende Widerstand konstant an allen Punkten des vom Angriffspunkte der arbeitenden Kraft zurückgelegten Weges, und es war II. der Sinn der Verschiebung längs dieses Weges rein entgegengesetzt der Richtung des Widerstandes. Zunächst unter diesen beiden einfachsten Voraussetzungen erfolgt die Messung der mechanischen Arbeit auf Grund folgender Einheiten und Mafsformeln:

Die **Einheit der mechanischen Arbeit (AE)** ist geleistet, wenn ein Widerstand von der Gröfse der Krafteinheit längs der Wegeinheit überwunden wurde. Im C-S-G-System ist 1 AE das Erg, d. i. die Arbeit einer Kraft, die einen Widerstand von 1 Dyn längs 1 cm überwindet. — Werden k Dyn längs s cm überwunden, so ist die geleistete mechanische Arbeit $A = ks$ Erg . . . (Mafsformel I)

Im terrestrischen Mafssystem gilt als 1 AE das Meterkilogramm (mkg), wobei „Kilogramm“ in der Bedeutung der Krafteinheit, nicht der Masseneinheit verstanden wird (§ 16). — Da 1 Kraftkilogramm gleich ist 981 000 Dyn und 1 m = 100 cm, so ist 1 mkg = 981 000 · 100 Erg = 9,81 · 10⁷ Erg = 10⁸ Erg. — Als gröfsere absolute Einheit wird in der Technik 1 Joule = 10⁷ Erg benutzt, 4, 55. Also 1 mkg = 9,81 Joule; 1 Joule = $\frac{1}{10}$ mkg (LA 53, 54, 55).

Wird die Arbeit, wie im obigen Beispiel 1, speziell entgegen der Schwerkraft, d. h. als Heben eines Gewichtes geleistet, so nimmt die Mafsformel $A = k \cdot s$ die speziellere Gestalt $A = p \cdot h$ an.

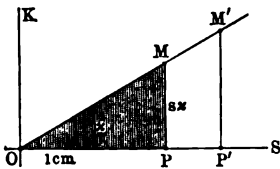
Wird die Arbeit, wie im obigen Beispiel 3, speziell entgegen dem Beharrungswiderstande (also nicht entgegen einer eigentlichen Kraft) geleistet, so kann doch auch dieser Widerstand wie der einer Kraft k , nämlich als gleich der die Masse beschleunigenden Kraft, in Rechnung gezogen werden, und es ergibt sich dann:

$$k = mb \text{ (§ 16) und } s = \frac{v^2}{2b} \text{ (§ 6), also } A = k \cdot s = mb \cdot \frac{v^2}{2b} = \frac{mv^2}{2} \text{ Erg.}$$

Diese Gröfse $\frac{mv^2}{2}$ ist mafszahlengleich derjenigen, die wir im folgenden § als „lebendige Kraft einer Masse m von der Geschwindigkeit v “ bezeichnen werden. — Darin, dafs aus dem Produkte $mb \cdot \frac{v^2}{2b}$ der Faktor b ausgefallen war, liegt ein Hauptgrund dafür, überhaupt eine Mafsgröfse „Kraft mal Weg“ einzuführen. Denn denken wir an der gegebenen Masse m ein andermal eine gröfsere Kraft $K = mB$ angreifend, die ihr die gröfsere Beschleunigung B erteilt, so braucht diese sie nur längs des kleineren Weges $\sigma = \frac{v^2}{2B}$ zu bewegen, um ihr (entgegen dem nunmehr ebenfalls gröfseren Beharrungswiderstande = K) die verlangte Endgeschwindigkeit v zu erteilen. Ist es z. B. speziell die irdische Schwerkraft, welche einer Masse m die Endgeschwindigkeit v erteilt, so wird $mg \cdot \frac{v^2}{2g} = \frac{mv^2}{2}$; auf der Sonnenoberfläche wäre $mG \cdot \frac{v^2}{2G} = \frac{mv^2}{2}$, wo $G = 28g$ u. s. w. — Ein anderer Hauptgrund für die Fruchtbarkeit des Begriffes „Arbeit = Kraft mal Weg“ liegt in seiner Anwendung auf die Maschinen, § 30;

1. Arbeit gegen elastische Kräfte (allgemeiner: Kräfte nach dem Ge
 $f = C \cdot s$). Ein Massenpunkt befindet sich in einem elastischen Kraftfeld
 das er im Punkte O im Gleichgewichte ist. Um ihn im Abstände von

Fig. 68.



im Gleichgewicht zu halten, seien x Dyn erforder
 dann ist nach dem Elastizitätsgesetze (§ 51) für
 Abstand von s cm eine Kraft von $s \cdot x$ Dyn erfor
 lich. — Diesem Kraftgesetze für elastische K
 entspricht hier das Ansteigen der Kraft nach
 Geraden OM (Fig. 68), wobei $MP = x \cdot OP$
 Das Arbeitsdiagramm für die Verschiebung $OP =$
 ist also das Dreieck $OPM = \frac{1}{2} x s \cdot s = \frac{1}{2}$
 Daher ist

die Arbeit gegen elastische Kräfte $A = \frac{1}{2} x s^2$. .

Etwas allgemeiner ist die auf dem Wege PP' geleistete Arbeit darge
 durch das Trapez $PP'M'M$; sie hat die Größe $A_s' = \frac{1}{2} x (s'^2 - s^2)$.

LA 56-62.

Die arithmetische Ableitung von Gl. (2) und Anwendungen in LA 56-62

2. Arbeit gegen Gravitationskräfte (allgemeiner: Kr

nach dem Gesetze $f = \frac{C}{r^2}$) zweier Massen von Mg und mg , de
 gegenseitiger Abstand von r cm auf R cm vergrößert wird; sie betri

$$A_r^R = x M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right) \text{ Erg} \dots$$

Für die Ableitung dieser vielfach nützlichen Gleichung (vergl. § 24, § 136
 der einfachste Fall der, das M ruhig in O (Fig. 68) bleibt und m längs einer

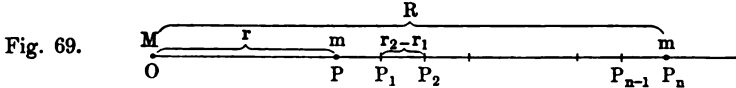


Fig. 69.

O ausgehenden Geraden aus dem Abstände $OP = r$ in den Abstand OP_n
 verschoben wird. Die Strecke PP_n werde in sehr kleine Strecken PP_1 , P_1P_2
 zerlegt. Die Anziehung von M auf m hat gemäß Newtons Gesetz (§ 21)

im Punkte P die Größe $f = x \frac{Mm}{r^2}$, im Punkte P_1 die Größe $f_1 = x \frac{Mm}{r_1^2}$

sh. 9, 21. Einen Mittelwert (math. Anh. Nr. 9 und 21) dieser Kraftgrößen stellt $x \frac{Mm}{r_1^2}$
 den wir als längs der ganzen Strecke PP_1 konstant geltend annehmen. De

$$\text{die Elementararbeit } A_{r_1}^{r_1} = x \frac{Mm}{r_1^2} (r_1 - r) = x M m \left(\frac{r_1}{r_1^2} - \frac{r}{r_1^2} \right)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{oder } A_{r_1}^{r_1} &= x M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right); \\ \text{ebenso } A_{r_1}^{r_2} &= x M m \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right); \\ &\dots \dots \dots \\ A_{r_{n-1}}^R &= x M m \left(\frac{1}{r_{n-1}} - \frac{1}{R} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Die Summe dieser Elementarar} \\ &\text{d. i. die Gesamtarbeit von } r \text{ bis} \\ &A_r^R = x M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right). \end{aligned}$$

Für $R = \infty$ wird $\frac{1}{R} = 0$ und $A_r = x \cdot \frac{M m}{r}$ Erg . . . (4); in W

LA 60.

Eine graphische Darstellung der Gl. (4) mittels Arbeitsdiagrammes in

hier statt der Verschiebungskomponenten, welche zusammen gleich MN sind, die veränderlichen Kraftkomponenten einführen, so wäre die Summierung aller einzelnen Teilarbeiten bei weitem nicht so einfach.)

Der hier betrachtete Fall der Arbeitsleistung an einer schiefen Ebene entgegen der Schwerkraft läßt sich folgendermaßen verallgemeinern:

Eine Masse, auf welche innerhalb eines homogenen Kraftfeldes die Feldkräfte mit k Dyn in der Richtung MX wirken (Fig. 73, a. v. S.), werde unter dem Winkel α gegen die der MX entgegengesetzte Richtung um s cm verschoben. Es ist dann die gegen die Feldkräfte

geleistete Arbeit $A = k s \cos \alpha$ Erg . . . (Mafsformel 1 n)

Diskussion der Gleichung (1 n) in Bezug auf α . Negative Arbeit. — Da nach dem bisher erörterten Begriffe der mechanischen Arbeit eine Kraft nur dann Arbeit leistet, wenn die Kraft selbst oder wenigstens eine Komponente von ihr einem Widerstande entgegen wirkt, so hat die Aufgabe II und ihre Lösung zunächst nur einen Sinn, wenn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Doch sind auch die beiden Grenzfälle $\alpha = 0$ und $\alpha = 90^\circ$ in Übereinstimmung mit den bisherigen Arbeitsmafsen: es ist nämlich für $\alpha = 0$, d. h. wenn die Verschiebung dem Widerstande rein entgegengesetzt ist, wegen $\cos \alpha = 1$ die Arbeit $A = ks$. Ferner ist für $\alpha = 90^\circ$, wegen $\cos \alpha = 0$, $A = 0$, d. h. eine Verschiebung normal gegen die Richtung der widerstehenden Kraft erfordert keine Arbeit gegen diese Kraft. — Da hingegen für $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ in Gl. (1 n) der \cos und daher auch die Verschiebung $s \cdot \cos \alpha$, sowie die Gröfse A negative Werte annehmen, so führt die Gleichung auf die Frage, ob und wie sich negative Mafszahlen einer Arbeit physikalisch deuten lassen. — Eine solche Deutung liegt nahe, wenn z. B. ein Wagen einen Hügel abwärts fährt. Indem wir nämlich bisher als positive Arbeit z. B. die beim Heben einer Last vertikal oder schief aufwärts betrachteten, so wird als negative Arbeit die beim Senken jener Last sich auffassen lassen. Also in einem noch konkreteren Beispiel: Leisten Pferde auf wagrechter Strafsse entgegen dem Widerstande der Reibung eine gewisse Arbeit R , so kommt zu dieser beim Berganfahren noch eine positive Arbeit S entgegen der Schwerkraft hinzu: $A = R + S = R + (+S)$; beim Abwärts fahren dagegen werden die Pferde durch die Arbeit, welche nunmehr die Schwerkraft ihrerseits entgegen der Reibung verrichtet, unterstützt und haben also ihrerseits eine um S verminderte Arbeit zu leisten: $A' = R - S = R + (-S)$. Würde hier der absolute Wert von S gröfser als der Wert von R , so hätten die Pferde trotz der Reibung überhaupt keine Arbeit mehr zu leisten; sie müfsten vielmehr jetzt den Wagen aufwärts drücken, während sie früher ihn aufwärts ziehen hatten. Allgemein:

Die Arbeit, welche eine Kraft K bei einer Verschiebung (entgegen einem Widerstande W) leistet, wird als **positive**, bzw. **negative** Arbeit der Kraft K gerechnet, je nachdem der Sinn der Verschiebung dem Sinne der arbeitenden Kraft **gleich** oder **entgegengesetzt** (somit dem Sinne des Widerstandes entgegengesetzt oder gleich) ist.

Durch diese Erweiterung des Arbeitsmafses auch für Verschiebungen im Sinne der widerstehenden Kraft erweitert sich der an Fig. 71 veranschaulichte Satz, dafs die Arbeit entgegen gegebenen Feldkräften nur von der Niveaudifferenz nicht von der Form der Bahn abhängt, auch für solche Bahnen wie in Fig. 72

. B. Heben und Senken eines schweren Körpers auf beliebig gekrümmten, teils ansteigenden, teils abfallenden (konvexen oder konkaven) Bahnen. Spezielleres Beispiel: Arbeit der Schwerkraft bei Bewegung eines Pendelpunktes während des Entfernens von, bezw. des Rückganges zu der Mittellage (— vgl. Fig. 4, S. 9 und Fig. 75, S. 103).

Überdies legt uns die Unterscheidung von positiver und negativer Arbeit die Vorstellung nahe, daß nicht nur bei jedem Arbeitsvorgange eine arbeitende Kraft und eine widerstehende Kraft vorhanden sei, sondern daß wir noch allgemeiner jede der beiden Kräfte sowohl als die arbeitende wie als die widerstehende, oder auch als Arbeit leistende und Arbeit verbrauchende ansehen können. (Vergleich mit den Handelsbüchern zweier Geschäftsfreunde, für deren einen dasselbe „Soll“ ist, was für den anderen „Haben“ bedeutet.)

Das Wort Arbeit hat schon im gewöhnlichen, außerphysikalischen und ebenso im physikalischen Sprachgebrauch zwei Bedeutungen: 1. Arbeit im ursprünglichen Sinne, das Arbeiten (das Verrichten, Durchführen, Vollziehen der Arbeit); 2. Arbeit im übertragenen Sinne, das Gearbeitete (das Ergebnis, das Produkt der Arbeit). Während z. B. Pferde eine Last auf wagrechter Bahn entgegen der Reibung oder über eine schiefe Ebene entgegen der Reibung und einer Schwerkraftskomponente bewegen, arbeiten sie; haben sie das Ziel erreicht, so besteht ihre Gesamtarbeit darin, daß die Last ihren Ort geändert hat, die Radachsen sich abgeschliffen und erwärmt haben u. dergl. mehr. — In physikalischen Rechnungen wird meistens nur auf die Arbeit im zweiten Sinne, auf das Endergebnis des Arbeitens, geachtet. Nur in diesem Sinne dürfen wir ja z. B. sagen, daß, wenn eine Masse um s m gehoben und dann um ebenso viel gesenkt wurde, die verrichtete Arbeit gleich Null sei. Hätten wir aber ein andermal das während des ganzen Vorganges sich vollziehende Arbeiten seinem absoluten Werte nach messen wollen, so ergäbe sich eine Arbeit der Muskelkraft beim Heben entgegen der Schwerkraft im Betrage von ks mtg und eine Arbeit der Schwerkraft beim Sinken entgegen der Muskelkraft wieder im Betrage von ks mtg, also zusammen von $2ks$ mtg. (Vergl. die beiden Fragestellungen: Ein Luftballon hat sich zuerst um s_1 m gehoben, dann um s_2 m gesenkt; wieviel Meter hat er sich vom Ausgangspunkt entfernt? und: Wieviel Meter hat er zurückgelegt?) Dagegen erhalten wir mit Rücksicht darauf, welche der beiden Kräfte beim Heben und Sinken jeweilig gearbeitet hat, sowie auf die Vorzeichen jener Arbeiten, folgende Ansätze:

Arbeit der Muskelkraft entgegen der Schwerkraft: $+ ks + (- ks) = 0$;

Arbeit der Schwerkraft entgegen der Muskelkraft: $- ks + (+ ks) = 0$.

Überblicken wir schliesslich die bisher behandelten Beispiele von Arbeitsvorgängen (Arbeiten im ersten Sinne) daraufhin, was alles die „Arbeit“ (im zweiten Sinne) sein kann, so zeigen sich diese Ergebnisse von sehr mannigfacher Art: Im ersten der drei eingangs dieses Paragraphen vorggeführten Beispiele für das Messen einer mechanischen Arbeit nach der Definitionsgleichung $A = k \cdot s$ befinden sich die gehobenen 9 kg in einem höheren Niveau in Bezug auf die Erdoberfläche; im zweiten Beispiele haben sich Teile des Wagens und der Fahrbahn infolge der Reibung abgeschliffen (verbogen . . .) und erwärmt; im dritten Beispiele hat die bewegte Masse einen Geschwindigkeitszuwachs erfahren. Durch die gegen elastische Kräfte geleistete Arbeit $A = \frac{1}{2} \cdot v^2$ ist der elastische Körper (z. B. die Spirale einer Federkanone, die Feder einer Taschenuhr . . .) in einen Spannungszustand versetzt worden. Durch das Vergrößern

des gegenseitigen Abstandes zweier Massen mittels der gegen Gravitationskraft geleisteten Arbeit $A_r^B = \kappa M m \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$ ist auch in diesem Systeme eine Niveaudifferenz (wie beim Heben der Last von der Erde weg) geschaff worden, vermöge deren die Massen nachmals wieder aufeinander losstürzen und hierbei selbst Arbeit verrichten können. — Allgemein wird sich im folgenden Paragraphen herausstellen, daß das Ergebnis geleisteter Arbeiten die Herbeiführung von Zuständen ist, vermöge deren die Körper, an denen die Arbeit geleistet wurde, selbst wieder Arbeitsfähigkeit oder „Energie“ erhalten. —

Weder mit diesem Begriffe der Energie, noch mit dem der Arbeit (Arbeits oder des Gearbeiteten) ist zu verwechseln der folgende Begriff der **mechanischen Leistung** ebenfalls im Sinne von Leistungsfähigkeit, welche bei einem Kinde klein, bei einem Erwachsenen größer, bei einem Pferde, einer Lokomotive . . . noch größer ist. Gemeint ist hier zunächst, daß der statische Druck oder Zug (also die Kraft im Sinne der Gleichung $k = mb$), welchen das Kind höchstens auszuüben vermag, kleiner ist als der beim Erwachsenen u. s. w. und daß daher in derselben Zeit vom Kinde weniger ausgerichtet, geleistet wird. Gleichwohl kann das schwache Kind die gleiche Gesamtarbeit verrichten (z. B. einen Haufen Ziegel in ein höheres Stockwerk schaffen), aber erst binnen längerer Zeit als ein starker Mann (vorausgesetzt, daß hierdurch nicht schon vorher die ganze Arbeitsfähigkeit = Energie des Kindes aufgebraucht ist). Also

Die mechanische Leistungsfähigkeit einer Arbeitsquelle, in der Technik kurz als **Leistung** oder **Effekt** (Arbeitsstärke, Zeitarbeit) bezeichnet, wird gemessen durch die Arbeit per Zeiteinheit. Im C-S-G-System ist **Einheit der Leistung 1 Sekundenenerg = 1 Erg sec**.

Technische Einheit ist **1 Watt = 1 Joule per sec = 10^7 Erg sec**.

Im terrestrischen System ist Einheit der Leistung 1 mfg per sec und die höhere Einheit 1 Pferdestärke (1 PS) = 75 Meterkilogramm per Sekunde = $75 \cdot 981 \cdot 10^7$ Erg per sec = $73\,575 \cdot 10^5$ Erg per sec $\neq 73\,600 \cdot \frac{10^5}{10^7}$ Joule per sec = **736 Watt**. (Daher 1 Watt $\neq \frac{1}{10}$ mfg per sec). — Die englische Pferdestärke (Horsepower, HP) beträgt 746 Watt.

Z. B. Lokomobilen für Dreschmaschinen haben 5 bis 10 PS, Lokomotiven für Personenzüge haben etwa 500 PS, für Schnellzüge auf Gebirgsbahnen etwa 1000 PS.

Da $\text{Leistung} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}}$, so ist $\text{Arbeit} = \text{Leistung} \times \text{Zeit}$. — Man drückt daher öfters, namentlich in der Elektrotechnik, geleistete Arbeiten (und Energien) in Wattstunden aus, wobei **1 Wattstunde = (1 Joule per sec) \times (3600 sec) = 3600 Joule = $3,6 \cdot 10^{10}$ Erg ($\neq 360$ mfg).** — LA 53.

§ 23. Lebendige Kraft. — Aktuelle und potentielle Energie. Verwandlung und Erhaltung mechanischer Energien.

Beispiel 1: Noch bevor ein Arbeiter durch seine Muskelkraft eine Last wirklich hebt, schreiben wir ihm schon die Fähigkeit zu, irgendwann später jene Arbeit zu leisten. (Ähnlich bei einem kräftigen Pferde, einer geheizten

hat, die entgegen dem Beharrungswiderstande wirklich geleistet werden muß, um eine Masse von mg von der Anfangsgeschwindigkeit $c_0 = 0$ auf die Endgeschwindigkeit v cm sec⁻¹ zu bringen, bildet jetzt die Größe $\frac{mc^2}{2}$ Maß der Arbeit, welche die Masse m dadurch zu leisten fähig ist, daß sie unter Überwindung irgend eines Widerstandes umgekehrt von der Anfangsgeschwindigkeit c auf die Endgeschwindigkeit $c_0 = 0$ gebracht wird.

Wie für ersteren Vorgang eines Gewinnes von Geschwindigkeit das nicht liegende Beispiel der freie Fall war, ist ein solches Beispiel für das Verlieren von Geschwindigkeit die Bewegung im vertikalen Wurf nach aufwärts. — Indem sich dabei eine mit je einer bestimmten aufwärts gerichteten Anfangsgeschwindigkeit versehene Masse nur bis zu einer ganz bestimmten von jener Geschwindigkeit abhängigen Steighöhe zu erheben vermag, können wir uns vorstellen, daß diese Masse entgegen der Wirkung der Schwerkraft selbst emporträgt, wie sonst ein Arbeiter sie emporträgt. Wir können so die 1. Beispiele des vorigen § das folgende nachbilden: Eine Masse von 9 kg (oder was immer für einer anderen Größe, da g für alle Massen gleich ist) muß eine Anfangsgeschwindigkeit von 10 m sec⁻¹ haben, damit sie eine Steighöhe $s = \frac{10^2}{2 \cdot 10} = 5$ m

erreiche (§ 11, Gl. 8). Hat sich dann die Masse von 9 kg um diese 5 m erhoben, so hat sie ebenso 45 mtg mechanische Arbeit an sich selber verrichtet, wie früher der Arbeiter an ihr diese Arbeit verrichtet hatte. — Man berechne ebenso die Anfangsgeschwindigkeiten, welche eine Masse von 5 kg haben muß, damit sie sich entgegen der Erdschwere 9 m oder damit sich 1 kg um 45 m erhebe!

Obige Gl. (1) für die seitens der anfänglich mit Geschwindigkeit c versehene Masse wirklich geleistete Arbeit enthält also folgende Definition und Maßformel für die Arbeitsfähigkeit einer sich bewegenden Masse:

Eine Masse von mg mit c cm sec⁻¹ Geschwindigkeit besitzt eine **lebendige Kraft** (kinetische Energie) $L = \frac{mc^2}{2}$ Erg. (Maßformel 1).

Wird hier $c = 0$, so ist auch $L = 0$, d. h. eine in Ruhe befindliche Masse besitzt keine lebendige Kraft. (LEIBNIZ nennt im Gegensatz zur „lebendigen Kraft“, welche er noch nicht durch $\frac{mc^2}{2}$, sondern durch mc^2 gemessen hatte, den statischen Druck eines im Gleichgewicht befindlichen Körpers „tote Kraft“. Der letztere Name ist außer Gebrauch gekommen, nicht aber der erstere). Sowohl diese Ruhe für $c = 0$, wie irgend eine Geschwindigkeit $c > 0$, ist als relativ zu denken in Bezug auf denjenigen Körper, an welchem die Masse m Arbeit leistet, sobald sie durch ihn Geschwindigkeit verliert. So ist z. B. auch das größte Geschloß bei größter Geschwindigkeit ein harmloses Ding, insoweit sich ihm nichts in den Weg stellt; ebenso ein Eilzug auf der freien Strecke. Umgekehrt ist den Reisenden des Zuges ein auf ihrem Geleise ruhig stehender anderer Zug ebenso gefährlich wie die Geschwindigkeit ihres eigenen Zuges, nicht aber ein Zug, der mit gleicher Geschwindigkeit vorausfahrender.

Daß ferner die Größe c in der zweiten (also einer geraden) Potenz vorkommt, ist schon ein arithmetischer Ausdruck dafür, daß wir bei der Messung der lebendigen Kraft von der Richtung der Bewegung absehen dürfen (ebenso wie bei jeder Arbeit im Sinne des Arbeitsergebnisses, § 22, S. 9 mit anderen Worten: Lebendige Kräfte sind (wie Arbeiten und Potentiale, §

109) Skalengrößen, nicht Vektorgößen. So schreiben wir einem Meteoriten, welcher mit einer gewissen Geschwindigkeit in das Sonnensystem eindringt, eine bestimmte lebendige Kraft zu, gleichviel von woher er gekommen ist und wohin er geht. —

Auch der Begriff der lebendigen Kraft verdankt wie der der Arbeit (§ 22, 88) seine Zweckmäßigkeit demjenigen Umstande, welcher sich arithmetisch in dem Sich-Heben der Faktoren b im Produkte $mb \cdot \frac{c^2}{2b}$ ausdrückt. Hat z. B.

eine Kanonenkugel die Masse $m = 100 \text{ kg}$ und die Geschwindigkeit $c = 500 \text{ m sec}^{-1}$, so hat sie eine lebendige Kraft $\frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 500^2 = 1,25 \cdot 10^7 (\text{m, sec, kg}) \cdot 1,25 \cdot 10^7 (\text{m, sec, kg}) = 1,25 \cdot 10^{14} \text{ Erg}$. Die Faktoren dieses Produktes verteilen sich nachmals wieder auf die verschiedenste Weise, je nachdem wir uns die Kugel vertikal a) über der Erde, b) über dem Mond, c) über der Sonne abgefeuert, d) über eine Reibungsfläche hingleitend, e) in eine Holzwand, f) in eine Panzerplatte eindringend denken und wobei in a) $b = g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$, in b) $b = \frac{1}{6}g$, in c) $b = 28g$, in d) etwa $b = \frac{1}{100}g$, in e) $b = 100g$, in f) etwa $b = 100000g$ beträgt; in dem Falle aber, als hier die Anfangsgeschwindigkeit langsamer oder schneller aufwährenden Widerstände größer oder kleiner sind, werden entsprechend die von der Kugel im ganzen zurückgelegten Wege kleiner oder größer. Ferner: Es treffe einmal eine Mörserkugel von $M = 500 \text{ kg}$ mit der Geschwindigkeit $= 30 \text{ m sec}^{-1}$, ein andermal eine Kugel von $m = 20 \text{ kg} = \frac{1}{25} 500 \text{ kg}$ mit der Geschwindigkeit $C = 150 \text{ m sec}^{-1} = 5 \cdot 30 \text{ m sec}^{-1}$ auf dieselbe Festungsmauer. Die Zerstörungsarbeiten beider Geschosse werden sich ihrer Art nach mannigfach unterscheiden, z. B. wird die kleinere, schnellere Kugel in einem engeren Schußkanal tiefer eindringen als die größere. Der Größe nach aber werden die von beiden Kugeln verrichteten Arbeiten einander gleich sein, nämlich $\frac{Mc^2}{2} = \frac{mC^2}{2}$

$= \frac{500 \cdot 30^2}{2} = \frac{20 \cdot 150^2}{2}$. Also nicht der Verlauf der Arbeitsleistung im einzelnen und ihrer Gesamtdauer nach, wohl aber der Gesamtbetrag der Arbeit, welche ein Körper seiner Masse und Geschwindigkeit nach zu leisten überhaupt fähig ist, hängt von dem Produkte aus m und c^2 ab (und ist maßstabsähnlich dem halben Produkte). — Da in Gl. (1) nur die fertigen Produkte aus k und s einerseits, aus m und c^2 andererseits zu einander in Beziehung gesetzt sind, so wird durch die energetische Grundgleichung (1) $ks = \frac{1}{2}mc^2$ eine Bewegung minder vollständig beschrieben als durch die (im engeren Sinne) dynamische Grundgleichung $k = mb$ und die phoronomische Gleichung $s = \frac{c^2}{2b}$ zusammengekommen. —

Vermindert eine Masse ihre Geschwindigkeit von c auf $c_1 < c$, so hat sie jetzt nur mehr die lebendige Kraft $\frac{mc_1^2}{2} < \frac{mc^2}{2}$ und erfährt also die Änderung der lebendigen Kraft $L - L_1 = \frac{mc^2}{2} - \frac{mc_1^2}{2}$ (1a).

In den Beispielen 1a) bis 1f) waren die widerstehenden Kräfte k zwar verschieden groß, aber jeweilig konstant angenommen worden. Sind diese Kräfte variabel, d. h. an verschiedenen Stellen des von der Masse m durchlaufenen Weges von verschiedener Größe, $k_1, k_2 \dots k_n$, so daß die Verzögerungen

v_1, v_2, \dots, v_n zusammen mit der Anfangsgeschwindigkeit v geben, so lebendige Kraft der Masse nach der Änderung:

$$\begin{array}{l} L_1 - L_0 = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv^2}{2} \\ L_2 - L_1 = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \\ \vdots \\ L_n - L_{n-1} = \frac{mv_n^2}{2} - \frac{mv_{n-1}^2}{2} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \text{Durch Addition aller Gleichungen} \\ \text{wieder als} \\ \text{Gesamtänderung der lebendig} \\ \text{Kraft} \end{array} \right. \quad L - L_0 = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv^2}{2}$$

Es sei die Masse m ihre Anfangsgeschwindigkeit v in einer geraden, sondern gegenwärtig veränderlich vergrößerten Bewegung g v ist die gesamte gegen den veränderlichen Widerstand geleistete Arbeit L $A = \frac{mv^2}{2} = L \dots$

Auch der Gesamtbeitrag der durch eine Masse m bei Abgabe Geschwindigkeit v verrichteten Arbeit ist also nur von $m \times v^2$, Länge des Weges, auf dem diese Arbeit verrichtet wird, und Abhängigkeit der widerstehenden Kraft größer oder kleiner, oder veränderlich ist, aber auch nicht von deren Zeitdauer).

Durch die Rücksicht auf die anfängliche Zunahme und die Abgabe von lebendiger Kraft nach Gl. (1b) läßt sich nun auch ein konkreter Fall von Arbeitsleistung beim Heben eines Gewichtes in § 11 Beispiel 1. ausgegangen werden, in seinen Einzelheiten ver-

Drückt auf eine Masse m vom Gewichte $p = mg$ (der vertikal aufwärts gerichteten Kraft $k = mg$, so befindet sich der Körper in der Ruhe oder der Bewegung (§ 15, I), da p und k im Gleichgewicht halten. War anfänglich m in Ruhe, Zeitlang $k_1 > p$ sein, damit eine Geschwindigkeit $v > 0$ (Anlauf). Solange dann $k_1 = p$ ist, bewegt sich die Geschwindigkeit v gleichförmig weiter (Stationärer Lauf). Dann $k_1 < p$, so tritt (im Endlauf) Verzögerung und ein. — Die im ganzen verrichtete Arbeit ist trotz des Werts der Kraft k einfach $A = ph$ Erg, indem die in der Anfangsphase lebendige Kraft im Endlauf wieder verbraucht wird (LA 55).

Dafs die Gesamtarbeit hierbei durch das Produkt aus dem Weg h und der abwärts gerichteten konstanten Kraft p aufwärts gerichteten veränderlichen Kräfte k_1, k_2, k_3 gemessen wird, daran, dafs schon im einfachsten Falle des Arbeitsmafses $A = p \cdot h$ die Arbeit leistende, sondern die Arbeit verbrauchende Kraft (Widerstand entgegen der Arbeit zu leisten ist) gemeint sein m

Verknüpfen wir nunmehr die beiden Arbeitsvorgänge z. B. einen vertikal aufwärts geworfenen Körpers einerseits, bei seinem Aufsteigen, so stellt das Gesetz (§ 11, II, III), dafs der Körper bei dem Ausgangsniveau eine der Anfangsgeschwindigkeit v gleiche Werte nach gleiche, dem Vorzeichen nach entgegengesetzte

er wieder erlangt hat, die phoronomische Grundtatsache dar, welche in dynamischer, und zwar in speziell energetischer Form dahin ausdrücken, die kinetische Energie des Körpers bei der Rückkehr in das Ausgangsniveau wieder die gleiche geworden ist. Und zwar gilt dieser Satz von der Wiedererlangung der kinetischen Energie nicht nur beim vertikalen, sondern auch beim schiefen Wurf (§ 11, III, 4), was wieder ein Beispiel für die Unabhängigkeit der lebendigen Kraft oder kinetischen Energie von der Richtung der Geschwindigkeit ist. —

Aber nicht nur bei der Rückkehr in das Ausgangsniveau hat der Körper die ursprüngliche Arbeitsfähigkeit wieder erlangt, sondern wir können uns vorstellen, diese seine Arbeitsfähigkeit oder Energie sich überhaupt während der ganzen Bewegung unverändert erhalten hat, indem wir den Begriff der lebendigen Kraft so weit fassen, daß unter ihn außer dem bisher erörterten der Begriff der potentiellen Energie auch noch fällt der Begriff der

II. Energie der Lage. — Wieder liefert das einfachste Beispiel für diesen Begriff der vertikale Wurf. Denken wir uns nämlich den Körper, sobald er die Höhe erreicht hat und also die Geschwindigkeit Null besitzt, daselbst von der Hand festgehalten oder ihm ein Brettchen untergeschoben, so können wir den Körper beliebig lange in dieser Lage erhalten, ohne daß seine Arbeitsfähigkeit vermehrt oder vermindert wird. Es braucht nämlich nur, nachdem so die ganze Bewegung für beliebig lange Zeit unterbrochen war, dieses eingeschaltete Medium wieder beseitigt zu werden, so erlangt auch jetzt wieder der Körper im Falle jene Endgeschwindigkeit c und damit seine ursprüngliche kinetische Energie $\frac{mc^2}{2}$. Im Vorausblick auf dieses künftige Herabfallen und Wieder-

gewinnen von Energie der Bewegung schreiben wir also dem Körper in dem höchsten Punkte seiner Wurfbahn Energie der Lage in Bezug auf das Ausgangsniveau zu. Ebenso hat eine Masse Energie der Lage auch noch an der Oberfläche selbst, falls von hier z. B. ein Schacht abwärts führt, in welchen sie hinabstürzen kann. Allgemein:

Energie der Lage kommt einem Körper an einer Stelle P_2 eines Kraftfeldes in Bezug auf eine andere Stelle P_1 zu, insofern ihm die Feldkräfte bei seiner Bewegung von P_2 nach P_1 einen Zuwachs an Geschwindigkeit und hiermit an Energie der Bewegung zu erteilen fähig sind.

Die Maßzahl der Energie der Lage einer Masse m an einer Stelle P_2 in Bezug auf eine andere P_1 wird gleich gesetzt der Maßzahl des Zuwachses $\frac{mc_2^2}{2} - \frac{mc_1^2}{2}$, welchen m bei der Bewegung von P_2 nach P_1 ausschließlich infolge der Feldkräfte gewinnt. —

Sind die Feldkräfte zwischen P_2 und P_1 konstant, so ist $\frac{c^2}{2} = ks$, wo s die Länge der Strecke P_2P_1 und k die Stärke der

in der Richtung dieser Strecke wirkenden Feldkräfte bedeutet. Es kann also die Energie der Lage auch durch die Arbeit ks gemessen werden, welche erforderlich gewesen war, die Masse m entgegen dem Widerstande der Feldkräfte von P_2 nach P_1 zu verschieben.

Dieser einfachste Fall ist z. B. verwirklicht für einen Körper, der sich h cm über der Erdoberfläche befindet und daselbst mit der Kraft seines Gewichtes $p = mg$ Dyn vertikal abwärts gezogen wird. Es kommt ihm also hier in Bezug auf die Erdoberfläche die Energie der Lage $p \cdot h$ Erg zu. So haben z. B. 1000 m³ Wasser in einem 5 m oberhalb des Mühlrades gelegenen Mühlteich in Bezug auf das Rad $5 \cdot 10^{14}$ Erg Energie der Lage. —

Als Anwendung dieser beiden Messungsmethoden der Energie durch $\frac{m^2}{2}$ einerseits und durch $p \cdot h$ andererseits, sowie zugleich als Beweis des obigen Satzes, daß die Gesamtenergie eines aufwärts geworfenen und dann wieder herabfallenden Körpers während aller Phasen seiner Bewegung konstant bleibt, diene folgende Zusammenstellung:

Ist eine Masse m mit der Anfangsgeschwindigkeit c von dem Punkte P_2 aus aufwärts geworfen, durchläuft sie im Zeitpunkt t (d. h. t sec nach Beginn der Aufwärtsbewegung) den Punkt P_1 in der Höhenlage $s = -ct + \frac{gt^2}{2}$ mit der Geschwindigkeit $v = -c + gt$, und hat sie nach der Steigzeit im Punkte P_1 die Steighöhe $H = \frac{c^2}{2g}$ mit der Geschwindigkeit 0 erreicht, so ist die

	Energie der Bewegung		Energie der Lage		Summe
in P_2	0	+	$-p \cdot (-H)$	=	C ,
in P_1	$\frac{m}{2}(-c + gt)^2$	+	$-p(-ct + \frac{gt^2}{2})$	=	C ,
in P_0	$\frac{mc^2}{2}$	+	0	=	C ;

Beweis durch Ausführung und Reduktion der zweiten Zeile (wobei $p = mg$).

Wird nun umgekehrt jenes Gesetz, daß die Summe der Energie der Bewegung und der Energie der Lage eines geworfenen Körpers während der Auf- und Abwärtsbewegung immer die gleiche ist, als gegeben angenommen, so läßt sich auf Grund dieses Gesetzes der „Erhaltung der Energie“ (zunächst speziell für den geworfenen Körper) die Aufgabe vom vertikalen Wurf so behandeln: Es seien gegeben m und c ; wie groß ist die Wurfhöhe? Antwort: Wege

LA 61. $0 + p \cdot H = \frac{mc^2}{2} + 0$ und $p = mg$ ergibt sich $H = \frac{c^2}{2g}$. — LA 61.

Die vorstehende Behandlung des vertikalen Wurfs wie die in § 11 hat ein Galileisches Kraftfeld (§ 20), d. h. konstante Größe der Schwere an allen von aufsteigenden Körper durchlaufenen Stellen zur Voraussetzung. Daß das Gesetz von der konstanten Summe der potentiellen und kinetischen Energie auch für Bewegungen von Körpern im Newtonschen Gravitationsfeld längs beliebiger

LA 63. Bahnen gilt, vgl. § 24, S. 111 und LA 63.

Der Satz von der Erhaltung der Energie für geworfene Körper gestattet nun noch eine viel größere Ausdehnung, wenn wir uns den geworfenen Körper elastisch, z. B. als Billardkugel, und auf eine elastische wagrechte Platte im Ausgangsniveau zurückfallend denken. Beim Stofs gegen diese Platte wird sich nämlich die Kugel abplatteln, bis sie alle Geschwindigkeit verloren und so ihre Energie der Bewegung in Energie der Lage verwandelt hat; indem dann die Einbiegung sich wieder ausgleicht, wird die Kugel neuerdings emporgeworfen und so die Energie der Lage in Energie der Bewegung rückverwandelt. So kann sich der Vorgang unendlich oft wiederholen; auch könnte die Kugel in den höheren Lage beliebig oft für beliebig lange Zeit aufgehalten werden. Es ist dies ein Beispiel der

darstellt. Doch faßt man nicht selten auch Wärmeerscheinungen, elektrische Entladungen und dergleichen unter dem Namen „kinetische“ oder Bewegungsenergie zusammen, was aber schon die Hypothese einschließt, daß alle diese Erscheinungen sich „auf Bewegungserscheinungen zurückführen“ lassen; § 57, § 81.

Die hiermit an einigen Beispielen erläuterten allgemeinsten Begriffe der gegenwärtigen Physik verdanken ihre außerordentliche Fruchtbarkeit den beiden mit ihnen zusammenhängenden Gedanken 1. der **Verwandlung der Energie** (genauer: der Energieformen) und 2. der **Erhaltung der Energie** (genauer: des Energiebetrages). Wiewohl diese Gedanken erst seit der Mitte des XIX. Jahrhunderts in Zusammenhang mit ROBERT MAYERS Entdeckung der „Äquivalenz von Wärme und Arbeit“ (§ 82) in ihrer ganzen Tragweite begriffen worden sind, lernen wir gerade aus dem Gesichtspunkte der modernen „Energetik“ die Keime dieser Auffassung schon in folgenden Betrachtungen GALILEIS innerhalb der Erscheinungen der Mechanik würdigen:

1. GALILEIS Gesetz über die Endgeschwindigkeiten an schiefen Ebenen. — Nach § 6 ist die Endgeschwindigkeit v , mit welcher eine Masse am unteren Ende einer schiefen Ebene anlangt, unabhängig von der Neigung der Ebene, nämlich dieselbe wie die Endgeschwindigkeit, welche beim freien Falle längs der Höhe der schiefen Ebene erlangt wird. Am obersten Punkte der schiefen Ebene kommt somit der Masse eine Energie der Lage zu, welche sich, wenn der Körper längs der Höhe h oder längs verschieden langer Strecken $l, l' \dots$ in das um h cm tiefere Niveau bewegt, in lebendige Kraft von immer demselben Betrage $\frac{mv^2}{2}$ umsetzt.

GALILEI hatte auch erkannt, daß, wenn Körper mit derselben Anfangsgeschwindigkeit c über verschieden geneigte schiefe Ebenen emporlaufen, sie auf allen bis zu gleicher Erhebung über das Ausgangsniveau kommen (Fig. 74); also in der Sprache der modernen Energetik: die lebendige Kraft $\frac{mc^2}{2}$ reicht aus, um die Masse m in ein nur vom Anfangswerte der Geschwindigkeit c abhängiges höheres Niveau gelangen zu lassen, unabhängig von der Neigung der schiefen Ebene. Dabei braucht der Körper auf einer steilen Ebene kurze, auf einer weniger steilen längere Zeit, bis jenes höhere Niveau erreicht und die ganze Geschwindigkeit erschöpft ist. — Denken wir uns die Neigung immer geringer,

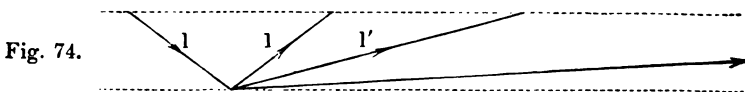


Fig. 74.

bis die schiefe Ebene in eine wagrechte übergeht, so würde sich die Bewegung ohne Verzögerung bis ins Unendliche fortsetzen; dieser Grenzfall der Bewegung an der schiefen Ebene entspricht dann dem

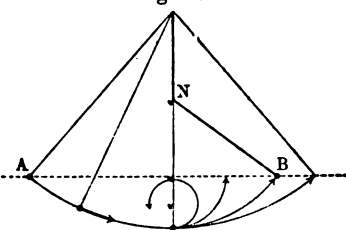
2. Trägheitsgesetz. Dieses ergibt sich auch rechnerisch aus der Erhaltung der Energie; denn wenn vorausgesetzt ist, eine Masse m habe die lebendige Kraft von $\frac{mc^2}{2}$ Erg und es wirke auf sie keinerlei Kraft, so daß sie keine Gelegenheit hat, einen Zuwachs oder Verlust an Energie zu erfahren, so muß, wenn m unverändert ist, auch die Geschwindigkeit c unverändert bleiben. — Zu dieser Ableitung des Trägheits-

Hemmungspendel (Fig. 75). Man annähernd ein einfaches Pendel darstellen vor einem vertikalen Brett so bedarfs es aus der Grenzlage gegen die e fallend gegen einen Nagel stößt, der ellänge plötzlich verkürzt. Dieses kurze steigt dann bis annähernd zur selben on welcher das längere Pendel gefallen ch verschiedene Stellungen des Nagels ch verschieden gekrümmte Kreisbögen

(Da bei dem Stofs des Fadens an den n Teil der kinetischen Energie verloren geht, so entspricht es dem Sinne uches noch besser, wenn man das Pendel aus der Lage *B* fallen und nach n läßt.) Durch eben diesen Versuch rechtfertigt GALILEI auch seine An- züglich des Satzes über die Endgeschwindigkeit an schiefen Ebenen. — Es ersichtlich, dafs aus diesen energetischen Betrachtungen GALILEI sich der die Sätze über die Zerlegung der Kräfte und zwar die Aussonderung anten Komponente an der schiefen Ebene, sowie der veränderlichen an sbahn des Pendels ableiten liefsen. — Wie jede Pendelbewegung den z der kinetischen und der potentiellen Energie ganz ungezwungen , indem in den Grenzlagen die potentielle Energie ein Maximum, die e dagegen Null ist — und umgekehrt in der Mittellage die kinetische ein Maximum, die potentielle Null — so bietet speziell das Hemmungs- uch noch ein typisches Beispiel dafür, dafs der besondere Vorgang, in dem : Energieform in die andere umsetzt, noch von Nebenumständen (hier ng des Nagels) abhängt, und dafs somit die Kenntnis der Energiebeträge ch nicht ausreichen würde zu der Voraussage, was aus einem gegebenen potentieller, bezw. aktueller Energie künftig werden wird.

gleichen Gründen steht überhaupt die energetische Ableitung mecha- orgänge (aus den Begriffen Arbeit und Energie) darin im Nachteil gegen ngeren Sinne dynamische (aus den Begriffen Kraft und Masse), dafs die gesetze immer nur einen Anfangs- und einen Endzustand vstems. nicht aber auch alle Zwischenzustände in Rechnung bringen.

Fig. 75.

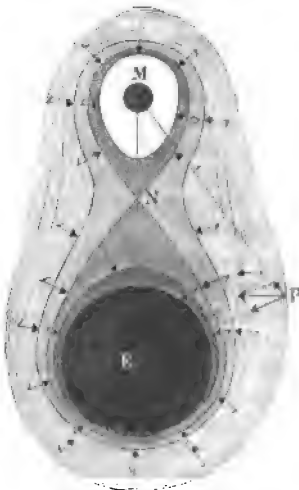


vom Perihel gegen das Aphel hin bewegt, verliert er kinetische und gewinnt potentielle Energie; im Aphel hat der Planet die kleinste kinetische, die größte potentielle Energie; indem der Planet dann aus dem Aphel gleichmäßig gegen die Sonne hin fällt, ähnlich einem horizontal geworfenen Körper, wieder seine kinetische Energie u. s. f. (Vgl. Fig. 53, S. 73 und LA 63.)

§ 24. Gravitationspotential.

a) In § 20 wurde das „Kraftfeld“ der Erde und im § 21 auch das der übrigen kugelförmigen Weltkörper beschrieben durch die Richtung und GröÙe der mechanischen Kraft, mit welcher jene Körper auf eine Masse von 1 g wirken, wenn diese an verschiedene Stellen jener Kraftfelder, d. h. an verschiedene Richtungen und Abstände von je einem der Körper gebracht wird. — Das Flutphänomen (desgleichen jede „Störungserscheinung“ an einem unter dem Einflusse zweier oder mehrerer anderer Weltkörper stehenden Körper, S. 84) stellt ein Beispiel dar, daß sich Kraftfelder „superponieren“. Wie sich auch durch Pfeile (Kraftvektoren) überhaupt Kraftfelder darstellen lassen (vergl. Fig. 57, 58, S. 77), so muß sich auch ein zusammengesetztes Kraftfeld durch solche Pfeile nach dem Kräfteparallelogramm darstellen lassen. — Speziell die Richtung der Kräfte wird noch anschaulicher, wenn wir statt der Pfeile an Bleilote denken: sie stehen im homogenen Kraftfelde, z. B. einem kleinen Raurnächst der Erde, normal auf dem Meeresspiegel oder auf einem künstlichen Quecksilberniveau, und sind, soweit wir jenes Niveau als eben annehmen dürfen, einander parallel. Wird dagegen die Erde als Kugel angenommen, so weisen die Lote gegen ihren Mittelpunkt. — Denken wir uns nun weiter den ganzen Raum auch in der Nähe des zusammengesetzten Systemes Erde-Mond (Fig. 76) ähnlich

Fig. 76.



mit dem Bleilote untersucht, so wird dieses nahe der Erde annähernd gegen den Erdmittelpunkt, nahe dem Monde annähernd gegen den Mondmittelpunkt weisen; für alle anderen Stellen ergeben sich gleichsam als Reihen von Bleiloten bestimmte krumme Linien, die „Kraftlinien des zusammengesetzten Feldes Erde-Mond“ (vergl. solche für Magnetpole Fig. 480, S. 444). Ihre Richtung und zugleich die GröÙe der auf das Lot wirkenden Gesamtkraft des Feldes an irgend einer Stelle P wäre durch Rechnung so zu ermitteln:

Sind die Massen der Erde Mg , des Mondes m , des Lotes μg , so sind die Kräfte

$$\text{zwischen Erde und Lot } F = \mu \frac{M}{R^2},$$

$$\text{zwischen Mond und Lot } f = \mu \frac{m}{r^2},$$

und das Lot wird die Richtung der Resultierenden von F und f einnehmen. An der „neutralen“ Stelle N , für die $F = f$ und $R:r = \sqrt{M:m}$, würde das Lot überhaupt keine feste Stellung mehr einnehmen.

Eine andere Art der Veranschaulichung des einfachen Kraftfeldes eines kugelförmigen Weltkörpers, sowie der superponierten Kraftfelder zweier Weltkörper erhält man in den „Niveauflächen“¹⁾, wenn man sich beide Kugeln etwa von

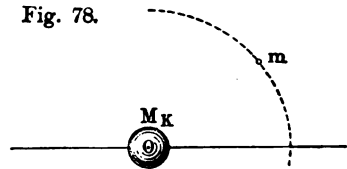
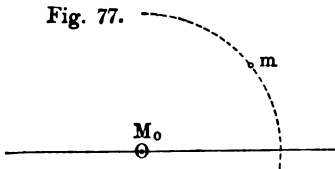
¹⁾ OSTWALD schlägt kurz und gut das deutsche Wort „Wagfläche“ vor.

Immer größeren Wassermengen umgeben denkt (wobei von den Anziehungswirkungen, die von den Massen dieses Wassers selbst ausgehen, abzusehen ist). Um eine Kugel würden sich Wasserschichten in konzentrischen Kugelschalen lagern, wie unmittelbar aus der nach allen Richtungen gleichen Kraftwirkung der Kugel zu erwarten ist. Sind ebenso die beiden kugelförmigen Weltkörper von Wassermengen umgeben, so würden diese auf jedem der beiden Körper Flutberge bilden; und zwar würden sich, falls Erde und Mond in ihrer gegenseitigen Lage festgehalten wären (so daß nicht, wie in §. 21, S. 85, dargestellt wurde, die drei Punkte A, B, C mit verschiedenen Beschleunigungen gegen den Mond hin fallen), nur auf den einander zugekehrten Seiten der Körper beständige Flutberge bilden, auf der abgekehrten aber beständige Ebbe. Denken wir uns dann auf jedem der Körper immer mehr Wasser aufgehäuft, so würden endlich die Flutberge mit ihren Gipfeln an der neutralen Stelle N einander berühren, bei noch größerer Wassermenge würden beide Körper von einem gemeinsamen Meere umgeben sein u. s. f.

Zwischen der Veranschaulichung durch die Kraftlinien und der durch die Niveauflächen besteht die Beziehung (vergl. § 22), daß die Elemente der Kraftlinien auf den Elementen der Niveauflächen an jeder Stelle des Feldes normal stehen, so wie im einfachsten Falle des homogenen Kraftfeldes das lotrechte Bleilot normal steht auf der wagrechten Wasser- oder Quecksilberoberfläche. Da wir nun nach dem Kräfteparallelogramm die jeweilige Richtung der Kraftlinien auf Grund des Kraftgesetzes $k = \kappa \frac{mM}{r^2}$ berechnen und konstruieren können, so ergeben sich aus den Kraftlinien auch die Niveauflächen.

b) Viel bequemer nun, als durch die Konstruktion und Berechnung dieser Kraftlinien und Niveauflächen nach der Richtung und Größe der Kräfte, gestaltet sich die Beschreibung einfacher wie zusammengesetzter Kraftfelder mit Hilfe der mechanischen Arbeiten, welche bei der Verschiebung einer Masse von je 1 g zwischen beliebigen Stellen des Kraftfeldes zu leisten sind. — Das einfachste Beispiel einer solchen Beschreibung einerseits durch Kraft, anderseits durch Arbeit bietet wieder das Kraftfeld der Erde. Fingieren wir zuerst wieder mit GALILEI die Schwere als konstant nach oben, so lauten die beiderlei Beschreibungen: a) Auf die Masse von 1 kg (Massenkilogramm) wirkt am Meeresspiegel die Schwere mit 1 kg (Kraftkilogramm) und auch in 2, 3 . . . 1000 . . . 100 000 m noch immer mit einer gleichen Kraft von 1 kg; b) um das 1 kg aus dem Niveau des Meeresspiegels in ein um 1 m höheres Niveau zu heben, bedarf es einer Arbeit von 1 mkg (Meterkilogramm), von hier in ein um 1 m höheres Niveau wieder 1 mkg u. s. f. — Nehmen wir dagegen mit NEWTON Rücksicht auf die Abnahme der Schwere gegen oben, so sind a) die Kräfte in 1000 . . . 100 000 m Höhe schon beträchtlich kleiner als am Meeresspiegel; ebendeshalb müssen aber b) die den gleichen Arbeiten (z. B. von je 1 mkg) entsprechenden Niveauflächen nach oben hin immer weiter auseinander rücken. — Damit stehen wir vor der Aufgabe: die Gestalt und das Gesetz der Aufeinanderfolge derjenigen Niveauflächen, welche gleichen Arbeitsunterschieden entsprechen, aus den Gesetzen für die Richtung und Größe der Kraft abzuleiten. — Von den hierfür geltenden Gesetzen ergeben sich die für kugelförmige Niveauflächen schon aus den Richtungen der Kräfte, unabhängig von dem speziellen Kraftgesetze $f = \kappa \frac{mM}{r^2}$ und dem aus ihm (im § 22, S. 90) abgeleiteten Arbeitsgesetze $A_r^R = \kappa mM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$:

Ist gegeben ein einzelner Massenpunkt M_0 (Fig. 77), bzw. eine homogene Kugelschale oder Kugel von der Gesamtmasse M_K

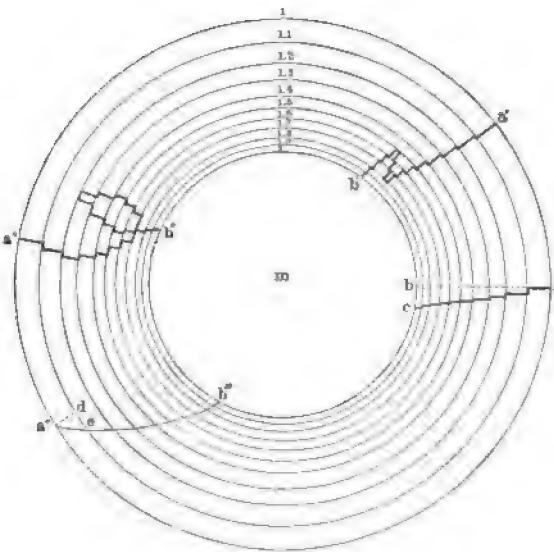


(Fig. 78), und wirken diese Massen auf einen Massenpunkt m ihrer Umgebung mit Kräften, welche nicht abhängig sind von der Richtung, nach welcher hin m in Bezug auf M_0 oder M_K liegt, so ist unmittelbar einleuchtend, daß auch je eine die punktuelle oder kugelige Masse umgebende **Kugelfläche**, welche O zum Mittelpunkte hat, eine Fläche gleicher Arbeit (Äquipotential-) oder **Niveaufläche** sein muß. Die Verschiebung einer Masse längs einer solchen Fläche
LA 48. erfordert keine Arbeit gegen die Feldkräfte (LA 48).

So ist z. B. die Verschiebung eines Schiffes auf der kugelförmig gedachten Meeresfläche mit keiner Arbeit gegen die Schwerkraft verbunden, wie sie es beim Heben und Senken des Schiffes wäre (sondern nur mit Arbeitsleistung gegenüber der Reibung im Wasser u. dergl.)

Ferner läßt sich ebenfalls ohne Rechnung der in § 22, S. 91 für ebene Niveauflächen nach der Staffelmethode bewiesene Satz über die Unabhängigkeit der Arbeit von der Richtung der Verschiebung auch auf solche kugelförmige Niveauflächen übertragen. Nämlich:

Fig. 79.



Für je zwei konzentrische Niveauflächen (Fig. 79), die von einander einen gegebenen Abstand (in radialer Richtung) haben, kostet es **gleiche Arbeiten**, eine Masse von irgend einem Punkte der einen zu irgend einem Punkte der anderen Fläche zu verschieben, **gleichviel auf welchem Wege**, ob auf dem kürzesten (radialen) oder irgend einem längeren (parabolischen, elliptischen, spiralförmigen u. s. f.). –

Für die Berechnung der Größe der Arbeiten und Arbeitsunterschiede in den Kraftfeldern von Massenpunkt und Kugel ist grundlegend folgende

Aufgabe 1: Welcher Arbeit V bedarf es, um eine Masse von $m = 1\text{ g}$ (Fig. 69, S. 90), welche seitens einer Masse von $M\text{ g}$ mit der Kraft $F = \kappa \frac{Mm}{r^2}$ Dyn angezogen wird, aus dem Abstände $MP = r\text{ cm}$ bis ins Unendliche zu entfernen?

Antw.: Die Gl. 7 (§ 22) $A_r^\infty = \kappa \frac{mM}{r}$ gibt speziell für $m = 1\text{ g}$ die

$$\text{Arbeit } V = \kappa \frac{M}{r} \text{ Erg per Gramm} \dots (1)$$

Diese Aufgabe wurde im § 22 zunächst für den besonderen Fall gelöst, daß die Verschiebung des m gegen M längs einer Geraden erfolgt. Da aber die gleiche Arbeitsgröße auch noch erforderlich ist, wenn die Verschiebung längs einer irgendwie gekrümmten Bahn erfolgt, so gilt die dort gefundene Maßgröße $A_r^\infty = \kappa \frac{Mm}{r}$ Erg für jede beliebige Verschiebung, zufolge deren die Masse m aus einer Stelle in $r\text{ cm}$ Abstand von M bis ins Unendliche fortrückt, d. h. also ganz aus dem Kraftfelde von M hinausgeschafft wird. Da nun, wenn M und r endliche Größen sind, auch A_r^∞ endlich ist (nicht unendlich groß, wie man wegen der unendlich vielen Arbeitssummanden etwa erwarten könnte), so läßt sich jede in $r\text{ cm}$ Abstand von M gelegene Stelle P des Kraftfeldes von M auf zweierlei Arten charakterisieren: entweder durch die Arbeit, welche erforderlich ist, um m von M bis P zu schaffen, oder durch die Arbeit, welche erfordert wird, um m von P ins Unendliche zu bringen; und zwar ist aus den sogleich ersichtlichen Gründen die letztere Art die rechnerisch vorzuziehende. Da überdies die Wirkungsfähigkeit von M für sich übersichtlicher hervortritt, wenn wir uns immer dieselbe Masse, also am einfachsten $m = 1\text{ g}$, von M angezogen denken, so liefert die oben ermittelte Arbeitsgröße V zugleich die verlangte einfachste Beschreibung des Kraftfeldes von M mittels der gegen die Feldkräfte zu leistenden Arbeit und hieraus auch der je zwei Punkten P_1 und P_2 dieses Feldes entsprechenden potentiellen Energie. Deshalb wurde für die oben berechnete Arbeitsgröße V auch folgende Bezeichnung eingeführt:

Im Kraftfelde eines einzelnen Massenpunktes, bzw. einer homogenen Kugelschale oder Kugel von der Masse $M\text{ g}$ ist in $r\text{ cm}$ Abstand vom Massenpunkt, bzw. Kugelmittelpunkt das

$$\text{Gravitationspotential: } V = \kappa \frac{M}{r} \text{ Erg per Gramm} \dots (1)$$

Daß in diesem Ausdrucke für V die Größe r in der ersten (nicht wie bei der Kraft f in der zweiten) Potenz vorkommt, ist der erste Hauptgrund der Vereinfachung aller Rechnungen und Konstruktionen mit Potentialen an Stelle der mit Kräften. So läßt sich leicht der geometrische Ort derjenigen Punkte im Kraftfelde einer gegebenen Masse konstruieren, welchen bestimmte gegebene Potentiale, z. B. 6, 5, 4... PE (Potentialeinheiten) zukommen. Hat z. B. ein einzelner Punkt (Fig. 77) eine so große Masse (LA 67), daß in 1 cm Abstand von ihm das Potential 6 PE beträgt, wobei also $\kappa M = 6$ ist, so betragen die

Potentiale 6, 5, 4, 3, 2, 1 . . . Erg per Gramm
in 1, 1,2, 1,5, 2, 3, 6 . . . cm Abstand von M .

Es entsprechen also wirklich, wie oben ohne Rechnung vorausgesehen, gleichen Potentialunterschieden $6-5=1$, $5-4=1$, $4-3=1$. . . immer größere Abstände $1,2-1=0,2$, $1,5-1,2=0,3$, $2-1,5=0,5$. . .

Ähnlich sinkt in Fig. 79 das Potential von 2 auf 1 um je 0,1 in im größeren Abständen. — Vgl. Tafel I, II für die einfachen Kraftfelder.

Allgemein ist für zwei Stellen des Feldes in r und r' cm Abstand von M Potentialdifferenz: $V' - V = \kappa M \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} \right) = - \kappa \frac{M}{r'r} (r' - r)$. . .

In Tafel Ia — d sind die Kreise die Durchschnitte der kugelförmigen Niveaulächen mit der Ebene des Papiers. Denken wir uns nun über jedem Punkt dieser Papierfläche normal zu ihr die Größe des daselbst geltenden Potentials Ordinate aufgetragen, so erhebt sich über ihr ein kegelförmiger Berg (vgl. die bei LA 65. Figuren in LA 65), dessen Mantel eine nach oben konkave Fläche ist, und dessen Spitze sich ins Unendliche erstreckt. Denken wir uns umgekehrt zu diesem Berg die kartographische Darstellung, so sind auf ihr die „Schichtenlinien“ des Berges wieder jene Kreise. Bekanntlich bildet die Dichtigkeit der Schichtenlinien ein übersichtliches Maß für das „Gefälle“ des Berges. Ähnlich ist auch der Quotient $\frac{V' - V}{r' - r} = - \kappa \frac{M}{r'r}$ das Potentialgefälle an einer Stelle des Kraftfeldes zwischen den Abständen r und r' von M (vgl. § 2, Anm. über „Gefälle“). Setzen wir hierin wieder $r' = r$, so ist das Potentialgefälle $\frac{V' - V}{r' - r} = (-) \kappa$

ein Maß der in allen Punkten vom Abstände r auf je 1 g wirkenden Kraft entsprechend dem Ausdrucke, von welchem in § 22, S. 90 ausgegangen wurde.

Ist die Masse M nicht ein Punkt, sondern eine homogene Kugelschale oder Kugel (Fig. 78), so erhält jener Berg ein Plateau; was den Satz versinnlicht, daß das Gravitations-Potential im Innern einer unendlich dünnen homogenen Kugelschale konstant ist und zwar gleich dem Oberflächenpotential der Schale. Dieser (namentlich in der Elektrizitätslehre, § 137, wichtige) Satz besagt in Sprache des Arbeitsbegriffes ebensoviel wie NEWTONS Satz, daß die Gravitationskraft im Innern einer solchen Schale Null ist (§ 21, III). Zur Veranschaulichung: Hatte es einen Bergsteiger eine bestimmte Arbeit gekostet, um aus einer Ebene den (immer steiler werdenden) Berg hinan der Schwerkraft entgegen bis an den Rand des Plateaus zu erheben, so kostet es ihn keine neue Arbeit entgegen der Schwerkraft mehr, beliebig weit vom Rande aus in das Plateau hin zu schreiten. Desgleichen: Kostet es die Arbeit V Erg, um ein Gramm von der Oberfläche der Kugelschale bis ins Unendliche fortzubewegen, so kostet es keine größere Arbeit, das Gramm von irgend einem Punkte des Innern der Schale (durch diese hindurch) ins Unendliche zu bringen.

Bisher wurde die Gleichung (1) in Bezug auf die Abhängigkeit zwischen V und dem Abstände r diskutiert und durch die immer weiter voneinander abstehenden Kreise graphisch dargestellt. Noch einfacher ist die Abhängigkeit zwischen V und der Masse M . Denken wir uns z. B. in Tafel Ia, b an Stelle der Menge b eine 2, 3 . . . so große Menge, so stellen dieselben Kreise, welche früher den Potentialen 1, 2 entsprachen haben, diejenigen Stellen des intensiveren Kraftfeldes dar, an welchen die Potentiale 2, 4 . . . 12, bzw. 3, 6 . . . 18 PE betragen. Würde also die Masse M allmählich von M auf $2M$, $3M$. . . vergrößert, so müßten auch die Niveaulächen für je einen gegebenen Potentialwert allmählich bis zum doppelten

...fachen ... Radius anschwellen. Wir können uns also umgekehrt auch der Vorstellung bedienen, daß ein An- oder Abschwollen von Niveaulinien, bzw. -flächen auf ein Größer-, bezw. Kleinerwerden der Masse deutet, welcher das Potential zugehört (Anwendung dieser Vorstellung bei Vergrößerung der Sonnenmasse durch Hineinstürzen von Meteoriten, bei allmählicher elektrischer Ladung und Entladung einer Sammelkugel).

Ebenso wesentlich, wie die durch Gleichung (1) allgemein dargestellte Abhängigkeit der Größe V von M und r , ist ihre Unabhängigkeit von der Gestalt und Richtung des Weges, längs dessen wir uns die Masse $1g$ von der Stelle P aus ins Unendliche geschafft denken. Darin, daß an jeder Stelle eines Kraftfeldes das Potential eine richtungslose Größe ist (eine „Skalen-Größe“, nicht wie die Kraft eine durch Pfeile darstellbare „Vektorgröße“ 7 und math. Anhang, Nr. 8), liegt der zweite Hauptgrund der Verein- Anh. 8. schung, wenn man Rechnungen und Konstruktionen mit Potentialen statt mit den Kräften ausführt.

Eine unmittelbare Folge dieses Satzes nämlich ist der Satz, daß Potentiale sich einfach algebraisch addieren (nicht wie z. B. Kräfte mit Rücksicht auf ihre Richtungsverschiedenheit erst nach dem Parallelogrammsatz sich zusammensetzen). — Auf Grund dieses Satzes gelingt nun leicht die Lösung der

Aufgabe 2: Das zusammengesetzte Kraftfeld zweier gleicher Massenpunkte oder homogener Kugelschalen (Kugeln) zu konstruieren (Tafel Ia, b).

Es seien um jede der beiden gleichen Massenpunkte die Niveauflächen für die Potentiale 6, 5 ... 1 PE konstruiert. Dann herrschen z. B. die Potentiale $6 = 5 + 1 = 4 + 2 = 3 + 3 = 2 + 4 = 1 + 5$ in allen Punkten, wo sich die Kreise (Kugeln) für die Potentiale 5 und 1, bezw. 4 und 2 u. s. w. schneiden; ebenso in anderen Punkten die Potentiale $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 2 + 3 = 1 + 4$. Um somit die Niveauflächen, bezw. Niveaulinien des zusammengesetzten Feldes zu gewinnen, haben wir nur durch die krummlinigen Vierecke die krummlinigen Diagonalen zu ziehen, welche alle Durchschnittspunkte 6, 6 ..., bezw. 5, 5 ... verbinden.

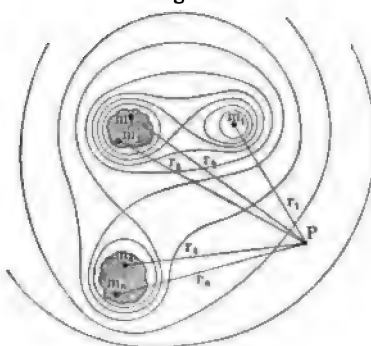
Aufgabe 3: Das zusammengesetzte Kraftfeld zweier verschiedener Massen zu konstruieren. — Wird z. B. die eine Masse die Hälfte der anderen, so schrumpfen die Niveauflächen der letzteren auf die halben Radien ein, wodurch sich bei übrigens ähnlicher Konstruktion wie in Aufgabe 2 die Niveaulinien Tafel Ic, d ergeben. —

Hiermit ist nun die eingangs nach dem Kräfteparallelogramm behandelte Aufgabe, für zwei beliebige punktuelle oder kugelförmige Massen, also auch z. B. für Erde und Mond, die Niveaulinien zu konstruieren, gelöst (ohne Zurückgehen auf die Richtung und Größe der Kräfte). Haben wir dann z. B. das zusammengesetzte Kraftfeld Erde-Mond durch das System der Niveauflächen vollständig beschrieben, so ergeben sich überdies (ebenfalls ohne Rechnung nach dem Kräfteparallelogramm) zu den Niveaulinien wieder die **Kraftlinien** als die sie in jedem Punkte normal durchschneidenden Kurven. Es müssen sich so z. B. dieselben Reihen von Bleiloten, d. i. dieselben Kraftlinien, ergeben, aus welchen oben in Fig. 75 erst auf die Niveaulinien geschlossen worden war. —

Die bisher nur für je einen oder zwei Punkte, bezw. kugelförmige Massen entwickelten Begriffe und Sätze lassen sich nun schließendlich auch sofort

erweitern für beliebig viele Massenpunkte und daher auch für beliebig gestaltete zusammenhängende Körper aus gravitierender Masse, was sich nur die wirkliche Durchführung der Rechnungen und Konstruktionen je nach der Gestalt und Massenverteilung der Massen mehr oder minder verwickelt gestalten kann. — Zusammenfassend lauten die einfachsten dieser Begriffe und Sätze:

Fig. 80.



1. In einem zusammengesetzten Gravitationskraftfelde beliebig vieler Massenpunkte von m_1, m_2, \dots, m_n ist in dem Punkte P , der von jenen Punkten die Abstände r_1, r_2, \dots, r_n hat (Fig. 80), das

$$\text{Potential } V = \sum \frac{m}{r} \text{ Erg per Gramm.} \quad (2)$$

2. Der geometrische Ort aller Punkte gleichen Potentials heißt Äquipotential- oder Niveaufläche. Zur Verschiebung einer Masse längs einer Niveaufläche ist keine Arbeit gegen

die Feldkräfte, zur Verschiebung normal zu ihr die größte Arbeit im Vergleich zur Verschiebung um gleiche Wege in jeder anderen Richtung erforderlich.

3. Die Linien, welche die Niveauflächen normal durchschneiden, heißen **Kraftlinien** (Tafel I und II a, b, c, d). — Math. Anh. Nr. 28.

4. Je näher an einer Stelle des Kraftfeldes die nach gleichen Potentialdifferenzen fortschreitenden Niveauflächen aneinander liegen, desto größer ist daselbst die Kraft. Zwischen zwei um die sehr kleinen Strecken $\sigma = s' - s$ voneinander abstehenden Punkten mit den

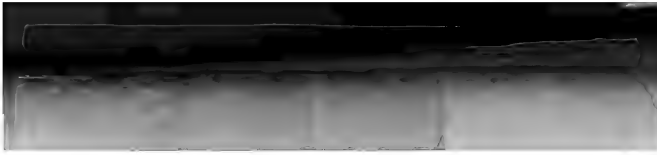
$$\text{Potentialen } V \text{ und } V' \text{ ist das Potentialgefälle } - \frac{V' - V}{s' - s} = f \dots (3)$$

ein Maß der daselbst auf je 1 g wirkenden Kraft; man nennt diese Kraftgröße kurz die **Feldstärke**.

Nach FARADAY werden die Kraftlinien in solcher Zahl gezogen, daß an Stellen des Feldes, wo die Feldkräfte auf je 1 g mit 1, 2, 3 ... f Dyn wirken, durch je 1 cm² der Niveaufläche 1, 2, 3 ... f Kraftlinien hindurchgehen. (Wie hiernach die von einem Kraftcentrum ausgehenden Kraftlinien räumlich anzuordnen sind, vgl. LA 68.) Unter dieser Annahme gilt dann:

Die **Feldstärke** an irgend einer Stelle des Kraftfeldes (direkt gemessen durch die Anzahl der Dyn, welche daselbst auf 1 g wirken) wird dargestellt durch die Anzahl der daselbst durch 1 cm² der Niveauflächen hindurchgehenden Kraftlinien. Je dichter die Kraftlinien, desto größer die Feldstärke.

Bei Durchführung der Konstruktion der Fig. 76, S. 104 gehen durch die neutrale Stelle des Feldes gar keine Kraftlinien.



I. Niveaulinien einfacher Kraftfelder.

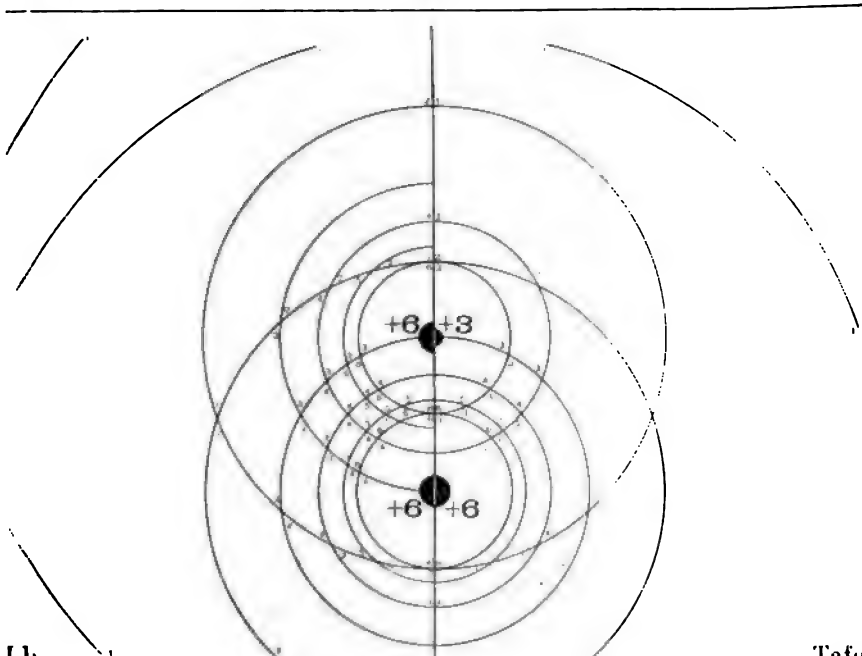
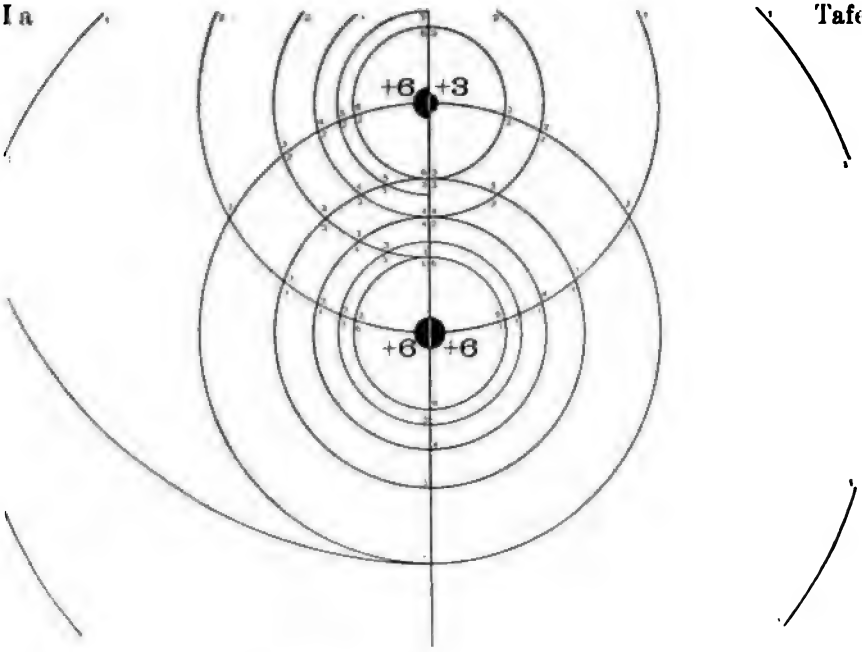
Gleiche gleichnamige Mengen

Ungleiche gleichnamige Mengen

im Abstand 8 cm

I a

Tafel I c



I b

Tafel I c

Gleiche gleichnamige Mengen

Ungleiche gleichnamige Mengen

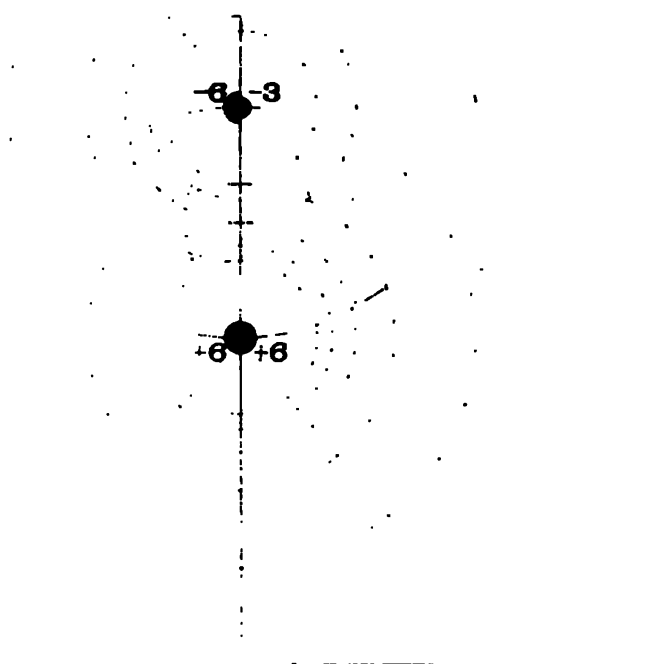
im Abstand 8 cm

¹⁾ Niveautiteln einfacher Kraftfelder.

• • • **More...** in

1. *Phragmites* (common)

4:30 p.m. : 6:00 p.m.



• 6 • 4

5. Um eine Masse von 1 g, bezw. m g von einer Stelle des Kraftfeldes mit dem Gravitationspotential V zu einer von dem niedrigeren Potential V' zu bewegen, wird eine Arbeit von $A_1 = V - V'$, bezw. $A = m(V - V')$ Erg gegen die Feldkräfte verbraucht. Umgekehrt leisten die Feldkräfte die gleiche Arbeit, wenn die Masse, den Feldkräften folgend, „von selbst“ von der Stelle niedrigeren zu der höheren Potentials (d. i. in der Regel von entfernteren zu näheren Punkten) sich bewegt. — Wird die hier von den Feldkräften geleistete Arbeit ausschließlich dazu verwendet, um die Geschwindigkeit und hiermit die lebendige Kraft der Masse zu vergrößern, so gilt die Beziehung

$$m(V - V') = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv'^2}{2} \dots \dots (4)$$

Diese Gleichung spricht wieder eine Verwandlung potentieller Energie (gemessen durch die erste Seite der Gleichung, daher auch der Name „Potential“) in einen Zuwachs von aktueller Energie (gemessen durch die zweite Seite der Gleichung) aus.

Eine Anwendung der Gl. (4) auf die Bewegungen der Planeten im Newtonschen Kraftfeld der Sonne vgl. LA 63.

LA 63.

Bemerkung: Solche Gleichungen gelten auch für die Bewegungen in elektrischen und magnetischen Kraftfeldern. Nur kommt dann noch die Rücksicht auf die Vorzeichen der Kräfte und Potentiale hinzu, indem es außer den Anziehungen wie bei der Gravitation auch noch elektrische und magnetische Abstofsungen gibt (Tafel II a, b, c, d). Aus den in § 135 zu entwickelnden Gründen pflegt man abstossende Kräfte als positive, anziehende als negative zu rechnen. Hiernach wären dann auch schon die Gravitationskräfte von Gleichung (1) des § 21 an als negative einzuführen gewesen. Desgleichen wäre z. B. die Tatsache, daß frei fallende, geworfene . . . Körper sich der anziehenden Erde nähern, in der Sprache der Potentiallehre so auszudrücken, daß sie sich „von selbst“ aus Orten niedrigeren zu Orten höheren Potentials bewegen (wogegen wir von elektrischen Ladungen sagen werden, daß sie von Orten höheren zu Orten niedrigeren Potentials „abfließen“). Da aber innerhalb der Gravitationsmechanik abstossende Kräfte nicht vorkommen, wurde die Gravitationskraft weder als positive noch als negative, sondern als absolute GröÙe in Rechnung gezogen, und wir rechnen auch alle Gravitationspotentiale absolut. —

Wie auch die allgemeine Fig. 80 sogleich wieder erinnert an die kartographische Darstellung eines gebirgigen Terrains, so lassen sich auch alle vorstehenden allgemeinen Sätze erläutern durch die wirklichen Konfigurationen und Bewegungen an jedem unebenen Terrain. Bekanntlich erkennt der geübte Kartenleser aus der Dichte der Schichtenlinien sofort die steilen Böschungen; auch erwartet er die Stromlinien des Wassers mehr oder minder annähernd normal zu den Schichtenlinien, indem das Wasser auf dem kürzesten Wege von höheren zu niedrigeren Stellen zu gelangen sucht. Genau ist dies allerdings nur der Fall, wenn das Wasser während des Fließens durch Reibung an dem Boden jeden Augenblick seinen Zuwachs an lebendiger Kraft wieder verliert; denn falls es „in Schufs“ geraten ist, kann es auch mehr oder weniger vom kürzesten Wege zu den

tieferen Stellen abweichen. (Auch für kleinere Hindernisse, wie Steine, die das Wasser umfließt, gilt diese Einschränkung; denn das Wasser kann eben keinen Stein vom Ruhezustande aus, wohl aber, wenn es schon Geschwindigkeit hat, überklettern.) Weiterhin finden aber solche Systeme von Linien, wie sie oben die Niveauflächen im Schnitte mit der Papierfläche darstellen, auch Anwendung für die Darstellung von Isobaren (§ 190), Isothermen (§ 192) u. s. f. Überall entspricht hier der ungleichen Luftdruck-, bezw. Temperaturverteilung ein „Strömen“ der Luft, bezw. der Wärme. — Über besondere physikalische Deutungen, welche FARADAY und MAXWELL dem ursprünglich rein graphischen Hilfsmittel der Kraftlinien gegeben haben, vergl. §§ 144 und 157.

II. Mechanik starrer Systeme.

§ 25. Starre Systeme und feste Körper.

Wer sich einer Stange aus Eisen, Holz . . . als eines Hebebaumes bedient, verlangt von der Stange, daß sie durch die ins Spiel kommenden Kräfte des schweren Steines und der drückenden Hand nicht allzu sehr verbogen oder gar abgebrochen werde. Eine absolut starre Stange gibt es nicht; eine hinreichend dicke und kurze Eisenstange nähert sich aber dem Begriffe völliger Starrheit mehr, eine Blei-, Holzstange schon weniger. Es wäre jedoch schwierig, ja unmöglich, für jeden Hebebaum aus diesen verschiedenen Stoffen mit Rücksicht auf alle vorübergehenden oder bleibenden Verbiegungen, Dehnungen etc. und die bei gewissen Kraftverhältnissen eintretenden Trennungen seiner Teile je ein besonderes „Hebelgesetz“ aufzustellen. Die Mechanik geht deshalb von dem folgenden Begriffe „starrer Systeme“ aus und fügt die Berücksichtigung der Elastizität, Festigkeit . . . der wirklichen festen Körper erst nachträglich hinzu (§ 50):

Ein starres System ist ein Inbegriff (System) von Massenpunkten, deren gegenseitige Lage sich nicht ändert, was immer für Bewegungen das System als Ganzes ausführt und was immer für Kräfte an seinen einzelnen Punkten angreifen. Insbesondere heißen zwei Massenpunkte dann starr miteinander verbunden, wenn zwei gleich große entgegengesetzte Kräfte ihren Abstand weder vergrößern noch verkleinern können (Fig. 89, 90, S. 115).

Man faßt häufig die Mechanik des Punktes, die Mechanik der starren Systeme und der wirklichen festen Körper unter dem Namen **Geomechanik** zusammen. — Man könnte auch die Mechanik starrer Systeme, sowie es in der Mechanik des Punktes geschah, in einen rein phoronomischen und einen dynamischen Teil gliedern. Im folgenden sollen aber beiderlei Begriffe und Sätze in engerem Zusammenhange behandelt werden.

Insoweit es sich nur um phoronomische Beschreibungen handelt, sind die für starre Systeme geltenden Begriffe zum Teil auch auf tropfbar flüssige und gasförmige Körper anwendbar, z. B. auf die stationäre Rotation flüssiger Weltkörper.

Schon in phoronomischer Hinsicht können die Bewegungen starrer Systeme unendlich verwickelter sein als die eines einzelnen Punktes; z. B. die verschiedenen Kroiden (gemeine, gestreckte, geschlungene, Anh. Nr. 24) der Punkte eines rollen- Anh. 24.
 an Eisenbahnrades; Bewegungen einer Schraube (Anh. 25) u. dergl. — Es ist Anh. 26.
 nachführbar und zweckmäßig, alle wie immer beschaffenen Bewegungen starrer Systeme zu zerlegen in rein fortschreitende und rein drehende und hiernach nach die Kraftwirkungen an starren Systemen zu sondern.

§ 26. Rein fortschreitende und rein drehende Bewegung. Kraftwirkungen an starren Systemen.

Beispiel 1: Ein rechtwinklig parallelepipedischer Stab (Fig. 81, 82, ein Buch...) wird so bewegt, daß die einzelnen Punkte des Stabes zwar beliebige gerade oder krumme Bahnen mit beliebigen gleichbleibenden oder veränderlichen Geschwindigkeiten beschreiben, die Kanten des Stabes aber den Kanten des Zimmers immer parallel bleiben. — Beispiel 2: Der Stab wird in irgend zweien seiner Punkte festgehalten und um die durch diese Punkte bestimmte Gerade mit gleichbleibender oder veränderlicher Geschwindigkeit („Winkelgeschwindigkeit“, § 12, § 31) gedreht. — Ähnliche Bewegungen an beliebig anders gestalteten Körpern! — Wir beschreiben und benennen diese Bewegungen folgendermaßen:

Fig. 81.

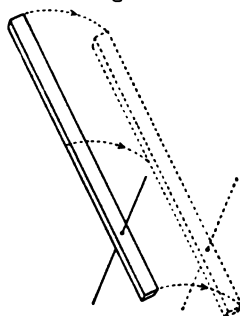
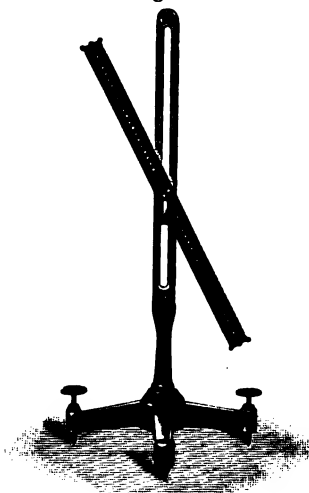


Fig. 82.



1. Ein starres System bewegt sich **rein fortschreitend** (hat eine **reine Translation**), wenn alle seine Punkte **kongruente Bahnen** beschreiben. — Aus dieser Bedingung folgt (wie?), daß jede in dem Systeme gedachte Gerade während der ganzen Bewegung die gleiche Richtung im Raume behält („zu sich selbst parallel“ bleibt). — Fig. 81.

2. Ein starres System bewegt sich **rein drehend** (hat eine **reine Rotation**), wenn alle seine Punkte **Kreise** beschreiben, deren Ebenen zu einander parallel sind und deren Mittelpunkte auf einer zu diesen Ebenen senkrechten Geraden liegen. Letztere Gerade heißt die **Rotationsachse**; jede zu ihr senkrechte Ebene heißt **Rotationsbene** des Systems. — Fig. 82.

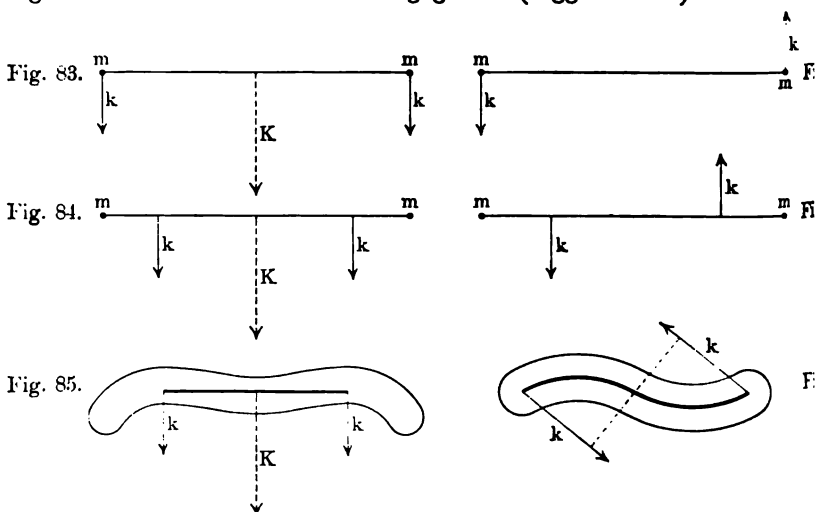
Jede andere Bewegung des starren Systems läßt sich in diese beiden Hauptarten von Bewegungen zerlegen.

Beispiele 3: Tägliche Rotation und jährliche Translation der Erde (§ Anh. 24. 177). — Fortrollen eines Wagenrades (Zykloiden, math. Anh. Nr. 24). — Schraubungsbewegung § 30; Anh. Nr. 25; LA 87.

LA 87. Die Rotationsachse kann selbst von Augenblick zu Augenblick ihre sowohl 1. im Raume wie 2. im Körper selbst ändern (z. B. Kreiselbewegung §§ 31, 34); Kegelbewegung der Erdachse im Fixsternraume: „Präcession“, Wandern der Erdachse innerhalb des Geoides, § 178). —

Fragen wir nun, was für Bewegungen an einem starren Systeme dargegebene Kräfte hervorgerufen werden, so lassen sich folgende einfachste Gesetze zunächst für Gebilde von symmetrischer Gestalt und Massenverteilung aufstellen (— vgl. über axialsymmetrische und centralsymmetrische Gebilde § 22. Anhang Nr. 22; inwieweit mechanische Sätze aus bloßen Symmetriebetrachtungen unmittelbar einleuchten, log. Anh. 37):

Zwei Punkte von gleichen Massen m und m seien durch ein masseloses gedachten Stab miteinander starr verbunden und von zwei gleichen Kräften k und k angegriffen (Figg. 83—88).



1. Sind die Kräfte gleichsinnig parallel (Fig. 83), so tritt nur eine **rein fortschreitende** Bewegung ein.

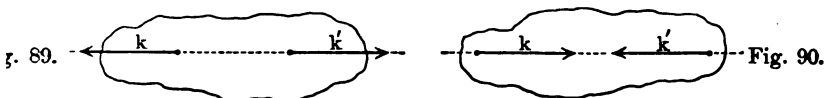
Dieser Satz gilt überhaupt bei axialsymmetrischer Lage der Massenkräfte (Figg. 83—85). Auch eine längs der Symmetrieachse wirkende Kraft (Figg. 83—85) kann so nur eine rein fortschreitende Bewegung hervorrufen.

2. Sind die zwei gleichen Kräfte antiparallel (ein **Kräftepaar**, Drehzwilling, Fig. 86), so kann nur eine **rein drehende** Bewegung eintreten. Diese Wirkung eines Kräftepaares kann durch eine einzelne Kraft überhaupt nicht hervorgebracht werden.

Der Satz gilt überhaupt bei centralsymmetrischer Lage der Massenkräfte (Figg. 86—88).

Hieran schliessen sich die folgenden allgemeineren Sätze über die Wirkung zweier Kräfte an einem beliebigen starren System:

I. Zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte k und k' (Figg. 89 d 90), deren Angriffspunkte zwar nicht zusammenfallen, wohl



er miteinander starr verbunden sind, halten einander dann und nur dann das Gleichgewicht, wenn die Krafrichtungen in der durch die Angriffspunkte bestimmten Geraden, der „Angriffslinie“ der Kräfte, liegen.

Dabei erzeugen die Kräfte nach Fig. 89 eine Zugspannung, nach Fig. 90 eine Druckspannung (vergl. § 17) in dem zwischen den Angriffspunkten der Kräfte liegenden Teile des starren Systems.

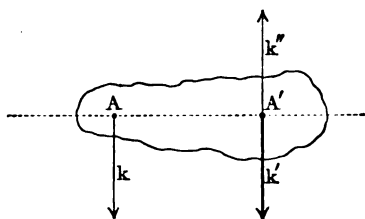
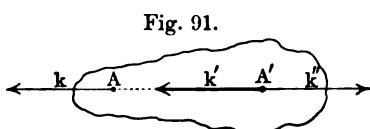
Bemerkung: Dieser Satz I, daß und wie eine Kraft außer ihrem eigenen Angriffspunkte auch einen anderen Punkt dank seiner angenommenen starren Verbindung mit jenem beeinflussen kann, bildet dasjenige Prinzip der Mechanik starrer Systeme, das noch zu den drei allgemeinen Prinzipien der Mechanik (§ 15, I, II, III) hinzukommen muß, um aus ihnen alle spezielleren Sätze über Kräfte an starren Systemen abzuleiten. (Vgl. § 36, § 43.)

II. Kräfteverlegung an starren Systemen. Jede an einem starren System angreifende Kraft ist längs ihrer Angriffslinie ohne Änderung ihrer Wirkung verlegbar.

Beweis: Was die eine gegebene Kraft k (Fig. 91) leistet, leisten auch die drei Kräfte k, k', k'' , da k' und k'' zusammen die Resultierende Null haben. Von diesen aber heben sich k und k'' nach dem Satze I. auf, also leistet k' dasselbe wie k .

III. Anders als längs ihrer Angriffslinie ist eine Kraft ohne Änderung ihrer Wirkung nicht verlegbar. Wird eine Kraft, die an einem System eine Translation erzeugt, seitlich von ihrer Angriffslinie verlegt, so kommt zu der durch die erstere Kraft bewirkten Translation auch eine Rotation des Systems hinzu.

Beweis: War nämlich z. B. zuerst die eine Kraft k (Fig. 92) gegeben, so hat sie dieselbe Wirkung, wie wenn die drei Kräfte k, k', k'' vorhanden wären. Diese aber lassen sich auffassen als die seitlich verlegte Kraft k' und das Kräftepaar $k k''$. — Z. B. Drücken wir gegen eine Tischlade in der Mitte, so bewegt sie rein fortschreitend in gewünschter Weise vorwärts. Lassen wir dagegen die gleiche Kraft asymmetrisch zur Tischlade wirken, so nimmt diese auch eine drehende Bewegung an und „klemmt sich“. — Umgekehrt kann auch, solange k allein wirkte, eine fortschreitende und drehende Bewegung stattgefunden



haben und erst durch die Verlegung des Angriffspunktes von A nach A' (falls nämlich dieser Punkt A' der Schwerpunkt des Systems ist, § 28) durch das Kräftepaar kl' die Aufhebung jener Drehung bewirkt werden, so daß nur reine Translation übrig bleibt.

Bisher war das starre System, an welchem eine oder mehrere Kräfte angriffen, als frei beweglich gedacht. Häufig ist aber in einem starren System a) eine einzelne Gerade, b) ein einzelner Punkt von vornherein als unbeweglich angenommen. Dann kann das System überhaupt keine fortschreitende Bewegung, sondern nur mehr Drehungen um jene feste Achse oder jenen Punkt machen. Wirkt an einem solchen starren Systeme nur eine Kraft, deren Angriffslinie durch jene Achse oder jenen Punkt geht, so wird sie durch die Festigkeit dieser Gebilde aufgehoben. Wir können uns dann jedesmal denken, daß durch die Wirkung der Kraft in jener festen Achse oder in jenem festen Punkte gleich große Gegenkräfte geweckt werden. — Gleiches gilt, wenn mehrere Kräfte gegeben sind, deren Resultierende durch jene Gerade (jenen Punkt) aufgehoben wird. Man sagt dann: Die Kräfte sind in Bezug auf jene Gerade (jenen Punkt) im Gleichgewichte.

So können wir uns an einem als Hebebaum verwendeten zweiseitigen Hebel die nach abwärts wirkenden Kräfte der Belastung und des Arbeiters als zu einer ebenfalls nach abwärts wirkenden Resultierenden vereinigt denken, die aber durch die aufwärts wirkende Gegenkraft des unterstützenden Holzscheites (und seiner hinreichend festen Erdunterlage) aufgehoben wird; Näheres hierüber § 29. —

Den bisher betrachteten einfachsten Fällen von Kraftwirkungen an starren Systemen steht gegenüber die folgende

Allgemeinste Aufgabe über Kraftwirkungen an starren Systemen: An einem starren Systeme von beliebiger Gestalt und Massenverteilung greifen beliebig viele Kräfte von beliebiger Stärke und beliebigen Angriffslinien an. Es sollen die kinetischen und statischen Wirkungen dieser Kräfte ermittelt werden. — Speziell: Unter welchen Bedingungen halten sich die gegebenen Kräfte an dem Systeme das Gleichgewicht?

Die Lösung dieser allgemeinen Aufgabe gliedert sich zweckmäßig in folgende Reihe spezieller Aufgaben: Kräfte an starren Systemen

- | | | | |
|-------------------------------------|----------|--|--|
| I. mit gemeinsamem Angriffspunkt | | mit verschiedenen Angriffspunkten | |
| Angriffslinien in gemeinsamer Ebene | | Angriffslinien windschief
(in verschiedenen Ebenen) | |
| II. nicht parallel | parallel | | |
| III. gleichsinnig | | nicht gleichsinnig (antiparallel) | |
| IV. von verschiedener Stärke | | V. von gleicher Stärke. | |

§ 27. Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften an starren Systemen.

I. Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. Für die Zusammensetzung (und Zerlegung) solcher reicht die ein- oder mehrmalige Anwendung des im § 17 für je einen Massenpunkt entwickelten Satzes vom Kräfteparallelogramm aus. — Z. B. (k_1) und (k_2) in Fig. 93.

II. Zwei Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten in gemeinsamer Ebene nach verschiedenen Richtungen. Die Angriffspunkte A_1 und A_2 der Kräfte k_1 und k_2 (Fig. 93) werden in den Durchschnittspunkt O der Angriffslinien verlegt, und hierauf wird wieder an (k_1) und (k_2) die Parallelogrammkonstruktion durchgeführt. — Der Angriffspunkt O der Resultierenden R kann dann wieder nach O' oder $O'' \dots$ rückverlegt werden.

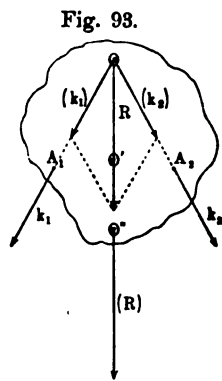


Fig. 93.

III. Sind die beiden Kräfte parallel, so gibt es nicht mehr wie in II. einen Schnittpunkt der Angriffslinien. Es lässt sich aber III. auf II. dadurch zurückführen, dass zu den gegebenen Kräften k_1 und k_2 die Hilfskräfte $+H$ und $-H$ (Fig. 94) hinzugefügt und die Resultierenden r_1 und r_2 gebildet werden. Diese werden nun nach O verlegt und hier wieder nach den Richtungen der früheren Komponenten zerlegt. $+H$ und $-H$ heben sich nun auf und (k_1) und (k_2) wirken längs derselben Geraden. Somit:

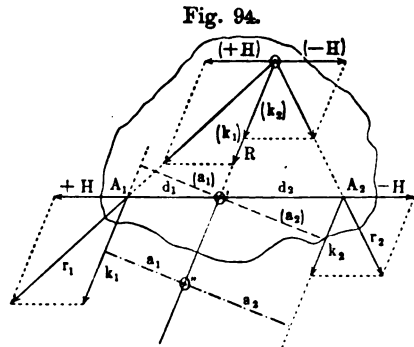


Fig. 94.

Die Resultierende zweier gleichsinnig paralleler Kräfte an einem starren System ist

- a) der Richtung nach parallel den gegebenen Kräften,
- β) der Größe nach gleich deren Summe, und
- γ) die Angriffslinie der Resultierenden teilt den Abstand der Angriffslinien der beiden Kräfte im verkehrten („inneren“) Verhältnisse ihrer Größen; $a_1 : a_2 = k_2 : k_1$.

Beweis des Abstandsgesetzes γ): Da das Dreieck $A_1 O' O$ dem Krätedreieck aus $(+H)$ und (k_1) ähnlich ist, so ist $d_1 : O'O = H : k_1$, also $k_1 d_1 = H \cdot O'O$. Da ferner ebenso: $k_2 d_2 = H \cdot O'O$, so ist $k_1 d_1 = k_2 d_2$ oder $d_1 : d_2 = k_2 : k_1$. — Da es für die Resultierende $(k_1) + (k_2)$ nicht auf den Angriffspunkt O oder O' ,

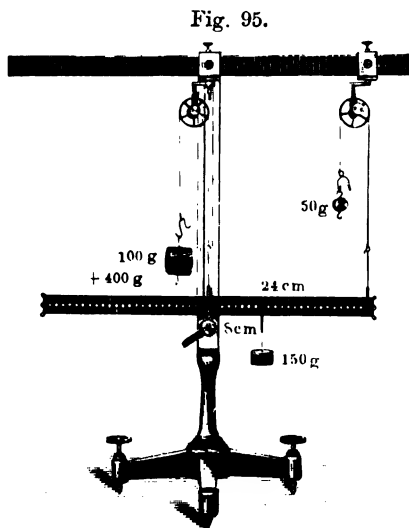
sondern nur auf die Lage der Angriffslinie OO' zwischen den Angriffslinien der Kräfte k_1 und k_2 ankommt, so legen wir zunächst durch O' die gemeinschaftliche Normale auf die parallelen Angriffslinien von k_1 und k_2 . Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke mit dem gemeinschaftlichen Scheitel O' ist $d_1 : d_2 = (a_1) : (a_2)$ und somit auch $(a_1) : (a_2) = k_2 : k_1$. Denken wir uns schliesslich die den Abstand der Angriffslinien voneinander angegebende Normale durch irgend einen anderen Punkt O'' gelegt, so gilt $a_1 : a_2 = k_2 : k_1$ für jeden Punkt der Angriffslinie der Resultierenden in Bezug auf die Angriffslinie der Komponenten.

Auf Grund der Gesetze III α, β, γ lässt sich eine gegebene Kraft K zerlegen in parallele Kräfte k_1, k_2 , wobei $k_1 + k_2 = K$ sein und die Abstände der Angriffslinien von der Angriffslinie der K den Grössen von k_1 und k_2 verkehrt proportional sein müssen. Ist z. B. K und k_1 gegeben, so muss $k_2 = K - k_1$ sein. Wie gross ist der Abstand von k_2 und K , wenn der von k_1 und K gleich a_1 cm ist?

IV. Die Resultierende zweier ungleicher antiparalleler Kräfte an einem starren System ist

- α) der Richtung nach **parallel der grösseren Kraft**,
- β) der Grösse nach **gleich der Differenz der Kräfte** und
- γ) die Angriffslinie liegt **jenseits der Angriffslinie der grösseren Kraft** so, dass ihre Abstände von den Angriffslinien der beiden Kräfte im verkehrten („äusseren“) Verhältnisse ihrer Grössen stehen; also wieder $a_1 : a_2 = k_2 : k_1$.

Versuch: Fig. 95 stellt dar, dass der Stab von 400 g Masse durch eine in seinem Schwerpunkt (§ 28) angebrachte Schnur, die über die mittlere Rolle geführt ist und am anderen Ende ebenfalls 400 g trägt, zu einem freien Systeme gemacht ist. — Die antiparallelen Komponenten sind dann die Gewichte der 150 g und 50 g, die Resultierende ist die (im Schwerpunkt) abwärts wirkende Kraft der Gewichte von $150 - 50 = 100$ g; dieser Resultierenden, und somit auch den zwei Komponenten, wird durch 100 g (die mit den 400 g zu 500 g vereinigt sind) das Gleichgewicht gehalten. Und da überdies $8 \text{ cm} : 24 \text{ cm} = 50 \text{ g} : 150 \text{ g}$, so ist Gesetz IV bestätigt.



Durch diesen Versuch ist aber auch Gesetz III bestätigt. Denn wir können uns die beiden aufwärts wirkenden Kräfte von 100 g und 50 g als die gegebenen Komponenten denken, die dann eine in 8 cm Abstand vom Schwerpunkt aufwärts wirkende Resultierende gleich und entgegengesetzt dem Gewichte von $(100 + 50)$ g geben; ihr wird durch die wirklich abwärts wirkenden 150 g das Gleichgewicht gehalten. — Ähnlich lässt sich auch allgemein III auf IV, und daher umgekehrt auch IV auf III zurückführen.

Durch die ursprünglich gegebenen Größen k_1 , k_2 und ihren Abstand a gedrückt ist $a_1 = \frac{k_2}{k_2 - k_1} \cdot a$ und $a_2 = \frac{k_1}{k_2 - k_1} \cdot a$; jede dieser zwei Gleichungen bestimmt für sich die Lage des Punktes O in Bezug auf A_1 und A_2 (Fig. 96). — Diskussion (in Bezug auf k_2): War zuerst k_2 viel größer als k_1 , so lag O nahe an A_2 , nähert sich die Größe von k_2 jener von k_1 , so rückt O immer weiter von A_2 weg. Wäre $k_2 < k_1$, käme O jenseits von A_1 zu liegen. —

Der Grenzfall $k_2 = k_1$ führt zu dem neuen Gesetz:

V. Für zwei antiparallele Kräfte von gleicher Größe, d. i. für ein **Kräftepaar**, gibt es überhaupt nicht eine Kraft, welche dasselbe wirkt wie die gegebenen zwei Kräfte (nämlich reine Rotation, wie schon § 26 für den besonderen Fall eines centralsymmetrischen Systems Fig. 86—88 unmittelbar anschaulich gemacht wurde).

Allgemein läßt sich dieses Ergebnis aus den Gleichungen für a_1 und a_2 herausnehmen, indem, wenn $k_1 = k_2$ ist, die Größe der Resultierenden Null wird, und also die Angriffslinie dieser Nullkraft ins Unendliche rückt (und zwar ebenso nach $+\infty$ wie nach $-\infty$). Denn eine „Resultierende von der Größe Null“ ist eben keine „Resultierende“ mehr.

VI. Die Zusammensetzung von Kräften mit windschiefen Angriffslinien erfordert die seitliche Verschiebung mindestens der einen von beiden Kräften und hiermit die Einführung von Kräftepaaren. — Es findet aber diese Aufgabe ihre Erledigung zugleich mit der unten folgenden allgemeinen Aufgabe.

Äquivalenz von Kräftepaaren. a) An einem starren Systeme greifen zwei gleiche antiparallele Kräfte von je k Dyn an, deren Angriffslinien einen Abstand von a cm haben; er heißt der **Arm des Kräftepaares**. Ersetzen wir jede der beiden Kräfte k

durch zwei gleichsinnig parallele Kräfte $\frac{k}{2}$ nach

Fig. 97, so heben sich die mittleren Kräfte auf, und es bleibt ein Paar von halber Größe und doppeltem Arme übrig. — Allgemeiner läßt sich zeigen, daß ein ursprüngliches Paar auch eines mit den

Größen $\frac{k}{n} = k'$ und dem Arme $na = a'$ äquivalent ist. Da $k'a' = ka$ ist, so wurde für das Produkt der Maßzahlen aus Kraft und Armlänge ein besonderer Name: „**Moment des Kräftepaares**“ eingeführt. Einheit des Momentes eines Kräftepaares ist das Moment des Paares von 1 Dyn mit dem Arme 1 cm. Über die allgemeine Bedeutung und Verwendbarkeit des Begriffes „Moment einer Kraft“ vergl. § 29.

Die durch die beiden Angriffslinien der Kräfte bestimmte Ebene heißt **Ebene des Kräftepaares**.

b) Das Paar (k_1, a_1) läßt sich ohne Änderung der Wirkung um den Mittelpunkt O seines Armes drehen (Fig. 98 a. f. S.). Denn denken wir uns zu den beiden Kräften k_1, k'_1 die vier weiteren Kräfte $k_2, k'_2, (k_2), (k'_2)$, hinzugefügt, so

Fig. 96.

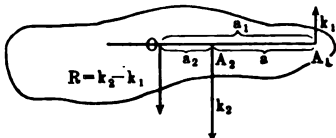
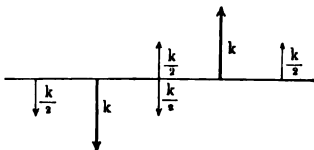
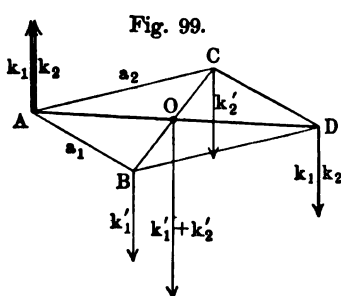
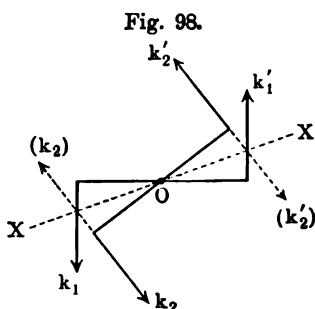


Fig. 97.



heben sich einerseits je ein k_2 und (k_2) auf, andererseits heben sich je ein k_1 und (k_1) wegen ihrer axialsymmetrischen Lage zu XX auf, so daß nur k_2, k_2' übrig bleibt



Zusammensetzung von Kräftepaaren. c) In Fig. 99 stelle ABD ein Parallelogramm dar, dessen Diagonale AD in der Zeichenebene und des Ebenen normal zu dieser liegt (also B vor, C hinter ihr). Normal zur Ebene des Parallelogramms wirken im Punkte A zwei gleiche Kräfte k_1, k_2 aufwärts, in B und C ebensolche Kräfte k_1' und k_2' abwärts. Dann bilden k_1 und k_1' das eine Kräftepaar, k_2 und k_2' das andere Kräftepaar, die ersetzt werden können durch das Paar $k_1 + k_2$ und $k_1' + k_2'$ mit dem Arme AO ; dieses aber wieder (nach obigem Satze a) durch das Paar mit dem Arme AD und je einer Kraft k in A und D . — Es ist merkwürdig, daß also an den Armen von Kräftepaaren aus lauter gleichen Kräften eine Konstruktion ähnlich dem Kräfteparallelogramm zum Zwecke der Auffindung des resultierenden Paares vorgenommen werden kann.

Durch diese und ähnliche Sätze über die Äquivalenz und Zusammensetzung von Kräftepaaren (LA 69) läßt sich zeigen:

VII. Beliebige viele Kräftepaare von beliebigen Momenten und Ebenen eines starren Systems lassen sich immer durch ein einziges Kräftepaar mit bestimmtem Moment und bestimmter Ebene ersetzen. —

Mittels der bisher entwickelten Sätze I bis V und des Satzes VII über Kräftepaare läßt sich die Lösung der zu Ende des § 26 aufgestellten allgemeinen Aufgabe (einschließlich der besonderen Aufgabe VI von zwei windschiefen Kräften) nach folgenden zwei Methoden geben:

Erste Methode: Von den gegebenen Kräften setzen wir, falls unter ihnen eine oder mehrere Gruppen paralleler Kräfte vorkommen, die nach den Sätzen III und IV zu je einer Resultierenden zusammen. Von den hiernach verbleibenden nicht parallelen Kräften setzen wir diejenigen, deren Angriffslinien durch je einen Punkt gehen, nach Satz I und II zusammen. Jede der nun verbleibenden windschiefen Kräfte P_1, P_2, \dots, P_n ersetzt man nach § 26, Satz III durch je eine parallele, in dem einstweilen beliebig zu wählenden Punkt A angreifende Kraft P'_1, P'_2, \dots, P'_n und durch die zugehörigen Kräftepaare D_1, D_2, \dots, D_n . Dann geben jene Kräfte eine (in A angreifende) Resultierende R und ein resultierendes Kräftepaar D_R .

Zweite Methode: Wir wählen drei beliebige aufeinander senkrechte Richtungen und zerlegen alle gegebenen Kräfte (insoweit sie nicht schon in eine jener R

fallen) gemäß Gesetz I in je drei zu jenen Richtungen parallele Komponenten. Jede dieser drei Gruppen paralleler Kräfte setzen wir dann nach den III und IV zusammen, wodurch sich wieder drei Resultierende ergeben, vorerst im allgemeinen noch nicht durch denselben Punkt hindurchgehen. Durch Parallelverschiebung erhalten wir dann die durch je einen Punkt A Resultierende und drei Kräftepaare, welche wir wieder schliesslich durch Resultierende und durch ein Kräftepaar ersetzen können. (LA 69).

LA 69.

Da der Punkt A , durch welchen wir alle Angriffslinien der verlegten Kräfte durchgehen lassen, bisher willkürlich gewählt war, so ist von vornherein nicht einsehbar einzusehen, ob die verschiedenen Resultierenden und ihre Kräftepaare dieselbe Gesamtbewegung des Systems bewirken werden.

Unter allen diesen Lösungen ist diejenige die wichtigste, bei welcher wir als Massenmittelpunkt des Systems wählen, weil nur bei dieser die Resultierende eine rein fortschreitende Bewegung hervorbringt (vergl. folg. §).

Schwerpunkt. Gleichgewicht an schweren Körpern. Massenmittelpunkt.

Auf die Bedeutung des Schwerpunktes (welches Wort auch in die außersprachliche Sprache übergegangen ist) machen uns aufmerksam die Erfahrungen über das Balancieren von Brettchen, Stäben, des menschlichen Leibes, es gilt, über einen schmalen Steg zu schreiten, sich stark vorzubeugen und nicht umzufallen, das Vor-, Rückwärts- und Seitwärtsbiegen, wenn man Lasten auf dem Rücken, vorn oder mit dem einen Arm zu tragen dergl. m. — Bei Körpern, welche einen (geometrischen) „Mittelpunkt“ erwarten wir in diesem auch den Schwerpunkt; doch trifft dies im allgemeinen nur bei Körpern mit gleichmässiger Massenverteilung zu (z. B. bei einem „falschen“ Würfel; eine Kugel oder Walze, welche an einer Seite eingegossen ist, rollt — scheinbar gegen das Gleichheitsgesetz — ruckweise über die wagerechte Tischfläche u. dergl.).

In der vorwissenschaftlichen Vorstellung des „Schwerpunktes“ zu einem bestimmten Begriff auszubilden, gehen wir aus von folgenden einfachsten Aufgaben:

Aufgabe: Zwei Punkte von den (gleichen oder verschiedenen) Massen m_1 und m_2 durch einen masselos gedachten Stab miteinander verbunden. Wo liegt der „Angriffspunkt der Resultierenden“ der an den Massen wirkenden Schwerkraften?

Antwort: Da die Schwerkraften proportional den Massen sind, nämlich $p_1 = m_1 g$, $p_2 = m_2 g$, nach § 27, III die Angriffslinie der Resultierenden den Abstand der Angriffspunkte der beiden Kräfte und also auch den Abstand der Massen m_1 und m_2 in deren bestimmtem Verhältnisse; und zwar dies

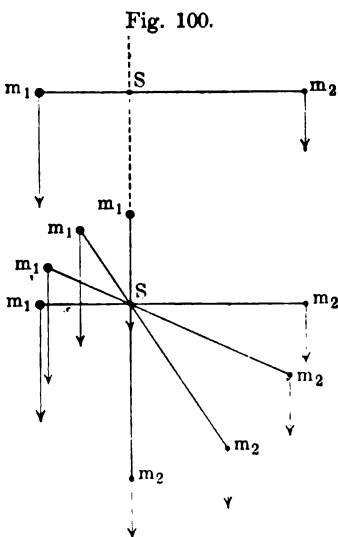
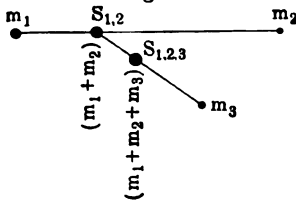


Fig. 101.

sowohl, wenn die Massen m_1 und m_2 in Bezug auf die Erde so liegen, daß Verbindungslinie wagrecht ist (Fig. 100 a. v. S.), wie auch, wenn die Massen in eine andere Lage gegen die Erde haben (Fig. 101 a. v. S.). Ebendeshalb ist in der obigen Aufgabe, wiewohl nach dem Satze über die Verlegbarkeit der Kräfte an starren Systemen die Resultierende zunächst nur eine bestimmte Angriffslinie, nicht einen bestimmten Angriffspunkt hat, doch nach diesem „Mittelpunkt der parallelen Kräfte“ gefragt werden. — Durch Ausdehnung dieser Betrachtung auf drei oder mehr schweren Massenpunkten, wobei zur Resultierenden zwei oder drei weitere u. s. f. hinzugenommen wird (Fig. 102), ergibt sich der Beweis, daß die Reihenfolge der Vereinigung zweier Kräfte gleichgültig sei und daß jeder Körper einen und nur einen Schwerpunkt habe, LA 70), gelangen wir zu folgender Definition des Schwerpunktes:

Fig. 102.



LA 70.

— Beweis, daß die Reihenfolge der Vereinigung zweier Kräfte gleichgültig sei und daß jeder Körper einen und nur einen Schwerpunkt habe, LA 70), gelangen wir zu folgender Definition des Schwerpunktes:

Schwerpunkt eines aus schweren Massenpunkten bestehenden starren Systems ist der **Angriffspunkt der Resultierenden aller Schwerkräfte** (genauer: der „Mittelpunkt“ dieser Kräfte). —

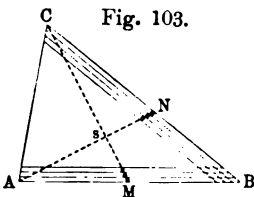
Ermittlung des Schwerpunktes geometrisch gegeben für homogene Körper. — Für zwei gleiche Massenpunkte ist der Schwerpunkt im Halbierungspunkte ihrer Verbindungsstrecke. — An einer gleichmäßig mit Masse belegten Geraden (z. B. ein gerader, sehr dünner, aus gleichartigem Stoffe bestehender Draht) lassen sich je einem Massenpunkte m ein anderer m' so zuordnen, daß die Schwerpunkte aller dieser Paare in denselben Punkt, den geometrischen Mittelpunkt des Drahtes, fallen.

Ein solcher Mittelpunkt ist ferner bei centric-symmetrischen Flächenkörpern (vergl. Fig. 86—88, S. 114) das Symmetriecentrum, desgleichen bei ebenen begrenzten Flächen mit mindestens zwei Symmetrieachsen oder bei Körpern mit mindestens drei Symmetrieebenen der Durchschnittspunkt dieser Achsen bzw. Ebenen. Welche dieser besonderen Bedingungen treffen zu bei kreisförmigen, elliptischen, parallelogrammatischen Platten, bei geraden, schiefen Cylindern, Kugeln u. s. f.? (Vgl. math. Anh. Nr. 22.)

Anh. 22.

Einen Mittelpunkt im bisherigen Sinne besitzen dagegen nicht z. B. ein Dreieck (ausgenommen das gleichseitige), die dreiseitige (mehrsseitige) Pyramide (ausgenommen das reguläre Tetraeder), der Kreisbogen, der Kreissektor, das Kugelsegment, der Kegel u. s. w. Die Ermittlung ihrer Schwerpunkte erfolgt dann durch Betrachtung folgender Art:

Fig. 103.



Dreieck. Man denkt sich das Dreieck (Fig. 103) in schmale Streifen parallel zu AB zerlegt; da der Schwerpunkt jedes solchen Streifens in seinem Halbierungspunkte liegt, so ist ein geometrischer Ort der Schwerpunkte aller dieser Streifen die „Schwerpunktlinie“ CM . Ebenso ist AN der geometrische Ort der Schwerpunkte aller dieser Streifen parallel zu BC .

zu BC parallelen Streifen. Also ist deren Durchschnitt s der Schwerpunkt der homogenen, dreieckigen Platte. Von ihm beweist die Geometrie, daß er im ersten Drittel einer Schwerlinie von der ihr zugehörigen Dreiecksseite an gerechnet liegt (LA 71).

LA 71.

Pyramide. Man denkt sich die dreiseitige Pyramide $ABCD$ (Fig. 104) aus dreieckigen Platten parallel zur Grundfläche ABC gelegt. Da der Schwerpunkt jeder solchen Platte nach dem vorigen Satze bestimmt ist, so ist der geometrische Ort der Schwerpunkte dieser Platten die Verbindungslinie Ds_1 der Ecke D mit dem Schwerpunkte s_1 der gegenüberliegenden Fläche. Ebenso As_2 . Der Schnitt S dieser zwei Schwerlinien ist der Schwerpunkt der homogenen, dreiseitigen Pyramide. Von ihm beweist die Geometrie, daß er im ersten Viertel einer Schwerlinie von der ihr zugehörigen Pyramidenfläche an gerechnet liegt (LA 71).

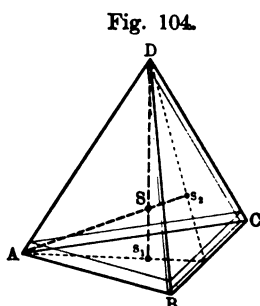


Fig. 104.

LA 71.

Über die Zurückführung der Bestimmung der Schwerpunkte von Vielecken und mehrseitigen Pyramiden auf die vorigen beiden Aufgaben, LA 72. — Allgemeine Schwerpunktsbestimmung math. Anh. Nr. 9; einige Anwendungen LA 72.

Allgemeine Schwerpunktsbestimmung LA 72.
Anh. 9.
LA 72.

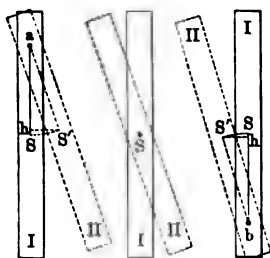
Gleichgewichtszustände schwerer, fester Körper. — Stabilität. — Da die Resultierende der an allen Teilchen eines Körpers angreifenden Schwerkraft dem ganzen System eine Bewegung vertikal abwärts zu erteilen strebt, so läßt sich der Schwerpunkt gegenüber der Körper nur ins Gleichgewicht bringen entweder durch Aufhängen an befestigten Körpern oder Unterstützen durch solche, wobei in diesen Befestigungsmitteln ein nach oben gerichteter Gegenzug oder -druck geweckt wird, der die durch den Schwerpunkt gehende Resultierende aufhebt. Überdies dürfen diese und die Gegenkraft auch kein Kräftepaar liefern.

Soweit letztere Bedingung nicht erfüllt ist, pendelt der schwere Körper (§ 33) oder er fällt um.

Ein homogener gerader Kreiskegel, welcher auf der Grundfläche, der Mantelfläche oder der (etwas abgestumpften) Spitze steht, gibt ein Beispiel dafür, daß innerhalb des Begriffs „Gleichgewicht eines schweren Körpers“ noch dreierlei Gleichgewichtszustände zu unterscheiden sind, das sogenannte **stabile, indifferente und labile** Gleichgewicht des Körpers [genauer: an dem Körper halten sich die Schwere und die ihr entgegenwirkende Kraft (Kohäsion der Aufhänge- und Unterstützungsvorrichtungen) stabiles, indifferentes, labiles Gleichgewicht; oder schon wieder etwas minder genau: der Körper befindet sich der Schwere und den Gegenkräften gegenüber in dem einen oder anderen Gleichgewicht]. — Ein homogenes dreiaxsiges Ellipsoid bietet ein Beispiel, daß streng genommen von je einer Art Gleichgewicht immer nur in Bezug auf je eine bestimmte Verschiebung aus dieser Gleichgewichtslage die Rede sein kann. Denn denken wir uns auf einer wagrechten Ebene das Ellipsoid mit dem Endpunkt seiner längsten Achse so aufgestellt, daß diese vertikal steht, so fällt das Ellipsoid bei jeder geringsten wie immer gerichteten Verschiebung um: das Gleichgewicht

ist hier durchaus labil; ebenso für den Endpunkt der kürzesten Achse aus stabil. Steht aber das Ellipsoid auf dem Endpunkt der mittleren gerichteten Achse und wird ihm eine Verschiebung so erteilt, daß sich die Achse in einer vertikalen Ebene bewegt, so sinkt es, sich selbst überlassen, in die frühere Lage zurück; es ist also dort für diese besondere Verschiebung stabil; wurde dagegen die kürzeste Achse ebenso bewegt, so fällt es um; für diese andere Verschiebung labil. — Allgemein definieren wir also:

Fig. 105.



Ein schwerer Körper ist in einer Lage I im stabilen, indifferenten, labilen Gleichgewicht für eine bestimmte Verschiebung in eine Lage II, je nachdem er, der Wirkung der Schwerkraft überlassen, aus II in I zurückkehrt, in II bleibt oder eine neue Lage III annimmt (Fig. 105).

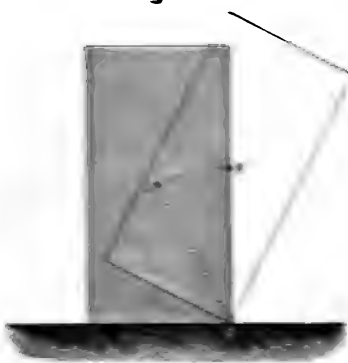
In diesen Definitionen ist noch nichts über die Ursache des derartig verschiedenen Verhaltens gesagt. Beachten wir aber die Lageänderung des Schwerpunktes, welche mit der Verschiebung von der Gleichgewichtslage die Lage II (die im allgemeinen überhaupt keine Lage des Gleichgewichts wird) verbunden sind, so ist sowohl bei aufgehängten wie bei unterstützten Körpern ersichtlich, daß die Verschiebung aus der stabilen Lage mit einer Hebung, aus der labilen mit einer Senkung, aus der indifferenten weder mit einer Hebung noch Senkung des Schwerpunktes verbunden war. Der Körper wird sich unter dem Einfluß der Schwerkraft aus der Lage II immer so bewegen, daß der Schwerpunkt möglichst tief zu liegen kommt. Er kann also zwar zur Lage I zurückkehren, aber nicht zur Lage III zurücksteigen; von der indifferenten Lage aus ist kein Grund zur Bewegung nach I oder III vorhanden. — Hiermit ist nun nur eine vereinfachte Beschreibung des Verhaltens der Körper bei Verschiebungen gegeben. Da aber der Schwerpunkt auch schon als Angriffspunkt der Resultierenden sämtlicher Schwerkraften definiert ist, so stellen diese Resultierenden einleitenden Kräfte auch die Ursachen des Überganges aus der Lage II in I oder III dar; nämlich: die an den einzelnen Teilchen eines Körpers greifenden Kräfte erteilen ihm so lange fortschreitende und drehende Bewegungen, bis sich der Angriffspunkt der Resultierenden dieser Einzelkräfte als möglich der Erde genähert hat.

Statt durch die Kräfte kann man die an dem schweren Körper zu erwartenden Verschiebungen auch durch die Arbeiten beschreiben und erklären, indem der Schwerpunkt immer so lange zu sinken sucht, bis die an dem ganzen Körper greifenden Schwerkraften oder aber deren Resultierende die größtmögliche geleistet haben, welche mit der Aufhängung oder Unterstützung des Körpers (für eine bestimmte Art von Verschiebungen) eben noch verträglich ist.

Daß speziell auch von stabilen Lagen nur im Hinblick auf je eine bestimmte Verschiebung die Rede sein kann, geht auch daraus hervor, daß es für jeden stabil ruhenden Körper, z. B. einen auf der breitesten Fläche des Ziegelsteins, doch eine hinreichend große Verschiebung gibt, von der der Körper nicht mehr unmittelbar in jene Lage zurückkehrt; man kann ja den Körper um die mittlere oder kürzeste Kante so weit drehen, daß er auf die mittlere oder schmalste Seite zu stehen kommt. Es gibt daher für jede stabile Lage be-

Masse der Stabilität: Ein auf waagrechter Ebene stehendes inhomogenes rechtwinkliges Parallelepiped (Fig. 106, ein mehr oder minder hoch beladener Wagen mit mehr oder minder großer Spurweite . . .) ist in nicht zu große Verschiebungen stabil, so dafi dabei diejenige gröfste Drehung um eine Kante, bei welcher der Schwerpunkt des Körpers vertikal über diese Kante zu liegen kommt, nicht überschritten werden, ohne dafi der Körper umfällt. Der kleinste Winkel sas' = Umwertungswinkel, Kippwinkel, einer solchen Drehung, bei der das Umfallen stattfindet, bildet das geometrische Maß der Stabilität des Körpers.

Fig. 106.



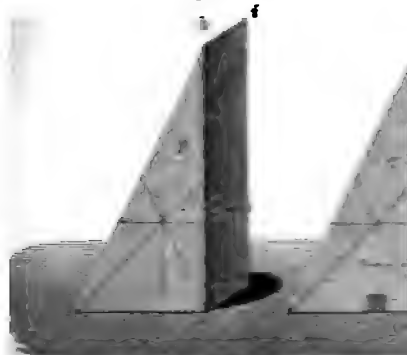
Sind z. B. die Kanten des Parallelepipeds B und H , so gilt für den Umwertungswinkel $sas' = \alpha$ die Beziehung: $\tan \alpha = \frac{E}{H}$; warum? Wäre das Parallelepiped nicht homogen, so wäre dieser Winkel desto kleiner, bzw. größer, je höher, bzw. tiefer sein Schwerpunkt liegt. Daher werden z. B. Wagen so beladen, dafi die dichten Massen möglichst tief zu liegen kommen.

Ein anderes, dynamisches Maß für die Stabilität eines Körpers ist die Größe der Kraft, die in irgend einem gegebenen Punkte des Körpers nach einer gegebenen Richtung wirken muß, um das Umwerfen des Körpers zu bewirken

Fig. 107.

Fig. 108.

Fig. 109.



(Fig. 107, 108, 109 und LA 73); endlich ein drittes, energetisches Maß ist die Größe der Arbeit, welche gegen die Schwerkraft zu leisten ist, um die oben angegebene Drehung zu bewirken (LA 74). — Zur Energie „aufgestürmter“ Massen. LA 75. LA 76.

Wiewohl der Name Schwerpunkt zunächst im Hinblick auf die eingangs angeführten alltäglichen Erfahrungen an schweren Körpern entstanden ist und dann oben ebenfalls nur auf Grund der Sätze über die Resultierende von Schwerkraften definiert wurde, so bleibt jener Punkt doch auch dann von Bedeutung.

wenn sich der Körper an einem Orte befindet, wo er der Wirkung der Schwerkraft entzogen ist, und wenn wir nur die Art der Verteilung der Masse des Körpers rings um jenen Punkt in Betracht ziehen. So bezeichnen wir angesichts des Vorversuches 3, S. 47, denjenigen Punkt als „Massenmittelpunkt“ der beiden Wägelchen, welcher deren jeweiligen Abstand im Verhältnisse 3:1 teilt; desgleichen ist der Punkt, welcher den Abstand zwischen Sonne und Jupiter im Verhältnisse 1:1048 teilt (§ 21), der Massenmittelpunkt des Systems Sonne Jupiter. Allgemein definieren wir:

Unter dem **Massenmittelpunkt** zweier (starr verbunden oder gegeneinander beweglicher) Massenpunkte von m_1 Gramm und m_2 Gramm verstehen wir denjenigen Punkt $S_{1,2}$, der die Verbindungsstrecke der Punkte im verkehrten Verhältnisse der Massen teilt. — Zu drei Massen m_1, m_2, m_3 erhalten wir den Massenmittelpunkt, indem wir uns in $S_{1,2}$ eine Masse $m_1 + m_2$ denken und für diese zusammen mit m_3 den Massenmittelpunkt $S_{1,2,3}$ wieder nach der Definition für den Massenmittelpunkt zweier Massen suchen (Fig. 101 S. 122). — Ähnlich für 4, 5 ... n Punkte.

Beweis, daß für die Lage von $S_{1,2,3}$ die Reihenfolge der Zusammenfassung gleichgültig ist, d. h. $S_{(1,2),3} = S_{(1,3),2} = S_{(2,3),1} = S_{1,2,3}$, und daß jedes Massensystem einen und nur einen Massenmittelpunkt hat (analog obigem Satz über den einen Schwerpunkt), vergl. LA 70. — Wiewohl der Begriff „Massenmittelpunkt“ allgemeiner ist als „Schwerpunkt“, so wird letztere Bezeichnung bloß der Kürze wegen oft auch dort benutzt, wo es sich nicht speziell um Schwerkraft handelt; z. B. beim „Schwerpunkt des ganzen Planetensystems“, bestehend aus Sonne, Planeten, Trabanten u. s. w. — Speziell für starre Systeme liegt die physikalische Wichtigkeit des eben definierten Punktes vor allem in folgendem Satz:

Eine Kraft erteilt einem starren Systeme dann und nur dann eine rein fortschreitende Bewegung, wenn die Angriffslinie der Kraft durch den Massenmittelpunkt des Systems geht.

Beweis: Nehmen wir zuerst an, daß an den einzelnen Massenpunkten parallele Kräfte $k_1, k_2 \dots k_n$ angreifen, welche den Massen $m_1, m_2 \dots m_n$ proportional sind. Dann erhalten alle Punkte die gleiche Beschleunigung

$$b = \frac{k_1}{m_1} = \frac{k_2}{m_2} = \dots = \frac{k_n}{m_n},$$

und infolge dieser gleichen Beschleunigung legen auch alle in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück. Wenn wir sodann zuerst k_1 und k_2 zusammensetzen zur Resultierenden $(k_1 + k_2)$, so greift die in dem oben definierten Massenmittelpunkte von m_1 und m_2 an; und ähnlich, wenn wir dann zu dieser Resultierenden wieder die dritte Kraft hinzunehmen u. s. — Ist also umgekehrt von Anfang an nur eine im Massenmittelpunkte sämtlicher Massen angreifende Kraft K gegeben, so läßt sie sich ebenso wieder zerlegen in lauter Kräfte, welche ihrer Größe und der Lage ihrer Angriffslinie nach an die einzelnen Massen so verteilt werden, daß jede eine gleiche Beschleunigung und daß somit das ganze System eine rein fortschreitende Bewegung bekommt.

Hiernach ergibt sich für die zu Ende des § 26 aufgestellte allgemeine Aufgabe, welche zu Ende des § 27 wegen der Willkürlichkeit des Punktes gegen welchen hin die Kräfte verlegt worden sind, noch nicht bestimmt gelöst worden ist, die folgende einfache endgültige Lösung:

reifen an einem starren System von beliebiger Form und Massenverteilung beliebig viele Kräfte beliebiger Stärken und Angriffslinien an, und verwirklichen sämtliche Kräfte durch Parallelverschiebung so, daß alle Angriffslinien durch den Massenmittelpunkt gehen, so bewirkt die Resultierende der verlegten Kräfte eine reine **Translation** des Systems; dagegen das aus der Zusammensetzung von Kräftepaaren, die bei jener Parallelverschiebung erhalten waren, sich ergebende Kräftepaar bewirkt eine reine **Rotation** des Systems um den Massenmittelpunkt.

Daraus folgt u. a., daß, wenn beliebige Kräfte einem System **keine Translation** erteilen sollen, die Resultierende der in den Massenmittelpunkt verlegten Kräfte gleich Null sein muß. — Ein analoger Satz gilt, daß das freie System **keine Rotation** erhalten soll.

Und die auf die Massenteilchen eines Körpers wirkenden Kräfte speziell **Schwerkkräfte**, so ist zu bedingung, daß sie alle den Massen proportional sind, von selbst erfüllt, indem alle Teile des ganzen Körpers die nämliche Beschleunigung $b = g$ bekommen und daher im freien Falle (auch bei Wurfbewegungen) nur fortwährende, nicht drehende Bewegung annehmen.

Wird z. B. ein am einen Ende „leichter“, am anderen Ende „schwerer“ Körper (z. B. ein Federhalter aus leichtem Metall mit schwerer Kapsel), welcher aus schiefer Lage losgelassen wird, bei Abwesenheit aller Hindernisse sich während des Falles nicht mit dem schweren Ende abwärts wie mancher erwarten mag. Ebenso bewegt sich ein Geschloß rein translatorisch nach Fig. 110, nicht nach Fig. 111, welche Bewegung schon eine Drehung einschließt. — Alles dieses gilt aber nur für den luftleeren Raum; in der Luft richten sich z. B. Federbälle mit dem schweren Ende nach unten; wozu werden Pfeile befiedert? Bei der Abweichung der Achse des Geschosses von der Tangente der Flugbahn durch den Luftwiderstand (und überdies nach den verwickelten Gesetzen der Selbstbewegung, § 34) sogar noch vergrößert.

Nach dem Gegenwirkungsprinzip je zwei in Wechselwirkung stehende Massen einander Beschleunigungen erteilen, die diesen Massen verkehrt proportional sind, so wird, wenn die Massen und daher auch ihr Massenmittelpunkt im Anfange des Beginns der Wirkung in Ruhe gewesen waren, der Massenmittelpunkt auch in Ruhe bleiben, falls sich



Fig. 110.



Fig. 111.

die Massen während ihrer Wechselwirkung mit Beschleunigung von ihm weg oder zu ihm hin bewegen; so bei Vorversuch 3, S. 47. Hat ferner das System der beiden Massen eine Bewegung gemäß der Trägheit gehabt, so setzt auch während der Wechselwirkung der Massenmittelpunkt diese gleichförmige Bewegung fort. Das gilt auch für beliebig mehr als zwei Massen. Und Ähnliches gilt auch noch, wenn während der Wechselwirkung der Teile des Systems auf das System als Ganzes noch äußere Kräfte wirken. Wenn z. B. das Geschloß in Fig. 110 während des Fluges explodiert, so daß seine Splitter die mannigfaltigsten neuen Wurflinien beschreiben, so setzt nichtsdestoweniger der Massenmittelpunkt des ganzen Systems diejenige Wurfparabel fort, in welcher er sich vor der Explosion bewegt hatte. Ebenso können wir von dem Massenmittelpunkte unseres Sonnensystems behaupten, daß, falls die Kräfte, mit welchen die Gesamtheit der übrigen Weltkörper auf die Gesamtheit der Körper unseres Sonnensystems wirkt, eine Resultierende gleich Null haben sollten, der Massenmittelpunkt des Sonnensystems sich nur geradlinig gleichförmig durch den Weltraum fortbewegen könne; falls dagegen die Resultierende jener Kräfte nicht Null ist, wird der Massenmittelpunkt unser Sonnensystems sich um den Massenmittelpunkt sämtlicher Weltkörper nach den Keplerschen Gesetzen bewegen müssen. — Ebenso in alltäglichen Erfahrungen: Wir können uns nicht „aus freier Hand“ samt dem Stuhle in die Höhe heben; wohl aber, wenn vom Stuhle aus ein Seil über eine Rolle läuft und wir entsprechend ziehen. Warum? — Das Gemeinschaftliche aller dieser Erscheinungen ist allgemein ausgesprochen im sogen. Prinzip der Erhaltung des Massenmittelpunktes; dieses ist aber nicht ein „Prinzip“ in dem eigentlichen Sinne wie die drei *leges motus* (§ 15, I, II, III), denn es läßt sich, wie die obigen einfachsten Beispiele gezeigt haben, aus der *lex III* (dem Gegenwirkungsprinzip) zusammen mit der Grundgleichung der Dynamik $f = mw$ (§ 16) streng ableiten.

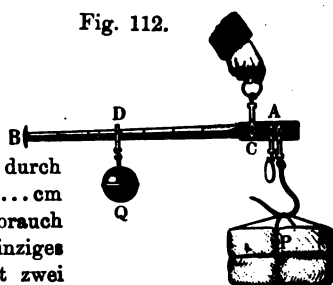
§ 29. Kraftmoment (Drehmoment, statisches Moment). — Hebel. Hebelwagen.

1. Ein Turner, der massive Hanteln mit wagrecht ausgestrecktem Arme stemmt, ermüdet bekanntlich viel eher, als wenn er dieselbe Last mit annähernd vertikal auf- oder abwärts gestrecktem Arme hält. — 2. Wer einen massiven Torflügel öffnen oder schließen will, läßt seine Kraft nicht nahe, sondern möglichst weit von der Verbindungslinie der Angeln auf die zu bewegende Masse wirken. — 3. Wer mittels eines Hebebaumes eine Last zu heben versucht, bringt, auch ohne daß er das aus der Physik gelernt zu haben braucht, den Unterstützungspunkt möglichst nahe dem Angriffspunkte der Last an und läßt seine Kraft an einem möglichst langen „Hebelarme“ wirken. — 4. Ähnlich faßt, wer eine Stange Holz übers Knie brechen will, diese möglichst weit an den Enden an und läßt den Druck des Knies gegen die Mitte wirken.

In allen diesen Beispielen ist dafür, „wieviel eine Kraft ausgibt“, nicht nur ihre eigene Größe, sondern auch eine bestimmte Strecke maßgebend; nämlich in Beispiel 3 und 4 die Länge des „Hebelarmes“, in Beispiel 2 der senkrechte Abstand der Angriffslinie der Kraft von der Drehungsachse, die durch die Türangeln dargestellt ist, in 1 der senkrechte Abstand der durch die Hanteln gehenden Angriffslinie der Schwerkraft von dem Armgelenk des Turners. Diese und viele ähnliche Erfahrungen gaben Veranlassung, den Begriff „Moment“ (*momentum = movimentum*) einer Kraft einzuführen, und durch diese die

hende Wirkung“, bzw. das „Drehbestreben“ einer Kraft zu messen, es um so größer wird, je größer die Kraft und je größer jene Strecke, der **Arm**“, ist. — Nach welchem arithmetischen Maße beide Größen in Betracht kommen, schon praktisch angewendet in Einrichtung Gebrauch der römischen Schnellwage

Fig. 112.



112): Dem abwärts gerichteten Zuge der elasteten oder irgendwie belasteten) Wägle läßt sich ebenso das Gleichgewicht halten durch in 12 cm, wie durch 2, 3, 4, 6 ... kg in 6, 4, 3, 2 ... cm and von der Achse des Wägebalkens. (Beim Gebrauch Schnellwage wird deshalb meistens nur ein einziges aufgewicht“ angewendet; wohl aber sind oft zwei wachsen und ihnen entsprechend besondere Skalen größere und kleinere Lasten angebracht. Auch gestalten sich durch Rücksicht die Lage des Schwerpunktes des Wägebalkens die Verhältnisse in der Regel verwickelter, doch sind immer die den gleichen Gewichtszunahmenprechenden Skalenteile äquidistant.) — Nicht nur durch die vorausgehenden Lehren, sondern auch durch alle folgenden Sätze wird sich die Zweckmäßigkeit folgender Definitionen bestätigen:

Den Abstand der Angriffslinie einer Kraft von einer Geraden (einem Punkte, einer Ebene) nennt man den **Arm der Kraft** in Bezug auf diese Gerade (Punkt, Ebene).

Die **Einheit des Kraftmomentes** (ME) ist das Moment einer Kraft von 1 Dyn mit dem Arme von 1 cm (Dyn, cm = cm²sec⁻²g).

Eine Kraft von k Dyn und einem Arme von a cm hat ein **Kraftmoment (Drehmoment, statisches Moment)** $\mathfrak{K} = ka$ ME.

In Bezug auf dieselbe Gerade (Punkt, Ebene) haben mehrere Kräfte das zusammengesetzte (resultierende) Moment

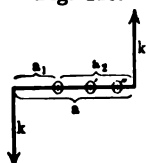
$$\mathfrak{K} = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = \Sigma ka.$$

Spezieller als die Bezeichnung „Kraftmoment“ ist **Drehmoment**; sie rührt von her, daß, wenn die Gerade oder der Punkt, in Bezug auf welche das Moment einer Kraft genommen ist, als fix gedacht ist, die Kraft nur mehr eine Drehung um diese Gerade (Punkt) hervorrufen kann. — Die Bezeichnung **statisches Moment** rührt davon her, daß, wenn (mindestens) zwei Kräfte gleichzeitig an dem starren Systeme mit fixer Achse (Punkt) angreifen, so daß ihm Drehungen im entgegengesetzten Sinne nicht mehr wirklich eilen, sondern nur zu erteilen „streben“, ihre Momente in Bezug auf die Achse (Punkt) einander gleich sind; es hängt also nicht nur die drehende Bewegung, sondern auch das Gleichgewicht (der statische Zustand einer Anordnung innerhalb des Systems infolge jener entgegengesetzten drehenden Kräfte) von solchen Produkten aus Kraft und Kraftarm ab. — Dieses Entgegenwirken dieser Drehmomente legt folgende Definitionen nahe:

Bezeichnen wir die Momente von Kräften, welche dem Systeme eine Drehung im bestimmten Sinne (z. B. dem des Uhrzeigers) zu teilen streben, als positiv, so sind diejenigen Momente, welchen eine entgegengesetzte Drehung entspricht, als negativ zu rechnen.

Ein Rückblick auf die Sätze über die Wirkungen der Kräfte an Systemen, insbesondere deren Zusammensetzung und Gleichgewicht, läßt erkennen, daß sich durch Benutzung des Begriffes Kraftmoment viele der Sätze sehr einfach und einheitlich aussprechen lassen; eben hierdurch erweist sich die wissenschaftliche Zweckmäßigkeit dieses Begriffes „Produkt aus Kraft und Krattarm“ (Anh. 37. somit dieser Begriff als ein „natürlich“ gebildeter, Anhang Nr. 37):

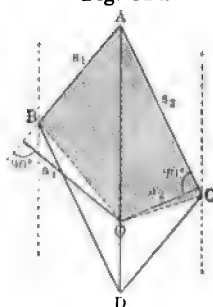
Fig. 113.



1. Schon der Begriff **Moment eines Kräftepaares** bildet einen besonderen Fall des Begriffes „zusammengesetztes (resultierendes) Moment zweier Kräfte“. Denken wir nämlich senkrecht zur Ebene des Paares (k , a) zunächst Punkte O (Fig. 113) eine Drehungsachse, so ist in Bezug auf diese Achse die Summe der Momente $ka_1 + ka_2 = k(a_1 + a_2)$. Ebenso für eine Achse senkrecht zur Ebene des Paares oder O'' (oder auch in jedem beliebigen anderen Punkt).

Ähnlich der Beweis, daß zwei Kräftepaare von gleichem Momente und der Ebene (vergl. S. 119) in Bezug auf jede solche Gerade gleichwertig sind.

Fig. 114.



LA 76.

2. Der Satz vom **Kräfteparallelogramm** läßt sich (nach VARIGNON) so aussprechen, daß in **jeden Punkt der Diagonale des Kräfteparallelogramms die Momente der Komponenten einander gleich sind**. — Beweis mit Hilfe des planimetrischen Satzes, daß in jedem Parallelogramm (Fig. 114) $s_1a_1 = s_2a_2$ (denn $\triangle ABO = \triangle CDO$ als über der gemeinsamen Grundlinie AO errichtet, da die Spitzen B, C von der Diagonale AD gleichen Abstand haben). — Allgemeiner

In dieser Form nehmen ferner die Sätze der Fälle I und II dieselbe Form an wie die Sätze III und IV; denn es werden auch

3. für gleichsinnig parallele Kräfte **in jedem Punkt der Angriffslinie der Resultierenden die Momente der Komponenten einander gleich**. — Beweis: In § 2

sich für die Abstände der Angriffslinien der Resultierenden von den Angriffslinien der parallelen Kräfte in III die Beziehung $k_1:k_2 = a_2:a_1$ ergeben. dieser Proportion schreiben wir einfacher $k_1a_1 = k_2a_2$. — Ebenso ist auch für dortigen Satz IV, nämlich

4. für ungleichsinnig parallele Kräfte $k_1a_1 = k_2a_2$.

5. Denken wir uns in den Fällen 2, 3, 4 jedesmal durch irgend einen der Angriffslinie der Resultierenden senkrecht zur Ebene der beiden gleich parallelen oder ungleichen antiparallelen Kräfte eine **fixe Achse** durch das System gesteckt, so ergibt sich als einheitliche Gleichgewichtsbedingung für alle drei Fälle, daß **in Bezug auf diese Achse die Momente einander gleich sein müssen**; $k_1a_1 = k_2a_2$ oder $k_1a_1 - k_2a_2 = 0$. — Führen wir das Moment ($-k_2a_2$) als eine dem Moment ($+k_1a_1$) entgegengesetzte Größe können wir ohne Änderung der Bedeutung schreiben: $k_1a_1 + k_2a_2 = 0$, d. **algebraische Summe der Momente in Bezug auf die Achse muß Null sein**.

Durch Anwendung der bisherigen Sätze über die Momente je zweier Kräfte nehmen endlich auch die Sätze über die Resultierende von mehr als zwei Kräften und speziell für deren Gleichgewicht folgende einheitliche Form an:

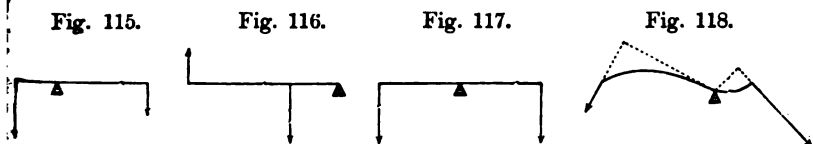
Wirken an einem starren Systeme, das um eine fixe Achse

nehmbar ist, beliebig viele Kräfte $k_1, k_2 \dots k_n$ mit den Armen $a_1, a_2 \dots a_n$ in Bezug auf jene Achse, so bewirken sie im allgemeinen die Drehung um jene Achse, wie wenn nur eine Kraft K mit dem Arme a wirkte, wo $Ka = \mathcal{R} = k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n$.

Ist speziell $Ka = 0$, so halten sich die Kräfte $k_1, k_2 \dots k_n$ in Bezug auf jene Achse das Gleichgewicht. — (Allgemeiner Beweis LA 77). LA 77.

Für alle diese mehr oder minder allgemeinen Sätze über Kraftmomente bildet den typischen Anwendungsfall der

Hebel. Diese Bezeichnung wurde ursprünglich speziell angewendet auf „Hebebäume“, d. i. möglichst feste Stangen, welche um einen Stützpunkt (Stein, Holzseil etc.) drehbar sind. An dem einen Ende der Stange greift als „Last“ das Gewicht eines schweren Körpers an, an dem anderen Ende als „Kraft“ die gleichfalls nach unten wirkende Muskelkraft eines Arbeiters oder dergl. — **Zweiflügeliger, einseitiger Hebel; gleicharmiger, ungleicharmiger Hebel; parallele, nicht parallele Kräfte am Hebel (Winkelhebel);** Beschreibung und Definitionen nach Figg. 115 — 118 (— über die Fiktion



„mathematischer Hebel“ LA 81). — Beträgt die Kraft P Dyn, die Last Q Dyn und sind Kraftarm, bzw. Lastarm p cm und q cm, so ist ihr Verhältnis: $P:Q = q:p$ oder $Pp = Qq$ (in Worten?). — Beispiele von Hebeln, an denen mehr als zwei Kräfte wirken, bieten die ungleich belastete gleicharmige Wage (Fig. 119), die Dezimalwage (Fig. 126).

Geschichtliches. Die Untersuchung des Gleichgewichtes für den Hebel bildet die älteste uns bekannte Leistung der theoretischen Mechanik. ARCHIMEDES (287—212 v. Chr.) stellt an der Spitze seiner Schrift „*De aequiponderantibus*“ die Sätze auf: „a) Gleichschwere Größen, in gleicher Entfernung wirkend, sind im Gleichgewichte. b) Gleichschwere Größen, in ungleicher Entfernung wirkend, sind nicht im Gleichgewicht, sondern die in größerer Entfernung wirkende sinkt.“ In diesen beiden Sätzen leitet er den weiteren durch eine geometrische Betrachtung ab: „c) Kommensurable Größen sind im Gleichgewichte, wenn sie ihrer Entfernung umgekehrt proportioniert sind.“ — Unverkennbar sind unter den „gleichen Größen“ die Gewichte, unter den „gleichen Entfernungen“ Abstände vom Unterstützungspunkte des Hebels gemeint. Hiernach ist der dritte angeführte Satz das Hebelgesetz für zwei gleichsinnig parallele Kräfte, also für den zweiflügeligen, geraden Hebel. Den ersten Satz scheint ARCHIMEDES für eine Art Prinzip der Statik, d. h. für unmittelbar einleuchtend gehalten zu haben (log. Anhang, Nr. 37), aus welchem sich dann das allgemeinere Hebelgesetz theoretisch ableiten lasse. Doch war längst vor dieser theoretischen Behandlung das Gesetz selbst schon direkt empirisch aus gelegentlichen Beobachtungen und wohl auch aus Versuchen (z. B.

dem ARISTOTELES) bekannt, für welche die uralten praktischen Anwendungen des Hebebaumes vorbildlich sein konnten.

Später hat man den Begriff des Hebels verallgemeinert und zwar zunächst auch für zwei antiparallele Kräfte (einseitiger Hebel, häufig unpassend „*einarmiger*“ Hebel genannt), endlich für beliebig viele Kräfte, die irgend ein starres System um eine Achse zu drehen streben. Dann ist also die Lösung der obigen allgemeinen Aufgabe über Drehmomente an starren Systemen auch die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für den Hebel; nämlich: $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n = 0$ oder $\sum k a = 0$ oder $R = 0$. —

Wo übrigens der Hebel und ähnliche Vorrichtungen (Wellrad, Rollen ...) praktisch verwendet werden, ist es selten ihr Gleichgewicht, sondern meistens die mittels ihrer zu verrichtende Arbeit, für welche wir uns interessieren. Wir werden daher diese Vorrichtungen als „*Maschinen*“ zusammen mit anderen in folgenden Paragraphen unter diesem Gesichtspunkte behandeln. — Wirklich von den Gleichgewichtsbedingungen machen wir Gebrauch an den

Hebelwagen. Die wichtigsten Formen solcher sind die *gleicharmige Wage* (Krämerwage, chemische Wage), die *Schnellwage*, die *Neigungswage* („*Zeigerwage*“), die *Tafelwage*, die *Brückenwage*.

Versuche mit der gleicharmigen Wage: Wir legen auf die Schalen der Wage je eine von zwei Massen, die gemäß ihrer Bezeichnung, z. B. als je 20 g, einander gleich sein sollen. Wenn wir uns aber auf diese Gleichheit nicht von vornherein verlassen wollen (da sie ja selbst wieder mittels einer Wage gefunden wurde, über deren Richtigkeit und Empfindlichkeit wir im allgemeinen nichts wissen — wie auch allgemein im § 16, S. 53 die Begriffe von 1 Gramm und von m Gramm erst unter Berufung auf „eine gute Wage“ definiert wurden), so vertauschen wir zunächst die Massen. Nimmt die Wage genau dieselbe Stellung an wie früher, so werden wir die Massen für wirklich gleich erklären können, sowie die „*Empfindlichkeit*“ der Wage dies erkennen läßt. — Mittels zweier solcher Massen können wir nun auch die „*Richtigkeit*“ jeder anderen Wage prüfen, indem wir die Massen vertauschen. (BORDA's Doppelwägung, LA 78.) Der Wagbalken muß aber seine Stellung auch beibehalten, wenn wir zunächst die Massen, dann auch die Wagschalen wegnehmen; warum? (Ausdehnung durch die Wärme. — Magnetfreier Stoff des Wagbalkens.)

Bisher war nur überhaupt die immer gleiche Stellung des Wagbalkens verlangt. Wir wünschen aber (warum?), daß der Balken einer unbelasteten oder gleichbelasteten Wage wagrecht, die Zunge lotrecht steht. Die Erscheinung nun, daß ein solcher unbelasteter oder gleichbelasteter Wagbalken sich „*von selbst*“ wagrecht stellt (daher ja auch das Wort „*wagrecht*“ überhaupt), kommt aber nicht etwa dem symmetrischen Hebel als solchem „*von Natur*“ zu; vielmehr befindet sich ein im Schwerpunkt unterstützter Hebel bei jeder beliebigen Stellung im Gleichgewicht, nämlich im indifferenten (Fig. 82, S. 113). — Eine solche Hebelstange stellt zugleich auch das Modell eines „*mathematischen Hebels*“ dar, bei dem vom Eigengewicht abgesehen wird; LA 81.

Jeder Wagbalken ist dagegen ein „*physischer Hebel*“, bei welchem eine wagrechte Drehachse *lotrecht oberhalb des Schwerpunktes* des ganzen Wagbalkens bei dessen wagrechter Stellung angebracht ist. Für jede ungleiche Belastung einer solchen Wage hängt die Einstellung des Wagbalkens auch von dessen Gewicht ab, wie dies erhellt aus der folgenden einfachsten

Aufgabe: Ein Wagbalken vom absoluten Gewicht Q g sei in b cm

stand oberhalb seines Schwerpunktes an einer Schneide stabil aufhängt. In je a cm Abstand von dieser Schneide und in gleicher Höhe mit ihr sind die beiden Wagschalen aufgehängt. Das Gewicht einer Schale samt Belastung (zuerst beiderseits gleich) betrage P g. In welchen Ausschlagswinkel α wird der Wagbalken durch ein Übergewicht von p g abgelenkt?

Aus Fig. 119 ergibt sich folgende Gleichung zwischen den statischen Momenten der Kräfte P , p , Q in Bezug auf die die Drehungsachse darstellende Schneide der Wage:

$$(P + p) \cdot a \cos \alpha = P \cdot a \cos \alpha + Q \cdot b \sin \alpha,$$

$$\text{woraus } \tan \alpha = \frac{pa}{Qb} \dots (1)$$

$$\text{oder für kleine } \alpha \dots \alpha \approx \frac{a}{Qb} \cdot p \dots (2)$$

Diese Gleichungen enthalten, wenn man der Reibung der Achse an der Unterlage abgesehen wird, auch die Bedingungen für die Empfindlichkeit der gleicharmigen Wage [— für ein gewisses sehr kleines $p_0 > 0$ gibt allerdings die Wage gar keinen Ausschlag, somit $\alpha = 0$, was den Gl. (1) und (2) nicht mehr entspricht, indem bei ihrer Aufstellung von der Reibung abgesehen wurde. — Die „begrenzte „Empfindlichkeit“ einer Wage, eines Thermometers (und jedes anderen physikalischen Meßinstrumentes) ist so genannt nach Analogie zur begrenzten „Empfindlichkeit“ unserer Empfindungsorgane; psychol. Anhang Nr. 40].

Anh. 40.

Die Empfindlichkeit einer Wage ist dadurch definiert, daß sie um so größer sei, ein je größerer Ausschlagswinkel α einem gegebenen kleinen Übergewicht p entspricht. Die Bedingungen hierfür sind nach Gl. (2) oder (1) die folgenden: Bei gegebenem p ist die Empfindlichkeit um so größer, je länger die Wagarme a sind, je kleiner das Gewicht des Wagbalkens Q und je kleiner sein Abstand b von der Schneide ist.

Wäre $b = 0$, so würde $\alpha = 90^\circ$ für jedes beliebige $p > 0$; wäre auch $p = 0$, so würde $\tan \alpha = \frac{0}{0}$, also unbestimmt. Physikalische Deutung dieser Grenzfälle!

Geht die Verbindungslinie der Aufhängepunkte einer Wage nicht wie in Fig. 119 durch die Schneide, so gestaltet sich die Beziehung zwischen α und den Armen und Gewichtsgrößen der Wage verwickelter; insbesondere ist dann nicht mehr α von der jeweiligen gleichen Belastung P unabhängig (LA 79).

LA 79.

Die Empfindlichkeit feiner „chemischer Wagen“ (math. Anh. Nr. 5) geht Anh. 5. in etwa 100 000 000, d. h. bei einer beiderseitigen Belastung von z. B. je 1 kg wird noch ein Übergewicht von 0,01 mg angezeigt.

§ 30. Arbeit an starren Systemen: Maschinen.

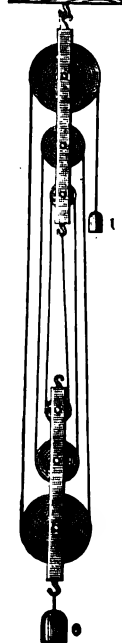
Geschichtliches. Blicken wir von den kunstvollen Erzeugnissen des gegenwärtigen Maschinenbaues, z. B. Lokomotiven, Spinnmaschinen (möglichst mannigfaltige weitere Beispiele!), zurück auf die Anfänge des Gebrauches mechanischer Vorrichtungen, wie sie auf altägyptischen und assyrischen Denkmälern abgebildet

sind und in Gräbern aus vorhistorischer Zeit gefunden werden, so zeigt sie im Anfange das praktische Bedürfnis der theoretischen Einsicht in die Wirkungsweise aller dieser Vorrichtungen weit voraus. Später wäre ohne solche Einsicht die Konstruktion möglichst ökonomisch wirkender Maschinen nicht mehr möglich gewesen; aber auch jetzt noch empfängt die Theorie wieder neue Anregungen gerade durch die Praxis (das glänzendste Beispiel wärtig das Verhältnis von Elektrotechnik und Elektrizitätstheorie).

Wie im vorigen Paragraphen an Archimedes' Theorie des Hebels wurde, setzten die ältesten rein theoretischen Untersuchungen mechanische Erscheinungen mit dem Gleichgewicht an Maschinen ein. Auch der Fadenzug und andere „mechanische Potenzen“ (Maschinen) waren Archimedes praktisch und theoretisch bekannt; nach seinem Vorbild wird noch heute manche Darstellung der ganzen Mechanik mit der „Statik“ der Maschinen begonnen. Umgekehrt bieten aber die Maschinen auch eine zusammenhängende Anwendung fast aller Gesetze der theoretischen Mechanik, namentlich der modernen Energie.

Alle Gesetze der Bewegung und des Gleichgewichtes an beliebig zusammengesetzten wie an den sogen. einfachen Maschinen (als welche die Mechanik aufzuzählen pflegte: den Hebel, das Wellrad, die Rollen, die schiefe Ebene, den Kegel und die Schraube) lassen sich aus den bis dahin entwickelten Gesetzen, namentlich über die Zusammensetzung von Kräften, in starren Systemen ableiten. Naturgemäßer aber ist ihre Ableitung aus dem Gesetze der Erhaltung der Arbeit; denn der Zweck der Maschinen ist das Verrichten von mechanischer Arbeit unter zweckmäßigeren Bedingungen („Ersparnis an Kraft“, bequemere Kraftrichtungen und Angriffspunkte bei dem unvermittelten Wirken der zur Verfügung stehenden Kräfte, in welchem Sinne eine solche Ableitung möglich ist, zeige zunächst

Fig. 120.



Arbeitsleistung mittels des Flaschenzuges (siehe Beschreibung nach Fig. 120). *Versuche:* 1. Wir äquilibrieren zuerst das Gewicht der beweglichen „Flasche“ durch am freien Seilende angebrachte Tara. Einer an diesem Seilenden hängenden Last von Qfg hält eine am freien Ende des Seiles angebrachte Kraft von $P = \frac{1}{n} Qfg$ das Gleichgewicht, wo n die Anzahl aller Rollen und daher die Anzahl aller tragenden Schnurteile ist. — 2. Wird zu dem Übergewicht p gefügt, so setzt dieses zunächst die Flasche in Bewegung, da an den Rollen Seilen eine nicht unbeträchtliche Reibung herrscht. Ist aber p hinreichend groß genommen, so sinkt die Flasche in beschleunigter Bewegung und Q steigt (kleinerer) Beschleunigung; umgekehrt, wenn bei Q ein reichendes Übergewicht q angebracht wird. Wird das Übergewicht abgenommen (genauer: mit Rücksicht auf die Reibung ein passendes Übergewicht belassen), so geht die bewegliche Flasche und mit ihr die Last Q in stationäre Bewegung über (§ 15, § 23, S. 98). — Bei diesen Bewegungen ist es nun schon

ometrischen Gründen (vor der physikalischen Betrachtung) ersicht-
lich, daß zwischen dem Lastwege von sm und dem Kraftwege von
 n die Beziehung besteht: $S = ns$; denn damit Q um sm gehoben
wird, muß jedes der n tragenden Schnurstücke um sm verkürzt,
so das freie Ende des Seiles um ns herabgezogen werden.

Hätten wir die Q kg um sm aus freier Hand (oder den Haken
einer beweglichen Flasche selbst anfassend) gehoben, so hätten wir eine
mechanische Arbeit von $Q \cdot sm$ geleistet. Während wir jene Q kg
um sm mittels des Flaschenzuges heben, indem wir an dem freien
Ende des Seiles ziehen, empfinden wir nur einen Gegenzug von
 $P = \frac{1}{n} Q$ kg; und indem wir diesen Widerstand längs $S = ns$ m
herwinden, haben wir hier eine mechanische Arbeit von
 $P \cdot S = \frac{1}{n} Q \cdot ns = Q \cdot sm$ geleistet. Es kostet also gleichviel
mechanische Arbeit, eine gegebene Last eine gegebene Strecke
dadurch ohne Maschine, oder sie mit Hilfe eines Flaschen-
zuges der Schwere entgegen zu heben (oder auch anderen Kräften
entgegen zu verschieben).

Der Flaschenzug bildet also ein erstes Beispiel dafür, daß und wieso die
Bedingung der Gleichgewichtsbedingung einer Maschine zugleich darüber Auf-
schluß gibt, von welchen Bestimmungstücken die Arbeitsleistung dieser
Maschine abhängt (LA 80). — Deshalb kann umgekehrt auch aus
der Bedingung, daß an jeder Maschine die Arbeit der Kraft
gleich ist der Arbeit der Last (Gesetz der Erhaltung der
Arbeit an Maschinen, nach alter Bezeichnung: „die goldene
Regel der Mechanik“) die Gleichgewichtsbedingung für die
Maschine hergeleitet werden. — Diese Gleichwertigkeit von Gleich-
gewichtsbedingung und Arbeitsbedingung werde noch an folgenden
Beispielen im einzelnen erwiesen:

Rollen. Von den $2n$ Rollen, aus denen der Flaschen-
zug zusammengesetzt ist, heißen die der oberen Flasche
fixe Rollen, die der unteren bewegliche Rollen. Auch
eine derselben kann noch als „einfache“ Maschine
betrachtet werden. — Ist der Halbmesser einer Rolle r cm und sind
zunächst die Schnüre parallel, so lautet die Gleich-
gewichtsbedingung (Beweis durch Zurückführung auf
einen gleicharmigen, bzw. einseitigen Hebel, LA 82)
für die

Fig. 121.

LA 80.

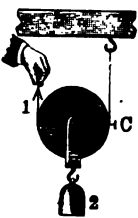


Fig. 122.

LA 82.

fixe (feste) Rolle (Fig. 121): $P = Q$ (Kraftarm = Lastarm = r),
bewegliche Rolle (Fig. 122): $P = \frac{1}{2} Q$ (Kraftarm = $2r$, Lastarm = r).

Dabei gilt die Bedingung $P = Q$ für die fixe Rolle auch dann noch, wenn
die Schnurteile nicht parallel sind (gleicharmiger Winkelhebel); für die be-
wegliche Rolle wird allgemeiner $P = \frac{Q}{2 \cos \gamma_2}$, wenn jeder der Schnurteile mit

LA 83. der Lotrechten einen Winkel γ , einschließt (LA 83). Berechnung des Verhältnisses von s und S für jeden dieser Fälle.

Anwendungen der fixen Rollen bei Aufzügen, Türen mit Selbstverschluss durch Gewichte...; vergl. auch die Apparate Figg. 36, 37, 41, 95, 109 u. s. w. Bewegliche Rollen an den Pendeluhrn, Hängelampen u. s. f.

Aus den Bedingungen für die beweglichen Rollen lassen sich dann wieder die für den **Potenzflaschenzug** (im Gegensatz zu welchem der oben behandelte

LA 84. der „gemeine“ Flaschenzug heißt) ableiten (LA 84).

LA 84. Der **Differentialflaschenzug** (LA 84) ist wegen der ungleichen Radien seiner Rollen teilweise schon dem Wellrade verwandt.

Das Wellrad (Fig. 123) besteht in seiner einfachsten Form aus einer kreisrunden Scheibe („Rad“) und einem Cylinder („Welle“, „Wellbaum“), die so aneinander befestigt sind, daß

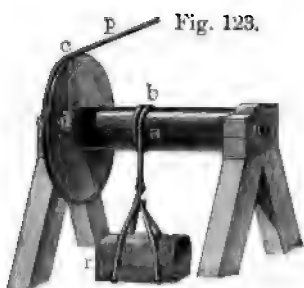


Fig. 123.

ihre Achsen in derselben Geraden liegen. Um den Umfang des Rades und um den der Welle ist je ein Seil so gelegt, daß, wenn man zuerst an dem einen und dann am anderen zieht, die Maschine in entgegengesetztem Sinne in drehende Bewegung gerät. — Eine solche tritt dann und nur dann nicht ein, wenn in Bezug auf die Drehachse die **Momente von Kraft und**

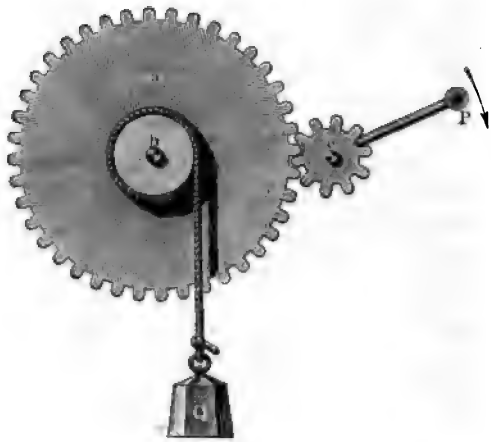
Last einander gleich sind; daher: **An dem Wellrade herrscht Gleichgewicht, wenn die am Rade angreifende Kraft zu der an der Welle angreifenden Last sich verhält wie der Radius der Welle zu dem des Rades** ($P:Q = r:R$ oder $PR = Qr$).

Wie die fixe Rolle auf den gleicharmigen, so führt das Wellrad auf den ungleicharmigen Hebel zurück. Während aber bei der Rolle die Angriffslinien von Kraft und Last in einer Ebene liegen, ist dies im allgemeinen nicht der Fall beim Wellrade. Gleichwohl kommt in der Gleichgewichtsbedingung nichts davon vor, ob das Seil b ganz an die Scheibe herangeschoben ist oder nicht. In Fig. 123 gäben Kraft und Last noch ein Kräftepaar, welches die Achse an der Scheibe zu heben, am anderen Ende der Welle herabzudrücken sucht, welche Bewegungen aber durch die Achsenlager aufgehoben werden (— wie denn auch der **Momentensatz** § 29, S. 131 nur die Festigkeit der Achse voraussetzt und übrigens beliebige Verschiebungen der Kräfte bei gleichem Kraftarm in Bezug auf jene Achse gestattet).

Eine der wichtigsten praktischen Formen des Wellrades ist die **Kurbel**, welche namentlich dazu dient, fortschreitende Bewegungen (und zwar meist solche, bei denen die einzelnen Punkte der Kolbenstange, Pleuelstange ... Sinusschwingungen ausführen) in drehende (zunächst in kreisende der Kurbelwarze) umzusetzen und umgekehrt. Dabei wird das Drehmoment der Kraft am größten, wenn sie normal zum Kurbelarm wirkt, am kleinsten, nämlich Null, in den beiden „**toten Punkten**“. Wird die Kurbel nicht durch eine starre Stange von fester Führung, sondern z. B. durch die Hand eines Arbeiters in Bewegung gesetzt, so läßt dieser instinktiv seine Kraft an allen Punkten annähernd normal gegen den Kurbelarm wirken.

Anwendungen des Wellrades: Die Winden (bei Aufzügen, Ziehbrunnen...); Räder an Wasser- und Windmühlen; Pferdeegöpel; Zahnräder (Fig. 124), Transmissionsräder, Haspel, Spinnrad; Hahnenkamm, Schleifstein, Kurbeln, Drehorgeln, Kaffeemühlen; Sägen. Weitere Beispiele! Was ist bei jeder dieser Anwendungen „Kraft“, was „Last“?

Fig. 124.



Bei allen Lagen der Aufrichtungen, ob parallel, konvergent oder windschief, tritt aus der geometrischen Gestalt der Hebel, Rollen und Wellräder hervor, daß die Verschiebungen gilt: $s = R : r$, woraus auch sofort wieder für die Arbeitsleistung $PS = Qs$ folgt. —

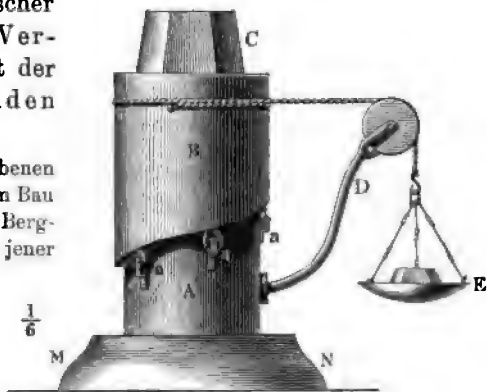
Die schiefe Ebene (§§ 2, 17, 22) läßt sich als Maschine aufbauen, wenn man das vertikal abwärts wirkende Gewicht des auf ihr ruhenden Körpers als die Last, die parallel zur Länge (auch parallel zur Basis oder sonstwie) gerichtete Kraft als die jener Last das Gleichgewicht haltende Kraft auffaßt. — Gleichgewichtsbedingungen:

$$P = Q \sin \varepsilon, \quad P = Q \tan \varepsilon, \quad P = Q \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\cos \beta} \quad (\S 17).$$

Daß auch hier $PS = Qs$ gilt, wurde in § 22 (S. 91) als typischer Fall dafür erörtert, daß die Verschiebung einen Winkel mit der Richtung der widerstehenden Kraft einschließt.

Anwendung schiefer Ebenen „Schrotleitern“) beim Aufladen, beim Bau der ägyptischen Pyramiden; Bergstufen (worin besteht der Nutzen jener künstlichen Umwege, die man „Serpentinen“ nennt?), Stiegen... liegt, daß hier immer Kraft, nie Weg erspart wird. — STEVINS Ableitung des Gleichgewichtes an schiefer Ebenen LA 85.

Fig. 125.



LA 85.

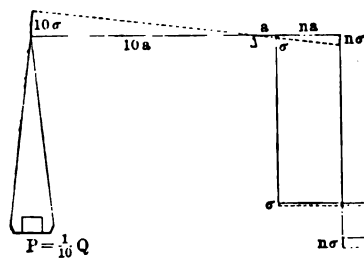
Wie Rolle und Wellrad auf den Hebel, so lassen sich theoretisch auf die schiefe Ebene zurückführen Keil und Schraube (LA 86, 87). Aber auch unmittelbar lehren schon die gewöhnlichsten Anwendungen des Keils (beim Holzspalten, LA 86, 87

Messer, Nadel ...), daß die Kraft um so kleiner ist, je größer der Kraftweg und dies wieder, je schmaler der „Rücken“ im Verhältnis zur Länge der „Schraube“ ist. — Ähnlich ist bei den Anwendungen der Schraube (ihre geometrischen Eigenschaften math. Anh. Nr. 25; Versuch über die Gleichgewichtsbedingungen $P:Q = h:u$ nach Fig. 125 a. v. S.), z. B. Heben großer Lasten (von Dachstuhl Vorwärtsschieben großer Massen (durch die Schiffsschraube, bei der das W die Schraubenmutter bildet), Pressen von Papier u. a. f., zur Bewältigung der gegebenen Last eine um so kleinere Kraft erforderlich, je kleiner die Breite des Schraubenganges im Vergleich zum Spindelumfang ist. —

Denken wir uns nun den an so vielen einfachen wie zusammengesetzten Maschinen bewährten Satz von der Erhaltung der Arbeit an Maschinen auch für alle übrigen verallgemeinert, so könnte eine solche Maschine sogar einen undurchsichtigen Kasten so eingeschlossen sein, daß nur zwei Enden herausragen, von denen uns ein Versuch zeigt, daß einer Verschiebung von s cm einen eine solche von S cm des anderen entspricht: dann können wir auf Grund jenes Satzes schließen, auch für sie werde $P:Q = s:S$ sein. — Dabei können die Verschiebungen s und S im selben Verhältnis beliebig verkleinert angenommen werden (als „unendlich klein“, ja sogar als bloß möglich, als „virtuell“, d. h. mit dem Bau der Maschine verträglich; in diesem Sinne bezeichnet man den Satz von der Erhaltung der Arbeit an Maschinen auch als „Prinzip virtuellen Verschiebungen“). Dabei sind für die Gleichgewichtsbedingung Komponenten der Verschiebungen zu nehmen, die den widerstehenden Kräften gerade entgegengesetzt sind.

Wie dieser Gedankengang zur Konstruktion bestimmter Maschinen führen kann, zeigt die folgende Betrachtung über Einrichtung und Gebrauch der

Fig. 126.



Brückenwaage (Modell!). Die Anforderungen, welche zu ihrer Konstruktion geführt haben, sind folgende: 1. Es soll im Gleichgewicht stehen der zu wägenden Last (Q kg) den aufzulegenden

Wichtsstücken (P kg) bestehen, unabhängig von der Stelle „Brücke“, auf welche die Last zu liegen kommt; 2. es soll $P = 1$ (Dezimalwage, Fig. 126) oder $P = 1/100$ Q (Centesimalwage) sein.

Aus Bedingung 1. folgt überdies (wie?), daß 3. die Brücke nur Verschiebungen parallel zu sich selbst erleiden darf. Dies wird dadurch erreicht, daß die Brücke einerseits mit der unter ihr liegenden Schneide wieder auf der einen einseitigen Hebel darstellenden „Gabel“ ruht, andererseits durch zwei Zugstangen mit dem Wagbalken („Schwanenhals“) verbunden ist. Senkt sich die mit Q kg belastete Brücke um s cm, so ist wegen $a:na =$ (etwa $n = 3$ oder 5) die Bedingung 3 und daher auch 1 erfüllt.

Um nun auch die Bedingung 2 zu erfüllen, ist der Kraftarm von $P = 1$ (bzw. $100a$), daher ein Heben oder Senken von P um eine beliebige St

t von einem Senken oder Heben von Q um $\frac{1}{10}$ (bzw. $\frac{1}{100}$) dieser

wir zu keiner Zeit wissen können, daß die bis dahin experimentell und sch untersuchten einfachen und zusammengesetzten Maschinen schon alle pt denkbaren seien, so stellt die auf noch so reichliche Erfahrungen e volle Verallgemeinerung des Satzes von der Erhaltung der Arbeit e Maschinen doch nur eine höchst wahrscheinliche Hypothese dar (log. r. 37). Mit ihr steht und fällt auch der Satz von der Unmöglichkeit Anh. 37. mechanischen Perpetuum mobile. Unter diesem Namen stellte man sich aschine vor, die 1. einmal in Bewegung gesetzt, sich selbst ewig in ng erhalte (z. B. eine Uhr, die sich, einmal aufgezogen, immer wieder ufzöge), dabei 2. die Bewegungshindernisse überwände und 3. über- ch anderweitig nutzbare Arbeit verrichtete. — Der 1. Anforderung tsprüchen nun allerdings viele mechanische Vorgänge; so die Bewegung ofs der Trägheit unterliegenden Körpers, die Bewegung eines Pendels und die ng vieler Maschinen (z. B. Hebel, Rolle mit in sich geschlossener Schnur), sie unbelastet oder ihrer Gleichgewichtsbedingung gemäß et sind. 2. Während wir aber bei Aufstellung dieser Gleichgewichtsbedin- von den Bewegungshindernissen ganz absahen, gelangt in Wirklichkeit urch sie jede Maschine mit der Zeit zum Stillstande, wenn diese Verluste urch Energiezufuhr von außen ersetzt werden; und vollends kann nach dem e der Erhaltung der Arbeit durch was immer für Maschinen oder ensetzungen aus solchen nie ein Überschufs an Arbeit verrichtet werden, lie Forderung 3 erwartet. — Darf man z. B. eine Schiffmühle, die durch rtwährend fließenden Strom getrieben wird, ein Perpetuum mobile in dem tgestellten Sinne nennen? — Wer das Gesetz der Erhaltung der Arbeit wird nicht mehr die Erfindung eines Perpetuum mobile versuchen; und hrt liegt darin, daß die einstmals sehr beliebten Versuche einer solchen ng ausnahmslos fehlschlügen, eine Bestätigung für die Allgemeingültigkeit aturgesetzes. — Indem die Pariser Akademie (1770) den Beschluß faßte, Prüfung von vermeintlichen Erfindungen irgend welches Perpetuum mobile pt nicht mehr einzugehen, erklärte sie implicite den Satz von der Erhal- er Arbeit für einen durch das bisherige Fehlschlagen aller solcher ngen so wahrscheinlich gewordenen, daß die Möglichkeit von Ausnahmen nhr wissenschaftlich in Betracht kam. Indem hierin auch Maschinen, 1 anderer Naturkräfte als der rein mechanischen, z. B. der Wärme, der ischen und elektrischen Kräfte bedienen, inbegriffen waren, war auch schon z der Erhaltung der Arbeit von dem mechanischen Gebiete auf sämt- ibrigen physikalischen Erscheinungskreise ausgedehnt. —

der Tat gelten die folgenden Begriffsbestimmungen auch für alle, durch mer für Naturkräfte betriebene Maschinen:

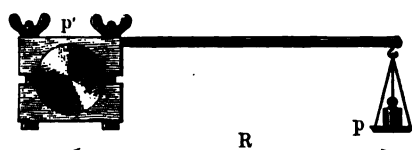
riebsmaschinen. Arbeitsmaschinen. Nutzeffekt. Statt uskelkraft oder ziehender Gewichte wird im großen bekannt- ie Energie der Bewegung strömenden Wassers (Wasserräder, en), strömender Luft (Windmühlen, Windmotoren), die Energie 1 Wasserdampfes (Lokomobilen, Lokomotiven ...), explo- der Gase (Gas-, Benzinmotoren ...), die Energie elektrischer e (Elektromotoren) verwendet. Maschinen, welche diese Energie

in passende Bewegungsenergie (fast immer zunächst in die der drehenden Bewegung einer „Hauptwelle“) umsetzen, heißen **Triebmaschinen** (Motoren); ihre Energie wird sodann (durch „Transmissionen“) übertragen auf die **Arbeitsmaschinen** (Kreissägen, Hobel-, Bohrmaschinen, Pump-, Walz-, Pochwerke, Spinn-, Strick-, Nähmaschinen, Buchdruckpressen u. s. w.) und von diesen auf die zu bearbeitenden Körper (Holz, Metall, Papier u. s. f.).

Nur ein verhältnismäßig kleiner Teil der den Triebmaschinen zugeführten Energie (z. B. der Steinkohlen) wird für die von den Arbeitsmaschinen verlangte Arbeit (z. B. Heben einer Förderschale) verwendet. Sie bilden dann die in Watt (§ 22 Ende) zu messende **Nutzleistung** (den **Nutzeffekt**) der ganzen maschinellen Einrichtung.

Zur Messung der an einer Maschine verfügbar werdenden Arbeit dient das **Bremsdynamometer** (Fig. 127): An die Hauptwelle werden nämlich Holzbacken

Fig. 127.



gepreßt, von denen ein Hebel mit Lastgewicht (zu vergleichen einer Schnellwaage) wegragt. Wäre der Hebel unbelastet, würden infolge „Mitnehmens durch Reibung“ (§ 16) die Hölzer und der Hebel von der Welle mit in Rotation versetzt. Bei einer bestimmten Einstellung des Lastgewichtes dagegen nimmt der Hebel weder eine Drehung im Sinne der Welle (Hebung) noch eine im entgegengesetzten Sinne (Senkung) an. Aus dem Gewichte, dessen Widerstande entgegen sich die Welle dreht, und der Länge des Hebelarmes ergibt sich dann bei bekannter Tourenzahl die zur Herstellung des Gleichgewichtes zu leistende Arbeit per sec.

Wie hier die durch das Bremsdynamometer ganz aufgebrauchte Arbeit, setzt sich auch die infolge der Steifigkeit der Transmissionen, der Reibung der Maschinenteile aneinander, namentlich aller Radachsen in ihren Lagern, zu geringeren Teilen infolge des Luftwiderstandes verlorene Arbeit in anderen Formen von Energie und schließlich in Wärme um (§§ 23, 82 . .).

Die Tatsache, daß z. B. auch die vollkommenste Dampfmaschine nur etwa 18 Proz. der in Form des Heizmaterials ihr zugeführten Energie an die Arbeitsmaschine abzugeben vermag, drückt man kurz so aus: der **Wirkungsgrad** der Maschine ist 18 Proz. Diese ganze von der Triebmaschine abgegebene Arbeit empfängt die Arbeitsmaschine; wird dann von dieser Arbeitsmaschine (am Fahrrad, an der Spinnmaschine . .) z. B. 90 Proc. Nutzarbeit gewonnen, so ist der Wirkungsgrad der ganzen Maschinenanlage $N = \frac{18}{100} \cdot \frac{90}{100} = 16,2 \text{ Proz.}$

Näheres zur Phoronomie und Dynamik der Drehbewegungen.

§ 31. Winkelgeschwindigkeit. Winkelbeschleunigung. Trägheit und Beharrung bei Rotationen starrer Systeme.

Im § 12, S. 35 wurde dem zu einem gleichförmig kreisenden Punkte gezogenen Leitstrahl a eine bestimmte **Winkelgeschwindigkeit** α zugeschrieben. d zur Bahngeschwindigkeit c des kreisenden Punktes in der Beziehung stel-

= αa . — Dieser Begriff der Winkelgeschwindigkeit wird nun von einem einzelnen Lichtstrahl auch übertragen auf die Rotation ganzer Körper. Besitzt nämlich ein Körper eine zur Rotationsachse (§ 26) normale, im Körper feste Gerade eine bestimmte konstante oder veränderliche Winkelgeschwindigkeit, so wird diese auch der Rotation des ganzen Körpers zugeschrieben (LA 88). Hat dann ein r cm von der Rotationsachse abstehender Punkt die Bahngeschwindigkeit c (konstant), bzw. v cm sec⁻¹ (veränderlich), so ist seine

Winkelgeschwindigkeit $\alpha = \frac{c}{r}$ (konstant), bzw. $\psi = \frac{v}{r}$ (veränderlich).

Da die „Dimension“ eines Winkels im absoluten Maße Null ist (entsprechend $= \frac{l}{r}$, Anh. 2), so ist die einer Winkelgeschwindigkeit $\frac{\text{cm sec}^{-1}}{\text{cm}} = \text{sec}^{-1}$. — Anh. 2.

Wie die Änderung der Bahngeschwindigkeit Bahnbeschleunigung, so heißt die Änderung der Winkelgeschwindigkeit Winkelbeschleunigung. Eine Anschauung von dieser Größe gewinnen wir z. B. an jeder Rolle und an jedem Fahrrad, bei denen Kraft und Last einander nicht das Gleichgewicht halten; die Größenbeziehung zwischen Bahn- und Winkelbeschleunigung wird besonders veranschaulicht durch folgenden

Versuch: Während an der Atwoodschen Fallmaschine (Fig. 41, S. 54) jeder der sinkenden, bzw. steigenden Massen und der sie verbindenden Schnur eine konstante Bahnbeschleunigung b cm sec⁻² zeigt, kommt dem Rädchen der Fallmaschine als Ganzem und z. B. auch jeder seiner Speichen eine gewisse konstante Winkelbeschleunigung β zu. Ist z. B. $b = 10$ cm sec⁻², so daß man 1, 2, 3 ... sec längs der Fallmaschine 5, 20, 45 ... cm zurückgelegt hat, so legt der Radkranz, an welchem die Schnur anliegt, die gleichen Strecken zurück. Ist der Halbmesser des Rädchens $r = 5$ cm, so legt ein Punkt der Speiche, der $\rho = 1$ cm von der Achse absteht, Wege von $\frac{5}{5}, \frac{20}{5}, \frac{45}{5}$... cm zurück, und die Bahnbeschleunigung dieses Punktes, somit auch die Winkelbeschleunigung des Leitstrahles dieses Punktes, wie die des ganzen Rädchens, ist $\beta = \frac{10}{5} \frac{\text{cm sec}^{-2}}{\text{cm}} = 2 \text{ sec}^{-2}$. Allgemein definieren wir:

Die **Einheit der Winkelbeschleunigung** besitzt ein sich drehender Körper, dessen Winkelgeschwindigkeit sich binnen je 1 sec um 1 WGE ändert. — Besitzt ein Punkt im Abstände r cm von der Drehachse die konstante Bahnbeschleunigung b , bzw. die veränderliche Bahnbeschleunigung ω , so hat der ganze Körper die

Winkelbeschleunigung $\beta = \frac{b}{r}$ (konstant), bzw. $\omega = \frac{w}{r}$ (veränderlich).

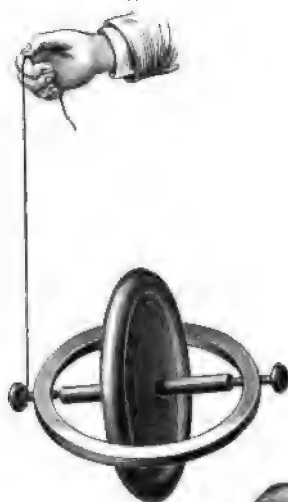
Die vorstehenden Bestimmungen beschränken sich auf die phoronomische Beschreibung der Drehbewegungen. — Die erste dynamische Frage ist dann: Was für Drehungen führt ein starres System aus, wenn keine Kräfte (Drehmomente) auf dasselbe wirken? War in einem bestimmten Zeitpunkt das System in Hinsicht auf Drehungen in Ruhe, d. h. ohne Winkelgeschwindigkeit gewesen, so werden wir ebenso nichts anderes erwarten, als daß es in Ruhe bleibt, wie das Trägheitsgesetz für den Fall der Ruhe überhaupt von jeher für selbstverständlich gehalten worden war. Aber wie Trägheit und Beharrung auch für beliebig

große Bahngeschwindigkeiten von Punkten und bei Translation von Körpern gelten, so auch für beliebig große Winkelgeschwindigkeiten. So drückt sich bei obigen Versuchen mit Atwoods Fallmaschine, wenn der sinkende Trichter nach erlangter kleinerer oder größerer Geschwindigkeit aufgehalten wird, das Rädchen mit der erlangten Winkelgeschwindigkeit weiter. Desgleichen: Werden wir fragen dürfen, „infolge welcher Kräfte sich die Erde dreht“, genauer: ihre gleichförmige tägliche Drehung beibehält? — Wie ferner für einzelne Punkte und für Translation ganzer Systeme (z. B. eines Eisenbahnzuges) die Begriffe des Anlaufes, stationären Laufs und Endlaufs gelten, so auch für Drehbewegungen; das typische Bild hierfür sind die Bewegungen des Schwungrades. Dieses bekommt beim Angehen, z. B. der Dampfmaschine, an der es angebracht ist, eine positive Winkelbeschleunigung, während des stationären Ganges der Maschine besitzt es eine konstante Winkelgeschwindigkeit, und beim Auslaufen der Maschine nimmt diese ab bis 0 (Winkelverzögerung). Der Zweck des Schwungrades ist hierbei der einer Art Speicher für die kinetische Energie der Maschine, mit der es in Verbindung steht. Falls nämlich die Dampfmaschine, die die Arbeitsmaschinen, z. B. eine Kreissäge, in Gang erhält, vorübergehend eine zu starke Dampffuhr erhält, so bringt die zunächst an das Schwungrad übertragene Energie in diesem zum Vorschein; und ebenso geht die Maschine nicht viel langsamer, wenn z. B. die Säge vorübergehend härtere Teile eines Balkens zu durchschneiden hat. Für diese Beharrungswiderstand gegen Winkelbeschleunigungen ist aber dabei nicht nur die Masse des Schwungrades, sondern sein Massenmoment (Trägheitsmoment) maßgebend, das nicht nur von der Masse, sondern auch von der Massenverteilung in Bezug auf die Rotationsachse abhängt; Näheres hierüber folg. §.

Trägheit und Beharrung der einzelnen Massenpunkte eines starren Systems können aber bei Rotationen auch zu viel verwickelteren Erscheinungen führen als bei Translationsbewegungen; dies namentlich auch, wenn die Rotationsachse selbst in dem System

Fig. 129.

Fig. 128.



achse selbst in dem System, von dem an das System sich selbst überlassen wurde (d. h. keine Kräfte und Kraftmomenten unterlag), schon eine Winkelgeschwindigkeit gehabt hatte. Solche Erscheinungen zeigen schon die folgenden

Vorversuche mit dem Kreisel. 1. Wurde ein Kreisel durch kräftiges Ziehen der Schnur eine reichend rasche Rotationsbewegung erteilt, so blieb er, mit vertikaler oder wenig geneigter Achse an die Spitze gestellt, annähernd „ruhig“, wie stabil stehen, trotzdem er ohne die Drehung nur labile

gar kein Gleichgewicht hätte und daher nach dem Loslassen, der Schwerkraft send, umfallen würde. Die Achse des Kreisels bleibt aber weder bei kleiner noch bei großer Neigung ganz in Ruhe, sondern sie führt Bewegungen längs des Stabes eines Kegels aus, falls seine Spitze in einer Pfanne zu laufen gezwungen (Fig. 128), oder aber näherungsweise eines Doppelkegels, falls die Spitze auf einer ebenen Fläche läuft. Diese Kegelbewegung der Achse wird im allgemeinen um so rascher, je geringer die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels wird. (Alle diese Erscheinungen lassen sich schon an den Brummkreiseln der Kinder beobachten.) — 2. Noch auffallender ist die Erscheinung, daß, wenn ein hinreichend schnell rotierender, massiver Kiesel nach Fig. 129 in eine Schnur gelegt wird, er trotz der Schwere nicht herabfällt, sondern daß die Kieselachse selbst annähernd eine Drehung in wagrechter Ebene um die Schnur als lotrechte Achse macht. — 3. In den angeführten und zahlreiche andere überraschende Erscheinungen an Kreiseln lassen sich aus der Erhaltung der Rotationsebene (Näheres § 34).

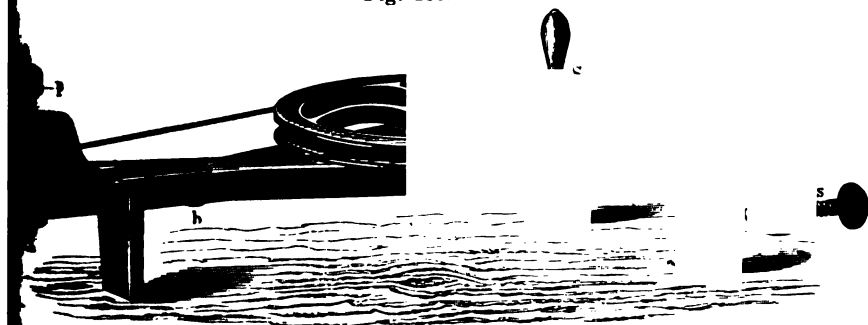
Den in § 26 aufgestellten einfachsten Analogieen zwischen Translationen und Rotationen (Bewegungen einzelner Punkte) und Rotationen reihen sich folgende an:

Erhaltung der Bahngeschwindigkeit;
Widerstand gegen Bahnbeschleunigung: als Maß der Masse.
Erhaltung der Richtung; Widerstand gegen Änderungen der Bahnrichtung: Fliehkräfte.

Erhaltung der Winkelgeschwindigkeit; Widerstand gegen Winkelbeschleunigung: „Massenmoment.“
„Erhaltung der Rotationsebene“ als Widerstand gegen Veränderungen der Rotationsebene.

Hiernach wirkt z. B. ein auf geraden Schienen fahrender Eisenbahnzug bei einem Zusammenstoß einfach durch seine Masse, d. i. die Summe der Massen aller Massenpunkte, aus welchen wir ihn zusammengesetzt denken können. Ein Wagenrad wirkt auf ein Hindernis, das die Rotation zu hemmen sucht, durch sein Massenmoment. — Ein auf Schienen von beliebiger (nicht bloß von kreisförmiger) Krümmung fahrender Zug weist Fliehkräfte auf, die ihn bei allzu großer Krümmung und zu großer Bahngeschwindigkeit seitlich aus den Schienen werfen (LA 41). — Eine besondere Klasse von Fliehkrafterscheinungen ist aber speziell den Rotationen von Punktsystemen eigentümlich. Namentlich zur Veranschaulichung dient die Centrifugalmaschine, Fig. 130.

Fig. 130.



Versuche. 1. Längs eines wagrechten Leitstabes sind zwei durch einen Faden verbundene Kugeln verschiebbar (Fig. 131 a. f. S.). Wird dieses System um eine zum Leitstab senkrechte Achse gedreht, so müssen die Kugeln Abstände

von der Achse haben, welche sich verkehrt verhalten wie deren Massen, weder die größere noch die kleinere Kugel sich von der Achse entfernen

Fig. 131.

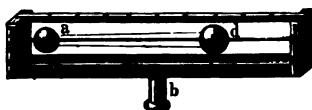


Fig. 133.

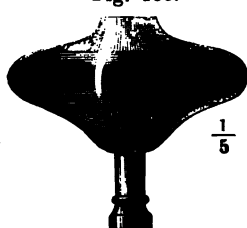


Fig. 132.

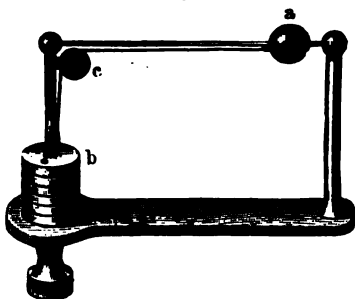
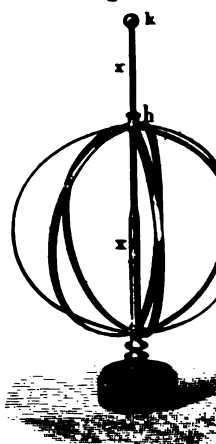
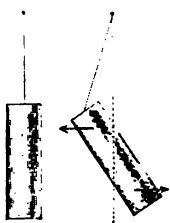


Fig. 134.



dabei die andere mitziehe. 2. Bestätigung der Gleichung $f = m \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 r$ im § 19 mittels einer solchen Kugel, welche längs der Drehungsachse ein Gewicht hebt (Fig. 132) oder eine Feder spannt. — 3. In einem Gefäße (Fig. 133) mit Flüssigkeiten verschiedenen spezifischen Gewichts drängt sich bei rascher Drehung um eine Achse die dichteste Flüssigkeit (Quecksilber) gegen den Äquator; ähnlich 4. Berganfließen von Flüssigkeiten; 5. parabolische Krümmung des Flüssigkeitsspiegels in einem um seine vertikale Achse gedrehten Trinkglas (LA 42). 6. Abplattung von elastischen Metallreifen (Fig. 134, als ein übrigens nicht analogen mechanischen Bedingungen entsprechendes Vorbild für die „Abplattung“ der Erde, § 178); 7. Abplattung einer Tonkugel (Gebrauch der Töpferscheibe) u. s. f. — Eine besondere Klasse Fliehkrafts-Erscheinungen bei Rotation ganzer Körper wieder sind die

Fig. 135.



Freie Achsen. Versuch. Wird der längs Cylinder, Fig. 135, um seine geometrische Achse rasch dreht, so erweist sich diese Achse als nicht stabil, indem bei kleinen seitlichen Bewegungen der ganze Cyl eine neue Lage annimmt. — Es gibt also 1. Rotationsachsen, in Bezug auf welche der rotierende Körper hauptsächlich nicht im Gleichgewichte ist, indem die durch die Rotation geweckten Fliehkkräfte Kräftepaare bilden, die ihn um neue Achsen sich zu drehen zwingen.

2. Diejenigen Achsen, in Bezug auf welche dagegen ein solches Gleichgewicht stattfindet, das genannten freien Achsen, scheiden sich wieder in solche, für welche das Gleichgewicht stabil, indifferent und labil ist.

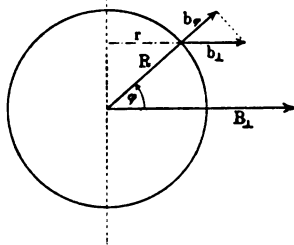
Näheres zur Erklärung dieses verschiedenen Verhaltens im folgenden

Abnahme der Schwere gegen den Äquator.

Geschichtliches. RICHER bemerkte (1671), als er eine in Paris richtig gehende Pendeluhr nach Cayenne mitnahm, daß sie hier täglich um $1\frac{1}{2}$ min zurückblieb. Da sie durch Verkürzung des Pendels für Cayenne reguliert war, ging sie in Paris wieder um $1\frac{1}{2}$ min voraus. Diese Tatsache wurde von NEWTON dahin gedeutet, daß die Beschleunigung im freien Falle, an der schiefen Ebene und bei Pendelbewegungen am Äquator kleiner sei als in höheren Breiten. — Allgemein:

Die Beschleunigung g_φ an irgend einem Orte der Erde (Fig. 136) ist schon eine Resultierende dar aus der von der Massenanziehung der Erde herrührenden eigentlichen Schwerebeschleunigung G_φ und der entgegenwirkenden Komponente b_φ der Zentrifugalbeschleunigung, welche jeder mit der Erde verbundenen Körper infolge seiner Teilnahme der Erdrotation erhält. Wird die Erde als kugelförmig vorausgesetzt und ist ihr Halbmesser R cm, so ist in der geographischen Breite φ° der Erde der Rotationsradius $r = R \cos \varphi$, daher die zur Erdachse normal auswärts gerichtete Zentrifugalbeschleunigung $b_\perp = B_\perp \cos \varphi$. In dieser Zentrifugalbeschleunigung b_\perp entfällt in die Richtung der Vertikalen selbst wieder eine Komponente $b_\varphi = b_\perp \cos \varphi$, so daß $b_\varphi = B_\perp \cos^2 \varphi$. Was sich also für φ° geographische Breite aus Pendelbeobachtungen als Beschleunigung frei fallender Körper ergibt, ist $g_\varphi = G_\varphi - B_\perp \cos^2 \varphi$.

Fig. 136.



Hier ergibt sich rechnerisch $B_\perp = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R$, wo T die Anzahl der Sekunden eines Sterntages, R die Anzahl Centimeter des Äquatorhalbmessers ist. Da $B_\perp = \frac{1}{289} G$, so würde, wenn sich die Erde 17mal so schnell um ihre Achse drehte, am Äquator die Schwereanziehung durch die Fliehkraft gerade aufgehoben.

Daß tatsächlich die Erde nicht eine Kugel, sondern annähernd ein Sphäroid mit dessen kurze Achse die Rotationsachse ist, macht es wahrscheinlich, daß diese „Abplattung“ der Erde eben durch die Rotation der einst bildsamen Erdmasse zustande gekommen ist. Mit Rücksicht auf diese Abplattung verändern sich dann auch die verhältnismäßigen Werte der aus der Kugelgestalt theoretisch berechneten Größen B_\perp und g_φ . — Vgl. § 178.

§ 32. Massenmoment (Trägheitsmoment).

Beispiele: 1. Ein massiver Torflügel ist schwer in seinen Angeln zu drehen, wenn diese gut geschmiert sind; einmal in Bewegung, trifft er dann die Last, die ihn aufzuhalten sucht, mit Wucht. — 2. Eine Hantel z. B. von 10 kg ist bei wagrecht gehalten durch die Muskeln des vertikal herabhängenden Hantler, Physik.

Armes nur unter beträchtlichem Beharrungswiderstand in bestimmte Winkelbeschleunigung um die Achse XX (Fig. 137) zu versetzen; wäre dieser Widerstand

Fig. 137.

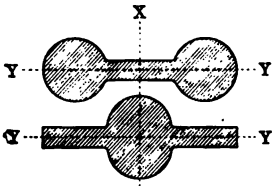


Fig. 138.

nicht doch leichter ist, eine gegebene Masse z. B. von der Gestalt Fig. 1 nach Fig. 138 in Drehung zu setzen; und namentlich ist nicht ohne Rechnung einzusehen, daß das Massenmoment ebenfalls mit der ersten Potenz der Masse, aber mit der zweiten Potenz des Massenarmes wächst. Dies werde rechnerisch, dann experimentell gezeigt:

A) Rechnerisch. — Einfachste Aufgabe: Mit einer Achse (Fig. 139) sei durch den zu ihr normalen masselosen „Massenarm“ r cm ein Massenpunkt von m g starr verbunden. Normal gegen den Arm und gegen die Achse wirke an dem Kraftarme von a cm eine Kraft von k Dyn. Welche Winkelbeschleunigung β wird m erhalten? — Antw.: Wir denken uns statt k eine in m selbst angreifende Kraft k' , welche in Bezug auf die Achse XX' dasselbe Drehmoment hat. Ist die lineare Beschleunigung, welche m erhält, b cm sec⁻², so ist

$$\left. \begin{array}{l} \beta = \frac{b}{r} \quad \cdot \cdot (1), \text{ § 31} \\ b = \frac{k'}{m} \quad \cdot \cdot (2), \text{ § 16} \\ k' = \frac{a}{r} \cdot k \quad \cdot (3), \text{ § 29} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{also durch Elimination} \\ \text{(Multiplikation):} \\ \beta = \frac{ka}{mr^2} \cdot \cdot \cdot (4); \\ \text{in Worten?} \end{array}$$

Wie in der Gleichung $k = mb$ für Bahnbeschleunigungen die Kraft k das der Beschleunigung Förderliche, die Masse m das der Beschleunigung Hinderliche ist, so ist auch in der Gleichung (4) für die Winkelbeschleunigung das **Kraftmoment** $ka = \mathfrak{K}$ das der Winkelbeschleunigung Förderliche, das **Massenmoment** $mr^2 = \mathfrak{M}$ das der Winkelbeschleunigung Hinderliche. Also besteht volle Analogie zwischen den Gl. $b = \frac{k}{m}$ und $\beta = \frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{M}}$.

Eben solche Analogieen, wie für Kräfte und Massen, bzw. deren Momente, stehen auch für die Arbeiten und Energien bei der Rotation, vgl. LA 105–107.

Nach Gleichung (4) hat z. B. eine Masse $m = 4$ g mit dem Arme $r = 10$ cm ein ebenso großes Massenmoment wie eine Masse von $\mu = 100$ g mit dem Arme $\rho = 1$ cm, nämlich beide $\mathfrak{M} = 4 \cdot 5^2 = 100 \cdot 1^2 = 100$ (cm² g). Ebenso kann jede Masse m vom Arme r ersetzt werden durch eine Masse $\mu = \frac{m}{r^2}$ mit dem Arme 1 cm. — So löst sich auch sogleich folgende

Allgemeinere Aufgabe: Mit der Achse XX seien die Massen $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$ nach die Massenarme $r_1, r_2, r_3 \dots r_n$ starr verbunden. Wie verhalten sie sich gegen irgend welche (eine oder mehrere) Kräfte bei Winkelbeschleunigung? Antw.: Diese Winkelbeschleunigung ist ebenso groß, wie wenn Massen $\mu_1 = (m_1 r_1^2)$, $\mu_2 = (m_2 r_2^2)$, $\mu_3 = (m_3 r_3^2)$, $\dots \mu_n = (m_n r_n^2)$ sämtlich in einem Punkte von 1 cm Abstand von der Drehungsachse vereinigt und diese μ durch dieselben Kräfte in Beschleunigung zu versetzen wären. Es ist also das Trägheitsmoment des ganzen Systems in Bezug auf jene Achse:

$$I = [m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_n r_n^2] \cdot l^2 = \sum m r^2 \text{ (cm}^2\text{g)} \dots (5)$$

Wie also nach § 29 die Kraftmomente, so sind auch die Massenmomente einfach addierbar (superponierbar). Hierbei ist es nicht einmal erforderlich, daß die Massen längs einer und derselben auf XX Senkrechten angereicht sind; vielmehr kommt es bei irgend einem Massensysteme (sei es, daß es aus einzelnen Punkten besteht oder daß seine Masse als stetig durch den Raum des Körpers von gegebener Gestalt verteilt gegeben ist) nur auf die Massen und die Abstände senkrecht zur Drehungsachse, nicht auf ihre Verteilung nach der Richtung der Achse an. Hat z. B. auch ein dünner Ring von M g Gesamtmasse und r cm Halbmesser in Bezug auf seine geometrische Achse einfach das Trägheitsmoment $M r^2$ (cm²g). —

Die Berechnung von Trägheitsmomenten stetig erfüllter Körper von geometrisch bestimmter Gestalt und gegebener Massenverteilung erfordert die Summierung von Reihen mit unendlich vielen und unendlich kleinen Gliedern. Nach LA 90 ist das Trägheitsmoment einer kreisförmigen homogenen Scheibe LA 90.

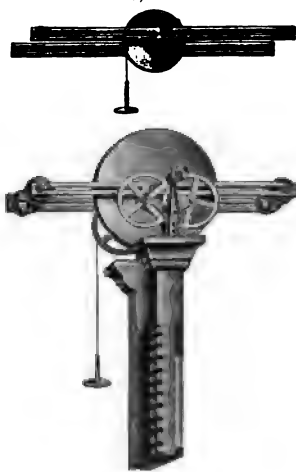
Bezug auf ihre geometrische Achse $\mathcal{R} = \frac{M r^2}{2} \dots (6)$; $\mathcal{R} = \frac{M r^2}{12} \dots (7)$

von einem geraden schmalen homogenen Stabes in Bezug auf eine zu ihm senkrechte Symmetrieachse. — LA 89—107.

LA 89—107.

B. Experimentell lassen sich die vorstehenden Größenbeziehungen bestätigen durch einen Drehungs- und Trägheitsmomentenapparat (Fig. 140): An zwei Scheiben stellen die verschiedenen Halbmesser $r = 5$ cm und $R = 10$ cm die Kraftarme a vor, an welchen als Kräfte k Gewichte von Massen angreifen, die an den Scheibenumfänge geschlungenen Fäden hängen. Mit den Scheiben sind geschlitzte Aluminiumstäbe zu starren Systemen verbunden, so daß die Trägheitsmomente dieses „kleinen und großen Gestells“ nach Gleichung (6) und (7) berechnet werden können. An die Stäbe werden dann Massen m in verschiedenen Abständen r von der Drehungsachse angeschraubt, wo die r die Massenarme darstellen. Dabei wird auf die im vorigen § erörterte Art die jeweilige Winkelbeschleunigung β aus der linearen Beschleunigung b erschlossen, welche der sich drehende Faden und die vor dem Maßstabe der Fallmaschine sinkenden Gewichte annehmen (LA 92). —

Fig. 140.



LA 92.

Bisher waren Kräfte, Massen und Arme als konstant angenommen. Das physische Pendel bietet ein Beispiel veränderlichen Drehmomentes; ein Körper, der während der Rotation sich ausdehnt (z. B. durch Erwärmung), ein Beispiel veränderlichen Trägheitsmomentes. In diesen Fällen wird auch

die Winkelbeschleunigung einen veränderlichen Wert haben; für je ein Punkt gilt aber auch noch die allgemeinste Gleichung für die

$$\text{Winkelbeschleunigung: } \omega = \frac{\Sigma k a}{\Sigma m r^2} = \frac{Q}{M} \dots$$

Massenmomente desselben Körpers für verschiedene Achsen. Rotiert ein langer schmaler Zylinder um seine geometrische Achse, so ist sein Trägheitsmoment kleiner, als wenn er um eine dieser Achsen normale durch seinen Schwerpunkt gehende Achse rotierte; denn schon ohne Rechnung ist ersichtlich, daß jetzt die Masse durchschnittlich weiter von der Rotationsachse absteht als — Vergleichen wir hiermit den Versuch § 31 über die Fliehkraft um verschiedene Achsen, so ergibt sich, daß das Gleichgewicht der Fliehkraft nur für die Rotation um solche Schwerpunktsachsen ein statisches ist, für die das Trägheitsmoment das größte ist. — Log. A.

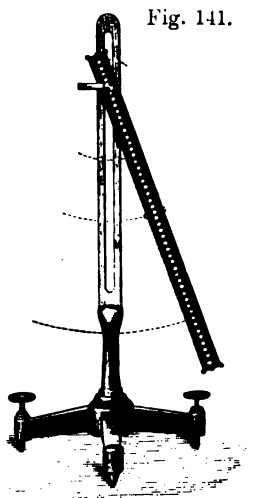
Bei einer Kugel (aber auch bei einem Würfel) ist jenes Gleichgewicht indifferentes, indem hier das Trägheitsmoment in Bezug auf alle durch den Schwerpunkt gehenden Achsen gleich groß ist. —

Bisher wurden die verschiedenen Rotationsachsen immer als durch denselben Punkt (namentlich durch den Schwerpunkt) gehend und gegeneinander geneigt vorausgesetzt. — Für eine parallele Verschiebung der Achse gilt der Satz: Ist für einen Körper von Mg Gesamtmasse in Bezug auf eine Schwerpunktsachse das Trägheitsmoment $M_s(\text{cm}^2 \text{g})$, so ist es für eine im Abstande d parallele Achse O $M_o = M_s + Md^2$ (LA 89).

§ 33. Das physische Pendel. Drehschwingungen

Geschichtliches: Schon DESCARTES, MERSENNE u. a. hatten in den Beweisen des „physischen Pendels“ ein wichtiges Problem der Mechanik erkannt.

Fig. 141.



erst HUYGENS vermochte (1673) die allgemeine rechnerische Lösung dieses Problems zu finden. Er wendete bei dieser Veranlassung zum erstenmal diejenigen Prinzipien an, welche wir heute als Prinzip der lebendigen Kräfte und als Prinzip der Erhaltung des Schwerpunktes kennen. Auch der Begriff des Trägheitsmoments wurde von HUYGENS bei dieser Veranlassung zuerst (wenn auch nicht diesem Namen, den erst EULER gab) eingeführt. Hier werde der heute sehr leicht gewöhnliche rechnerische Behandlung des Problems rein experimentelle vorangeschickt.

A) Experimentell. *Versuch:* An dem Stabe (Fig. 141, vgl. Fig. 82) eine horizontale Achse in irgend einem Abstände $d > 0$ vom Schwerpunkte angebracht, so führt der Stab unter dem Einflusse der Schwerkraft Schwingungen aus. — Dabei läßt sich zu diesem Körper

chen) Pendel ein punktuell (mathematisches) Pendel denken, das mit gleicher Schwingungsdauer hat und dessen Länge dann die „reduzierte“ des physischen Pendels heisst. — Ist speziell der Stab im obersten Punkte aufgehängt, so ist vor auszusehen, daß die reduzierte Pendellänge kleiner sein wird als die Stablänge: denn man kann sich den starren Stab als aus vielen punktuellen (mathematischen) Pendeln bestehend (also das physische Pendel als aus einfachen „zusammengesetzt“) denken, als deren Längen alle zwischen Null und der Stablänge variieren sind. Nur diejenigen Punkte, deren Abstand von der Achse gleich ist der Stablänge, würden (gemäß der Definition der reduzierten Länge) auch als einfache Pendel ebenso schnell schwingen, wie der ganze Stab wirklich schwingt; da die näher der Achse liegenden Punkte schneller, die entfernteren langsamer zu schwingen, so daß alle kürzeren Pendel den längeren schnellere, die längeren den kürzeren langsamere Schwingungen aufzuzwingen suchen. (In der Berechnung dieses Zwanges lag die einstige Schwierigkeit des Problems, zunächst vom physischen Pendel, dann aber der meisten Bewegungen starrer Systeme überhaupt.) Es ist keineswegs die reduzierte Länge eines physischen Pendels kleiner als die Stablänge (oder allgemeiner: als die größte Längeneinheit eines pendelnden Körpers). Wird z. B. der genannte Stab nur 1 cm von seinem Schwerpunkt aufgehängt, so hat er schon eine sehr große Schwingungsdauer, und es würde sich für die Aufhängung im Schwerpunkt. Ähnlich haben wir bei sehr kleinem Abstände des Schwerpunktes von der Drehachse sehr große Schwingungsdauer. Desgleichen läßt sich an einem Metronom (Fig. 1, S. 6) durch Anbringung des Laufgewichtes ein physisches Sekundenpendel herstellen, das kürzer ist als das 993 mm lange mathematische Sekundenpendel.

Fig. 142.

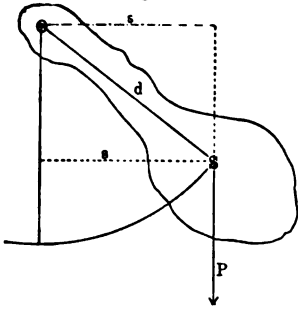
Reversionspendel. Versuch: An dem Stabe (Fig. 142) sind an beiden Enden einander zugekehrte Schneiden und überdies ein oder mehrere Laufgewichte verschiebbar. Sind Schneiden und Gewichte durch Ausprobieren so gestellt, daß der Stab, zuerst an der einen Schneide *a*, dann um die andere Schneide *b* aufgehängt, gleiche Schwingungsdauer hat, so zeigt sich, daß der Stab ein punktuell (mathematisches) Pendel von der Länge des Abstandes zwischen den beiden Schneiden ist. Es ist also **der Abstand der beiden Schneiden die reduzierte Länge des Reversionspendels** (BOHNENBERGER 1811). — Da punktuell (mathematische) Pendel herstellbar sind und also auch ihre Pendellänge nicht meßbar ist, so bildet das Reversionspendel das rein experimentelle Mittel, um von der theoretischen Beziehung zwischen Pendellänge und Schwingungsdauer (§§ 2, 12, 17) wirklich Gebrauch zu machen (KATER 1818), um die Werte von *g* zu bestimmen. —

b) Rechnerisch: Ein beliebig geformter Körper habe die Masse von Mg , ein Gewicht von $P = Mg$ Dyn und in einem Abstand *d* cm von seinem Schwerpunkt *S* angebrachte horizontale Achse *O* das Massenmoment \mathcal{M}_O ($\text{cm}^2 g$). Wenn der



Körper nicht in stabilem Gleichgewichte hängt, sondern seine Schwerlinie s cm Abstand von O hat, so erteilt ihm die Schwere nach § 32, Gl. (6) die mit s veränderliche Winkelbeschleunigung

Fig. 143.



$$\omega = \frac{R}{M_0} = - \frac{P s}{M_0}.$$

Um von der Winkelbeschleunigung wieder zu einer linearen Beschleunigung zurückzukommen, multiplizieren wir beiderseits mit d ; dann ist für den Schwerpunkt

$$\omega d = w = - \frac{P d}{M_0} \cdot s,$$

also [nach § 12, Gl. (9)] $\alpha^2 = \frac{P d}{M_0}$ und die

Schwingungsdauer des physischen Pendels: $T = 2\pi \sqrt{\frac{M_0}{P d}} \dots (1)$

Hieraus durch Vergleichung mit dem T beim einfachen Pendel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ [§ 12, Gleichung (11)]}: \frac{l}{g} = \frac{M_0}{P d} = \frac{M_0}{M g d}, \text{ also die}$$

$$\text{reduzierte Pendellänge: } l = \frac{M_0}{M d} \dots (2)$$

97—101.

Man beachte, daß hier M_0 das Massenmoment speziell in Bezug auf die jeweilige Pendelachse (nicht etwa $M s$ in Bezug auf die parallele Schwerpunktsachse, LA 89) ist. — Beweis für den Satz vom Reversionspendel (LA 102, 103). (LA 102). — Begriff des Schwingungsmittelpunktes (LA 103).

Physisches Pendel mit schiefer Achse. Um das Vorkommen von g im Nenner der Formel für die Schwingungsdauer des physischen und also mittelbar auch des mathematischen Pendels experimentell nachzuweisen, stellen wir das Laufgewicht eines Metronoms z. B. auf 60, so daß es ein Sekundenpendel darstellt und neigen dann die Unterlage aus der Horizontalen um immer größere Winkel ϵ ; es wird dann die Schwingungsdauer immer größer und größer; sie ist 4 sec (statt LA 96. 2 sec), wenn $\cos^2 \epsilon = \frac{1}{2}$ (LA 96). Wird die Unterstützung vertikal genommen, die Rotationsebene des Pendels also horizontal, so wird $T = \infty$, d. h. der rotierende Stab hat aufgehört ein Pendel zu sein und zu schwingen, sondern er würde nun, durch sonst nichts gehindert, seine jeweilige Winkelgeschwindigkeit konstant beibehalten (MACHS Neigungspendel). — Die Erscheinung gibt ein Beispiel für die „Zerlegung einer Rotation“ in zwei (oder mehrere) als gleichzeitig erfolgend gedachte Rotationen (analog der Zerlegung der Verschiebung eines Punktes nach dem Verschiebungsparallelogramm, § 10). — Die bisher betrachteten Schwingungen physischer Pendel sind nur ein besonderer Fall von

Drehschwingungen. Versuch: Die Achse eines der bei den Versuchen über Trägheitsmomente benutzten Scheibengestelle wird lotrecht an einem Draht und dieser an einem höheren Punkte in einen Querarm eingeklemmt (Fig. 144). Infolge seiner Torsionselastizität (§ 51) weist der Draht der Scheibe eine bestimmte Gleichgewichtsstellung an;

aus dieser die Scheibe dann um $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ \dots \alpha^\circ$ zu verdrehen, darf es bestimmter Kraftmomente (Fig. 145). Losgelassen vollführt die Scheibe in wagrechter Ebene Drehschwingungen, welche, weil sie speziell die Torsionselastizität des Drahtes liefert, Torsionsschwingungen heißen.

Fig. 144.

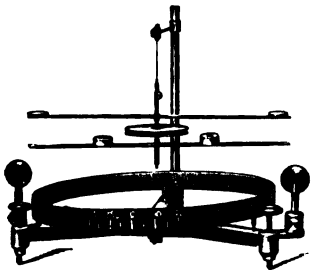
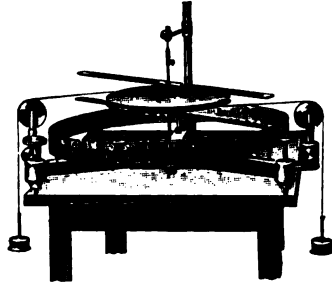


Fig. 145.



Auf solche Schwingungen gründen sich viele der genauesten, namentlich elektrischen und magnetischen Messapparate, auch CAVENDISHS Drehwaage (§ 21, S. 86). Die Schwingungsdauer wird um so größer, je größer das Trägheitsmoment und kleiner das Torsionsmoment des Drahtes (oder Fadens) ist. Messungen beider lassen sich bei Drähten verschiedener Länge, Dicke und stofflicher Beschaffenheit, Lastung des Gestelles durch verschiedene Massen in verschiedenen Abständen von der Drehungsachse. Über die Gl. $T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{\theta}}$ (analog $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{x}}$, § 18) LA 104. LA 101.

Diese Drehschwingungen befolgen das Gesetz der Sinusschwingungen (diesmal nicht für lineare Verschiebungen, sondern für Winkelausweichungen) genau, während das physische Pendel es nur in derselben Annäherung befolgt als das punktuelle (LA 25, 26).

LA 25, 26.

§ 34. Erhaltung der Rotationsebene.

Vorversuch: Wirble ich während des Gehens einen Spazierstock mit rechtwinklig abbiegendem Griff rasch herum, so daß der Griff in meiner Hand wagrecht und die Rotationsebene des Stockes vertikal ist, so empfinde ich bei plötzlicher Änderung meiner Gehrichtung, wobei sich die Rotationsebene des Stockes auch ebenso viel ändern muß, an dem Griffe einen Beharrungswiderstand des Stockes gegen diese Veränderung der Lage der Rotationsebene.

FOUCAULT bemerkte, daß ein elastischer Stahlstab, der nach der Längsrichtung der Achse einer Drehbank eingespannt war und um diese Mittellage schwang, seine Schwingungsebene nicht änderte, auch wenn er in rasche Rotation versetzt war. Dies brachte ihn auf den seither kurz sogenannten

Foucaultschen Pendelversuch (1851): Ein Pendel mit schwerem Pendelkörper und langem Drahte, der so aufgehängt ist, daß er sich um die Aufhängestelle nach allen Richtungen frei drehen kann, behält nicht seine Schwingungsebene in Bezug auf die Meridianebene des Beobachtungsortes von φ° geographischer Breite

bei, sondern weicht während einer Sternstunde um 15° . *st* Sinne WNOSW ab. Der Versuch bildet einen Beweis für die D der Erde um ihre Achse im Sinne WSONW binnen 24 Sternst

Zur Erklärung: Wäre das Pendel über einem Erdpole aufgehängt hätte es z. B. in der Richtung des Nullmeridians zu schwingen begonnen, so sich unter dem Pendel die Erde binnen 24 Stunden einmal herumdrehen. Das Pendel aber hierbei seine Schwingungsrichtung im Fixsternraume nicht (Nachahmung dieses bisher nur gedachten Versuches — denn die Erdpole bis jetzt nicht erreicht — durch ein Pendel in einem um eine vertikal drehbaren Rahmen.) Es ändert sich also in Bezug auf die als ruhend geg. Erde die Schwingungsebene des Pendels binnen 24^h um 360° , binnen $15^\circ (= 15^\circ \cdot \sin 90^\circ$, wo 90° die geographische Breite des Nordpols ist). — Pendel über dem Äquator aufgehängt und schwingt es α) in der Richtung (in der Äquatorebene), β) in der Richtung NS (in der Meridianebene), so Falle α) sofort ersichtlich, daß die Rotation der Erde keine Veranlassung Änderung der Schwingungsebene des Pendels bietet. Im Falle β) hat z. Meridianebene binnen $3^h, 6^h, 9^h \dots$ eine um $45, 90, 135^\circ \dots$ abweichen im Fixsternraume angenommen, d. h. eine zur ursprünglichen Meridianparallele Ebene bildet mit der neuen Meridianebene die angegebenen Winkel, und da das Pendel während seiner Schwingung infolge der Schwerkraft immer seine lotrechte Mittellage und lotrechte Schwingungsebene beibehält, so kann die Rotationsebene des Pendels hier ihre Lage im Fixsternraume nicht mehr vollständig beibehalten; aber wenigstens sind die Bahnstücke Kreisbogen nächst der Lotlage einander parallel geblieben, so daß sie immer die Richtung des Meridians haben. Das Pendel über dem Äquator zeigt also im Falle β) noch keine Drehung seiner Schwingungsebene gegen deren ursprüngliche Lage in Bezug auf die Erde. Die Fälle α) und β) (und ebenso γ) bei Zwischenlagen zwischen SN und OW] entsprechen also, da für den Äquator $\sin \varphi = 0$, ebenfalls der obigen allgemeinen Formel. — Über die allgemeine Formel für das Schwingen in der geographischen Breite φ vgl. LA 108.

Die dem Foucaultschen Pendel verwandten Erscheinungen der westlichen Abweichung von nord-südlichen Strömungen der Luft und des Schusses (der Geschosse u. dgl. m.) sollen im Zusammenhange mit den meteorologischen Erscheinungen näher besprochen werden; vgl. § 191 und LA 109.

Damit alle diese Erscheinungen, wie Foucaults Pendel, als Beweis für die Gültigkeit der Erde gelten können, muß das Gesetz der Erhaltung der Rotationsebene, Erhaltung der Wurfebene u. s. w. (§ 7), als schon feststehend angenommen werden. Der Tat ist es ja wieder nur eine Folge des allgemeinen Trägheitsgesetzes und durch sämtliche für dieses Gesetz sprechenden sonstigen Erfahrungen mit bestätigt.

Als Erscheinungen der Erhaltung der Rotationsebene erklären sich folgende auffälligen Unterschiede im Verhalten eines rasch rotierenden und eines rasch kreiselnden Körpers, von denen einige schon im § 31 beschrieben wurden. Ihre Erklärung

Erhaltung der Rotationsebene hinzu. — Fassen wir einen „Schmidt-Kreisel“ (Fig. 128, S. 142), dessen Achse Fassungen hat, die an der Drehung eilnehmen, an dem einen Ende, und suchen wir die Achse um dieses Ende E zu drehen, die auf der Rotationsebene R des Kreisels normal so bleibt die Kreiselachse nicht wirklich in der Ebene E , sondern weicht E der Hand empfangenen Anregung teilweise aus (der Kreisel sucht sich der E „entwinden“), indem die Achse eine Kegelfläche beschreibt, deren E die haltenden Finger sind und welche die E nur zur Tangentialebene hat. E ersichtlich wird dieses Entwinden, wenn der Kreisel in eine undurchsichtige Hohlkugel eingeschlossen ist: suchen wir dann diese Kugel nach verschiedenen Richtungen im Raume zu orientieren, so setzt sie den Bewegungen Widerstand entgegen, ähnlich als ob sich ein lebendes Tier gegen die Lagenen sträubte, die unsere Hand ihm erteilen will.) — Dieses mehrfach verteilte Verhalten eines rasch rotierenden Körpers läßt sich gleichwohl führen auf das Verhalten eines Massenpunktes, der in geradliniger Bahn E der Hand vorüberzufliegen im Begriffe war: sucht ihn nämlich meine Hand E gegen jene Bahn abzulenken, so wird er zwar diesem zentripetalen Zuge E aber nicht indem er sich geradeaus gegen die Hand bewegt, sondern indem E einem Parabel- (Kreis- oder ähnlichen Kurven-) Bogen aus der ursprünglichen Geraden gegen die Hand hin abweicht; der Zentripetalkraft der Hand stellt E das Beharrungsbestreben entgegen, welches die Hand als Zentrifugalkraft E krummliniger Bewegung gezwungenen Massenpunktes empfindet. — Auf welche Zentrifugalkräfte läßt sich aber auch die Erhaltung der Rotationsebene — und auf das Einschlagen krummliniger Bahnen zwischen verschiedenen Bewegungsrichtung und seitlich ablenkenden Kräften lassen sich alle ähnlichen Bewegungen der Achse des rotierenden Kreisels zurückführen; so E dem einfachsten Falle:

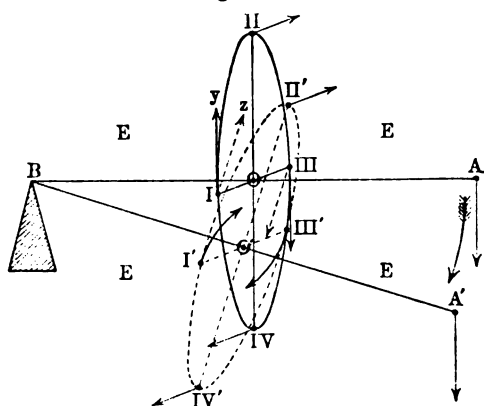
Es sei in einem bestimmten Zeitpunkte die Kreiselachse z. B. AB und bei B unterstützt (Fig. 146); eine bei A vertikal abwärts wirkende Kraft suche diese

in vertikaler Ebene E (Zeichenebene) aus der BA nach BA' zu gehen. Könnten die Wendepunkte des Kreisels

Richtungsänderung
 chse plötzlich folgen,
 rde ein Teilchen bei I ,
 es sich soeben noch
 der Tangente Iy be-
 hatte, die Richtung Iz
 men. Da aber das
 en längs Iy eine Ge-
 indigkeit gehabt hat,

rd es sich in Wirklichkeit längs einer krummlinigen Bahn be-
 , in Bezug auf welche ly nur Tangente ist. Einen ebensolchen

Fig. 146.



Weg wird ein Teilchen in *III* beschreiben; und daher kann auch Punkt *A* der Achse nicht in der Ebene *E* bleiben, sondern verschiebt sich längs eines Kegelmantels, der von jener Ebene *E* längs *OA* tangiert wird.

Sollen die Kegelbewegungen der Kreiselachse eine endliche Geschwindigkeit haben, so darf auch die Geschwindigkeit *D* der Bewegung von *A* nach *A'* mehr unendlich klein sein, wie zu Anfang des Wirkens der in *A* angreifende schleunigende Kraft (die bei dem ersten Vorversuche der Druck der Hand, Versuche nach Fig. 146 die Schwerkraft war). Die rechnerische Theorie lehrt, daß die Kegelbewegung unterhaltende Kraft, die den Kreisel normal zur jeweiligen Ebene *E* verschiebt, proportional zu *D* ist; ferner, daß der Punkt *A* auch noch so großer Rotationsgeschwindigkeit des Kreisels nie in rein wagrechter Linie vorwärts geht, sondern daß er eine kleine Cykloide mit aufwärts gerichteten Spitzen beschreibt. (In der Tat bemerkt man eine Art Hüpfen der Achse, vgl.

Fig. 147.



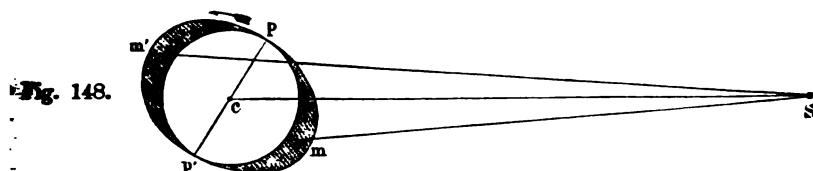
kleinen Schwingungen bei in der Schalen hängenden Kreisel sehr schnell dämpft werden. Ist die Achse des Kreisels Fig. 146 über die horizontale hinaus verläßt und hierdurch durch ein Gegengewicht *F'* (Fig. 147) in Bezug auf die vertikale äquilibriert, so nimmt er keine Kegelbewegungen wohl aber im einen oder anderen Sinne nach, nachdem das Gegengewicht *F'* etwas

von der vertikalen *B* hin, bzw. von *B* weg geschoben und so das Gleichgewicht gestört wird. Je kleiner diese Störung ist, um so langsamer erfolgt dann die Kegelbewegung des ganzen Systems um die Spitze *B* (*Versuche*; Bohnenbergers Maschinchen). — Eine solche Kreiselbewegung erklärt sich nun auch die

Präzessionsbewegung der Erde binnen 26 000 Jahren, welche § 180 beschrieben ist. Eine solche Bewegung würde nicht stattfinden, wenn die Erde eine reine Kugel wäre. Da über diese in Wirklichkeit gleichsam noch ein vom Äquator gegen die Pole hin immer dauernd werdender Wulst (Fig. 148) gelagert ist, und da die Erdachse mit der Ebene der Ekliptik einen Winkel bildet, so sucht die in der Ebene der Ekliptik stehende Sonne infolge ihrer Massenanziehung auf diesen Wulst diesen in die Ebene der Ekliptik zu drehen (die Erdachse ne-

der Ebene der Ekliptik zu stellen), weil die Kräfte auf dem der Sonne gewandten Teile des Wulstes ein wenig größer sind als die auf dem abgewandten.

Zu den so aus der Sonnenanziehung sich ergebenden 18" des jährlichen Nutationsbetrages der Präzession kommen noch weitere 34" infolge der verhältnis-



mäßig größeren Differenzen der Anziehungen des Mondes auf die Teile des Nutationswulstes. — Überdies lagern sich über jene Präzessionsbewegungen noch ebenfalls vom Monde herrührenden Nutationsbewegungen der Erdschse.

35. Überleitung von der Geomechanik zur Hydro- und Aeromechanik. — Charakteristische Eigenschaften der vollkommenen Flüssigkeiten und Gase.

Die bisher (§§ 25 bis 34) durchgeführte mechanische Fiktion „starrer Körper“ ist in verhältnismäßig bester Annäherung auf Körper aus Eisen, Holz, Stein, ... d. i. aus festen Stoffen anwendbar. Blei, feuchter Ton, Butter (bei niedrigerer, bei höherer Temperatur), Marineleim, Sirup ... bilden als weiche, flüssige ... Stoffe allmähliche Übergänge zu den dünnflüssigen Stoffen, wie Wasser, Alkohol ...: diese nennt man vorzugsweise **Flüssigkeiten**. Die meisten Stoffe (weniger merklich auch feste, wie Kampfer, Jod ...) gehen unter bestimmten Bedingungen des Druckes und der Temperatur in Dämpfe oder Gase über. — Umgekehrt bilden sich in dunstreicher Luft Nebel und Wolken, welche aus Wassertröpfchen bestehen, diese wieder erstarren zu Schnee. — So kann man unter den unzähligen wirklich vorkommenden „Aggregatformen“ die drei der festen, tropfbar-flüssigen und gasförmigen Stoffe als Haupttypen hervorheben. (Vgl. die Worte von ANDREWS, § 77, S. 279.)

Im Gegensatze zur annähernden Starrheit fester Körper, d. h. zur gegenwärtigen Unverschiebbarkeit der Teilchen z. B. einer Hebelstange aus Holz, Stein, ... fällt uns als eine den tropfbaren und gasförmigen Körpern gemeinsame Eigenschaft auf, daß ihre Teilchen gegeneinander schon durch sehr geringe Kräfte verschiebbar sind (niemand fällt es ein, sich einen Hebel aus Wasser oder Luft formen zu wollen). — Eine erste Folge dieses Verhaltens ist, daß die Flüssigkeiten und Gase keine selbständige Gestalt haben, sondern die Gestalt des sie teilweise oder ganz umschließenden Gefäßes annehmen. An den Flüssigkeiten ist es meistens schon die Schwerkraft, welche die Teilchen so lange gegeneinander verschiebt und in die unteren Teile des Gefäßes zieht, bis sich oben eine wagrechte Begrenzung gebildet hat. (An einer zähen Flüssigkeit, wie Honig, vollzieht sich diese Umlagerung so langsam, daß die gegenseitigen Bewegungen der Teilchen leicht mit dem Blicke zu verfolgen sind. Bei Marineleim zeigt sich, wenn auf eine wagrechte ebene Fläche dieses Stoffes

ein weiterer Brocken gelegt wird, noch nach Tagen eine merkliche Erhöhung (insofern kann dieser Stoff als an der Grenze der festen und flüssigen betrachtet werden.) — Bei den Gasen ist es ebenfalls zum Teil die Schwerkraft, in viel höherem Maße aber ihre eigene „Spannkraft“, vermöge der sie so lange gegenseitige Verschiebungen vollziehen, bis das ganze Gefäß, welches deshalb allseitig geschlossen sein muß, gleichmäßig (erst in sehr engen Gefäßen, Röhren . . . unten merklich dichter als oben) mit dem Gase erfüllt ist. Im Hinblick auf diesen Gegensatz zwischen der annähernden Starrheit fester Körper und der ebenso den flüssigen wie den gasförmigen Körpern gänzlich mangelnden Starrheit faßt man auch die beiden letzteren Aggregatzustände unter den gemeinsamen Namen der Flüssigkeiten im weiteren Sinne zusammen.

Dagegen unterscheiden sich Flüssigkeiten und Gase durch die Abhängigkeit, bzw. Abhängigkeit des Volumens einer gegebenen Masse z. B. Wasser oder Luft, von dem allseitig auf sie ausgeübten Druck. Wir können nicht in einer mit Wasser gefüllten Flasche durch Zusammenpressen des Wassers für weiteres Raum schaffen; wohl aber läßt sich die Luft in pneumatischen Feuerzeugen anfangs leicht zusammendrücken; je kleiner das Volumen derselben Gasmenge schon geworden ist, um so größerer Kräfte bedarf es aber auch zu noch weiterer Volumsverkleinerung. —

Der wissenschaftlichen Fiktion starrer Systeme entsprechen folgende Anh. 36. weiteren Fiktionen (log. Anhang Nr. 36):

Eine **vollkommene Flüssigkeit** ist eine solche, deren Teile gegenseitig vollkommen leicht verschiebbar sind, und von welcher eine bestimmte Menge (Masse) ein äußeres und inneres Druckverhältnis gegenüber unveränderliches Volumen hat.

Ein **vollkommenes Gas** ist ein solches, dessen Teile gegenseitig vollkommen leicht verschiebbar sind, und von welchem für eine bestimmte Menge (Masse) das Volumen umgekehrt proportional ist dem Drucke, der von außen auf das Gas wirkt, oder dem als „Spannkraft“ des Gases entgegenwirkenden gleichem inneren Druck (BOYLE-MARIOTTES Gesetz, vgl. § 45).

Der Begriff „Masse“ ist auf Flüssigkeiten und Gase ebenso anwendbar wie auf feste Körper. Z. B. Ein Wasserwagen setzt (ebenso gut wie z. B. ein Eisenwagen) einer beschleunigenden Kraft um so größeren Beharrungswiderstand entgegen, je mehr Wasser er enthält. Bei Windmühlen äußert sich der Bewegungswiderstand der bewegten Luft ebenso als „Stoßkraft“ wie der des Wassers bei einem Wasserrade oder wie der einer festen Kugel u. d. d.

Die den Flüssigkeiten und Gasen (also den „Flüssigkeiten“ im weiteren Sinne) gegenüber den festen Körpern charakteristische Eigenschaft der „Verschiebbarkeit“ darf also nicht dahin mißverstanden werden, als ob die Verschiebung je eines Teiles der Flüssigkeit von mg Masse mit b Beschleunigung nicht ebenso eine Kraft von $k = mb$ Dyn wie bei einem Punkt oder einem festen Körper. Nur zur gegenseitigen Verschiebung der Teile, sei es längs ihrer Berührungsfläche, sei es normal zu dieser Fläche im Sinne des Auseinanderrückens der Teile, bedarf es nicht noch einer weiteren Kraft.

Auch Gewicht besitzen die Flüssigkeiten und Gase, wie uns für gewöhnliche Erfahrungen geläufig ist (Verhalten von Flüssigkeiten in

ist (GALILEI vertrieb durch Erwärmen einen Teil der Luft aus einer Flasche und wog diese vor und nach dem Erwärmen).

In den dem II. Abschnitte, der Mechanik starrer Systeme (Geomechanik), ordinierten Abschnitten III (Hydro-) und IV (Aeromechanik) werden die mechanischen Erscheinungen an Flüssigkeiten und Gasen nur mit demjenigen Maße von Annäherung beschrieben und erklärt, welches die in den Definitionen vollkommener Flüssigkeiten und vollkommener Gase liegenden Fiktionen gestatten. Je weiter gehenden Annäherungen an die wirklichen Körper bleiben dem Abschnitte (Mechanik der sogen. Molekularwirkungen) vorbehalten.

III. Hydromechanik.

§ 36. Die Prinzipien der Hydromechanik.

Geschichtliches. ARCHIMEDES hat (wie die Geostatik durch seine Theorie des Hebers und die Sätze über die Schwerpunkte) die Hydrostatik wissenschaftlich gegründet. Noch heute nennt man das die Tragfähigkeit der Flüssigkeiten betreffende Gesetz das „Archimedische Prinzip“ (§ 40), welches aber nicht im eigentlichen Sinne ein „Prinzip“, sondern nur eine besondere Anwendung der auch von ARCHIMEDES schon viel allgemeiner untersuchten Gleichgewichtsbedingungen der Flüssigkeiten darstellt. — STEVIN (1548 bis 1620) fand auf eigenen Wegen die gleichen Gesetze der Hydrostatik und deren Ableitungen wieder. PASCAL (1623 bis 1662) brachte die Entdeckungen von ARCHIMEDES und STEVIN in systematisch-aktiven Zusammenhang. —

ARCHIMEDES' Gesetz über die Tragfähigkeit der Flüssigkeiten stellt uns die auffallendsten Beispiele für die Verschiedenheiten zwischen dem mechanischen Verhalten flüssiger und fester Körper dar. Ein festes Holzgerüst vermag bis zu einer gewissen Zahl von Tonnen zu tragen, ganz oder beinahe unabhängig von deren Gestalt und Dichte; Wasser trägt zwar das größte Panzerschiff, aber nicht das kleinste massive Eisenstückchen. Die Tragfähigkeit der Flüssigkeiten hängt somit nicht vom absoluten, sondern vom mittleren spezifischen Gewichte des zu tragenden Körpers ab. — Wir werden aber eine solche Gesetzmäßigkeit nicht als ein letztes Gesetz hinnehmen wollen, sondern suchen eine Erklärung hierfür in einfacheren und allgemeineren Gesetzen, deren einfachste dann die Prinzipien der Hydromechanik darstellen (vgl. § 15 und § 26). — Ein zweites Beispiel für Eigentümlichkeiten im Verhalten der Flüssigkeiten bieten die (nur ihrer Gewöhnlichkeit wegen nicht als paradox auffallenden)

Erscheinungen an kommunizierenden Gefäßen: So alltäglich die Erfahrung ist, daß in Gefäßen („Schenkeln“), deren untere Teile miteinander in Verbindung stehen („kommunizieren“, ähnlich wie in Fig. 150), nur dann Gleichgewicht herrscht, wenn die gleiche Flüssigkeit in beiden Schenkeln gleich hoch steht, und daß hierfür die Weite und sonstige Gestalt der Schenkel ohne Einfluß ist, so könnte dies doch überraschen, wenn wir bedenken, daß das absolute Gewicht der Flüssigkeit in einem sehr weiten

Schenkel viel größer ist als im engen. Wäre z. B. statt des wagrechtendungsrohres ein gleicharmiger Hebel angebracht, so stände dieser unter ungleichen Belastungen nicht im Gleichgewichte. Warum drückt denn aber die Flüssigkeitsmenge des weiten Gefäßes nicht stärker gegen das engere hin? daß dies nicht geschieht, erkennen wir wenigstens so viel (vorbehaltlich Fragen nach dem „Warum?“), daß jedes vertikal, schief oder horizontal gedachte Flächenstückchen (Fig. 149) von beiden Seiten her gleichem Druck erfährt. — Zunächst als eine Verallgemeinerung dieser und ähnlicher Überlegungen haben wir aufzufassen

STEVINS Satz: Ein auf eine tropfbare Flüssigkeit ausgeübter Druck pflanzt sich nach allen Richtungen, u. zw. auf gleiche Fläche mit gleicher, auf n -fache Flächen mit n -facher Stärke

Die Kraft, welche speziell in dem Beispiele der kommunizierenden Gefäße auf die Flüssigkeit wirkt, ist deren eigenes Gewicht. —

Fig. 149.

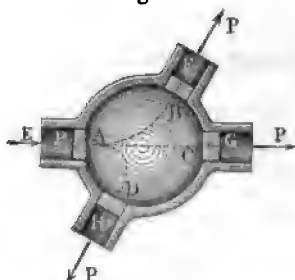


Fig. 150.



auch für einen von außen her auf die Flüssigkeit ausgeübten Druck gilt STEVINS Satz, wie sich am auffallendsten an der hydraulischen Presse (nach dem Schema Fig. 150, ähnlich Recknagels Apparat) zeigt. Sind hier die Querschnitte des Press- und des Druckkolbens B und b so herrscht an der Presse Gleichgewicht, wenn für die drückende Kraft P den Widerstand der zu pressenden Last Q gilt: $P:Q = b:B$. — Daher ist leicht zu zeigen, daß für diese (wie für jede andere) hydraulische Maschine das Gesetz der Erhaltung der Arbeit ebenso gilt wie für die geometrischen Maschinen.

Ist nun STEVINS Satz ein „Prinzip“, d. h. ein letztes, nicht weiterführbares Gesetz? — Man kann es, wenn man das Gesetz der Erhaltung der Arbeit schon als allgemein, also auch für Flüssigkeiten, gültig annimmt, als besonderen Fall auffassen. — Man kann aber STEVINS Satz auch noch verständlich machen aus den beiden charakteristischen Eigenschaften, welche wir der Fiktion einer vollkommenen Flüssigkeit zu Grunde gelegt (§ 35). Denken wir uns nämlich die Konstanz des Volumens und die Unverschiebbarkeit einer solchen Flüssigkeit z. B. nachgeahmt durch eine vollkommen harte und glatte Kugeln, die ein Gefäß von starren glatten Wänden erfüllen, so wird jeder auf die Kugeln ausgeübte Druck (sei es von außen, infolge ihres eigenen Gewichtes) sich nach allen Richtungen fortpflanzen, wenn z. B. die Kugeln von oben gedrückt werden, sie auch nach der Seite hin sogar selbst wieder nach oben zu entschlüpfen versuchen (— infolge Kräftezerlegung?). — Doch ist gegenüber diesem Gleichnis festzuhalten, daß diejenigen inneren Kräfte in einer wirklichen Flüssigkeit, welche deren Ver-

STEVINS Satz bedingen, höchst wahrscheinlich von ganz anderer Natur sind, als sie jenen fingierten harten Kugeln zukommen. Für jetzt wird er in der Tat STEVINS Satz — gleichviel, ob und wie er selbst noch weiter zu machen ist — als ein Satz bewähren, aus dem sich die Erscheinungen ableiten lassen; sobald sie als vollkommene fingiert werden, mit mathematischer Genauigkeit ableiten lassen; weil ihn PASCAL an die Spitze seiner deduktiven Darstellung gestellt hat, wird der Satz häufig als „Pascals Prinzip“ bezeichnet. —

„Prinzipien der Hydromechanik“, aus denen sich alle mechanischen Erscheinungen an vollkommenen Flüssigkeiten ableiten lassen, 1. Galilei-Newtons allgemeine Prinzipien der Mechanik des Festen (§ 15); 2. Stevin-Pascals Satz über die Fortpflanzung des Drucks in Flüssigkeiten; 3. die dem Begriffe „vollkommener Flüssigkeit“ zu Grunde gelegte Eigenschaft der Unzusammendrückbarkeit (Kompressibilität) des Volumens vom Drucke, $v = \text{Konst.}$

werden in diesem Abschnitte hauptsächlich Erscheinungen untersucht, bei denen die auf die Flüssigkeit wirkende Kraft ihre eigene Schwere ist, die aber namentlich als Druck nach abwärts, seitwärts, aufwärts, sowie in den verschiedenen Strömungen auftritt. Über die Erscheinungen, welche nach dem Pascals Satze sich überdies durch die Wirkung der Molekularkräfte (Kohäsion, Adhäsion, Endosmose u. dgl.) ergeben, vgl. Abschnitt V, § 55).

§ 37. Druck nach abwärts. Bodendruck.

Ein lotrecht zylindrisches Gefäß von $b \text{ cm}^2$ wagrechter Bodenfläche bis zur Höhe $h \text{ cm}$ mit einer Flüssigkeit vom spez. Gew. s gefüllt, so beträgt das absolute Gewicht der Flüssigkeitssäule $p = b h s g$ (Kraftgramm). — Man wird

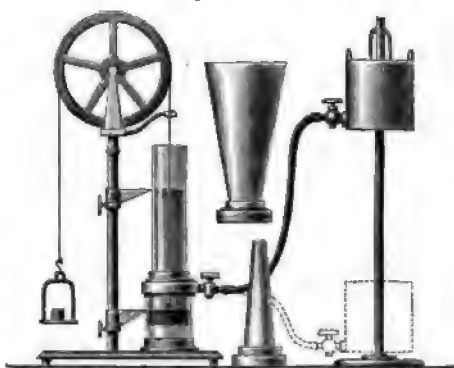
zunächst nichts anderes erwarten, als auch die Kraft p' , mit welcher die Flüssigkeit den Boden des Gefäßes und mit der das gefüllte Gefäß auf einer ebenen Unterlage (Tischplatte, Waagschale u. dgl.) drückt, jenem absoluten Drucke p einfach gleich sei; und entsprechend werden wir bei einem sich erweiternden Gefäße bei vergrößerter b und h einen größeren, bei sich verengenden einen geringeren Druck als p erwarten.

Diese Erwartung wird in den meisten Fällen nicht erfüllt, wenn der Boden in Bezug auf die

festen Seitenwände beweglich ist (als Kolben nach Fig. 151 — oder auch durch einen Verschluss an dem einen Arme einer Schnellwaage). Für einen solchen „Boden“ ergeben nämlich zunächst Versuche das Gesetz:

Der Bodendruck, den eine Flüssigkeit auf eine wagrechte Unterlage ausübt, ist gleich dem absoluten Gewichte einer allseits lot-

Fig. 151.



recht begrenzten Flüssigkeitssäule, deren Grundfläche die gedrückte Fläche und deren Höhe (Druckhöhe) der Abstand dieser Fläche vom Flüssigkeitsspiegel ist. — Es hängt also der Bodendruck $p = \rho h$ (LA 116) nur von der gedrückten Fläche b , der Druckhöhe h und dem spezifischen Gewichte der Flüssigkeit ρ , nicht aber von der Gestalt der Seitenwände des die Flüssigkeit umgebenden Gefäßes ab.

Die letztere Unabhängigkeit ist so überraschend, daß man sie als „hydrostatisches Paradoxon“ bezeichnet hat. — Dabei scheint zunächst noch der Fall eines sich nach oben erweiternden Gefäßes leicht so zu erklären, daß der Druck deshalb nicht größer sei, als es der vertikal über dem Boden stehende zylindrischen Säule entspricht, weil der Druck der außerhalb dieses Zylinders liegenden Flüssigkeit durch die schiefen Gefäßwände gleichsam aufgefangen wird. Diese Erklärung läßt uns aber im Stich (und sie kann daher überhaupt keine ganz zureichende sein) bei dem nach oben sich verengenden Gefäß oder einem Gefäß von der Form in Fig. 152, in welchem über einer beliebig großen Grundfläche $AB = b \text{ cm}^2$ eine beliebig dünne Schicht von diesem großen Gefäß darüber in einer Röhre eine hohe Säule mit beliebig kleinem Querschnitt β steht. Auch diese am meisten paradoxen (und mit ihm auch die beiden anderen Fälle erklären sich aber als Folge des Stevinschen Prinzips: Lastet nämlich auf dem Flächenstück $MN = \beta \text{ cm}^2$ (Fig. 152) der Druck $p = \rho h s$ und betragt die Bodenfläche $AB = b = n \cdot \beta \text{ cm}^2$, so erfährt sie einen Druck $P = n \cdot \rho h s = n \beta \cdot h s = b h s$, der also ebenso groß ist, wie wenn sich über der Flüssigkeitszylinder $ABCD$ befände. — Doch gibt auch diese arithmetische Begründung noch keinen vollen Einblick in die physikalischen Ursachen, was der Druck p auf die n -fache Fläche sich ver- n -facht. Wir gewinnen diesen Einblick aus folgenden weiteren

Versuchen: Statt wie in Fig. 151 den Kolben beweglich und die Gefäßwände fix zu wählen, ist in den Apparaten Fig. 153 bis 155 der Kolben fix

Fig. 152.

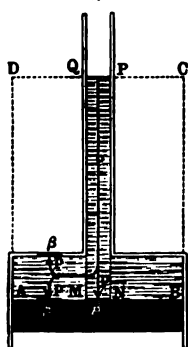


Fig. 153.

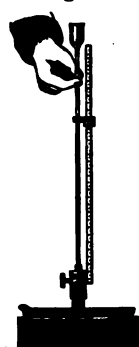


Fig. 154.

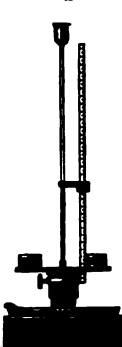
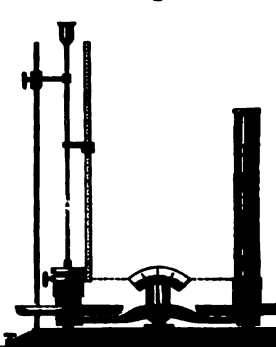


Fig. 155.



lange er auf der Tischplatte steht), und über ihn läßt sich Quecksilberdicht weitere Rohr vom Querschnitt $b \text{ cm}^2$ mit der engen Fortsetzung nach oben $\beta \text{ cm}^2$ Querschnitt schieben. Wird hier von oben Quecksilber eingegossen, so hebt es diese beweglichen Teile; und erst wenn diese mit der Hand herabgedrückt werden, steigt das Quecksilber in der engen Röhre empor: hiermit wird es aber auch begreiflich, daß von dem nach abwärts gerichteten Drucke

und sich etwas auf den festen Kolben fortpflanzt. Wird der Kolben statt auf die Tischplatte auf eine Wagschale gestellt (Fig. 155), so ergibt sich dieser Druck (abgesehen von der Reibung der weiten Glasröhre an dem Kolben) als gleich dem einer vollen Quecksilbersäule von der Basis b und der Druckhöhe h . — Statt den Druck nach abwärts durch die Hand auszuüben, kann er auch durch Gewichte (Fig. 154), die auf den breiten Teil der Röhre gelegt werden, oder durch einen auf der Tischplatte stehenden Träger (Fig. 155, der aber dann nicht zu leicht sein darf) ausgeübt werden. In diesem letzteren Falle sind auch mit dem Träger auch wieder die Röhrenwände fix und der auf der Wagschale stehende Kolben wieder beweglich — wie beim Kolben in Fig. 151.

Dafs endlich für zylindrische Gefäße (oder für die Säule $MNPQ$) der Bodendruck wirklich einfach gleich dem absoluten Gewichte bhs ist, läßt sich nicht selbst erst wieder aus dem Stevinschen Prinzipie ableiten; sondern diese Gleichheit von Bodendruck und Gesamtgewicht muß vielmehr ebenso als eine Erfahrungstatsache hingenommen werden, wie die, dafs eine Säule von festen Körpern (z. B. Damenbrettsteinen) auf die Unterlage mit dem Gesamtgewicht drückt, welches gleich ist der Summe der Gewichte aller einzelnen Körper.

Der bisher betrachtete Bodendruck ist nur ein besonderer Fall auch durch das Innere einer Flüssigkeit sich fortpflanzenden Schweredruckes nach abwärts. Unter der Annahme von parallelen und mit der Höhenlage konstanten Schwerkraften (d. i. eines Galileischen Kraftfeldes“, § 20, was also nicht zu grofse wagrechte und lotrechte Ausdehnungen voraussetzt) erfährt in h cm unter der begrenzten Oberfläche einer Flüssigkeit vom spez. Gew. s (g per cm^3) die wagrechte Fläche von b cm^2 einen vertikalen Druck $p = bhs$ g.

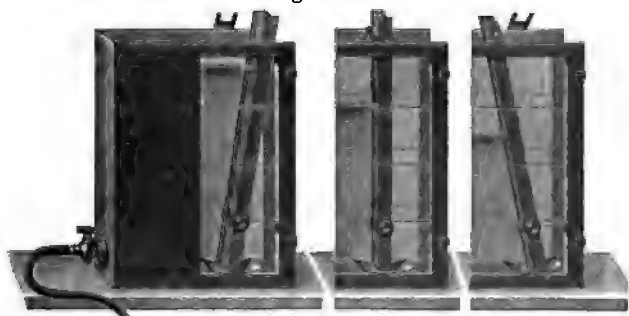
Von dem auf der Flüssigkeit in der Regel lastenden Luftdruck ist hier abgesehen (— warum stört er nicht z. B. obige Versuche?).

§ 38. Druck nach seitwärts und aufwärts.

Der infolge der Schwere zunächst nach abwärts gerichtete Druck pflanzt sich nach STEVINS Satz auch seitwärts und aufwärts so fort, als ein in der Tiefe h unter dem Flüssigkeitsspiegel liegendes Flächenstückchen β wieder den Druck βhs erfährt.

Speziell beim Druck nach seitwärts können wir annehmen, dafs ein Flächenstückchen β in einer bestimmten „Druckhöhe“ oder „Tiefe“ liegt, wenn β selbst nach der Höhe unendlich schmal ist. Denn der Druck auf den unteren

Fig. 156.



Rand ist wegen der stetigen Zunahme des seitlichen Druckes immer schon größer als der auf den oberen Rand. — Daher liegt auch der Angriffspunkt Resultierenden aller Seitendrucke auf eine vertikale rechteckige Gefäßwand nicht in deren Hälfte, sondern im ersten Drittel der Höhe h von unten. (Versuch: Ist die Seitenwand um eine wagrechte Achse drehbar, so wird die obere, bezw. untere Teile nach auswärts gedrückt, je nachdem Wasser zu mehr oder weniger als dem Dreifachen des Abstandes der Achse vom Boden des Gefäßes eingefüllt ist, Fig. 156 a. v. S.) Erklärung nach Analogie der § 110. LA 110. punktsbestimmung des dreikantigen Prismas. LA 110.

Der Druck nach aufwärts zeigt sich am auffälligsten bei GRAVE'SCHEM Versuch (Fig. 157), bei dem eine beiderseits offene Röhre unten durch eine

Fig. 157.



Platte (aus Glas, Glimmer oder aus Holz vom spez. Gew. größer als die der Flüssigkeit) geschlossen ist. Der Druck rührt her von der die Röhre umgebenden Flüssigkeit, ist aber seiner Größe nach unabhängig von der Menge, d. h. von der Weite und den Seitenwänden des äußeren Gefäßes. Dafs der hier auf eine Fläche b von unten nach oben wirkende Druck gleich ist dem Bodendruck, läfst sich durch den Versuch zeigen, indem die Platte, sobald die Röhre bis zum äufseren Niveau mit Flüssigkeit gleichem spezifischen Gewichte gefüllt ist. Wir erwarten die Sache gar nicht anders, falls wir an dem Versuch die unwesentliche Änderung anbringen, dafs wir beim Eintauchen die Röhre nicht ganz verschliessen, wobei sich die Flüssigkeit so hoch stellt wie ausen, und erst jetzt durch seitliche Verschiebung die Röhre ganz verschliessen. — Ist aber hier erkannt, dafs die Platte durch den Druck des Wassers in der Röhre nicht herabgedrückt werden kann, weil es die Flüssigkeit aufserhalb der Röhre ist, die durch ihren nach abwärts, seitwärts und aufwärts sich fortpflanzenden Druck jenem Bodendruck das Gleichgewicht hält, wird es auch verständlich, dafs dieses Gleichgewicht dann noch weiter besteht, wenn wir die innere Flüssigkeit beseitigen und anstatt ihrer einen beliebigen anderen flüssigen oder festen Körper von gleichem absoluten Gewicht G in die Röhre drücken lassen: worin schon der Grundgedanke der Erklärung des ARCHIMEDISCHEN Gesetzes liegt, § 40.

§ 39. Innendruck. Gestalt der Flüssigkeitsoberfläche kommunizierende Gefäfsse.

Versuch. An ein beiderseits offenes Glasrohr ist eine mit gefärbtem Wasser mit Quecksilber . . . gefüllte Blase gebunden. Je tiefer sie in Wasser taucht, um so höher steigt die Flüssigkeit der Blase im Rohre empor. Ebenso erfährt ein Teil der Flüssigkeit selbst einen Innendruck von allen Seiten her, dessen Betrag gleich ist derjenigen des in der jeweiligen Tiefe herrschenden Boden-, Seitendruckes. Da eine lotrechte Wassersäule von 1 cm^2 Querschnitt und einer Höhe ein Gewicht von 1 kg hat, so herrscht in 10, 20, . . . 2000 m Tiefe dem Meeresspiegel von seiten des Wassers ein Innendruck von 1, 2, . . . 200 at, d. i. nahe von 1, 2, . . . 200 at (§ 44), zu dem dann noch je 1 at Luftdruck kommt.

Unter Rücksicht auf alle Druckkräfte, die eine Flüssigkeitsmenge zu allen Seiten von der Schwerkraft abwärts, seitwärts, aufwärts, dann auch von

Merer Kräfte, z. B. der Fliehkraft, Kapillarität . . . erfährt, gilt schließlic
gende

Allgemeine hydrostatische Bedingung für die Gestalt
der Flüssigkeitsoberflächen: Die Teilchen an der Oberfläche
der Flüssigkeitsmenge sind nur dann im Gleichgewichte, wenn
Resultierende aller auf sie wirkenden Kräfte auf jedem Ober-
schenelement normal steht. — Speziell für die lotrechte (verti-
ale) Schwerkraft muß also die Flüssigkeitsoberfläche überall wag-
recht (horizontal) sein; für die als homogene ruhende Kugel gedachte
Ist sie eine Kugelfläche. — Bleilot, Wasserwage (§ 20).

Über die Gestaltsveränderungen unter Einfluß von Zentrifugalkräften vergl.
42. — Über den ursprünglich nur auf Flüssigkeitsoberflächen angewendeten, LA 42.
aber sehr allgemein gebrauchten Ausdruck **Niveauflächen** vergl. § 24. In einer sowohl an der Oberfläche wie
Im Innern im Gleichgewichte stehenden Flüssigkeit bilden
die Richtungen der jeweiligen Resultierenden aller
Ist die Kraftlinien zu diesen Niveauflächen. — Ist diese
Gleichgewichtsbedingung nicht erfüllt, so treten an
der Oberfläche und im Innern der Flüssigkeit Bewegungen
b; über einige der einfachsten „hydrodynamischen“
Griffe und Gesetze vergl. § 42. Bei einer jener Bedingung
Ist entsprechenden Anordnung der Flüssigkeit wie in
Fig. 158 tritt aber der Übergang nur zum kleineren Teil
dem Vorbilde des Gleitens über schiefe Ebenen
a, dagegen in der Hauptsache durch Ausgleich der Druckhöhen Fig. 159.
in kommunizierenden Gefäßen. Die entsprechenden Gleich-
gewichtsbedingungen für diese lauten:

Fig. 158.

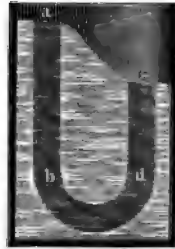


Fig. 159.



LA 111.

I. Befindet sich in beiden Schenkeln eines Kommu-
nikationsgefäßes die gleiche Flüssigkeit, so ist diese nur
dann im Gleichgewichte, wenn sie in beiden Schenkeln
gleich hoch steht, d. h. wenn die beiden Flüssigkeitsober-
flächen in derselben wagrechten Ebene liegen.

II. Befinden sich in beiden Schenkeln eines Kommu-
nikationsgefäßes verschiedene (sich nicht mischende)
Flüssigkeiten, so sind diese nur dann im Gleichgewichte,
wenn die von der wagrechten Trennungsfäche beider
Flüssigkeiten an gemessenen Höhen der Flüssigkeits-
säulen sich umgekehrt verhalten wie deren spezifische
Gewichte (Fig. 159).

Hier ist das Gesetz I nur ein spezieller Fall von II; letzterer
ist besonders wichtig für die Erklärung des Toricellischen Versuches,
44. Warum muß auch hier die Trennungsfäche der beiden Flüssig-
keiten (bei B) immer wagrecht sein? (LA 111.)

§ 40. Archimedisches Gesetz. Schwimmen.

Geschichtliches. Über den Anlaß, bei welchem ARCHIMEDES das n benannte Gesetz entdeckte und eine darauf sich gründende Methode zur mung von spezifischen Gewichten erfand, berichtet VIRROV: König Hiero einer vorgewogenen Menge Gold eine Krone anfertigen lassen, und da mutete, daß minderwertiges Metall mit verwendet worden sei, den An um ein Mittel zum Nachweis der Unechtheit angegangen. „Dieser, dam beschäftigt, bemerkte beim Baden, daß das Wasser in gleichem Maße Wanne austrete, in welchem er seinen Körper mehr und mehr in dieselb liefs. Sobald er nun auf den Grund [vergl. über das Unzureichende d richtes den folg. §] dieser Erscheinung gekommen war, verweilte er nich sondern sprang von Freude getrieben aus der Wanne“, sein berühmt ge *εὕρηκα* (heureka, ich habe es gefunden) ausrufend. — Wir sprechen d Gesetz allgemein so aus:

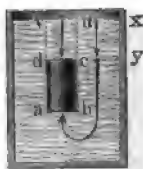
Ein in eine Flüssigkeit getauchter Körper erfährt (so einen Gewichtsverlust, in Wirklichkeit) einen Auftrieb an Größe gleich, an Richtung entgegengesetzt ist dem G der verdrängten Flüssigkeitsmenge. Dabei macht es keinen schied, ob der Körper, falls er einmal ganz in die Flüssigk getaucht ist, unmittelbar an oder beliebig tief unter der fläche liegt.

Zur Erklärung: Ist der „eingetauchte Körper“ $abcd$ 1. ein bis an d fläche reichender Teil der Flüssigkeit selbst (Fig. 160), so wir

Fig. 160.



Fig. 161.



Gewichte nach § 38 das Gleichgewicht durch den Druck nach aufwärts, wel Grundfläche ab dadurch erfährt, daß sich der rings um $abcd$ liegenden Flüssig folge ihres Gewichtes nach abwär geübte Druck nach allen Seiten fortpp erklärt sich also zunächst die allbekannte daß jede Flüssigkeit trotz der Leichtverm keit ihrer Teilchen gerade so viel Tragk

um jeden beliebigen Teil ihrer selbst zu tragen. — Da es nun aber Raum $abcd$ umgebende Teil der Flüssigkeit ist, der als Träger wirkt, so für den Fall 1 gegebene Erklärung auch, wenn der Raum $abcd$ 2. dur anderen Stoff als durch die Flüssigkeit selbst erfüllt ist, und zwar dur von ebenso großem oder durch einen von größerem oder kle spezifischen Gewichte. — 3. Denken wir uns auf den Körper $abcd$ Flüssigkeit in Fig. 160 noch eine Flüssigkeitsschicht von beliebiger Höhe (Fig. 161) gegossen, so erfährt jetzt der nicht mehr an der Oberfläch liche Körper $abcd$ einen um den Bodendruck von $cdvu$ größeren Dru, abwärts, aber auch der auf ab wirkende Druck nach aufwärts wird der Vermehrung des Gewichtes der umgebenden Teile (z. B. durch cu ebenso viel größer. — 4. Hat der eingetauchte Körper irgend eine als die bisher angenommene cylindrische Gestalt, so kann man ihn i unendlich schmale vertikale Prismen zerfällt denken, für deren jedes di gungen 1 bis 3 gelten.

Das Gesetz wurde auf ähnlichem deduktiven Wege von ARCHIMEDES gefunden und von STEVIN wieder entdeckt; nachmals ersann man auch direkte Versuche. Diesem theoretischen (sowie dem praktischen der Bestimmung spezifischer Gewichte, § 41) dient die *hydrostatische Wage*, d. i. eine Waage, deren eine Schale an kürzeren Schnüren und ihr gehört ein massiver Zylinder p , der genau den Inhalt eines Zylinders c ausfüllt. — *Versuch 1*: Wird c eine Wagschale gestellt (Fig. 162, oder unter sie p unter dieselbe Schale gehängt (an einem dünnen Faden die Wage äquilibriert und unter p ein Gefäß mit Wasser emporgehoben, so hebt sich p , als wenn es einen „Gewichtsverlust“ erlitten hätte, richtiger: als wenn das Gefäß eine gewisse Tragfähigkeit aufwiese, die aber von der Größe des Körpers sowohl ihrer jeweiligen Größe wie ihrem Gewicht nach verschieden ist. Wird das Gefäß so hoch gehoben, daß, wenn man zunächst durch einen Druck der Hand die Wage wieder ins Gleichgewicht setzt, p ganz in das Wasser taucht (gleichviel ob nur bis unter die Oberfläche), so läßt sich dieser Druck der Richtung und der Größe nach herstellen, daß das Gefäß c mit Wasser gefüllt ist (Fig. 163). — *Gegenversuch 2*: Da zu zeigen ist, daß das Wasser im Glas beim Einsinken des Zylinders einen ebenen Gewichtsverlust erleidenden Zylinders eine ebenso große scheinbare Gewichtszunahme erfahre, wird an einer anderen Wage (am bequemsten auf einer Waage) auf die eine Schale der Hohlzylinder, auf die andere das Wasser gestellt, tariert (am einfachsten durch Eingießen der richtigen Wassermenge) und in dieses Wasser der massive Zylinder an einem Faden herabgesenkt, weder die Hand oder ein Stativ trägt. Das Wasserglas sinkt, und Gleichgewicht tritt erst wieder ein, wenn der Hohlzylinder mit Wasser gefüllt ist (Fig. 164). — Als Verbindung der Versuche 1 und 2 *Versuch 3* nach Fig. 165. —

Fig. 162.

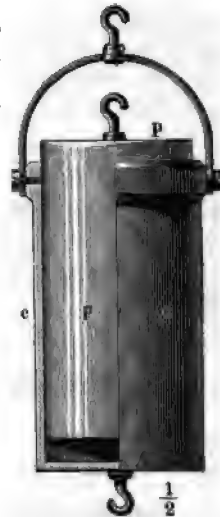
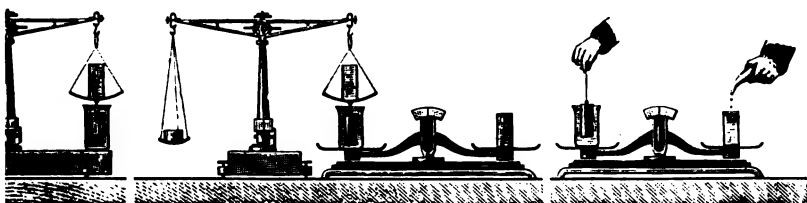


Fig. 165.

Fig. 164.



4: Ein Zylinder aus Holz von kleinerem spezifischen Gewichte als Wasser in ein Gefäß mit ebenem Boden gestellt, so daß zwischen diesem Boden und dem Zylinder nirgends Luft oder Wasser eindringen kann. Wird dann Wasser eingegossen, so steigt der Zylinder nicht empor, wiewohl er Wasser schwimmt. (Besser noch mit einem Kautschukpfropf, auf den Queck-silber eingegossen wird.) Dies liefert den Nachweis, daß es wirklich der von unten wirkende Druck des Wassers ist, welcher sonst den Auftrieb bewirkt. Die größte Verallgemeinerung findet das Archimedisches Gesetz, wenn nicht eingetauchte Körper von beliebiger Gestalt und beliebiger Massenverteilung, sondern wenn auch die Flüssigkeit aus Schichten verschiedener Dichtig-

keit besteht. Wie in diesem Falle das vertikal abwärts wirkende Gewicht Resultierende unendlich vieler an den einzelnen Teilen des Körpers angreifender Schwerkraft vorzustellen und zu berechnen ist, so auch die vertikal wirkende Kraft des Auftriebes. Da die Angriffspunkte beider Kräfte im allgemeinen zusammenfallen und auch die Kräfte nicht einander gleich sein werden, so der Körper im allgemeinen sowohl ein Bestreben zeigen, zu sinken oder zu steigen, wie auch sich zu drehen. Von den hieran sich knüpfenden Aufgaben sind die wichtigsten die über das

Schwimmen. Aufgabe: Ein gerades Prisma von $b \text{ cm}^2$ Querschnitt und $H \text{ cm}$ Höhe bestehe aus homogenem Stoffe vom spezifischen Gewichte s . Es tauche bei vertikaler Seitenkante bis zur Tiefe $h \text{ cm}$ in eine homogene Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte S . Welche vertikale Resultierende geben Gewicht und Auftrieb? An welcher Stelle? — Daraus folgt als spezielle Gleichgewichtsbedingung: $Hs = hS$; in Worten! Ist das Prisma bis zur Tiefe $h \leq \frac{s}{S} H$ eingetaucht (z. B. durch die haltende Hand), so nimmt es, wenn losgelassen, eine Bewegung nach abwärts, keine Bewegung oder eine Bewegung nach aufwärts an.

Dafs also im besonderen Falle $h = \frac{s}{S} \cdot H$ das Prisma sich weder nach abwärts bewegt, ist zwar eine notwendige, aber noch keine ausreichende Gleichgewichtsbedingung; denn bekanntlich bleibt z. B. eine hölzerne Stange, auch wenn sie zu jener Tiefe ins Wasser getaucht, nicht stehen, sondern legt sich um und schwimmt erst der Länge nach auf der Wasseroberfläche. Es mufs nämlich nicht nur die translatorisch wirkende Resultierende gleich Null sein, sondern auch das aus den in diesem Falle einander gleich grossen Kräften des Gewichtes und Auftriebes sich ergebende Kräftepaar ein Moment gleich Null sein. An allen Aufgaben über das Schwimmen der Körper sind also zu unterscheiden: LA 112. Tiefe des Einsinkens (z. B. von Kegeln, Kugeln ..., LA 112) und die Stabilität des Schwimmens. Jene Tiefe bestimmt z. B. den Tiefgang eines Schiffes, die Stabilität seine Sicherheit gegen das Kentern. — Tiefgang und Umkippen der Eisberge.

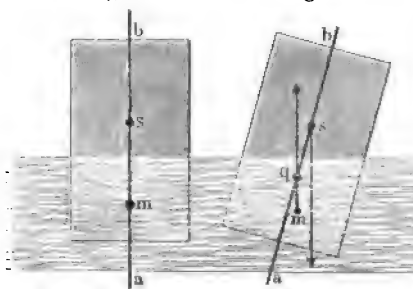
Die Stabilität ist im allgemeinen um so gröfser, je tiefer der Schwerpunkt liegt. [Die vollständige Formulierung ist

sich aus der Lage des Kräftepaars in Bezug auf den Körper, Fig. 166 und Fig. 167, welche Bedingungen sich dann allgemein mit Hilfe des Begriffes Metazentrum zusammenfassen lassen; LA 113. Deshalb werden die untersten Decks der Schiffe mit Lasten von grossen spezifischen Gewichte beladen, die Aräometer mit Blei oder Quecksilber beschwert.

Fig. 166.

Fig. 167.

LA 113.



Im besonderen gelten für homogene Flüssigkeiten und eintauchende Körper Gesetze: I. Derselbe Körper taucht in eine Flüssigkeit von größerem spezifischen Gewichte weniger tief ein. II. Von zwei auf derselben Flüssigkeit schwimmenden, räumlich gleichen Körpern taucht der von größerem spezifischen Gewichte tiefer ein. — Speziellere Erscheinungen: Der menschliche Körper schwimmt auf Wasser (namentlich bei fettleibigen Personen, und wenn die Lunge mit Luft gefüllt ist; über das künstliche Schwimmen siehe § 59). In der Gefahr des Ertrinkens sollte man nicht Arme und Beine aus dem Wasser strecken, sondern selbst den Kopf so weit eintauchen, daß nur der Mund noch über Wasser dringt in den Körper eines Ertrunkenen Wasser ein, so sinkt er auf den Grund; entwickeln sich später im Körper Fäulnisgase, so steigt er wieder an die Oberfläche. — Kartesianischer Taucher; Schwimmblase der Fische. — Kommt ein Körper aus dem Meerwasser in das weniger dichte Flußwasser, so sinkt es tiefer. Menschen schwimmen im Meerwasser leichter als im Flußwasser. Schiffe aus Eisen, Kupfer . . . Mittels hohler Fässer kann man versunkene Schiffe zu Tage fördern; Schwimmgürtel u. dergl. mehr.

41. Hydrostatische und andere Methoden zur Bestimmung spezifischer Gewichte.

Nach VITRUV'S Darstellung von der Entdeckung des Archimedischen Gesetzes (vgl. den vorigen §) hätte ARCHIMEDES zur Lösung der Aufgabe von der Krone ein Hiero gleiche absolute Gewichte von Gold und anderen Metallen in ein ganz mit Wasser gefülltes Gefäß getaucht und nur die Mengen, d. h. hier die Volumina, des jeweilig zum Ausfließen gebrachten Wassers gemessen. Da nämlich die Krone aus Gold einen kleineren Raum einnimmt, also auch ein kleineres Volumen Wasser verdrängt als eine aus irgend einem anderen der damals bekannten Stoffe bei gleichem absoluten Gewichte, so wäre dies allerdings ein primitives Mittel zur Lösung seiner Aufgabe und allgemeiner eine Methode zur Bestimmung spezifischer Gewichte. Eben hierzu aber wäre dann nicht Archimedes' Kunst über Gewichtsverluste nötig gewesen. Daher vermutete schon GALILEI, als sich Archimedes zur Bestimmung spezifischer Gewichte der hydrostatischen Wage bedient habe. Auch wäre das bloße Austreten des Wassers aus der Wanne für Archimedes wohl schwerlich überraschend gewesen, sondern es dürfte ihm auf dem Wege der an sich ganz alltäglichen Wahrnehmung sich die Einsicht aufgedrängt haben, „daß ein ins Wasser einsinkender Körper ein entsprechendes Wasserquantum verdrängt, gerade so, als wenn der Körper auf einer, das Wasser auf der andern Schale einer Wage läge“. —

Da das spezifische Gewicht eines Körpers gemessen wird durch $S = \frac{P}{V}$ (vgl. Ende; über die Einheiten dieser und ähnlicher Maßbestimmungen siehe unten), so erfordern die Methoden zur Bestimmung spezifischer Gewichte, selbst dem durch direkte Wägung zu findenden P auch noch V zu ermitteln. — Dieses Volumen kann entweder direkt, volumetrisch (bei regelmäßigen Körpern durch Berechnung aus gemessenen Längsdimensionen, sonst durch Eintauchen in kubisierte Gefäße) — oder aber indirekt, nämlich durch Bestimmung des scheinbaren Gewichtsverlustes im Wasser ermittelt werden. Denn 1 cm³ Wasser das Gewicht von 1 g hat, so ist die Maßzahl p des scheinbaren Gewichtsverlustes gleich der Maßzahl V des Volumens. Da nun im allgemeinen die Wage ein handsameres und empfindlicheres Werkzeug ist als die

Vorrichtungen für unmittelbare Volumenbestimmung, so ist die Bestimmung nach $S = \frac{P}{p}$ meistens zweckmäßiger als die unmittelbare Bestimmung nach $S = \frac{P}{V}$. — Im einzelnen gestaltet sich die Durchführung des Gedankens

Bestimmung des spezifischen Gewichtes A) mittels der statischen Wage. 1. Bei festen Körpern. Ist das Gewicht des Körpers P g, sein Gewichtsverlust in Wasser p g (also sein p cm³), so ist sein spezifisches Gewicht $s = \frac{P}{p}$.

Hier ist vorausgesetzt, daß a) $s > 1$. Ist also z. B. das spezifische Gewicht des Goldes oder einer Metalllegierung zu bestimmen, so wird der Körper auf die Wagschale gelegt und sein Gewicht P bestimmt; dann unter die Wagschale gehängt und, während er in Wasser taucht, das Gleichgewicht durch Legen von p g auf dieselbe Wagschale wieder hergestellt. — Ist b) $s < 1$ (einem Holzstück, so würde es auf dem Wasser schwimmen; es kann mit so viel vorher gewogenem Bleidraht umwickelt werden, daß es sinkt. — c) Würde sich der Körper im Wasser auflösen, so senkt man ihn in eine andere Flüssigkeit von bekanntem spezifischen Gewicht, in der er sich löst (z. B. Steinsalz in Terpentinöl).

Für mineralogische Zwecke wird manchmal noch das Gewicht angewendet, welches sowohl beim Bestimmen von P wie von p die Waage ersetzt, indem der Körper einmal außerhalb, einmal innerhalb (auf das Aräometer gelegt und dieses durch Zulegen von Tara, bezw. G Wasser bis zu einer bestimmten Marke zum Einsinken gebracht wird.

2. Tropfbare Flüssigkeiten. Von einem leicht zu reibenden Körper (z. B. einem Glastropfen mit Öse) hat man ein für den Gewichtsverlust in Wasser bestimmt; er sei z. B. q g Volumen q cm³). Erfährt nun dieser Körper in der zu untersuchenden Flüssigkeit einen Gewichtsverlust von p g, so ist ihr spez. Gew.

Fig. 168. B) Bestimmung des spezifischen Gewichtes von Flüssigkeiten mittels der Skalenaräometer. Diese sind verschlossene Glasröhren (Fig. 168), welche im oberen Teil eine Skala (LA 114) enthalten, an der man beobachten kann, tief das Instrument in verschiedenen Flüssigkeiten einsteckt. Der untere Teil enthält Quecksilber oder Schrote, damit das Instrument stabil schwimmt.

Die Aräometer werden häufig als Mittel zur Prüfung der Reinheit der Milch, des Gehaltes von Spiritus an Alkohol . . . verwendet, erfüllen aber diesen Zweck nicht zuverlässiger, als man es erwarten kann, auf die Art eines Stoffes aus seinem spezifischen Gewicht allein. — Die Skalen sind häufig schon mit Rücksicht auf die Art der zu prüfenden Flüssigkeit eingerichtet („Milch-, Wein- und andere) und entweder so bezeichnet, daß man an ihnen das spezifische Gewicht der Flüssigkeit oder ihren Gehalt an einem bestimmten Stoffe (Alkohol im Spiritus, Salz in den Salzen . . .) in Prozent

LA 114.



und 0° C., in der Chemie meist Wasserstoff oder OSTWALDS „Ne gas“ vergl. § 46) bezeichnet. Dieses Verhältnis $\delta = \frac{D}{d}$ ist dann unbenannte Zahl und ist unabhängig von den Massen- und Volumeneinheiten, in denen in gleicher Weise D und d gemessen waren.

Ähnlich wird als relatives spezifisches Gewicht $\sigma = \frac{S}{s}$ bezeichnet und es ist $\delta = \sigma$. — Im C-S-G-System ist die Dichte D maßzahlgleich mit der relativen Dichte δ gegen Wasser; denn hier ist die Masseneinheit 1 g so mit der Volumeneinheit 1 cm³ in Beziehung gesetzt, daß für Wasser $d = 1$ (Anh. 5. — In den älteren Maßsystemen galt diese einfache Beziehung nicht: so war das spezifische Gewicht des Wassers 56½, indem ein Kubikfuß Wasser 56½ Pfund wog).

Bei allen Bestimmungen des spezifischen Gewichts ist Rücksicht zu nehmen auf die Temperatur, da sich bei ungeänderter Masse mit steigender Temperatur das Volumen in der Regel vergrößert. Normaltemperatur wird dann meistens 0° C., beim Wasser häufig (genauer 4,1° C., entsprechend dem Dichtemaximum, § 73), bei festen Körpern die Zimmertemperatur (15° C.) zu Grunde genommen.

Dichten einiger fester und flüssiger Stoffe bei 0° C.

Kork	0,12 bis 0,24	Gold	19,25 bis 19,30
Lindenholz	0,44 „ 0,82	Platin	20,86 „ 21,05
Ebenholz	1,23		
Lithium	0,59	Schwefeläther	0,71
Natrium	0,97	Alkohol (absoluter)	0,79
Aluminium	2,67	Olivöl	0,92
Schwerspat	4,43	Destilliertes Wasser	1,00
Eisen	7,21 bis 7,79	Meerwasser	1,02
Kupfer	8,78 „ 8,88	Schwefelsäure (engl.)	1,84
Silber	10,47	Quecksilber	13,6
Blei	11,35	also annähernd	13,6

§ 42. Einige Bewegungserscheinungen an Flüssigkeiten

Im bisherigen wurden Bewegungen der Flüssigkeiten nur nebenbei erwähnt, wo sie der Herstellung eines Gleichgewichtszustandes voraus oder nachfolgten; z. B. die Bewegung des Wassers in der hydraulischen Presse, das Schwingen der Flüssigkeitssäulen in kommunizierenden Gefäßen, das Schweben des Flüssigkeitsspiegels bei den Versuchen über Bodendruck, das einfache und zusammengesetzte Archimedische Versuchsversuch (Fig. 165, S. 16) dergleichen mehr. — Von den Bewegungen der Flüssigkeiten haben diejenigen, die sich bei der Bewegung fester Körper zeigen, die für die Hydrodynamik charakteristisch sind, vor denen fester Körper voraus, bei welchen die Flüssigkeitsteilchen in Bezug aufeinander ihre Lage nicht ändern, z. B. die Bewegung der Flüssigkeiten in der rein fortschreitenden Bewegung frei fallende Wassermasse, ein flüssiger Weltkörper, an welchem bei konstanter Rotationsgeschwindigkeit zwischen den Fliehkraft und der gegenseitigen Massenanziehung der Teilchen sich ein Gleichgewicht hergestellt hat, wie beim Erdsphäroid. Sobald dagegen in

itsmenge, die sich als Ganzes bewegt oder in Ruhe ist, die einzelnen n in Bezug aufeinander Bewegungen annehmen, welche nur mehr an charakteristischen Eigenschaften der Flüssigkeiten [— Unzusammendrückbarkeit tropfbaren, Verhalten nach Mariottes Gesetz bei Gasen, § 45 und Leichtigkeit der Teilchen bei beiden] gebunden sind, treten so große Kompl der Bewegungen ein, „dafs wir jedesmal von neuem überrascht sind, r ein Gefäfs mit Wasser bewegen; ist die Wassermasse nur irgendwie ich, so geben die tumultuarischen Bewegungen, welche wir unwillkürlich en, immer Anlaß zu irgend einer Ungeschicklichkeit“. Von diesen gen der Flüssigkeiten (der tropfbaren und auch der gasförmigen) handelt lere die Hydrokinetik (gewöhnlich im engeren Sinne Hydrodynamik im Gegensatze zur bisher behandelten Hydrostatik. Von der Ver z der hierbei auftretenden Erscheinungen gibt ein praktisches Beispiel im ede Flufsregulierung, bei welcher es sehr schwierig ist, den Flufslauf so zu leiten, dafs nicht Versandungen, Auswaschungen der Ufer u. dergl. Im folgenden sollen nur einige der einfachsten Erscheinungen beob- id beschrieben werden.

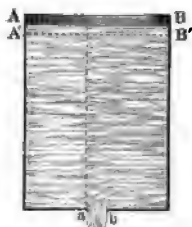
effliessen nach abwärts, seitwärts, aufwärts. Bei der ten Einrichtung eines Springbrunnens fließt aus dem egenen Behälter Wasser durch mehr oder minder steil abwärts e Röhren zu einem vertikal aufwärts gerichteten Ausflufsrohr. dieses steigt das Wasser annähernd bis zur Höhe des gkeitsspiegels im Behälter.

se kinetische Tatsache erinnert zunächst an die statische, dafs, wenn ufsrohr nach aufwärts bis über die Höhe des Wasserspiegels im Behälter t wäre, dann das Wasser im Rohre erst in dieser Höhe nach dem Gesetze munizierenden Gefäße zum Gleichgewicht käme (allerdings vorher diese Gleichgewichtstellung schwingend). — Statt die Geschwindigkeit, her das Wasser aus der Springbrunnenöffnung herausdringt, und mit der als vertikal aufwärts geworfener Körper bewegt, aus der Kraft des ischen Druckes zu erklären, können wir auch die Energie des bewegten der Erklärung zu Grunde legen, indem wir sagen: Das Wasser erreicht osinken durch jenen Höhenunterschied eine Geschwindigkeit, wie beim lle aus jener Höhe (LA 115, 116). Mit der so gewonnenen kinetischen LA 115, 116. vermag es sich also bis zu eben jener Höhe wieder zu erheben. Was an ag der Fallhöhe fehlt, ist als Arbeit bei der Überwindung jener Reibung, widerstandes und des Stoßes der Wasserteilchen verbraucht worden.

einer ganz ähnlichen energetischen Erklärung ver- ir nun auch die Geschwindigkeit des Aus- s nach seitwärts und abwärts. Von letzterem n besonderen

RICCELLIS Satz: Die Geschwindigkeit, mit jedes Teilchen einer Flüssigkeit durch eine führung im dünnwandigen Boden eines weiten (Fig. 170) vertikal abwärts austritt, ist der Geschwindigkeit, welche es beim Falle vom Flüssigkeitsspiegel bis zur

Fig. 170.



Öffnung erlangt hätte. — Auch dieses Gesetz zeigt sich in Wirklichkeit nicht rein; sondern die wirklich beobachtete (bzw. aus der Ausflussmenge pro 1 cm^3 Ausflussöffnung und 1 sec Ausflusszeit oder aus der Sprungweite eines horizontalen Strahles und der Tiefe des Falles (LA 15) zu berechnende) Ausflussgeschwindigkeit ist immer kleiner als die dem Torricellischen Ausflussgesetze entsprechende „theoretische“ Geschwindigkeit.

Fig. 171. Fig. 172. Wir erklären diesen Abgang zunächst wieder durch die Reibung und den Luftwiderstand, sodann aber auch daraus, dass wie sich (an einer etwa mit Sägespänen vermischten Flüssigkeit) direkt beobachten lässt, die Flüssigkeit im Gefäße beim Strömen gegen die Ausflussöffnung hin sich nicht in parallelen

Fig. 173.

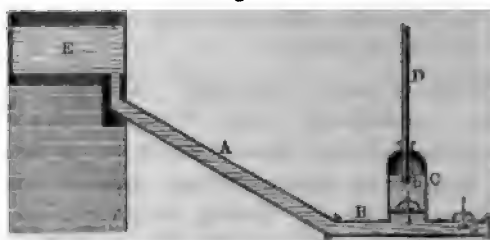
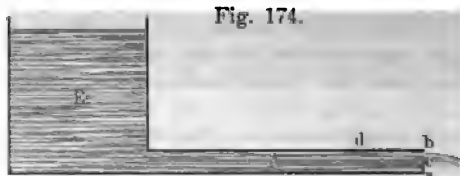


Fig. 174.



rechten Schichten vorwärts bewegt, sondern krummlinige Flüssigkeitsfäden bildet. Dies hat u. a. zur Folge, dass der Flüssigkeitsstrahl kurz nach seinem Austritte einen engeren Querschnitt zeigt als an der Ausflussöffnung. — Der weiterhin fallende Strahl weist (namentlich bei „stroboskopischer“ Beobachtung, psychol. Anh. Nr. 44) einen sehr komplizierten Bau auf; infolge der beschleunigten Bewegung (und der bei dünner werdendem Strahl immer merklicher hervortretenden Wirkung der Molekularkräfte, § 55) löst er sich in bestimmter

Tiefe in Tropfen auf, welche selbst wieder eigentümliche Schwingungen zeigen (Fig. 171, 172).

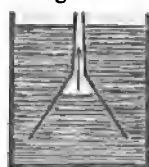
Wie vorsichtig man bei der Übertragung der allgemeinen mechanischen Gesetze auf die Bewegungserscheinungen an Flüssigkeiten sein muss, zeigt besonders auffällig MONTGOLFIERES hydraulischer Widder (Fig. 173). Hier fließt aus einem Gefäße Wasser durch eine wagrechte Röhre, strömt zunächst eine Zeitlang durch das Sperrventil 2, hebt und schließt aber dann dieses Ventil und strömt nun durch das Druckventil 1 in den Windkessel, von wo es durch ein Steigrohr zu einer Höhe gelangt, die beträchtlich größer ist als die, von der es gekommen ist. —

se Erscheinung scheint also dem Gesetze von der Erhaltung der Energie zu widersprechen; doch löst sich das Paradoxe, wenn wir bedenken, daß das beim Ventil ausgeflossene Wasser dafür eine viel geringere Höhe erreicht hat.

Es hat also eine Übertragung der Energie dieses gleichsam zu wenig gestiegenen Wassers auf das zu hoch gestiegene stattgefunden. — Solches findet schon in dem vereinfachten Falle (Fig. 174) statt, wenn das in A „in Schuß“ gekommene Wasser durch teilweises Verschließen der Öffnung $a c b$ aufgehalten wird und nun seine Energie auf den anderen Teil des Wassers überträgt, der kurze Zeit hindurch mit größerer Geschwindigkeit herausschießt, als der Druckhöhe entspricht.

Eine ähnliche Erscheinung zeigt sich auch bei dem folgenden Versuch (Fig. 175). Die enge Öffnung eines Trichters wird mit dem Finger verschlossen, dieser mit der weiten Seite unter Wasser getaucht und das Trichterrohr plötzlich frei gelassen: es schießt dann — freilich ebenfalls nur für ganz kurze Zeit — das Wasser in einem Strahle hoch über den Spiegel des umgebenden Wassers empor. Indem das äußere Wasser das unterhalb des Trichters befindliche beim Freilassen der Öffnung und Entweichen der Luft empodrückt, nimmt dieses infolge der nach oben immer kleineren Querschnitte des Trichters eine immer größere Geschwindigkeit an. —

Fig. 175.



Für einen allgemeineren Überblick über die Bewegungen von Flüssigkeiten empfiehlt sich das Auseinanderhalten zweier Grundformen: der Strömungen und der Wirbelbewegungen (welche zunächst rein phoronomische Zweiteilung durchaus analog ist der Unterscheidung von fortschreitenden und drehenden Bewegungen an starren Systemen). Beobachtet man z. B. einen auf oder in Wasser schwimmenden Strohhalm, so sieht man ihn teils rein fortschreiten, teils sich drehen (Translationen, Rotationen ausführen, § 26), und man kann hieraus auf die entsprechenden Bewegungen des Wassers nächst dem Halm schließen. — Zur näheren Charakteristik dieser beiderlei Bewegungen, die im Haushalte der Natur in mannigfachsten Rollen spielen, diene hier nur folgendes:

I. Strömungen. Nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch „strömt“ das Wasser in einem Fluß- oder Strombette, in Leitungsröhren u. s. f. — In einem Strombette mit teilweise sich verbreiterndem Querschnitte und teils mehr, teils weniger starkem Gefälle werden die Bahnen der einzelnen Teilchen, die „Stromfäden“ oder „Strömungslinien“, an breiteren Stellen auseinander weichen und damit die „Querschnitte“ (d. i. die Flächen, welche von allen Strömungslinien normal durchschnitten werden) größer. — So ist allgemein für jeden Teil der Flüssigkeit das Produkt aus Querschnitt und Geschwindigkeit an jeder Stelle des Stromes dasselbe.

Indem nämlich das Volumen der Flüssigkeitsmenge, die binnen je 1 sec durch einen solchen Querschnitt geht, auch beim Durchgange durch einen größeren (bzw. kleineren) gleich bleiben muß, erklärt es sich, daß die Geschwindigkeit an Stromengen größer und umgekehrt an Stellen, wo (z. B. wegen geringerer Neigung des Flußbettes) die Geschwindigkeit klein wird, der Stromquerschnitt groß wird. — Jene Bedingung wäre z. B. nicht mehr erfüllt, wenn es in den unteren Teilen des Stromgebietes ausgiebig regnete, so daß hier immer neue Wasser-

massen dem Strome zuwachsen, ohne daß seine Geschwindigkeit größer werden braucht. In der Tat bilden dann die neu hinzugekommenen Teilchen Stromfäden, die zum oberen Teil des Flusses nicht gehört hätten. Verwicklung ist ausgeschlossen bei

Stationären Strömungen. Wird in einem Flußbett, in Wasserleitungsröhre, durch welche an der einen Seite ebenso viel Wasser abfließt, als an der anderen abfließt, irgend eine bestimmte Stelle im Fluß gefaßt, so herrscht daselbst immer derselbe Bewegungszustand, wiewohl es immer andere und andere Teilchen sind, die dorthin herankommen und weggehen.

In diesem Begriff der stationären Strömung ist (zum Unterschied von dem Begriffe des stationären Zustandes, §§ 15, 17) übrigens nicht verlangt, daß die Bewegung jedes Teilchens konstante Geschwindigkeit habe; solche ist z. B. der Fall in denjenigen Teilen eines Mühlbaches, deren Bett nur gering geneigt ist, daß die jeweiligen Geschwindigkeitsverluste infolge Reibung durch die Schwerebeschleunigung gerade kompensiert wird. Die Strömung ist stationär auch an den viel stärker geneigten Stellen eines Mühl- oder Wildbaches, falls nur alle daselbst passierenden Flüssigkeitsteilchen zu allen Zeiten die gleiche Beschleunigung erhalten. Eine solche stationäre Strömung findet sich in einem Gefäße und Mündung nach Fig. 170 statt, falls durch nicht zu kleinen und nicht zu großen Zufluß dafür gesorgt ist, daß das Niveau im Gefäße auf derselben Höhe bleibt. Nicht stationär war dagegen das Empordringen des Wassers im Trichter (Fig. 175), indem hier ein auch nur kurze Zeit gleichmäßig anhaltendes Emporspritzen des Wassers dem Gesetz der Erhaltung der Energie widerspricht. Das Gesetz von der Konstanz des Produktes von Geschwindigkeit und Querschnitt gilt aber (abgesehen von der verzögernden Wirkung der Reibung) auch für dieses nicht stationäre Emporströmen; und dieses Gesetz gibt denn auch die augenscheinlichste Erklärung für das Wachsen der Geschwindigkeit des inneren, engeren Teiles des Trichters emporgetriebenen Wassers.

Ein besonderer Fall der (stationären, wie nicht stationären) Strömungen sind die **Zirkulationen**, bei welchen die Strömungslinien geschlossene Linien sind. — Beispiele im großen sind die Meeresströmungen, für Luftzirkulationen viele (in hinreichend großem Zusammenhange betrachtet sogar alle) Arten von Winden (§ 17).

Eine solche Zirkulation würde z. B. eintreten, wenn das Wasser in einem sich zurückkehrenden Rinne durch Umrühren längs der ganzen Rinne dadurch in Bewegung käme, daß auch nur an einer Stelle ein Schaufelrad eintauchte und durch eine äußere Kraft in Drehung erhalten würde: An

2. Stromwiderstände. *Versuch* (Fig. 176): Ist an einem großen Gefäße ein langes wagrechtes Ausflusrohr angebracht, von welchem aufwärts vertikale Manometerröhren abzweigen, zeigt sich an diesen ein Druckabfall im Niveau im Gefäße bis zur Mündung des Rohres. Dieser Abfall ist um so größer, je mehr die Reibung der Flüssigkeit im wagrechten Rohre vergrößert wird (Verlängerung, Verengung, Einführen von „Widerständen“ wie Schrote, Drahtspiralen u. dergl.).

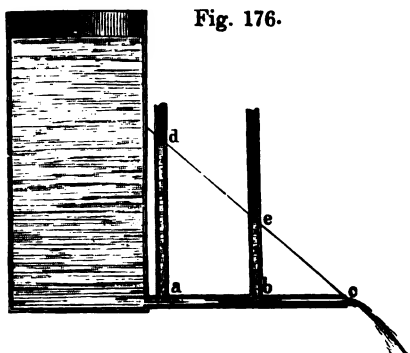


Fig. 176.

Im Gegensatze zu den bisher beschriebenen reinen Strömungen, bei denen der Teil der Flüssigkeit rein fortschreitende Bewegungen ausführt, zeigen sie überdies noch drehende Bewegungen der Flüssigkeitsteile bei den

II. Wirbelbewegungen. *Versuch*: Aus einem weiten Gefäße (Fig. 177) fließt Wasser, das vorher in Ruhe gewesen war, durch eine Bodenöffnung in der oben anlässlich des Torricellischen Satzes beschriebenen Weise ab. War vorher dem Wasser durch Umrühren mit der Hand eine Zuströmenlassen in tangentialer Richtung nur eine mäßige Rotation erteilt worden, senkt sich alsbald das Niveau über der Öffnung immer tiefer ein und es zieht sich bis zu einem „Wirbel“. (Da in seinem Innern Luft ist, erscheint er als Folge totaler Reflexion, § 104, silberglänzend.) Leichte Körperchen (Korkringe.), die auf dem Wasser schwimmen, werden mit großer Leichtigkeit in den Wirbel hinuntergezogen und gegen die Bodenöffnung gedrückt.

Fig. 177.



Ähnliche Erscheinungen in Luft: Rauchringe, wenn der Tabakrauch bei jeder Mundöffnung rasch herausgeblasen wird, vollkommener nachzuahmen mit Salpättern; bei Mörserschüssen (behufs „Wetterschießens“, § 194) wurde das Geräusch der emporsteigenden Wirbel bis zu 28 sec gehört. — Solche **Wirbelringe** stellen Wirbel dar, deren Achsen in sich zurücklaufen. Der einfachste Fall eines **Wirbels** (aber nicht **Wirbelringes**) ist z. B. das Wasser in einem Glase, das auf der Schwungmaschine in Rotation versetzt worden ist (LA 42). In der Umgebung eines Wirbels und speziell eines Wirbelringes kann die Flüssigkeit über eine Zirkulationsbewegung annehmen. — Über die umfassende Rolle, welche solche Wirbelbewegungen in der Natur spielen, vergl. § 191 (auch Thomsons Hypothese der Wirbelatome, § 57). — LA 117.

LA 117.

Praktische Anwendung fand die kinetische Energie strömenden Wassers von altersher in den (unter-, oberflächigen) Wasserrädern. Größer ist der Nutzeffekt in den Turbinen (Fig. 178 a f. S.), bei denen das Wasser zwischen schiefgestellten, unbeweglichen Schaufeln

so auf die ebenfalls schiefgestellten Schaufeln eines in horizontaler Ebene drehbaren Rades ausströmt, daß eine möglichst große Komponente nach waagrechter Richtung wirksam wird.

Fig. 178.

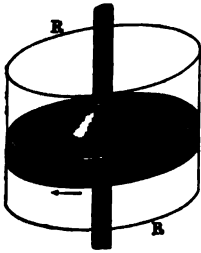
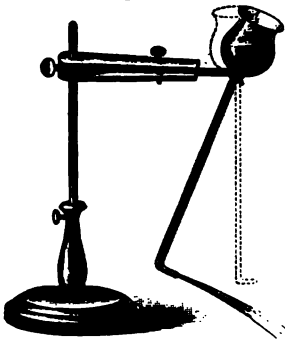


Fig. 179.



Vorbildlich für diese Einrichtung waren die Experimente des „Rückstoßes“ am Schneckenwerk. Behufs Erklärung dieser Erscheinung vereinfachen wir nach Fig. 179; hier erfahren alle seitlichen Stellen der Wand mit Ausnahme der Ausflußöffnung Druck, der sich gegenseitig aufhebt; nur der Druck auf der Wand gegenüber der Ausflußöffnung bleibt unkonstant und stellt die Röhre schief. — Beachten wir, daß das Zurückweichen der Röhre hinter die Stellung der Flüssigkeitsstrahl weit vor dieser Stellung tritt, so ergibt sich eine andere Erklärung des Gesetzes der Erhaltung des Schwerpunktes. Ähnlich lassen sich überhaupt die Bewegungen an Flüssigkeiten meist aus mehr oder weniger mechanischen Prinzipien verständlich machen.

Eine Umkehrung des Vorganges bilden die Mühlräder und Turbinen. Ähnlich lassen sich die Schaufelräder (FOULTON) und Schrauben (RUSSEL 1829) der Schiffe, indem hier diesen festen Schiffen vom Schiffe her Rotationen erteilt werden, eine relative Bewegung des ganzen Schiffes gegenüber dem Wasser eingelesen.

IV. Aeromechanik.

§ 43. Die Prinzipien der Aeromechanik.

Geschichtliches. Wiewohl auch jetzt noch im landläufigen Sprechen selten die „Luft“ als „Nichts“ behandelt wird, so reichen doch in das vorgeschichtliche Denken gegenteilige Erfahrungen zurück, in denen sich die Körper der Luft verrät: der Stoß des Windes, der um so größeren Widerstand leistet, je rascher man gegen sie läuft, Gebrauch der Segel, Einschließen von Tierblasen (Tierschläuche, Dudelsack), Luftblasen in Flüssigkeiten u. a. Heronsball, die Windbüchse von Ktesibios, Pumpbrunnen und Feuerspritzen aeromechanische Apparate aus dem Altertum. — Eine umfassende wissenschaftliche Beschäftigung mit mechanischen Erscheinungen an der Luft beginnt

nach GALILEIS Schüler TORRICELLI benannten Versuche (1643); bald darauf auf Veranlassung PASCALS (1648) die vorausgesehene Abnahme des Luftdruckes mit der Erhebung in höhere Schichten der Atmosphäre durch Anstellung des Torricellischen Versuches auf einem Berge bestätigt und auch sonst durch Pascal eine systematische Äëromechanik angebahnt. — „Die urwüchsigsten und erprobtesten Leistungen auf dem Gebiete der Äërostatik rühren von OTTO VON GUERICKE her.“ In seinem Buche (Magdeburgische Experimente, 1672) beschreibt er mannigfache Versuche, die er um 1650 (also bald nach dem Torricellischen Versuch und ohne von diesem zu wissen) angestellt hatte, und die namentlich in der allmählichen Vervollkommnung zur Konstruktion der Verdünnungsluftpumpe geführt haben. — Der Engländer ROBERT BOYLE hat GUERICKE'S Untersuchungen weitergeführt: er stellte auch zuerst (1661) das heute noch meist nach BOYLE (1672) benannte Gesetz fest.

Alle diese Entdeckungen waren an einer einzigen Gasart, der atmosphärischen Luft, gemacht. Erst ein Jahrhundert später untersuchten BLACK (1755) die „Kohlendioxid“ (CO_2) und CAVENDISH (1766) die „brennbare Luft“ (Wasserstoff, H); vergl. Chemie, § 207.

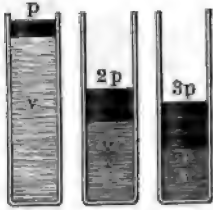
Wie schon Pascal den Torricellischen Versuch durch Vergleich mit dem Verhalten verschiedener Flüssigkeiten in kommunizierenden Gefäßen (§ 89) durchgeführt hatte, so wies die Erfindung des Luftballons (durch MONTGOLFIER 1783, LAMONTGOLFIER 1783, und CHARLES 1783, 28. August, der Wasserstoffgas benutzte) auf die Übertragbarkeit des Archimedischen Gesetzes von den Flüssigkeiten auf die Gase hin. Überhaupt bewährte sich im Verlaufe der Entwicklung der Äëromechanik Schritt für Schritt die Analogie zur Hydromechanik. —

Es liegt daher nahe, für eine deduktive Darstellung der Äëromechanik von STEVINS Satz auszugehen. Um dies aber wirklich als berechtigt zu betrachten, haben wir uns zu erinnern, daß STEVINS Satz bei Flüssigkeiten im gleichen Sinne (den tropfbaren) selbst schon eine Folge der beiden charakteristischen Eigenschaften dieser Flüssigkeiten 1. der Leichtverschiebbarkeit der Teilchen und 2. ihrer Unzusammendrückbarkeit war. Die erste dieser Eigenschaften nun haben zwar die Gase mit den tropfbaren Flüssigkeiten gemeinsam, an Stelle der zweiten aber tritt BOYLE-MARIOTTES Gesetz. — Denken wir uns also wieder ein Gefäß mit starren Wänden und einzelnen beweglichen Kolben von dem Gase gefüllt und auf einen der Kolben einen Druck von außen ausgeübt, so wird auf den anderen Kolben ein Gegendruck ausgeübt werden müssen, so daß im ganzen das Gas zwar eine Zusammendrückung erfährt, wegen der Leichtverschiebbarkeit der Teilchen aber doch erst dann im Gase Gleichgewicht eintritt, wenn an allen Stellen und also auch an den Kolben auf gleiche Flächen gleiche Drucke und daher auf einmal so große Flächen n mal so große Drucke ausgeübt werden. — Somit:

„Prinzipien der Äëromechanik“, aus denen sich alle mechanischen Erscheinungen an vollkommenen Gasen ableiten lassen, sind: 1. Galilei-Newtons allgemeine Prinzipien der Mechanik des Punktes (§ 15), 2. Stevin-Pascals Satz über die Fortpflanzung des Druckes in Flüssigkeiten, 3. Boyle-Mariottes Satz über die Abhängigkeit des Volumens der vollkommenen Gase vom Druck ($p v = \text{Konst}$ — vorgef. veranschaulicht durch Fig. 180, 181, 182 a. f. S.).

Die experimentelle Auffindung, bzw. Bestätigung dieser allgemeinen Prinzipien und aller speziellen äëromechanischen Gesetze gestaltet sich aber in der Wirklichkeit wesentlich anders als bei den Flüssigkeiten, insofern wir bei allen

Beobachtungen und Versuchen, die wir an der Erdoberfläche mit Gasen vor uns selbst schon auf dem Grunde des Luftmeeres befinden (wäre möglich, die Gesetze des Druckes tropfbarer Flüssigkeiten nach den in §§ angegebenen Methoden zu ermitteln, wenn wir uns mit unseren Apparat dem Grunde eines Wassermeeeres befänden?). — Hierzu kommt als zweite



mentelle Rücksicht die, daß wir schon die im Mariot Gesetze ausgesprochene erste grundlegende Eigenschaft Gase, ihr Verhalten gegen äußeren Druck, nicht in Figg. 180—182 fingierten reibungslosen Kolben, mit dem jeweilig herrschenden Luftdruck um ihm zu vergleichenden Quecksilberdrücken Säulen von Wasser, Glycerin . . . sind schon wegen größerer Länge viel weniger bequem. Aus diesen Gründen ist es üblich geworden, auch die systematische Darstellung der Äëromechanik mit der Messung des Luftdruck

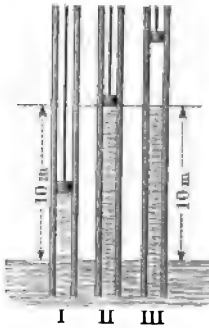
TORRICELLI zu beginnen. Doch bleibt zu beachten, daß auch der von Galilei eingeschlagene Weg unmittelbar zur zusammenhängenden Erkenntnis aller Eigenschaften der Luft geführt hat. So maß GUERICKE die Größe des Luftdruckes auf die gegebene Fläche des Pumpenkolbens durch angehängte Wichte (wobei er ebenso wie bei dem berühmten Experiment mit den Magd Halbkugeln auch die Gleichheit des Druckes nach allen Richtungen erkannt

§ 44. Luftdruck. — Barometer.

Geschichtliches. Beim „Aufsaugen“ einer Flüssigkeit mittels eines Saugens, sowie bei den Pumpbrunnen, scheint das Wasser emporgezogen zu werden.

Fig. 183.

Anh. 45.



Über die antike Erklärung dieser Erscheinung s. *horror vacui* vergl. psych. Anhang, Nr. 45. Aus der Achtung der Pumpenmacher, daß das Wasser dem Saugen nicht folge, wenn er mehr als 10 mal über den natürlichen Wasserspiegel gehoben wird (Fig. 183 — bei wenig schließenden Kolben sogar schon in geringerer Höhe), schloß GALILEI den Schluß, daß die „Kraft des Vakuums begrenzt sei; und er sah voraus, daß Quecksilber, von dessen spezifisches Gewicht 13,6 mal so groß als das des Wassers ist, nur bis zu einer 13,6 mal so kleinen Höhe im Rohre emporsteigen würde. Wiewohl aber Galilei teilweise Austreiben von Luft aus festen Ballons (im Gegensatz zu Aristoteles' Versuch mit einer biegsamen Blase) mittels Erwärmung und Wägung des Gewichts der Luft direkt nachgewiesen hatte, erkannte noch nicht er selbst den Gewichtsdruck der umgebenden Luft als die Erklärung jenes scheinbaren Emporgezogens, sondern erst Galileis Schüler Torricelli, der 1643 (ein Jahr nach Galilei) jene Abänderung der Erscheinung an Wassersäulen für Quecksilber durchführte.

Torricellis Versuch: 1. Eine etwa 80 cm lange Glasröhre, die auf einer Seite offen, auf der anderen zugeschmolzen (Fig. 183) oder durch einen Hahn (eine Schraube) geschlossen ist, wird mit Quecksilber gefüllt, so daß keine (möglichst wenig) Luft in der Röhre zurückbleibt. Wird das offene Ende mit dem Finger verschlossen,

umgekehrt, jenes Ende in ein mit Quecksilber gefülltes Gefäß *nn* st und dann wieder der Finger weggezogen, so nur so viel Quecksilber aus der Röhre, daß in ihrer Säule von einer nach Ort und Zeit verschiedenen am Meeresspiegel durchschnittlich $76\text{ cm} = 760\text{ mm}$) der Quecksilberoberfläche im Gefäße zurückbleibt. Raum über dem Quecksilber in der Röhre heißt „*Torricellische Leere*“ (sie enthält aber immer noch Luft, falls das Quecksilber nicht wie bei guten Sternen ausgekocht u. dergl. ist; und selbst dann entseht in diesem luftleeren Raum noch Quecksilberdämpfe). — Setzt man sodann den Hahn, so sinkt das Quecksilber in der Röhre um so mehr, je mehr Luft eindringt, und bis zum Stande des Quecksilbers im äußeren Gefäß. — 3. Bequemer als mit Röhre und Gefäß ist der *Torricellische Versuch* auszuführen mittels des Apparates Fig. 184, § 45, wo der *Torricellische Versuch* als Grenzfall des *Mariotteschen Gesetzes* bei Verdünnung vor- werden wird.

Fig. 184.



Die vollständige Erklärung dieser Erscheinungen gab *PASCAL*, daß er sie mit den Erscheinungen in kommunizierenden Gefäßen mit verschiedenen Flüssigkeiten verbindet, nämlich die Luft eine Flüssigkeit ist und Gewicht hat, man sich den Spiegel des Wassers (Fig. 183) als Trennungspunkt der beiden Flüssigkeiten Wasser und Luft denken; diesem Spiegel lastet dann noch einerseits in der Röhre die Wassersäule, andererseits außerhalb der Röhre die Luft bis an die obere Grenze des Luftdruckes. — Nach jenem Gesetze dürfen wir schließen, daß das Gesamtgewicht der Wassersäule bis an jene Grenze reichenden Luftsäule vom mittleren der Röhre ebenso groß sein müsse wie das der Wassersäule. Die Höhe der Luftsäule kann man nach jenem Gesetze II allein nicht berechnen, da die Luft nach oben hin immer weniger dicht wird, (§ 46.) Vorausgesetzt, daß die *Torricellische Leere* wirklich völlig leer ist, d. h. daß weder die Spannkraft von zurückgebliebener Luft, noch die (bei gewöhnlichen Temperaturen sehr geringe) Spannkraft der Quecksilberdämpfe die Quecksilbersäule dem Luftdrucke merklich herabdrücken, ergibt sich folgende

Berechnung der Größe des Luftdruckes: Wird in einer Röhre von 1 cm^2 Querschnitt durch den Luftdruck eine Säule von 76 cm Höhe, also 76 cm^3 Volumen getragen, so ergibt sich $76 \times 13,6 = 1033\text{ g}$ ihr absolutes Gewicht und also auch die des Luftdruckes auf 1 cm^2 gleich $1,033\text{ kg} = 1\text{ at.}$ (LA 118.) LA 118.

Die hier gewählte Zahl 76 cm gibt die durchschnittliche Höhe des Quecksilbers am Meeresspiegel an. Stellt man den *Torricellischen Versuch* zu verschiedenen Zeiten und an verschiedenen Orten an, so erhält man verschieden hohe Stände des Quecksilbers in der Röhre, aus denen

sich somit verschiedene Größen des Luftdruckes ergeben, & genau und bequemen Beobachtungen die Barometer dienen.

Fig. 185.

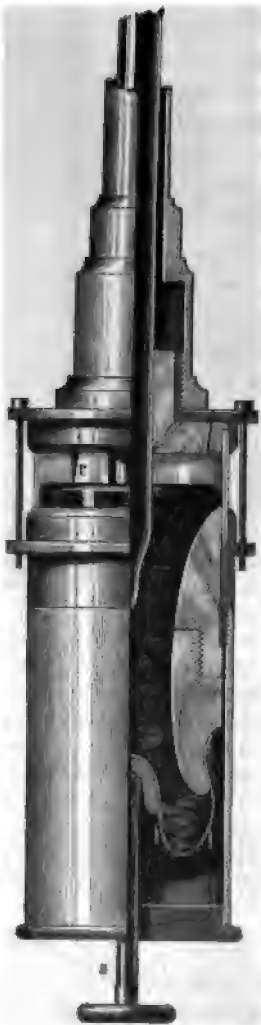


Fig. 186.



A) Quecksilberbarometer sind sämtlich nur kleine Zusammenstellungen von Röhre und Maßstab bei cellis Versuch. Die Besonderheiten ihrer Konstruktion der Rücksicht, daß die Druck angegebende Quecksilbersäule, deren Höhe die Barometerhöhe od. Barometerstand heißt, von dem Stand des Quecksilbers im (d. i. von der Trennung zwischen Quecksilber und Luft) an gemessen werden.

Bei Fortin's Gefäßbarometer (Fig. 185) ist dies erreicht, in jeder Ablesung mittels einer unter dem Lederbeutel, der das Gefäß bildet, in diesem das Quecksilber auf eine solche Höhe zu werden, daß der Spiegel zusammen mit der Spitze eines Elfenbeins die dem Nullpunkt des Maßstabes spricht.

Im Barometer findet solche Einstellung nicht statt, die Weite der Birne im Vergleich der Röhre bei dem Sinken des Quecksilbers der nur so wenig über, bzw. unter Nullpunkt des Maßstabes tritt es für die meist außerwissenschaftlichen Zwecke solcher Instrumente (Vermutungen über das bevorstehende Wetter aus dem Steigen und ohne genaue Rücksicht auf absoluten Stand) unschädlich ist vollkommensten sind die

Heberbarometer (Fig. 186) sind der obere geschlossene untere offene Teil der Barometer

von gleichem Querschnitt, wodurch Unterschiede in der Kapillardepression höchstens noch dann eintreten, wenn im offenen Schenkel das Quecksilber

ydirt ist. Die Skala hat ihren Nullpunkt meist gegen die Mitte zu, von wo s zur oberen und zur unteren Kuppe die Abstände abgelesen und addiert werden. anchmal wird entweder die Röhre oder die Skala durch eine Schraube vor jeder lesung so weit verschoben, daß die untere Kuppe auf den Nullpunkt der Skala gestellt wird. (Vermeidung „parallaktischer Fehler“, § 182.)

B) **Aneroidbarometer** geben die Änderungen des Luftdruckes an urch die sich ändernden Deformationen luftdicht geschlossener (und eist annähernd leer gepumpter), elastischer, dünnwandiger Blech-fäße (nach BOURDON röhrenförmiger, vergl. Fig. 196, S. 190, nach VINT senförmiger). Durch Hebel- und Räderwerk (vergl. Fig. 279, S. 264) rden die bei Änderung der Deformation eintretenden Bewegungen ertragen auf Zeiger an Skalen, welche durch Vergleichung mit uecksilberbarometern angefertigt sind.

Im selbstregistrierenden Barometer von RICHARD (**Barometrographen**) sind hrere solcher Dosen übereinander gebaut und die Bewegungen des Zeigers zeichnen f einen mittels Uhrwerkes binnen einer Woche einmal sich umdrehenden zylindri-zen Streifen vorlinierten Papiers die Luftdruckkurve (vergl. §§ 190, 201, 202).

Alle Barometer haben einen einzigen unmittelbaren Zweck: n jeweiligen Luftdruck anzugeben. Mittelbare Anwendung finden un die Verhältnisse des Luftdruckes in zahlreichen physikalischen d speziell meteorologischen Untersuchungen, so namentlich bei An-aben über Siedetemperaturen (§ 77), beim Entwerfen der Wetterkarten § 190, 202) u. s. f. —

Art und Begründung einiger Barometer-Korrekturen LA 119. LA 119.

§ 45. Boyles (Mariottes) Gesetz.

Denken wir uns den durch die schematischen Figg. 180—182 dargestellten ersuch auf dem Grunde des Luftmeeres angestellt, so steht die im Cylinder ein-geschlossenene Luftmenge, auch wenn der luftdichte Kolben als gewichtslos gedacht t, doch schon unter dem Gewichtsdrucke der äußeren Luft. Da ein fester alben, der luftdicht schlosse und doch annähernd reibungslos verschiebbar wäre, icht herzustellen ist, so werden die Versuche zur Feststellung oder Bestätigung d Überprüfung des Mariotteschen Gesetzes immer mittels Quecksilbersäulen ggestellt. Als praktische Druckeinheit dient dann der am Orte und zur Zeit des ersuches herrschende Luftdruck, bzw. das ihm gleiche Gewicht einer Queck-berssäule von der Höhe des jeweiligen Barometerstandes. Daher sind auch e Versuche besonders anzustellen für Gasspannungen, welche a) größer, b) kleiner d als der jeweilige Luftdruck (kürzer: a) für Verdichtung, b) für Ver-innung); und zwar geschah dies bei den zunächst zu beschreibenden älteren pparaten gesondert für a) und b):

a) Für Verdichtung: An einer U-förmigen Röhre ist der kürzere Schenkel as „**Volumrohr**“) durch den Hahn abschließbar und vom Hahn abwärts nach bikcentimetern eingeteilt. In den längeren Schenkel (das „**Druckrohr**“, Mano-sterrohr) wird (durch Eingießen vom längeren Schenkel aus oder mittels einer mpe vom Verbindungsrohre her) so viel Quecksilber gebracht, daß, wenn es in iden Schenkeln gleich hoch steht, im Volumrohr z. B. 6 cm³ Luft enthalten sind.

Hierauf wird der Hahn geschlossen, wodurch $v_0 = 6 \text{ cm}^3$ Luft von der Dichte und Spannkraft der äusseren Luft abgegrenzt sind. Durch Nachfüllen (oder Hähnpumpen) von Quecksilber in den längeren Schenkel wird nun im Volumrohr die Luftmenge in ein Volumen $v_1 = 3$, $v_2 = 2 \dots \text{cm}^3$ zusammengedrängt, was erforderlich ist, dass im Druckrohr das Quecksilber um 1, 2 ... Barometerhöhen über der jeweiligen Trennungsfläche von Quecksilber und Luft im Volumrohr steht. War der äussere Luftdruck p_0 , so entsprechen einander somit

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Volumina: } v_0, \quad v_1 = \frac{v_0}{2}, \quad v_2 = \frac{v_0}{3}, \quad \dots \\ \text{die Drucke: } p_0, \quad p_1 = 2p_0, \quad p_2 = 3p_0, \quad \dots \end{array} \right\} \text{Allgemein gilt: } p v = p_0 v_0 = \text{Konst.}$$

b) Für Verdünnung: In der Torricellischen Röhre wird (bei geöffnetem Hahn) durch Eintauchen in ein tiefes Gefäss mit Quecksilber eine gewisse Luftmenge von der Spannung p_0 im Volumen v_0 abgeschlossen. Die Röhre wird dann (bei geschlossenem Hahn) so weit herausgezogen, dass dieselbe Luftmenge die Volumina $2v_0$, $3v_0$, ... annimmt. Dabei werden die Höhen der jeweilig (mit der Röhre gleichsam emporgezogenen, in Wirklichkeit aber:) durch den äusseren Luftdruck emporgedrückten Quecksilbersäulen abgelesen, welche immer kleiner als der Barometerstand sind, aber ihm um so näher kommen, je weniger dicht die abgeschlossene Luft geworden ist. Der irgend einem Volumen $v > v_0$ entsprechende Druck $p < p_0$ ergibt sich aus der Überlegung, dass der äussere Luftdruck p_0 dem Gewicht der Quecksilbersäule von der Höhe h vermehrt um die ebenfalls nach abwärts wirkende Spannkraft p der eingeschlossenen Luft das Gleichgewicht halten muss. Durch solche Berechnung des je einem abgelesenen Volumen v entsprechenden Gasdruckes p findet man zueinander gehörig

$$\left. \begin{array}{l} \text{die Volumina: } v_0, \quad v_1 = 2v_0, \quad v_2 = 3v_0, \quad \dots \\ \text{die Drucke: } p_0, \quad p_1 = \frac{p_0}{2}, \quad p_2 = \frac{p_0}{3}, \quad \dots \end{array} \right\} \text{und allgemein wieder: } p v = p_0 v_0 = \text{Konst.}$$

Bei beiden Versuchsreihen sind natürlich nicht nur die ganzen Vielfachen und Bruchteile von Volumen und Druck durchzuprüfen, sondern wenn auf irgend ein beliebiges $v = n v_0$ eingestellt ist, so zeigt sich der zugehörige Druck

$$\wedge 120. p = \frac{1}{n} p_0, \text{ wodurch das Gesetz } p v = \text{Konst (LA 120) wiederum bestätigt wird.}$$

In neueren Apparaten zur Prüfung des BOYLESchen Gesetzes (Fig. 187) sind Volumrohr und Druckrohr (Manometerrohr) unten durch einen Kautschukschlauch verbunden. Durch relatives Heben, bezw. Senken des Manometerrohres lässt sich dann die Luft im Volumrohre sowohl auf grössere wie auf kleinere Dichte im Vergleich zur äusseren Luft bringen.

Fig. 188 zeigt z. B. fünf zusammengehörige Paare vom Werte des Druckes p und des Volumens v ($= 6 \text{ cm}^3$ bei 1 at).

Mittels dieses Apparates lässt sich vor allem auch Torricellis Versuch am bequemsten ausführen: Bei geöffnetem Hahn des Volumrohres wird das Druckrohr so hoch gestellt, dass das Quecksilber in beiden Schenkeln gleich hoch und zwar bis etwas über dem Hahn steht. Beim Schliessen des Hahnes und Senken des Manometerrohres um mehr als eine Barometerhöhe bildet sich dann unterhalb des Hahnes das Torricellische Vakuum, welches bei weiterem Senken immer grösser wird, aber so, dass die Niveaudifferenz in beiden Röhren immer eine

Fig. 187.

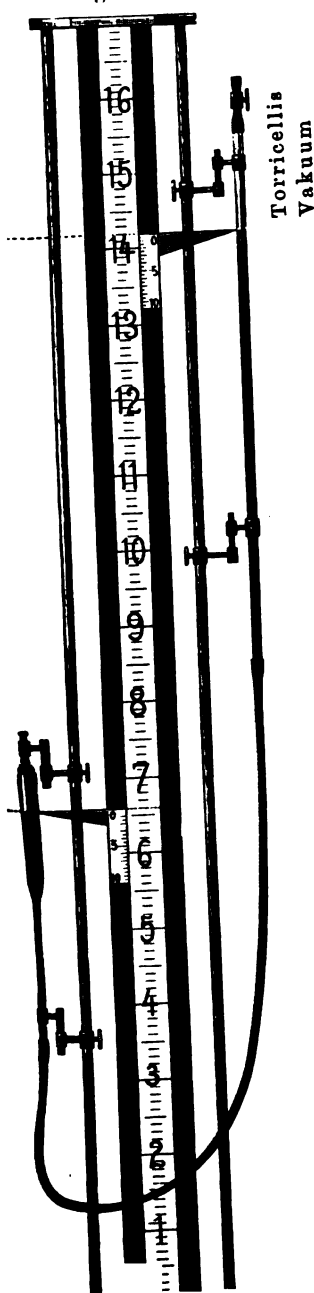


Fig. 188.



Barometerhöhe bleibt (Fig. 187). — Es ist dies zugleich der Grenzfall des Mariotteschen Gesetzes für Verdünnung.

Die aus den Versuchen sich ergebenden Abhängigkeiten lassen sich viererlei Art formulieren, indem man einerseits entweder vom Volumen oder der Dichte, andererseits entweder von dem auf das Gas von außen ausgeübten Druck p oder von dem im Gas hervorgerufenen gleichen Gegendruck, dem inneren Druck, der Spannung, Spannkraft, Expansivkraft des Gases spricht. Diese Spannung einen besonderen Fall der druckelastischen Gegenwirkung (§ 51) darstellt, liegt es nahe, sich in 1 und 2 den äußeren Druck als bewirkende, in 3 und 4 den inneren Druck = Spannkraft als das Bewirkende zu denken, was dann zu folgenden vier Formulierungen führt:

Für je eine bestimmte Gasmenge sind einander

1. äußerer Druck u. Volumen umgekehrt proportional: $p v = K$
2. äußerer Druck und Dichte direkt proportional: $\frac{p}{d} = K$
3. Volumen und Spannkraft umgekehrt proportional: $e v = K$
4. Dichte und Spannkraft direkt proportional: $\frac{e}{d} = K$

LA 131. Graphische Darstellung der Gesetze 1 und 3 durch Hyperbeln I.

Von den Gesetzen 1—4 gelten 1 und 3 für eine gegebene Gasmenge. LA 120. 6 cm³ Luft bei 76 cm Druck und 0° C. (LA 120), dagegen 2 und 4 unabhängig von einer bestimmten Menge, weil die Dichte (das spezifische Gewicht) des Gases in jedem Punkte eines größeren oder kleineren Volumens gleich voransetzt ist. Eben deshalb ist aber der mechanische Zustand einer Gasmenge durch Mariottes Gesetz nur so lange ausreichend beschrieben, als von dem Druck, dem das Gas infolge seines absoluten Gewichtes auf die tiefer gelegenen Teile ausübt, abgesehen wird, wie es in dem ganzen vorliegenden Paragraphen geschehen ist. Dagegen wird über die besonderen Wirkungen, welche neben der Spannung der Gase selbst durch die an jenen wie an allen flüssigen und festen Körpern angreifende Schwerkraft hervorgebracht werden, erst im folgenden Paragraphen gehandelt werden, wo dann auch die bisherige Annahme, daß die Dichtigkeit der Gase in verschiedenen hoch gelegenen Teilen einer Gassäule die gleiche sei, genauere Annäherungen ersetzt wird.

Als REGNAULT (1847) Versuche nach einer der erstbeschriebenen, aber empfindlicheren Methode und für Drücke bis zu 30 at mit verschiedener Gasmenge ausstellte, fand er, daß durch das BOYLESche Gesetz die wirkliche Abhängigkeit zwischen Druck und Volumen einer Gasmenge nur in einer ersten Annäherung wiedergegeben ist, wobei die Annäherung eine um so bessere ist, je geringer die Gasdichten sind. Dagegen werden bei großen Drücken (namentlich bei solchen, die das Gas seinem Kondensationszustande nahebringen, § 77) die Abweichung von $p v = \text{Konst}$ immer größer; und zwar zeigten noch spätere Versuche an, daß bei Drücken bis zu 3000 at alle Gase sich immer weniger verdichten, sich also dem Verhalten der Flüssigkeiten annähern.

Die bisher entwickelten Beziehungen sind rein ädromechanische, d. h. beziehen sich nur auf die mechanischen Größen p , e und d und die geometrische Größe v . Betrachtet man aber diese Größen nicht nur untereinander, sondern mit der jeweiligen Temperatur in Abhängigkeit, welche durch das mecha-

thermische MARIOTTE-GAY-LUSSAC'sche Gesetz ausgedrückt ist (§ 74). — Es wird daher im vorliegenden Abschnitte überall konstante Temperatur vorausgesetzt.

§ 46. Auftrieb in Gasen. Wägen im luftleeren Raume. Gewicht der Gase. Dichteverteilung in hohen Gassäulen.

Die antike Unterscheidung schwerer und „leichter“ Körper (§ 2) wurde überholt, als GALILEI für das Aufsteigen warmen Rauches, für das Schweben der Vögel u. dergl. m. die Erklärung gefunden hatte, daß das Archimedische Gesetz nicht nur für tropfbare, sondern auch für gasförmige Stoffe gelte. Der aufälligste Beleg für diese Erklärung ist der

Luftballon. Versuch: Ein Seiden-(Gummi-, Kollodium-)Ballon, solange er mit noch gar nicht oder nur wenig erwärmter Luft, mit Wasserstoff oder Leuchtgas gefüllt ist, einen Druck nach abwärts, bei einer bestimmten stärkeren Erwärmung, bezw. Füllung gar keinen Druck oder Zug, bei noch größerer einen Zug nach aufwärts aus. — Allgemein gilt: Die Luft übt auf die in ihr befindlichen (festen, flüssigen, gasförmigen) Körper einen Auftrieb aus, dessen Größe gleich dem Gewichte der verdrängten Luft.

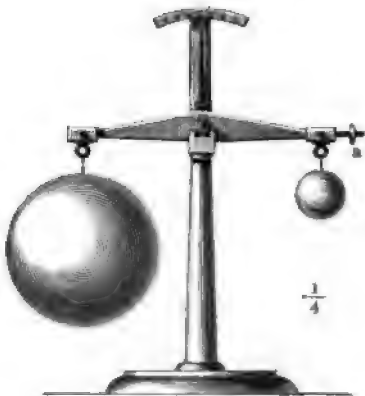
Was wir als das absolute Gewicht P der Körper an der Erdoberfläche bezeichnen pflegen, ist also streng genommen schon wieder nur die Resultante aus ihrem wirklichen, von der Gravitation gegen die Erde (einschließlich der Fliehkraftwirkung, § 31) herrührenden Gewichte P' und dem entgegen- gerichteten Auftrieb p seitens der Luft (und der mit ihr gemischten übrigen Gase Kohlendioxyd, Ammoniak und namentlich Wasserdampf); also $P = P' - p$ und $P' = P + p$. — Dieser Schluß wird bestätigt durch

Versuche mit dem Dasymeter (Fig. 189): In einer kleinen Wage halten ein Messing- körper von kleinem und ein Glasballon von viel größerem Volumen einander das Gleich- gewicht, solange sie sich in Luft befinden. Es senkt sich aber der Ballon, sobald die ihn umgebende Luft verdünnt und ihm so der (wie ein Kissen aus Luft ihn tragende) Auftrieb zum Teil entzogen wird.

Bei sehr feinen Wägungen, nament- lich von Körpern mit kleinem spezifi- schen Gewichte, muß daher immer auf die Dichtigkeit der umgebenden Luft Rücksicht genommen und es müssen die Wägungen auf den leeren Raum reduziert werden.

Durch diese Rücksicht auf den Auftrieb werden nun auch erst alle Wägungen in Gasen möglich. So hatte schon ARISTOTELES die Frage, ob auch die Luft ein Gewicht habe, dadurch entscheiden zu können geglaubt, daß er eine Tierblase wog, als sie mit Luft gefüllt, und dann, als sie von ihr entleert war. Er hatte

Fig. 189.



dabei übersehen, daß infolge des Zusammendrückens beim Entleeren der .
 LA 122. um ebenso viel abgenommen hatte wie das Gewicht selbst (LA 122).]
 diesem Mangel freie Versuch GALILEI, eine solche Wägung an einem
 Ballon vorzunehmen (§ 44), ist vorbildlich für die gegenwärtige Meth
 Wägung von Gasen: In einem Ballon von vorher bestimmtem Fassungsverm
 5 Liter) wird mittels der Luftpumpe die Luft verdünnt, daß diese nur m
 an der Barometerprobe abzulesende Spannkraft und daraus zu erschl
 Dichtigkeit hat. Dann wird der Ballon an einer Wage (nach REAULT
 Anbringung eines zweiten ebenso großen Ballons, behufs Kompensat
 Änderung des Luftdruckes während des Versuches) tariert und nun Luft
 anderes Gas in den Ballon eingelassen. Die Gewichtszunahme ist dann das
 Gewicht dieser Gasmenge unter dem jeweiligen Druck der äußeren Luf
 der im Ballon verbliebenen Luft. Hieraus ergibt sich dann das spez
 Gewicht des Gases. — Korrekturen wegen des Auftriebes der Luft
 herrschenden Temperatur. — Nach solchen (namentlich durch REAULT mit
 Beharrlichkeit gehandhabten Methoden) ergab sich vor allem:

Von trockener atmosphärischer Luft bei 76 cm Baromet
 und 0° C. faßt 1 Liter 1,293 g; also 1 m³ rund 1¼ kg.

Auch eine Luftsäule von 1 cm² Querschnitt und 10 m Höhe wiegt also
 Diese Zahl ist („zufällig“) fast genau $\frac{1}{1000}$ des Gesamtgewichtes der gan
 LA 123. 76 cm Barometerstand über 1 cm² lastenden Luftsäule von 1,0336 kg (LA
 „Atmosphärische Luft“ ist hier das Gemenge aus Sauerstoff und Stic
 (mit den geringfügigen Beimischungen von Argon und Helium u. s. w.,
 Die der Luft meistens überdies beigemengten wechselnden Mengen von E
 dioxyd, Ammoniak u. s. f. ändern jene Gewichtsangaben noch nicht we
 ab; wohl aber ist ausdrücklich ganz trockene Luft vorauszusetzen (be
 Versuchens die Luft mittels Durchstreichenlassen durch ein Chlorcalciumro
 fältig zu trocknen), indem der Wasserdampf bei 76 cm das beträchtlich
 spezifische Gewicht (relativ gegen Luft) von $0,63 \mp \frac{5}{8}$ besitzt (§ 77, II).

Wenn von den übrigen Gasen gesagt zu werden pflegt, sie seien teils „le
 (dünnere) als Luft“, teils „schwerer (dichter)“, so ist stillschweigend voraus
 daß sie unter demselben Druck wie Luft stehen und gleiche Temp
 haben. Nur in diesem Sinne ist z. B. die Dichte, bzw. das spezifische
 des Wasserstoffes $14\frac{1}{2}$ mal so klein, das des Sauerstoffes 1,1, des Kohlenst
 3 mal so groß als das der atmosphärischen Luft. — Da nun aber bestimm
 mengen nicht wie flüssige und feste Stoffe ein bestimmtes natürliches V
 und daher auch eine natürliche Dichte haben, so können wir uns auch a
 auf die nämliche Dichte gebracht denken und haben dann das eigent
 Verhalten z. B. des Wasserstoffes so zu charakterisieren: er zeigt bei

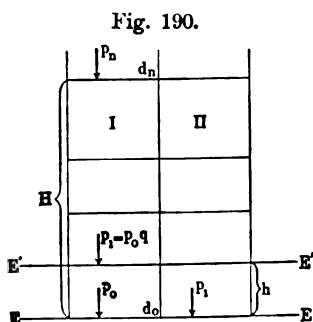
gleichem Druck und gleicher Temperatur sein Normalgewicht dann die unter Zugrundelegung der chemischen Molekularhypothese als Normalgewicht bezeichneten GröÙe maßzahlengleich gesetzt wird). einige Beispiele solcher Zahlenangaben (wobei die Luft, als „mechanische Menge“, nicht auf den chemischen Begriff des Normalgases zu beziehen):

	Absolute Dichte [g cm ⁻³ bei 76 cm, 0° C.]	Dichte in Bezug			
		auf das Normalgas	auf Wasserstoff	auf Luft	auf Sauerstoff
...	0,0000446	1	0,496	—	0,03125
f ...	0,0000900	2,016 ± 2	1	0,069627	0,0690000
...	0,001253	28,08 ± 28	13,93 ± 14	0,96981	0,8775
...	0,001293	—	14,36 ± 14 1/2	1	0,90484
...	0,0014290	32,00	15,873 ± 16	1,10520	1
tyd ...	0,0039297	88,00	43,65 ± 44	3,03930	2,750000

dem im vorigen § zunächst unter Absehen von dem Gewichte der Luft in Mariotteschen Gesetze ergibt sich nunmehr auch die

Dichteverteilung in hohen Gassäulen. Aufgabe: Nach dem Mariotteschen Gesetze nimmt die Dichte in einer Gassäule nach unten zu, wie schnell ab, wenn diese sich unter dem Drucke ihres eigenen Gewichtes ins Gleichgewicht gesetzt hat (und wenn von der Abweichung der Schwere gegen oben, wie von der Schwerkraft abgesehen, Galileisches Kraftfeld, § 21, vorausgesetzt wird)?

Man nehme für eine bestimmte durch die Gassäule I gelegte wagrechte Ebene (Fig. 190) das auf dieser Ebene lastende Gesamtgewicht p_0 und die auf dieser Ebene herrschende Dichte d_0 . Gemäß dem Mariotteschen Gesetze nimmt die Dichte p in einer Höhe h oberhalb jener Ebene. — Da Druck sich längs der Säule stetig vermindert, müßten wir, streng genommen, unendlich dünne Schichten betrachten. Doch erhalten wir auch brauchbare Annäherungen, wenn wir die Höhe H in eine endliche Anzahl (n) von der Höhe h zerteilt denken, $= nh$; je größer dann n gewählt wird, so mehr nähert sich das Ergebnis der Wirklichkeit (LA 124).



LA 124.

Lösung der Aufgabe führt dann folgende Überlegung: Denken wir uns neben die gegebene Säule I auf dieselbe Grundebene EE eine Säule II von gleichem Querschnitt gestellt, die im ganzen q mal so viel (oder $q < 1$) Dichte als I, so wird die Dichteverteilung in beiden Säulen mechanisch ein und dasselbe sein (wäre z. B. $q = 1/2$, so wäre in gleichen Höhen über EE die Dichte

in II überall die Hälfte von der in I). Wenn dann in der um λm über EE_1 Ebene $E'E'$ der Druck $p_1 = p_0 q$ herrscht, so ist die Dichteverteilung $E'E'$ die gleiche wie in II über EE . Daher um weitere λm höher d $p_2 = p_1 q = p_0 q^2$. Allgemeiner entsprechen den Abständen $\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$ die Drucke $p_0 q, p_0 q^2, p_0 q^3 \dots p_0 q^n = p$; in Worten:

Nehmen in einer Gassäule die Erhebungen in arithmetische Reihe zu, so nehmen Dichte und Spannung in geometrische Reihe ab. (Math. Anh. Nr. 10 und Nr. 17.)

Die Anwendung der allgemeinen Aufgabe auf das Luftmeer der Erde:

Barometrischen Höhenmessung. Es sei in einem bestimmten Niveau (an, über oder unter der Erdoberfläche) ein Barometer in einem anderen Niveau (an einer Stelle, welche keinen allzu wagrechten Abstand von der ersten Stelle hat) der Barometerstand beobachtet. Welchen Höhenunterschied H haben die beiden? Antwort: Es sei wieder $H = n\lambda$. Da sich die Barometerstände b an zwei Orten verhalten wie die daselbst herrschenden Drücke p , so ist $b = b_0 q^n$. Diese Gleichung liefert $n = \frac{1}{\log q} (\log b - \log b_0)$ oder (da $q < 1$ und $\log q$ in sich negativ) $n = \frac{1}{-\log q} (\log b_0 - \log b)$, somit die schematische Formel für barometrische Höhenmessung:

$$H = \frac{h}{-\log q} (\log b_0 - \log b) \approx 18420 \text{ m } (\log b_0 - \log b); \text{ in } \text{LA 124.}$$

Wie der Koeffizient 18420 m theoretisch und empirisch zu gewinnen ist, siehe LA 124. — Auf 10 m Erhebung kommt anfänglich rund 1 mm Druckabnahme.

Dafs und wie die obige schematische Formel für wirkliche barometrische Höhenmessungen erst durch mehrere Korrekturen geeignet wird, vergl. LA 124.

§ 47. Aëromechanische Apparate.

Die kinetischen und statischen Erscheinungen an dichten Gasen (und anderen Gasen) infolge ihrer Spannkraft und ihrer Schwerkraft haben zur Konstruktion der mannigfaltigsten aëromechanischen Apparate geführt. Die bewegten, bzw. im Gleichgewichte stehenden Körper sind: a) Luft (und andere Gase) in den Blasebälgen, b) Wasser (und andere Flüssigkeiten) in den Wasserpumpen, c) Wasser (und andere Flüssigkeiten) in den Wasserpumpen, d) Wasser (und andere Flüssigkeiten) in den Wasserpumpen.

beim Zusammendrücken das Ventil sich schließt (wieder infolge der Luft) und die Luft durch die Düse austritt. Einfacher Blasebalg; zusammengesetzter Blasebalg (behufs eines ungleichen Luftdruckes). Fig. 191) bei Feuer, Orchester, w. — Blasebalg für Glasbläsern).

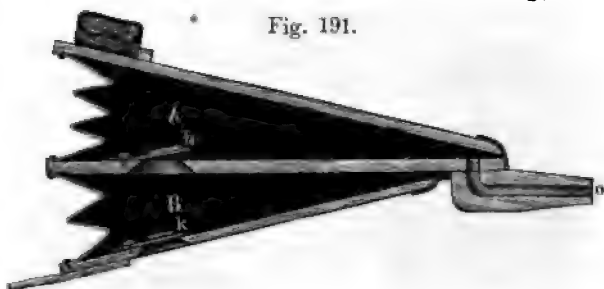
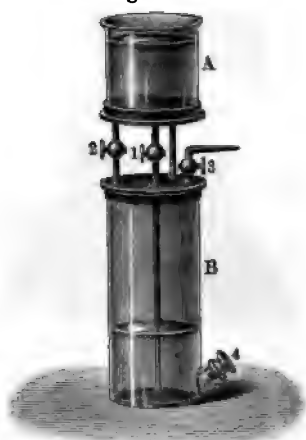


Fig. 191.

Gasometer
Die Aufgabe,

ist nur aufzufangen und aufzubewahren, sondern auch wieder den von außen her ausgeübten Druck zum Ausströmen zu bringen. In den Gasometern der Anstalten für Leuchtgas wird das eigene Gewicht der großen schmiedeeisernen durch Wasser abgeschlossenen Glocken. In einem Gasometer (Fig. 192) wird der Behälter B mit dem Gefäß A aus durch den Hahn 1 zuerst ganz mit Wasser gefüllt. Dann wird nach Abschlufs der Ventile 2, 3 der Verschluss 4 geöffnet (wobei nur Wasser ausfließt; warum?) und der Schlauch der Entwicklungsapparate hier eingeführt, wobei die Spannung der eintretenden Gase das Wasser drückt; behufs Aufbewahrung des Gases wird wieder verschlossen. Zur Verwendung geeigneter Gase entweder durch Ausströmen bei 2 in einen mit Wasser gefüllten Gefäß oder durch 3, um den Druck wieder das von A durch 1 herabzusetzen. (Schildere im einzelnen die Konstruktion von Hähnen mit doppelter Bohrung selbst!)

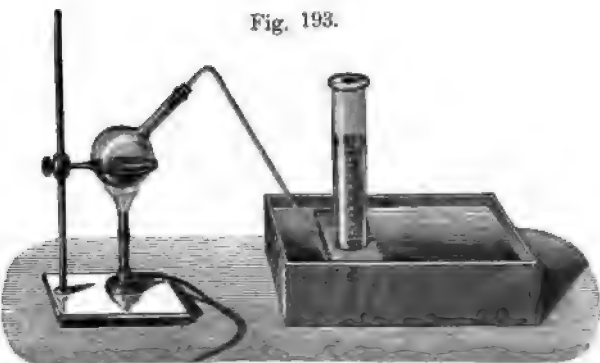
Fig. 192.



Pneumatische Wanne (Fig. 193). Heronsball. Spritzflasche. — Mariottes (vergl. Fig. 17, S. 20) hat die Aufgabe, die Stärke des Flüssigkeitsstrahles an der Bodenöffnung von dem jeweiligen Stande der Flüssigkeit (und daher

unabhängig) zu erhalten. Dies wird erreicht, indem die über dem Ventile beiderseits ihre *a b* eingedrückte, durch welche, *c* Wasser ausströmt. Ersatz Luftdrücken. Die (durch Em-
des Röhr-

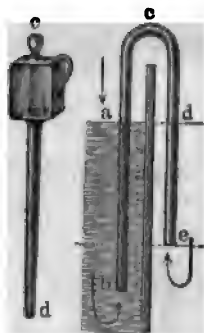
Fig. 193.



chens übrigens nach Bedarf zu vergrößernde) Ausfließgeschwindigkeit e dann der Niveaudifferenz der Öffnungen b und c . — Erklärung durch LA 125. zur pneumatischen Wanne LA 125. •

Stechheber (Fig. 194), Pipetten. — Der Winkelheber (Fig. 195) ist eine beiderseits offene gekrümmte Röhre mit den (gleich oder

Fig. 194. Fig. 195.



verschieden langen) Schenkeln cb und ca . einmal gefüllt (durch Ansaugen oder auch gießen, Einlegen eines Kautschukschlans, die Flüssigkeit . . .), so fließt er so lange unter dem Niveau von a liegt. Voraus hierfür ist, daß der höchste Punkt c höher als die jeweilige Barometerhöhe (also für rund 10 m) über dem Spiegel ad liege.

MERSENNE meinte noch 1644 mittels eines Wasser über einen Berg führen zu können, begab sich bald darauf den Zusammenhang mit dem Toricellischen Versuch, also auch die Abhängigkeit des Fließens vom Luftdruck. — Das Strömen des Wassers im

Sinne acd erklärt sich so: Der Druck, der sich von b her und weiter auf c fortpflanzt, wird im eintauchenden Schenkel um den hydrostatischen Druck der Wassersäule ca , im freien Schenkel um den der längeren Säule cd vermindert; es bleibt also ein Überdruck von der eintauchenden Seite her. —

Heronsbrunnen; Schilderung nach dem Modell. Warum läßt sich aus ihm wie aus dem Winkelheber ein *Perpetuum mobile* herstellen?

Manometer dienen da, wo die Spannkraft der Luft oder Gase in abgeschlossenen Teilen durch hydrostatischen Druck von Flüssigkeiten (Wasser, Quecksilber, Alkohol . . .) in einem offenen kommunizierenden Teil durch die Spannung in geschlossenen Röhren zum gemessenen Luft gemäß dem Mariotteschen Gesetz zu messen. Über die verschiedensten Formen von Manometern (Fig. 196) nach dem Modell des Aneroidbarometers im Ge-

Fig. 196.



Hilfsapparate, die in mannigfachster Verwendung an hydro- und pneumatischen Apparaten vorkommen, seien hier genannt die mannigfachen Ventile (Kegel-, Klappenventile). Vergleichungsweise mit den mehrfach gebohrten Hähnen. — Feuerspritzen (älterer Konstruktion).

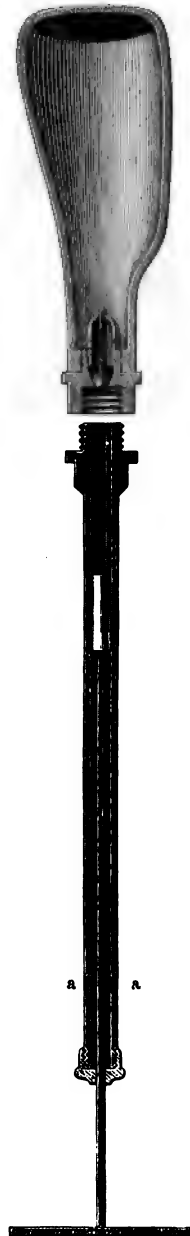
Fig. 197.

§ 48. Die Luftpumpen.

Bei der Aufgabe gestellt, die Luft in einem Raume *R* (Rezipienten) a) zu verdichten, b) zu verdünnen, sind solche Einrichtungen zu treffen, daß ein anderer Raum *S* (Stiefel), durch entsprechende Bewegungen eines Kolbens, wiederholt a) mit Luft von außen gefüllt und b) die Luft aus *S* nach *R* gebracht werden, b) die Luft aus *S* verteilt und die aus *S* jedesmal nach außen entfernt werden kann. — Diese beiden Hauptgedanken sind sehr mannigfaltiger Weise konstruktiv verwirklicht. Vorbildlich waren von GUERICKKE an bis in die neueste Zeit die Wasserpumpen mit ihren festen Kolben und Ventilen. Erst seit 1857 kamen dazu als Verdünnungspumpen die Kolbenluftpumpen; im folgenden werden die „Kolbenluftpumpen“ beschrieben, u. zw. Ventilm-, durch welche die älteren „Hahnluftpumpen“ fast verdrängt worden sind.

Verdichtungs- und Verdünnungsluftpumpen (Fig. 197 — hier Ventilm-). Der Kolben der Schaft einer Windbüchse). Der Kolben wird im Stiefel so weit zurückgeschoben, daß eine seitliche Öffnung *a* Luft (oder durch Röhren geleitetes Gas) von außen in den Stiefel füllt. Diese Luft wird beim Vorwärtsschieben des Kolbens gegen den Ventilsitz in diesen hineingepreßt. In der Ventilschneide zwischen Stiefel und Rezipienten ist ein Ventil, das sich gegen den Rezipienten hin öffnet und beim zweiten Zurückziehen des Kolbens die Luft nicht mehr in den Stiefel zurückläßt („Rückschlagsventil“).

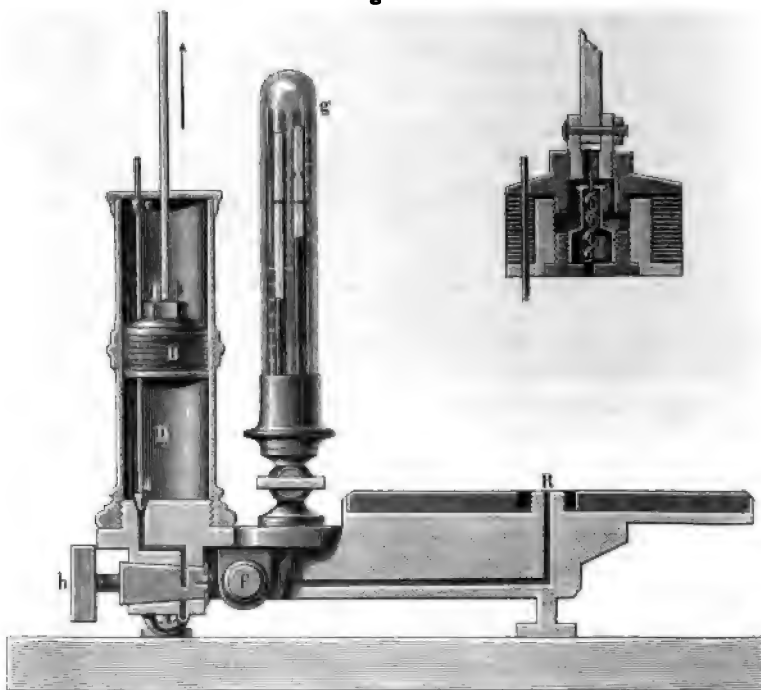
Nach obigem Prinzip a) befindet sich vor dem 1., bzw. 2., 3., ... *n*-ten Kolbenschiebe im Rezipienten die Dichte d_0 der äußeren Luft dem Volumen *R*, $R + 2S$, ... $R + nS$ entsprechende Menge Luft, aber, weil sie auf denselben Raum *R* zusammengepresst ist, die Dichten $D_0 = d_0$, $D_1 = \frac{R+S}{R} d_0$, ... $D_n = \left(1 + n \frac{S}{R}\right) d_0$ besitzt. Es wachsen also die Dichten nach einer steigenden arithmetischen Reihe,



deren konstante Differenz $\frac{S}{R} d_0$ ist. — Über die Grenze der Verdichtung folge des „schädlichen Raumes“, ferner über Manometer behufs Messung der Verdichtung s. u. gelegentlich der analogen Bestimmungen für Verdünnung.

b) **Verdünnungsluftpumpen.** Bei den gegenwärtig gebräuchlichen zweistufigen Ventilluftpumpen befinden sich im Boden Stiefel Kegelventile *a* (Fig. 198), in den durchbrochenen Kolben Klappenventile; beide öffnen sich vom Rezipienten gegen den Stiefel bzw. die äußere Luft hin. — Ist der eine Kolben bis an den Bo-

Fig. 198.



des Stiefels vorgeschoben und wird er nun gehoben, so tritt an durch *a* Luft nach dem Stiefel; hierbei ist das Ventil im Kolben folge des äußeren Luftdruckes geschlossen. Beim Herabdrücken Kolbens schließt sich *a* (indem seine Leitstange vom Kolben *d* Reibung um eine durch *c* bestimmte kleine Strecke mitgenommen *v*). Sobald die Luft zwischen Kolben und Boden dichter wird als äußere Luft, entweicht sie durch das Kolbenventil nach außen.

Durch abwechselnde Wirkung der zwei Kolben wird nicht nur Zeit erspart, sondern auch die Arbeit des Hebens der auf je einen Kolben lastenden äußeren Luft ausgiebig vermindert, indem beim gleichzeitigen Herabziehen des an Kolbens die auf diesem lastende Luft selbst eine annähernd gleiche Arbeit verri-

Nach dem Prinzipie b) hat sich nach dem ersten Heben des Kolbens die Luft, welche mit der Dichte d_0 nur R erfüllt hatte, auf $R + S$ verteilt und hat daselbst nunmehr die Dichte $d_1 = \frac{R}{R + S} d_0$, wo der verkleinernde Faktor $\frac{R}{R + S} = q$ gesetzt werde. Auch nach dem Niederdrücken des Kolbens, also nach vollendetem zweiten Kolbenschub, ist $d_1 = q \cdot d_0$. Ebenso verbreitet sich nun nach dem zweiten Kolbenschub diese Luft von der Dichte d_1 auf $R + S$ und es ist deshalb $d_2 = q d_1 = q^2 \cdot d_0$; ebenso $d_n = q^n \cdot d_0$. Es nehmen also die Dichten nach einer fallenden geometrischen Reihe ab, deren konstanter Quotient $\frac{R}{R + S}$ ist. — Hiernach erreicht eine Dichte Null erst nach unendlich vielen Kolbenschüben.

Es hat aber durch den unvermeidlichen **schädlichen Raum** ϱ zwischen dem leichtest herabgedrückten Kolben und dem Boden des Stiefels die Verdünnung von dann ihre Grenze δ erreicht, wenn ein Stiefel S voll Luft von der Dichte δ , ϱ zusammengedrückt, die Dichte der äußeren Luft d_0 angenommen hat, und dann beim nächsten Kolbenhub die Luft in R von der gleichen Dichte δ beim Heben des Ventils a keine Veranlassung mehr hat in S überzutreten. Es ist also: $\delta = \frac{\varrho}{S} d_0$.

[Auch bei VerdichtungsLuftpumpen macht sich der schädliche Raum analog geltend, indem hier das Übertreten von Luft aus S in R nicht mehr stattfindet, und die auf den schädlichen Raum zusammengedrückte Luft des Stiefels die Dichte δ der Luft des Rezipienten angenommen hat, wobei $\delta = \frac{S}{\varrho} d_0$.]

(Mittels des **Babinetschen Hahnes** — Erläuterung seiner Bohrungen an einem Modell! —, der zwischen den beiden Stiefeln der VerdünnungsLuftpumpe angebracht sein pflegt, läßt sich aus dem schädlichen Raum des einen Stiefels als einer kleineren Rezipienten die Luft von der Dichte d_0 mittels des anderen Stiefels noch weiter, bis $1 \text{ mm} = \frac{1}{760} \text{ at}$, verdünnen. — Dieser Nebenapparat der Kolbenpumpen hat aber gegenwärtig an Wichtigkeit verloren, da hohe Verdünnungen jetzt viel bequemer mit QuecksilberLuftpumpen, s. u., hergestellt werden.)

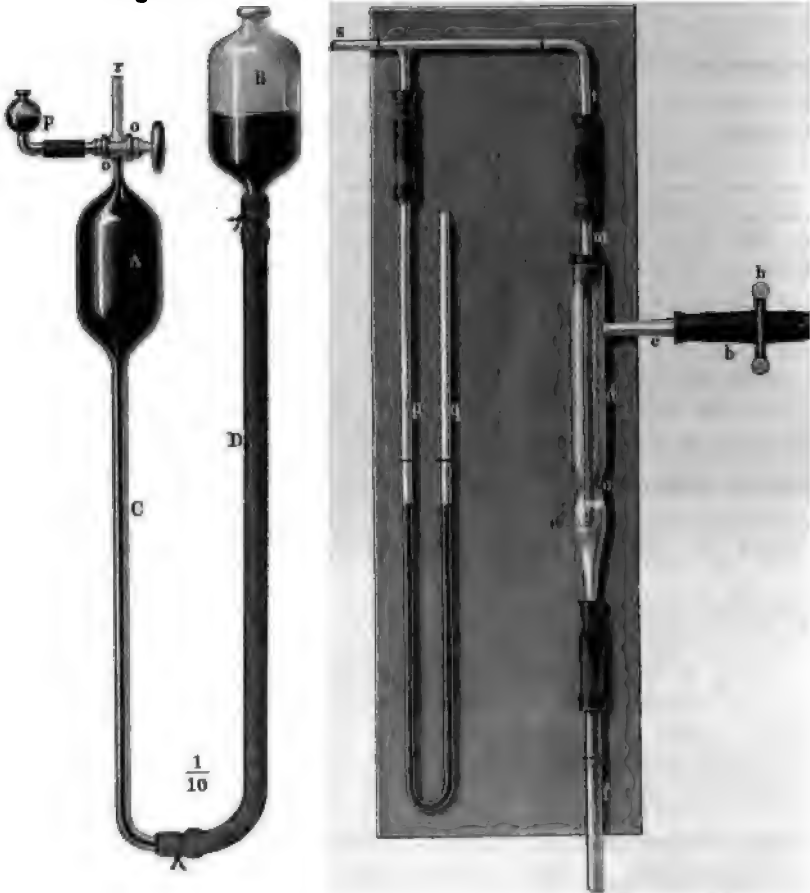
Die jeweilig erreichte Verdünnung wird angezeigt durch die **Barometerprobe**, d. i. ein Manometer von der Form eines Heberbarometers mit verkürztem geschlossenen Schenkel unter einem absperrbaren kleinen Rezipienten im Luftmanometer. [Ähnlich: Manometer an VerdichtungsLuftpumpen.]

Die zahlreichen mit der Luftpumpe anstellbaren Schulversuche demonstrieren A) durch die verschiedenen Bewegungen der Luft beim Pumpen selbst die durch das Mariottesche Gesetz näher bestimmten Eigenschaften (Zusammendrückbarkeit, Ausdehnbarkeit). B) Ausdehnbarkeit der Gase (ohne wesentliche Mitwirkung des Luftdrucks): Anschwellen schlaffer Blasen, Austreiben der Luft aus Nüssen, Leinwand, Holz, des Kohlendioxyds aus Bier (warum schwellen hier die Gasbläschen in späteren Stadien des Versuches auffallender an als zu Anfang?). C) Der Luftdruck zerreißt durch einseitigen Druck eine Tierblase (Pergamentpapier); Glasstücke über einer beiderseits offenen dickwandigen Glasröhre. Unter einem hohen Rezipienten fällt das Barometer, fängt der Stechheber an und hört der Winkelheber auf zu fließen u. s. w. D) Aufsermechanische Versuche nach §§ 77, 156. E) Praktische Anwendungen beim Imprägnieren von Holz, in Zuckerfabriken, um den Feuchtigkeitspunkt zu erniedrigen. Bei der Rohrpost wird je ein großes Reservoir mit verdichteter Luft abwechselnd mit den Mündungen der die Briefschaften aufnehmenden Rohrleitung in Verbindung gesetzt, Hoffler, Physik.

Die Quecksilberluftpumpen. Wie im Stiefel einer Verdünnungsluftpumpe durch Zurückziehen des Kolbens, so entsteht ein Vakuum auch bei dem Torricellischen Versuch; und zwar auch, wenn die Röhre oberhalb der Quecksilbersäule beliebig erweitert ist. Wird

Fig. 200.

Fig. 199.



mit dieser Erweiterung ein Rezipient verbunden, so wird auch die Luft verdünnt. (Fig. 199.)

In der ältesten Quecksilberluftpumpe von Geisler ist die er Torricellische Röhre *A* wiederholt durch Emporheben eines mit ihr durch Kautschukschlauch verbundenen Gefäßes *B* zu füllen, beim Senken wieder leeren und die Verbindung zwischen dem Raum *A* und dem Rezipienten durch Drehen des Hahnes *oo* herzustellen und zu unterbrechen. Die aus dem Rezipienten nach *A* gesogene Luft kann durch eine zweite Hahnbohrung nach *p* entweichen. Seither wurden zahlreiche Verbesserungen ersonnen, so daß jetzt weit höhere Verdünnungen als mit den besten Kolbenluftpumpen erreicht und rasch her-

nd. Sie gehen bis unter 10^{-8} at, wie man durch eigens konstruierte Manometer, ler auch schätzungsweise aus den in solchen Räumen bei elektrischen Entladungen ftretenden Lichterscheinungen erschließt. — Anwendungen für die Luftentleerung, zw. Füllung mit anderen Gasen bei den Geißlerschen, Crookeschen, Röntgen- shen Röhren (§§ 156, 158), den elektrischen Glühlampen (§ 167) u. s. f.

Die Wasserluftpumpen (Fig. 200). In das Abzugsrohr $abcdf$ einer Vasserleitung, durch welches das Wasser rasch abströmt, mündet ein ohr $stmn$, das bei s zu einem Rezipienten führt. Das rasch durch of dahinschießende Wasser reißt dann aus mn so viel Luft mit sich, als im Rezipienten Verdünnung (bis zur jeweiligen Spannung des fasserdampfes, § 77) eintritt.

§ 49. Einige Bewegungserscheinungen an Gasen.

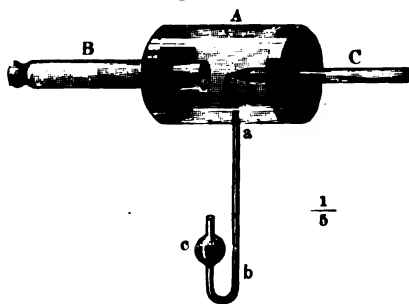
Im bisherigen waren Bewegungserscheinungen der Luft (und anderer use) nur als Begleiterscheinungen der aërostatistischen Versuche in Betracht ogen worden, so insbesondere das Strömen der Luft zwischen Rezipienten und infel der Verdichtungs- und Verdünnungsluftpumpe, das Einströmen in den llon beim Wägen der Gase u. dergl. Im allgemeinen sind die phoronomischen ypen der Bewegungen von tropfbaren Flüssigkeiten [Strömungen (speziell rkulationen) und Wirbel (speziell Wirbelringe), § 42] ohne weiteres übertragbar f die gasförmigen Körper; über ihre umfassende meteorologische Bedeutung. Dynamisch kommt als Hauptursache für die Störungen des Gleichgewichts ernerhalb kleinerer oder größerer Gasmengen die Verschiedenheit der Spannung folge verschiedener Dichtigkeit hinzu, gemäß dem Hauptgesetz:

Bestehen an zwei Stellen A und B einer Gasmenge verschiedenen olse Spannungen, so tritt Bewegung ein, die den Spannungs- ounterschied ausgleicht, indem Gas von Stellen höheren zu solchen iederen Druckes abfließt.

Ähnlichkeit mit dem Ausgleich von Niveaudifferenzen bei tropfbaren Flüssig- iten (§ 39), von Temperaturdifferenzen (§ 78), Potentialdifferenzen (§ 140) u. dergl. ist für diese Analogieen lehrreich, daß bei der praktischen Benutzung eines Vakuums“ (z. B. bei der Rohrpost) dieses in mehrfacher Hinsicht nicht minder ie ein positives Agens sich verhält e die verdichtete Luft (— wie denn uch noch GALILEI von der „Kraft des Vakuums“ sprach). Schon das Empor- ungen von Wasser in einer Röhre mittels es Mundes oder eines Kolbens legt die Verstellung vom Emporziehen für jeden abe, der noch nichts vom Luftdruck reißt.

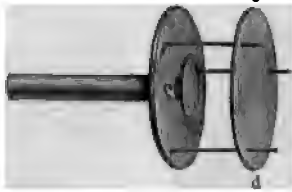
Wie in der Wasserluftpumpe der Vasserstrom, so reißt der Luftstrom, elcher aus dem engeren Rohr C in das itere B (Fig. 201) übertritt, Luft mit h, so daß in dem weiten Rohre „negativer Druck“ eintritt, wie sich an m Steigen der Flüssigkeit im Manometerrohre zeigt. Flüssigkeitszerstäuber, —

Fig. 201.



Weitere paradoxe Erscheinungen: Hält man die Hand nahe über ein Papier und bläst kräftig zwischen den Fingern gegen das Papier, so sucht es nicht zufliegen, sondern kommt zur Hand hinauf (ähnlich die Platte *cd* an dem Apparat Fig. 202). — Bläst man gegen eine bauchige

Fig. 202.



so gehen die Stromfäden der Luft um die herum, so daß sie eine hinter ihr stehende Flamme auslöschen unvermögen. Diesem Umstande werden durch Stromfäden ist analog die Symplicite Körper, wie Kieselchen, dünnwandige Kugeln ... auf Springbrunnen tanzen zu lassen. Wieder geben solche Paradoxa einen Einblick in die Komplikationen hydrodynamischer und dynamischer Vorgänge.

V. Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen.

§ 50. Abweichungen der Naturkörper vom dem Grenzbegriffen starrer Systeme, idealer Flüssigkeiten und (

Wie schon im § 25 und § 35 hervorgehoben wurde, ist der Begriff starrer Systeme zunächst nur eine wissenschaftliche Fiktion, nämlich Grenzbegriff für die in der Natur wirklich vorkommenden festen Körper Stoffe, vergl. § 16, S. 60), dem sich die festen harten am meisten, die flüssigen weichen, biegsamen ... weniger nähern. Je nach der Art der gegenseitigen Verschiebungen der Teilchen und der hieraus sich ergebenden Gestaltsveränderungen, die an festen Körpern durch gegebene Kräfte hervorgerufen werden, je nachdem diese Veränderungen nach dem Aufhören der Kräfte „von selbst“ (genauer: infolge der zwischen den Teilchen des Stoffes wirkenden „Molekularkräfte“) wieder rückgängig gemacht werden oder nicht, unterscheidet man alle Stoffe in elastische und nicht elastische Stoffe. Wieder bildet hier der Begriff vollkommen elastischen Stoffe den einen Grenzbegriff, dem sich z. B. Elfenbein (der Billardbälle) ... sehr gut, Kautschuk, Fischbein ... weniger (

Die Art der bleibenden Gestaltsveränderungen wenig elastischer (begriff: vollkommen unelastischer) Stoffe ist für die Art der Bearbeitung von Stoffen von größter praktischer Bedeutung; und so unterscheidet die unerschöpflich reichhaltige „mechanische Technologie“ nach den besonderen Arbeitsschritten die Stoffe als **bilddsam** (knetbar, hämmerbar, walzbar, prägbarm, spinnbar, gießbar, lötbar ...), **spröde** (spaltbar, schleifbar ...). Hierbei drückt sich der Praxis alsbald feinste Unterschiede auf (z. B. zwischen englischen Stählen ... Stählen), die die Theorie nur allmählich unter bestimmten (physikalischen, chemischen ...) Begriffen zu bringen weiß. Z. B.: Zu Scheidemünzen sich Bronze besser als Kupfer, da es zu geringe „Schabfestigkeit“ hat (daß die Prägung sich zu bald „abwetzt“). An Aluminium sind nicht leicht Schraubgewinde anzudrehen; es ist schwierig zu polieren und kaum zu löten. Unter

der Haltbarkeit von Tuchsorten . . . — Nach jenen mechanischen Hauptunterschieden der Stoffe und der beabsichtigten Gestaltsveränderung richten sich die Werkzeuge, bezw. Werkzeugmaschinen: Hammer, Prägstock, Walzen, Spinnmaschinen . . .; den feineren Unterschieden passen sich die unzähligen Abarten dieser Vorrichtungen und ihrer Handhabungen an. —

Auch der Begriff der vollkommenen (idealen) Flüssigkeit ist nur ein Idealbegriff, dem sich am meisten die dünnflüssigen Stoffe (Schwefeläther, Alkohol, Wasser, Quecksilber . . .), weniger die dick-, zähflüssigen Stoffe (Honig, etc. . .) nähern.

Ebenso ist der Begriff der vollkommenen (idealen) Gase, zu dem die ideale Gültigkeit des Mariotteschen Gesetzes gehören würde (§ 35), in den wirklichen Gasen immer nur annähernd, und zwar mit um so geringerer Annäherung erreicht, je näher diese dem Kondensationspunkt kommen. —

Überhaupt bilden die drei „Aggregatformen“ fest, flüssig, gasförmig drei Haupttypen, zwischen denen es mancherlei Übergänge gibt.

Die Methode zur wissenschaftlichen Beherrschung dieser nach den verschiedensten Richtungen sich erstreckenden Abweichungen von jenen drei Haupttypen, wie sie in den Abschnitten II, III, IV vorausgesetzt worden sind, ist die Einführung neuer Fiktionen, deren einfachste wieder die des (durch die genaue Gültigkeit von Hookes Elastizitätsgesetz, folgender Paragraph, definierten) vollkommen elastischen Stoffes ist. Der nächste Schritt in der Berücksichtigung der Abweichungen von vollkommener Elastizität geschieht durch die Einführung der elastischen Nachwirkung und der Elastizitätsgrenze, ein weiterer Schritt die Unterscheidung verschiedener Arten von Festigkeit. — Für Flüssigkeiten sind die Abweichungen von der Fiktion der vollkommenen Flüssigkeit einer experimentellen Untersuchung am leichtesten zugänglich in den Erscheinungen der Kapillarität (im weitesten Sinne, § 55). — Für Gase kommen jene Abweichungen in der Sprache im Zusammenhang mit der kritischen Temperatur (§ 77) u. dergl.

Sämtliche hiermit vorläufig überblickten Abweichungen der wirklichen Naturkörper von der Fiktion völliger Starrheit, d. h. die allgemeine Erfahrung, daß alle größeren Teile bis hinab zu den eben noch wahrnehmbaren Teilchen der Naturkörper gegenseitige Verschiebungen durch entsprechend wirkende Kräfte bis zur völligen Trennung der Teilchen zulassen, drängt zur Frage: bestehen jenseits der Grenzen direkter Wahrnehmungen die Naturkörper aus in sich völlig starren, gegenüber allen mechanischen Kräften unveränderlichen Teilchen; oder geht die Teilbarkeit der Naturkörper ins Unendliche (und hiermit vielleicht auch die Elastizität, Biegsamkeit . . . der auch so klein zu denkenden Teile der in sich stetig zusammenhängenden Körper)? Die erstere nimmt die Molekularhypothese an (über sie § 57); nach ihr liegen die mechanischen Tatsachen der Elastizität, Festigkeit, Kapillarität u. s. w. unter dem Namen „Molekularwirkungen“ zusammengefaßt zu werden. Es sollen aber zunächst diese Tatsachen unabhängig von jener Hypothese nur auf Grund der Erscheinungen selbst dargestellt werden.

§ 51. Elastizität.

Nimmt ein fester Körper unter Einwirkung mechanischer Kräfte eine solche Richtung in Bezug aufeinander und auf den Körper müssen diese Kräfte haben?) Dehnungen, Verkürzungen, Verbiegungen.

Verdrehungen . . . an, und stellt sich nach dem Aufhören jener Kräfte die ursprüngliche Gestalt des Körpers „von selbst“ wieder her, so äußert der Körper gegenüber jenen formändernden Kräften **Zug-, Druck-, Biegungs-, Torsionselastizität.**

Außer diesen vier (zunächst aus praktischen Rücksichten hervorgehobenen) Arten von Gestaltsänderungen lassen sich noch andere denken und dementsprechend auch noch andere Arten von Elastizität, unter denen sich insbesondere die „**Schubelastizität**“ (Scherungselastizität) als theoretisch wie praktisch bedeutsam herausgestellt hat. Zur Veranschaulichung dieses Begriffes denken wir uns den Würfel aus Gallerte unten und oben mit Fassungen (Schachteln, die nicht ganz bis zur Hälfte des Würfels reichen) versehen: es lassen sich die beiden Hälften des Würfels in horizontaler Richtung gegeneinander verschieben und die Gallerte wirkt kraft ihrer schubelastischen Gegenwirkung diese Verschiebung wieder rückgängig zu machen suchen. Über die Bedeutung dieses Begriffes für die schärfere Definition des tropfbar flüssigen Zustandes vergl. § 54.

Da an den übrigen Arten von Elastizität bis zu gewissem Grade auch die Zugelastizität beteiligt ist (z. B. Dehnung der Fasern beim Verdrehen; desgleichen können wir uns die beiden Hälften des Gallertwürfels voneinander getrennt und dann

Fig. 203. gespannte elastische Schnüre miteinander wieder verbunden denken, die dann beim Verschieben allein gedehnt werden), so werden die nächsten Maßbestimmungen für Zugelastizität entwickelt.

Versuch: Ein prismatischer oder zylindrischer Streifen (Fig. 203, ein Schlauch) aus Kautschuk, der an dem oberen Ende festgeklemmt und am unteren mit 1, 2, 3 . . . kg belastet wird, nimmt Verlängerungen an, die nach Beseitigung der Belastung wieder (annähernd) rückgängig werden. Dabei bringt dieselbe Belastung von p kg an Streifen von bestimmter statischer Beschaffenheit um so größere Verlängerungen hervor, je größer ihre ursprüngliche Länge und je kleiner ihr Querschnitt ist. — An einem Stahldraht von gleichen Dimensionen sind jene Verlängerungen bei gleicher Belastung viel kleiner, oder: der „**Elastizitätskoeffizient**“ des Stahl ist kleiner als der des Kautschuks.

Während es der gewöhnlichen Auffassung nahe liegt, dem Kautschuk „besonders große Elastizität“ zuzuschreiben, weil er schon durch kleine Kräfte stark deformiert wird, gilt der physikalischen Auffassung z. B. ein Billardball aus Elfenbein elastischer als ein Spielball aus Kautschuk, und zwar 1. weil bei einer Deformation von bestimmter Größe in dem Kautschukball eine viel kleinere elastische Gegenwirkung geweckt wird als im Elfenbeinball; 2. weil bei Kautschuk die elastische Nachwirkung sehr groß und die Elastizitätsgrenze sehr eng ist.

Die numerische Bestimmung des Elastizitätskoeffizienten (Dehnungskoeffizienten, der gegenwärtig häufiger als sein reziproker Wert, der Elastizitätsmodul, bei Berechnungen verwendet wird), ergibt sich aus feineren messenden Versuchen folgendermaßen: Es sei z. B. ein Stahldraht von q mm² Querschnitt am oberen Ende festgeklemmt und am unteren durch Gewichte belastet, welche eben ausreichen, ihn gerade zu strecken; er habe dann die „natürliche Länge“

man. Werden dann noch 1, 2, 3 ... p kg zu jener Belastung hinzugefügt, so nimmt er andere Längen L' und somit Verlängerungen $l = L' - L$ an, welche durch Maßstäbe (genauer mittels Fühlhebel, durch Kathetometer- oder Spiegelablesung) gemessen werden können. Wird dann von den drei Größen L , p je eine verändert, so zeigt sich das entsprechende l **umgekehrt proportional** dem Querschnitt q , **direkt proportional** der Länge L und der Belastung p . Die Abhängigkeit vom Stoffe wird so ausgedrückt, daß z. B. bei Stahl für $q = 1 \text{ mm}^2$, $L = 1 \text{ m}$, $p = 1 \text{ kg}$ die Verlängerung rund $\frac{1}{20000} \text{ m}$ ist, welche Zahl als **Elastizitätskoeffizient** k des Stahls bezeichnet wird und sein reziproker Wert $E = 20000$ als **Elastizitätsmodul** des Stahls. Die entsprechenden Zahlen für einige andere Stoffe in der Tabelle S. 200 (zusammen mit einigen anderen vorher gehörigen Größenangaben). Jene Abhängigkeiten des l von k , q , L , p werden dann allgemein dargestellt durch die Formel für die

$$\text{zugelastische Verlängerung } l = k \frac{L}{q} p.$$

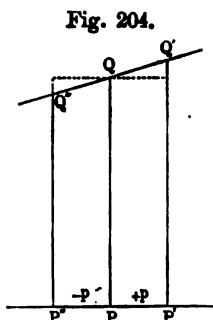
Eben diese Gleichung gilt auch für die Druckelastizität (die hier als Zugelastizität mit entgegengesetztem Vorzeichen in Rechnung gebracht werden kann). — Von diesen Abhängigkeiten wurden zuerst zwischen l und p allgemein ausgesprochen als

Hookes Elastizitätsgesetz (1678): Die elastischen **Deformationen** sind den sie hervorbringenden **Kräften** (Kraftmomenten) **einfach direkt proportional**. — Indem dann diese Körper während der Deformation eine elastische Gegenwirkung ausüben, die den formierenden Kräften gleich und entgegengesetzt ist, sind den **Deformationen** auch die elastischen **Gegenkräfte einfach direkt proportional** („*Ut tensio, sic vis*“). — Eben diese einfachen Proportionalitäten bilden ihrerseits erst die feste Definition des „vollkommen elastischen“ Stoffes.

Dieses zunächst für feste Körper aufgestellte Gesetz erinnert an das von Hookes Zeitgenossen BOYLE und MARIOTTE gefundene und bestätigte Gesetz für Gase, das ja auch wesentlich ein Elastizitätsgesetz ist (LA 126). Ver- LA 126.
gleichen wir die in Figg. 180 bis 182, S. 178, dargestellten Gassäulen mit ebensolchen Zylindern aus festem Stoffe, so entspricht das Verhalten des Gases bei dem Vermehren und Vermindern des Druckes um verhältnismäßig sehr kleine Bruchteile des jeweilig schon vorhandenen Druckes dem druck-, bzw. zugelastischen Verhalten des festen Körpers. Neben dieser Ähnlichkeit bestehen aber zwischen dem festen und dem gasförmigen Körper folgende Unterschiede: 1. Das Gas besitzt überhaupt kein „natürliches Volumen“, sondern das jeweilige Volumen richtet sich ganz nach dem ausgeübten äußeren Drucke (und der Temperatur); wogegen dem Kautschukzylinder, dem Stahldraht, falls er auch gar keinen äußeren Kräften ausgesetzt ist, ein **natürlicher Querschnitt** und eine **natürliche Länge** zukommt, die wir uns als ausschließlich durch die zwischen seinen Molekülen wirkenden inneren Kräfte (anziehende und abstofsende Molekularkräfte, 57, gegen die auch die eigene Schwere nicht in Betracht kommt) bedingt feststellen haben. — 2. Hookes Gesetz für feste Stoffe gilt auch nur innerhalb viel engerer Grenzen als das Mariottesche Gesetz für Gase; dies zeigt einerseits die theoretische Überlegung (a), die andererseits schon durch die gewöhnliche

Erfahrung, wie durch messende Versuche (β) bestätigt wird: α) Es sei in die natürliche Länge eines Zylinders aus festem Stoffe als PQ , die durch die den, bezw. drückenden Kräfte $+p = PP'$ und $-p$ herbeigeführten Längen als $P'Q'$, bezw. $P''Q''$ g dargestellt. Wäre nun Hookes Gesetz der einfachen Proportionalität für die festen Körper unbegrenzt gültig, müßte z. B. Stahldraht von $q = 1 \text{ mm}^2$ und $L = 2$ für die ziehenden, bezw. drückenden Kräfte

$\pm p = 1, 2, 3, \dots, 20000, 20001$
 die Längen 20001, 20002, 20003 \dots 40000, 40001
 bezw. 19999, 19998, 19997 \dots 0, -1
 also sogar unter 0 (!) annehmen, was den alltäglichen Erfahrungen widerspricht.



In den tatsächlichen Abweichungen von Hookes Gesetz ist die erste kritische Stelle gegeben durch die Elastizitätsgrenze, die zweite durch die Festigkeitsgrenze, genannt „Festigkeit“. Es zeigt nämlich bei genauen Versuchen (β) z. B. Stahldraht folgendes Verhalten: Beläßt man dieselbe Belastung $p \text{ kg}$ Zeit, so nimmt die Verlängerung $l \text{ mm}$ allmählich immer noch größere an, die erst nach monatelanger Belastung einen konstanten Grenzwert nicht merklich überschreiten. Ebenso zieht sich nach Beseitigung der Belastung nur allmählich auf die ursprüngliche Länge zusammen (elastische Wirkung); ja in theoretischer Genauigkeit erreicht er diese überhaupt auch bei mäßigen Belastungen nie wieder. Indem man aber (mit WERNER) bei 1: eine Verlängerung von $\frac{1}{100} \text{ mm}$ (d. h. $\frac{1}{1000} \text{ Proz.}$) als praktisch zu vernachlässigen annimmt, ergibt sich die Elastizitätsgrenze für ausgezogenen Stahldraht (für angelassenen nur 15 kg); und zwar fand bei dieser stärksten Belastung eine Verlängerung von 0,002 (bzw. 0,00056) statt. An einen ausgezogenen Kupfer von $q = 1 \text{ mm}^2$, $L = 1 \text{ m}$ darf man bis zu 12 kg anhängen, ohne daß merkliche (über 0,05 mm) bleibende Verlängerung erfährt; durch diese 12 kg wird er um 0,93 mm verlängert. Wird er durch 40 kg um 3 mm ausgezogen, reißt er, weshalb 0,003 das Verlängerungsmaximum für Zugfestigkeit und 40 den Festigkeitsmodul darstellt. — Ebenso

	Elastizitäts-			Verlängerung bei	
	Koeffizient	Modul	Grenze	der Elastizitäts-Grenze	dem Zerreißen
Stahl . . . } bezog.	0,000 053	18 809	43	0,002 00	—
Kupfer . . }	0,000 080	12 449	12	0,000 93	0,003
Silber . . }	0,000 137	7 274	11	0,001 49	0,0045
Tannenholz (längs d. Faser)	0,000 890	1 113	2,2	—	—

Änderung der Gesamtgestalt fester Körper durch Zug- und Druck. — Mit der bisher betrachteten Vergrößerung, bezw. Verkürzung der Länge durch Zug- und Druckkräfte geht auch Verkleinerung, bezw. Vergrößerung des Querschnittes

, wie sich bei einem hinreichend dicken Kautschukstreifen r den einfachen Anblick ergibt. (Auch z. B. beim Stofs zweier ille gegeneinander werden diese nicht nur zusammengedrückt, es treten auch seitliche Verschiebungen ein.)

Fig. 205.

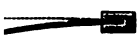


Fig. 206.

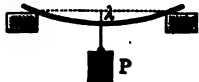
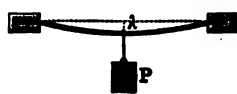


Fig. 207.



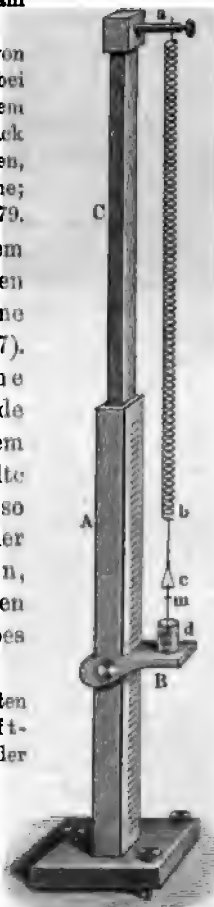
feinen messenden Versuchen an elastischen Drähten (indem z. B. der einer mit Wasser gefüllten Röhre umgeben ist, worin dann bei der des Drahtes das Wasser sinkt), entspricht innerhalb der Elastizitäts-Längenänderung von 1 m auf $(1 + \lambda)$ m eine „Querkontraktion“ und eine Volumveränderung (Vergrößerung = Dilatation, Ver- = Kompression) von $[1 \pm (1 - 2\mu)\lambda]m^3$, wo μ die „Zahl“ heisst. Es ist für Glas $\mu = \frac{1}{4}$, für Stahl für Kautschuk $\mu = \frac{1}{4}$.

Fig. 208.

besonders wichtiger Fall ist der, daß ein Körper von en her gleichförmig zusammengedrückt wird, wobei „Kompressibilitätskoeffizient“ K gleich ist dem der gesamten Volumveränderung, die bei Druck einer Richtung eintritt (Analogieen zum linearen, schen Ausdehnungskoeffizienten der Stoffe für Wärme; ist z. B. für Kupfer $K = 0,0001199$, für Glas $0,000179$.

Biegungselastizität äußert sich z. B. an einem n den Schraubstock eingeklemmten Stabe, dessen Ende zur Seite gedrückt wird (— verschiedene Befestigung und Belastung nach Fig. 205—207). ch eine bestimmte Kraft erzielte seitliche ebung eines Punktes in bestimmtem Abstände Befestigungsstelle (Verbiegung) ist bei weitem als es die durch die gleiche Kraft erzielte erung oder Verkürzung wäre. — In dem so n Stabe werden dann die Längsfasern an der Seite der Krümmung auseinandergezogen, onkaven Seite zusammengedrückt; zwischen hnten und den verkürzten Schichten des Stabes eine „neutrale Schicht“.

bei jenen Drehungen und Verkürzungen geweckten druckelastischen Kräfte geben zusammen Kraft-, welche die Teilchen des Stabes um die Punkte der Schicht in die alte Lage zurückdrehen. — Auch nen, bzw. Zusammendrücken eines schrauben- wundenen Drahtes, wie bei Jollys Federwage LA 29), kommt nicht direkt die Zug- und Druck-, ie Biegungselastizität überwiegend zur Wirkung.



Die Torsionselastizität äußert sich beim Verdrehen Drähten, Fäden um ihre Längsachse. Ihre Größe wird also nicht durch Kräfte, sondern durch Kraftmomente gemessen, und heißt das Moment des Kräftepaars, das zur Verdrehung um Winkel 1 (in absoluten Maße, d. i. $57^{\circ} 17' 44,8''$) erforderlich ist, die Torsionskonstante des Drahtes. HOOKE'S Gesetz nimmt hier die Form an, daß der Torsionswinkel dem Torsionsmoment **direkt proportional** ist.

Versuche mit dem Torsionsapparat (Figg. 144 und 145, S. 151) lehren, gegebenem Torsionsmoment der Torsionswinkel der ersten Potenz der Länge der vierten Potenz des Durchmessers umgekehrt proportional ist. Indem sie Drähte von sehr kleinem r und sehr großem L verwenden lassen, wird Torsion bei zahlreichen Apparaten nach dem Prinzip der Drehwaage (Fig. 6) zur Messung sehr kleiner Kräfte (namentlich auch elektrischer und magnetischer) und Kraftmomente angewendet.

§ 52. Festigkeit, Teilbarkeit, Kohäsion fester Körper, Adhäsion fester und flüssiger Körper.

Entsprechend den Arten der Elastizität unterscheidet man Zug-, Druck-, Biegungs- und Torsionsfestigkeit (auch Festigkeit gegen das Zerreißen, Zerdrücken, Zerschneiden, Zerbrechen, Zerdrücken).

Überdies entspricht z. B. der Schubelastizität die Schub- oder Schubfestigkeit (auch „Querwiderstand“); sie ist unter allen Festigkeiten für Material am größten, z. B. bei Sandstein sechsmal so groß als die Zugfestigkeit.

Welche Art von Festigkeit wird besonders in Anspruch genommen? Stricken, Ketten, Tragseilen, Ziegeln, Brückenbalken, den einzelnen Bestandteilen der Kettenbrücken, Zimmerböden, Wellbäume, Bohrstangen u. s. f.?

Die allseitigen praktischen Anwendungen haben zu einer so umfassenden Ausbildung der Festigkeitslehre geführt, daß diese geradezu den Hauptbestandteil der mechanischen Technologie bildet. Insbesondere sind die Bedingungen für die jeweilig zweckmäßigste Ausnutzung einer gegebenen Menge Material zu untersuchen. Einige der einfachsten hierhergehörigen Erfahrungen sind: Es bedarf viel mehr Anstrengung, denselben Stab mit rechteckigem Querschnitt (z. B. Lineal) durch einen Druck auf die Schmalseite als durch einen auf die LA 127. breite Seite zu brechen (LA 127). — Eine gegebene Menge Eisen gibt einen viel stärkeren Pfeiler, wenn dieser die Gestalt einer Röhre als die einer massiven hat (T-Träger, Röhrenbrücken...): Versuch: Ein zusammengerollter Bogen

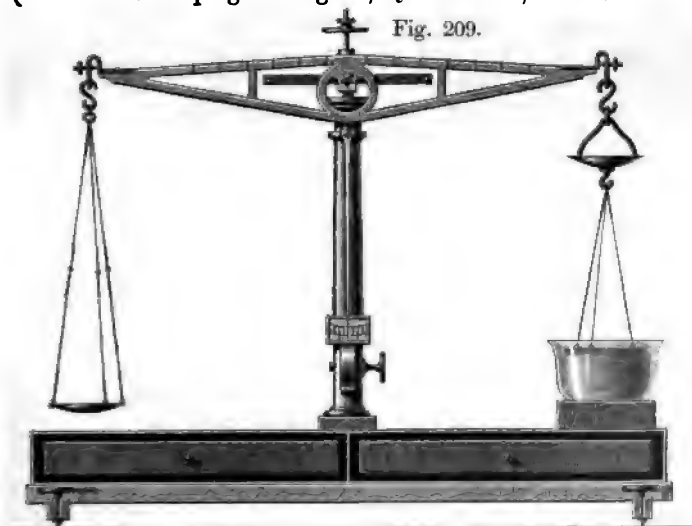
en-, Zerdrehtwerden kund. Indem nun z. B. das Zerrissenwerden nur an einer Stelle erfolgt, ist bewiesen, daß der Körper gerade eine geringere Festigkeit als an den übrigen Stellen gehabt müsse; wäre er völlig homogen gewesen, so hätte er gleichzeitig zu reißen, d. h. in Staub zerfallen müssen.

Um zu gehen wir, streng genommen, über die direkten Erfahrungen schon hinaus, wenn wir uns jeden (zunächst festen) Körper als „aus Teilchen bestehend“ vorstellen, zwischen denen anziehende Kräfte wirken, als deren Gesamtwirkung wir die natürliche Zusammenhang, die Kohäsion des Körpers, darstellen. — Die Molekularhypothese (§ 57) führt diese Vorstellung bis über die Grenzen der Wahrnehmbarkeit weiter.

Bei vielen, aber keineswegs allen Stoffen sind Zwischenräume dem bloßen Auge oder unter dem Mikroskop sichtbar. So die Poren des Holzes, Badeschwammes, Brotes, der Haut.

Gegenüber giebt es keine direkten Erfahrungen, die uns zwingen, ähnliche Zwischenräume auch in viel kleineren, z. B. im Glas, im Wasser anzunehmen. — Die Molekularhypothese überträgt aber jenen Begriff der „Poren“ auch auf die angenommenen intramolekularen Zwischenräume.

Von der Kohäsion je eines Körpers wird unterschieden die Kohäsion je zweier Körper, sei es aus gleichem Stoffe (z. B. zwei feine geschliffene Glasplatten), sei es aus verschiedenen Stoffen (z. B. festem Spiegelamalgam, Quecksilber, Wasser und Glas).



Die Größe der Kräfte, die beim Trennen zweier aufeinander haftender Körper zu überwinden sind, wird gemessen durch folgende Versuche: Unter die feineren Schnüren hängende Schale der hydrostatischen Wage wird in genau gleicher Lage die eine „Adhäsionsplatte“ gehängt und equilibriert (Fig. 209). Dann wird sie durch Senken des Wagbalkens herabgelassen auf die ebenfalls ruhende zweite feste Platte, oder auf den Spiegel von Quecksilber, Wasser . . .

Wird nun der Wagbalken wieder gehoben, so bedarf es bestimmter Gewichte in der anderen Schale, um die beiden aneinander haftenden wieder zu trennen. — Die Ergebnisse dieser Versuche dürfen aber kein ohne weiteres sämtlich als Maß der Adhäsion der einander berührenden gedeutet werden. Dies ist sofort ersichtlich z. B. bei Glas und Wasser, da an dem Glase eine Schicht Wasser haften bleibt, so wird nicht die Adhäsion zwischen Glas und Wasser, sondern die Kohäsion des Wassers selbst gemessen und durch das Abreißgewicht gemessen. — Aber auch z. B. das Trennen zweier Glasplatten voneinander ist nicht nur deren Adhäsion, der sie gegeneinander von außen pressende Luftdruck zu überwinden. — *dem Versuch:* Man breitet ein Zeitungsblatt flach auf den Tisch, faßt es in der Mitte und sucht es rasch emporzuheben). Auch haften zwei solche Platten falls nicht Punkt für Punkt aneinander, sondern es bleibt zwischen ihnen eine sehr dünne, Luftschicht eingeschlossen, und es kommt dann zur Adhäsion zwischen dieser Luftschicht und jedem der beiden Gläser mit. Für die Erklärung der Kapillarercheinungen (§ 55, III) ist viel Ungleichung:

Das Verhältnis der Adhäsion zwischen Glas und Wasser und der Kohäsion des Wassers selbst ist größer, als das entsprechende Verhältnis für Glas und Quecksilber.

Wird eine Bleikugel mit einem scharfen Messer durchgeschnitten und sogleich (bevor Oxydation eintritt) die Schnittflächen kräftig aneinander gedrückt, so nähert sich die Adhäsion der Größe nach wieder der Kohäsion. Do z. B. die Scherben eines zerbrochenen Glases durch noch so inniges Aneinanderdrücken der Bruchflächen nicht wieder zu einem Ganzen zu vereinigen. Es somit die Adhäsionskräfte das den direkt beobachtbaren Tatsachen möglichst bleibende Beispiel von mechanischen Kräften dar, die zwischen den einander aneinander, aber nicht mehr einander unmittelbar berührenden (räumlich vereinigten) Teilchen der Körper wirken. — Schweißen, Löten.

§ 53. Kristallisation.

Viele feste Stoffe zeigen in ihrem natürlichen Vorkommen „Minerale“) die bestimmte Gestalt mehr oder weniger vollkommen ausgebildeter **Kristalle** oder doch **kristallinisches Gefüge**. — welche jeder Spur eines solchen Gefüges entbehren (Leim, Kautschuk, überhaupt alle Kolloide), heißen **amorph**.

Die sechs Kristallsysteme: **tesseral** (hexaedrisch), **quadratisch**, **rhomboedrisch**, **monoklinisch**, **orthoklinisch**, **hexagonal**, werden als aus der Mineralogie vorausgesetzt. — Mit der Gesetzmäßigkeit der Gestalt gehen aber auch folgende besondere physikalische und chemische Eigenschaften Hand in Hand:
a) mechanische: die Spaltbarkeit parallel zu den natürlichen Kristallflächen, die auf eine geringere Kohäsion nach diesen als nach anderen Richtungen beruht.

Indem sich die Richtungen der Kristallachsen in diesen verschiedenen **Beziehungen** gegenüber anderen Richtungen hervortun, werden wir auf die **Vorstellung** geführt, daß die Stoffverteilung innerhalb eines Kristalls nach **verschiedenen Richtungen** eine verschiedene sein müsse. So bieten die Kristalle das **stärkteste** Beispiel zur Unterscheidung **homogener** und **nicht homogener, isotroper** und **anisotroper** Stoffe. Z. B.: Denkt man sich ein Kalkspatrhomboeder **nach** drei Bündel paralleler gegeneinander normaler (übrigens beliebig gegen die **Kristallachsen** orientierter) Ebenen in lauter gleich große Würfelchen zersägt, so **sind** diese, wie klein man sie auch wählen mag, und gleichviel ob sie nahe der **Hauptachse** oder den Nebenecken gelegen waren, völlig gleiche Struktur auf: Der **Kristall** ist homogen. (Ein Kristall, der aus Schichten verschiedener Alaune **besteht**, ist anhomogen oder nicht homogen; desgleichen ein Hagelkorn . . .) **Legt** man aber durch irgend einen Punkt eines nicht dem tesseralen Systeme **gehörigen** Kristalles Gerade parallel, schief, normal zur Hauptachse, so zeigt **der** Kristall nach diesen verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizitäts-, **Wärmeleitungs-, Brechbarkeits- . . .** Verhältnisse: er ist anisotrop oder nicht isotrop. (Der Begriff des Isotropen bezieht sich also auf die Richtungen **innerhalb** eines Körpers, der des Homogenen auf die einzelnen Orte **innerhalb des** Körpers.) — Homogen und isotrop ist z. B. ein Kolloid wie Leim, der **nach** seine ganze Masse hindurch gleichmäßig gekocht und abgekühlt worden ist.

Wiewohl der Begriff des Kristalls zunächst festen Aggregatzustand voraussetzt, weisen doch auch noch Flüssigkeiten teilweise **analogieen** zu kristallinen Stoffen auf, so namentlich durch ihr **plastisches** Verhalten (§ 129).

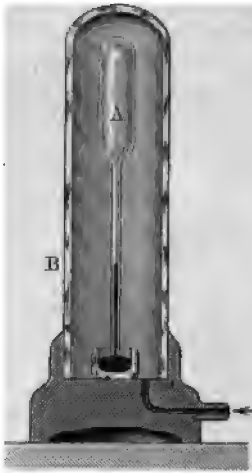
Auch für das Entstehen der Kristalle, das **Kristallisieren** (— das Wort **Kristallisation** bezeichnet einerseits den fertigen Zustand, andererseits sein **Entstehen**) ist die Beziehung des festen zu den beiden anderen Aggregatzuständen in **der** Regel von Belang; denn der weitaus häufigste Fall des Kristallisierens ist **der**, daß sich ein fester Stoff aus flüssigem abscheidet, sei es im Erstarren bei **Entziehung** von Wärme, sei es beim Ausscheiden aus Lösungen, namentlich **durch** Verdunstung der lösenden Flüssigkeit. Doch bilden sich Kristalle auch **aus** Gasen und Dämpfen ohne beobachtbaren Durchgang, durch den flüssigen **Zustand**, so beim Sublimieren von Schwefel, Jod . . . Auch gibt es eine **Umbildung** amorpher fester Stoffe in kristallinen Zustand oder ein **Umkristallisieren** aus einem Kristallsystem in ein anderes, z. B. beim Schwefel, § 218. Ein in der Praxis sich unliebsam bemerkbar machendes Beispiel ist das **Umwandeln** Kristallinisch- und damit Brüchigwerden schmiedeiserner **Wagenachsen** infolge der wiederholten Stöße beim Gebrauch.

§ 54. Zusammendrückbarkeit (Volumselastizität) der tropfbaren Flüssigkeiten.

Von den beiden charakteristischen Merkmalen, durch welche in § 35 der **Begriff** einer vollkommenen Flüssigkeit definiert wurde, war das erste das der **Konstanz** des Volumens einer gegebenen Flüssigkeitsmenge. — Ob und **inwieweit** die wirklichen Flüssigkeiten dieses Merkmal besitzen, hat sich lange Zeit **nicht** durch Versuche feststellen lassen. So stellte schon die Akademie zu Florenz **den Versuch** an, Wasser, das in eine hohle Silberkugel eingeschlossen war, dadurch **zusammenzudrücken**, daß die Kugel deformiert wurde, was (weil von allen **geometrischen** Körpern die Kugel bei gleicher Oberfläche das größte Volumen hat) eine

Verkleinerung des Wasservolumens hätte bewirken sollen; nach den (n. angeweifelten) Berichten drang aber das Wasser durch die Poren des Si. Die Schwierigkeit, daß das die Flüssigkeit umschließende Gefäß von innen einen großen Druck erfährt und sich so erweitert oder gar zerspringt,

Fig. 210.



ÖRSTEDT (1822) mittels des Piezometers (F. So heißt die mit einem Kapillarrohr verbundene birne (nicht auch der äußere Druckapparat!). eine bestimmte Wassermenge durch einen Quecksilberfaden abgeschlossen ist, dessen Steigen die Verminderung jener Wassermenge anzeigt. eingeschlossene Wasser muß durch Auskochen gemacht sein; nicht nötig ist dies bei dem das Gefäß von außen umgebenden Wasser, auf dem von einer Wasserleitung mit einigen at oder einer Druckpumpe von außen her ein Druck ausgeübt werden kann (Beschreibung der Hahnstellungs- und Druckpumpen). Die Größe des Druckes wird durch die Volumsänderungen einer zylindrischen Luftsaule gezeigt, auf die sich der Druck des Wassers unten öffnet, in Quecksilber tauchenden Enden fortpflanzt. [Schon früher hatte CANTON (1774) die Zusammendrückbarkeit des Wassers dadurch bewiesen, daß er Wasser in einer thermometrischen Röhre dem Druck der äußeren Luft aussetzte und die Erweiterung des Gefäßes auf folgende Art in Abrechnung brachte: dem das Gefäß zum größten Teile mit Wasser gefüllt, im übrigen durch Auskochen luftleer gemacht und hierauf zugeschmolzen war, wurde der Wasserstand bis *a* in freier Luft, bis *b* unter der Luftpumpe und dann bis *c* wieder in freier Luft nach Abbrechen der Spitze des Gefäßes beobachtet.] — ÖRSTEDTS Versuche wurden später durch REGNAULT u. a. noch vervollkommen und ergaben so

Die tropfbaren Flüssigkeiten sind **zusammendrückbar** und durchschnittlich nicht weniger als die festen Stoffe. Es wird n. 1 cm³ Wasser bei 0°C. durch den Druck von 1 kg per cm² \neq 1 etwa $\frac{1}{20000}$ cm³ zusammengedrückt; Quecksilber um etwa $\frac{1}{3000}$ wenigstens von allen Flüssigkeiten).

Gegen den von außen ausgeübten Druck zeigen die Flüssigkeiten eine elastische Gegenwirkung, ebenfalls ganz wie ein gedrückter fester Körper. Wenn jener Druck beseitigt wird, nehmen sie das frühere Volumen ohne merkliche bleibende Veränderung an und sind also einem Druck gegenüber **vollkommen elastisch**.

Diese Elastizität ist am ehesten zu vergleichen mit der Druckelastizität fester Körper. Weil sie aber zusammen besteht mit der Unselbständigkeit der Gestalt, ist sie genauer als bloße Volumselastizität zu bezeichnen. Ihr Wesen über fallen die fünf Hauptarten von Elastizität, welche wir an festen Körpern unterschieden haben, zusammen unter den Begriff der **Gestaltselelastizität**. THOMSON und TAIT wird das den Flüssigkeiten gewöhnlich zugeschriebene charakteristische Merkmal der „Leichtverschiebbarkeit der Teilchen“ geschrieben als ein völliger Mangel an Schubelastizität.

Mit Rücksicht auf dieses elastische Verhalten der tropfbaren Flüssigkeiten gewinnen wir auch einen tieferen und schärferen Einblick in alle diejenigen Vorzüge der Fortpflanzung des Druckes in tropfbaren Flüssigkeiten, von welchen Stevins Satz samt seinen hydrostatischen Folgen handelt. So wird z. B. in einer hohen Säule das Wasser in den tiefsten Schichten mehr zusammengepresst, als in den mittleren, daher auch größere elastische Reaktion zeigen und so das größere Gewicht der hohen Säule tragen. Hiernach aber sind die Zustände einer solchen Säule tropfbarer Flüssigkeit nur graduell verschieden von den in § 46 untersuchten einer schweren Gassäule. — Bei sehr hohem Drucke kann die Kompressibilität von Gasen sogar kleiner werden als die von Flüssigkeiten. B. Luft von 0° C. (also noch gasförmige, nicht flüssige Luft) hat bei 100 bis 2000 at eine Kompr. 0,000883, bei 2000 bis 3000 eine Kompr. 0,000106; dagegen festes CO₂ bei 25,1° C. eine Kompr. 0,00304.

Hinwieder nähert sich dem flüssigen Zustand der feste insofern, als unter Druck bis zu Tausenden von Atmosphären z. B. Marmor auf eine Verflüssigung vertritt, wie sie sonst nur bei Wärmezufuhr erfolgt (feinste Blei- und Zinnspäne und Legierungen, Cu und S gingen chemische Verbindung ein). Auch z. B. feiner Sand, feuchter Ton würde in dem zu Stevins idealem Versuch angenommenen Gefäße mit Kolben (Fig. 149, S. 158) annähernd eine gleichmäßige Fortpflanzung des Druckes zeigen wie tropfbare Flüssigkeiten.

Alle diese Übergänge der einzelnen Aggregatzustände ineinander gewinnen an Anschaulichkeit durch Einführung der Molekularhypothese (§ 57, S. 217) und insbesondere der kinetischen Wärmehypothese (§ 83).

§ 55. Kohäsionserscheinungen an tropfbaren Flüssigkeiten. — Kapillarerscheinungen.

Von den beiden charakteristischen Eigenschaften einer vollkommenen Flüssigkeit trifft auch die zweite, wonach zu gegenseitiger Verschiebung der Flüssigkeitsteile keine meßbare Kraft erforderlich wäre, bei den wirklichen Flüssigkeiten nicht ganz zu. Vielmehr zeigen diese zahlreiche feinere Erscheinungen, welche die Wirkung von Molekularkräften teils zwischen den Flüssigkeitsteilchen aneinander, teils zwischen ihnen und den Teilchen der angrenzenden festen Körper, also aus Kohäsions- und Adhäsionskräften zu erklären sind. Sie werden als **Kapillarerscheinungen** im weiteren Sinne bezeichnet, weil eine der auffallendsten von ihnen darin besteht, daß in engen Röhrchen (Haarröhrchen, Kapillaren, Haar) Abweichungen von den Gesetzen der kommunizierenden Röhren auftreten; und zwar steht in engen lotrechten Glasröhren Wasser höher, Quecksilber tiefer als die umgebende Flüssigkeit. Mit dieser Kapillarerhebung, bzw. Kapillardepression zusammen zeigt sich aber auch eine nach oben konkave Oberfläche beim Wasser, eine konvexe beim Quecksilber sowohl innerhalb der Röhrchen wie an allen Rändern, wo die Flüssigkeitsoberfläche an Glaswände stößt. Dieser Gegensatz steht weiter offenbar im Zusammenhang damit, daß Glas durch Wasser benetzt wird, durch Quecksilber nicht; und dies wieder hängt ab von dem Verhältnis der Größe der Adhäsion und Kohäsion zwischen Glas und Wasser, bzw. Quecksilber (§ 52). — Die allgemeine Kapillaritätstheorie hauptsächlich ausgebildet durch LAPLACE hat in die gegenseitige Abhängigkeit dieser Erscheinungen folgenden gedanklichen Zusammenhang I, II, III, IV gebracht:

I. Zahlreiche alltägliche Erscheinungen zeigen, daß Flüssigkeiten zwischen eine gewisse Widerstandsfähigkeit, also Kohäsion, haben.

So die Hautohen der Seifenblasen, des Bierschaums u. dergl. Oberfläche von Wasser bleibt eine trockene, etwas befettete Nähnadel. Manche Insekten laufen über den Wasserspiegel fast wie über festen Boden. In ein eben volles Glas Wasser kann man nach und nach eine beträchtliche Zahl von Münzen gleiten lassen, ohne daß es überfließt, indem die Oberflächen der Ränder sich wölbt. Hierher gehört insbesondere auch diejenige Erscheinung nach der die „tropfbaren“ Flüssigkeiten benannt sind, nämlich die

Tropfenbildung: Gießen wir Quecksilber auf eine waagrechte Platte von Glas, Holz . . . , so trennt es sich in Teile, die der Schwerkraft Kugelgestalt annehmen, falls sie hinreichend groß sind, sonst aber wenigstens an den Rändern sich runden. Zwei Tropfen zur Berührung gebracht, vereinigen sich rasch zu einem (z. B. Fettaggen auf der Suppe). — Dies zeigt, daß die Flüssigkeiten aufeinander mit anziehenden Kräften wirken, welche die größtmögliche Menge Arbeit erst dann verrichtet haben, wenn keine Erhöhungen und Vertiefungen an der Flüssigkeitsmenge vorhanden sind, was eben erst durch die Kugelgestalt, die der Tropfenform, erreicht ist. — Bei dem Zerplatzen einer Flüssigkeit in Tropfen wird also Arbeit entgegen den Molekularkräften geleistet. LA 128. braucht (LA 128) beim Zusammenlaufen von Tropfen leisten. Die Molekularkräfte Arbeit entgegen dem Beharrungswiderstand und der Schwerkraft.

Ähnlich erteilt die Schwerkraft flüssigen Weltkörpern die Kugelgestalt. Auch an der festen Erdrinde führt die Erdschwere bei fortschreitender Verrückung und Abschwemmung der Gebirge immer mehr zur „Nivellierung“. Die Grenzlinie mit der vollen Kugelung des Erdkörpers erreicht wäre (abgesehen von den Fliehkräften infolge der Achsendrehung, die zu Abweichungen von der Kugelgestalt führen). — Doch ist neben dieser Ähnlichkeit als Unterschied zu bemerken, daß bei den eigentlichen Tropfen nicht auch Anziehungskräfte aus den tieferen Schichten der Flüssigkeitsmenge die Kugelung bewirken, sondern nur die sehr dünnen obersten Schichte. Dieses „Flüssigkeitshäutchen“ z. B. Bestreben, eine möglichst kleine Oberfläche anzunehmen (gemäß dem metrischen Satz: Unter allen Körpern von gleichem Volumen hat die Kugel die kleinste Oberfläche). — Analoges zeigt besonders auffallend der Versuch von MENSBROUKE: Auf ein ebenes Seifenhäutchen innerhalb eines beliebigen Drahtrahmens wird eine aus Seidenfaden geknüpfte Schlinge gelegt.

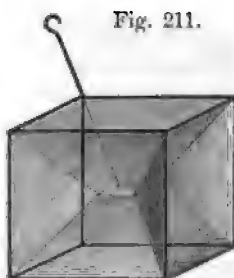


Fig. 211.

dann vorsichtig (etwa mittels des rauen Endes eines Zündhölzchens) das Häutchen innerhalb der Schlinge platzen gebracht. Sogleich nimmt die Schlinge die Kreisform an. Da nun unter allen geschlossenen Kurven von gleichem Umfang der Kreis die größte Fläche einschließt, so hat das zurückgebliebene Häutchen außerhalb der Schlinge die kleinste Fläche angenommen. — Die Bedingung der kleinsten Fläche entsprechen auch die ebenen und krummen Flächen der Seifenhäute an PLATEAUS Drahtgestellen (Fig. 211). — Fig. 212 kann die zusammenziehende Kraft von Flüssigkeitshäutchen durch Gewichtchen gemessen werden.

Die Tropfenbildung unter Ausschaltung der Schwerkraft zeigt PLATEAU's Versuch: In einem zylindrischen Gefäß ist längs der vertikalen Achse ein Draht angebracht, der durch einen Schnurlauf in rasche Drehung versetzt werden kann. Das Gefäß wird mit einem Gemenge von Weingeist und Wasser gefüllt, dessen spezifisches Gewicht

Fig. 212.

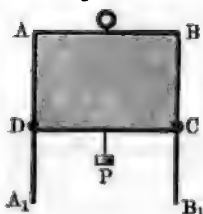
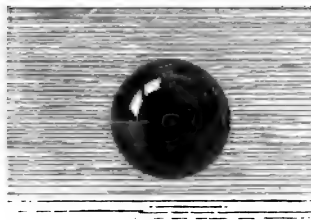


Fig. 213.



ist dem des Olivenöls gleich. Dieses läßt sich dann in Tropfen von einigen Millimetern Durchmesser (Fig. 213) um jenen vertikalen Draht herumlegen. Wenn der Draht allmählich langsamer gedreht, zerfällt er zuerst in Ringe, die endlich abreißen und sich wieder zu Kugeln ballen: dies alles

ist äußerlicher Ähnlichkeit zu den Vorgängen, wie sie die Kant-Laplace'sche Theorie annimmt; doch sind wieder (vergl. Fig. 134, S. 144) die hier wirkenden Vitationskräfte nur teilweise ähnlich mit jenen Molekularkräften.

Eben diese Kräfte nun haben zur Folge, daß im Innern einer hinreichend großen Flüssigkeitsmenge die Verschiebung je eines Flüssigkeitsteilchens in Bezug auf die übrigen andere und zwar kleinere (bezw. auch gar keine) Kräfte erfährt als eine Verschiebung nahe der Oberfläche; man bezeichnet den herbeigeführten besonderen Zustand an und nahe unter der Oberfläche einer Flüssigkeit im Gegensatz zu allen Innenteilen als

Oberflächenspannung, die des näheren so zu beschreiben und erklären ist: Gesetzt, ein hinreichend tief unter der Oberfläche liegendes Flüssigkeitsteilchen m (Fig. 219, a. f. S.) wirke auf alle von ihm höchstens um die sehr kleine Strecke von ϱ cm abstehenden Teilchen anziehend (oder: es hat eine „Anziehungssphäre“ mit ϱ cm Halbmesser. PLATEAU fand für Seifenwasser mit Glyzerin $\varrho = 56,7$ Milliontel Millimeter). Das Teilchen wird dann auch nur von den innerhalb dieses Abstandes liegenden Teilchen angezogen; diese Kräfte heben sich aber nach allen Richtungen auf, wie wenn m ganz frei wäre. Ist aber ein Teilchen m so nahe der Oberfläche, daß sein Abstand $a \leq \varrho$ ist, so kommt ein Teil der Anziehungssphäre außerhalb der Flüssigkeit zu liegen, und es werden also die einwärts wirkenden Kräfte nicht mehr ganz aufgehoben; und zwar für einen um so größeren Teil der Flüssigkeit, je kleiner a ist. Für ein Teilchen an einer ebenen Oberfläche ist dann der wirksam bleibende Teil („das aktive Segment“, s. u.) die Halbkugel vom Radius ϱ , und es ist mit ϱ „die Dicke des Flüssigkeitshäutchens“.

Oder im Hinblick auf die zur Verschiebung eines Flüssigkeitsteilchens entgegen dem Widerstande der von den anderen Teilchen ausgehenden Molekularkräfte erforderlichen Arbeiten: Das intramolekulare Kraftfeld um je ein Flüssigkeitsteilchen hat die Feldstärke 0 für $a \geq \varrho$; die Stärke dieses Kraftfeldes nimmt zu für $\varrho > a \geq 0$.

II. Die Oberflächenspannung ist an einer nach oben kaven Oberfläche kleiner (Fig. 214), an einer konvexen größer (Fig. 216) als an einer ebenen (Fig. 215).

Fig. 214.



Fig. 215.

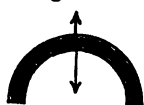


Fig. 216.



Dafs solche Unterschiede der Kräfte bestehen, zeigen besonders auch und auch der Messung zugänglich folgende Erscheinungen: 1. Wird die Blase, in dem eine Seifenblase hängt, beiderseits offen gehalten, so verkleinert sich die Blase „von selbst“, und zwar um so rascher, je kleiner sie schon ist.

Fig. 217.



einem Teilchen etwa in der halben Dicke der Seifenblase (das in Fig. 217 in übertriebener Dicke dargestellt ist) die Fläche der Blase die konkave, die Innenfläche die konvexe zuwendet, so beweist der nach innen wirkende Überdruck den Überschuss der von der konvexen Außenfläche her wirkenden Molekularkräfte über die von der konkaven Innenfläche her.

(Indem man das Röhrchen als Manometer einrichtet, kann man die Gröfse des Überdruckes messen.) 2. Eine noch auffallendere Erscheinung, die ebenfalls beweist, dafs jene Ungleichheiten der Oberflächenspannung je nach der Gestalt der Oberfläche bestehen, sind die unter IV beschriebenen und die Erscheinungen der Kapillarerhebung und -depression. Zuvor aber hat man zu fragen: Warum besteht (d. h. aus welchen Kräften erklärt man sich die Ungleichheit der Oberflächenspannung? Die Antwort ergibt sich aus

Fig. 218.

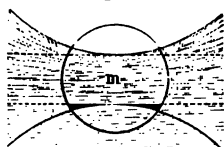


Fig. 219.



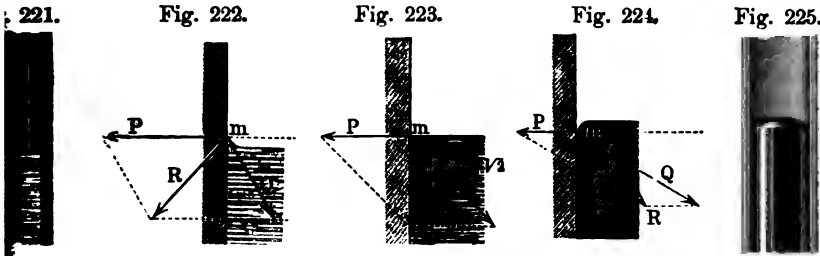
Fig. 220.



gleichung der Figg 218 bis 220: Es bildet nämlich für ein in einem bestimmten Abstand $a < \rho$ unter einer ebenen Oberfläche gelegenes Teilchen das zur Wirkungssphäre symmetrische Flüssigkeitssegment „aktive Segment“, das auf m nach einwärts zieht. Krümmt sich die Oberfläche gleichem a die Oberfläche konkav nach oben (Fig. 218), so nimmt das Segment an Volumen (in Fig. 218 schwarz gehalten) und daher auch an der Wirkung ab; ebenso bei konvexer Fläche um ein entsprechendes (in Fig. 220 weiss) und an anziehenden Kräften zu. — Ob die Gröfse der Ungleichheiten in den Oberflächenspannungen hiermit auch quantitativ erklärt sind, mufs hier unerörtert bleiben.

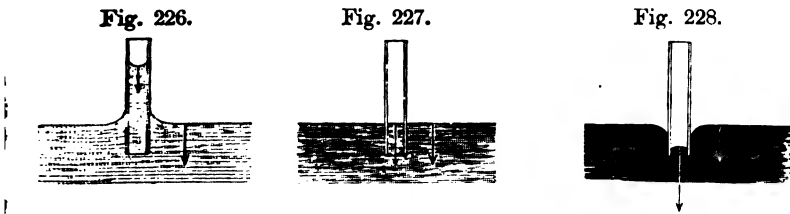
III. Warum nimmt eine Flüssigkeit eine nach oben kave bzw. konvexe Krümmung an, je nachdem sie einen angrenzenden festen Körper benetzt oder nicht? Antw.: An eine ebene oder Gefäßswand grenze die wagrechte Fläche einer Flüssigkeit und somit daselbst die gerade wagrechte Kante eines Flächenwinkels

(Fig. 223). Jedes Teilchen an diesem Rande wird dann durch die resultierende Q aller Kohäsionskräfte der Flüssigkeitsteilchen längs der Winkelsymmetralen, also unter 45° gegen die wagrechte und lot-



te Grenzfläche einwärts gezogen. Zugleich wird aber m auch durch Resultierende P aller Adhäsionskräfte zwischen den nahe bei m liegenden Teilchen der Wand wagrecht gegen diese hingezogen. Nur wenn dann $Q = P\sqrt{2}$, fällt die Resultierende R in die Richtung der rechten Wand, und die Flüssigkeit bleibt eben. — Bleibt P gleich wird $Q < P\sqrt{2}$, so weicht die Resultierende R aus Q und P gegen die Wand hin ab, und da die Flüssigkeitsoberfläche nur dann im Gleichgewicht ist, wenn sie normal ist zu R , so gestaltet sich die Oberfläche zu einer nach oben konkaven Fläche um. Analog wird für $Q > P\sqrt{2}$ die Oberfläche konvex. — Solche Ungleichungen zwischen Adhäsion und Kohäsion bestehen in der Tat nach den Versuchen mit „Adhäsionsplatten“ an Wasser und Quecksilber (§ 52).

Sind jene Gestaltsveränderungen der Oberfläche eingetreten, so ändert auch Größe und Lage, weshalb die Berechnung des „Randwinkels“, d. i. des Winkels zwischen der vertikalen Wand und der Tangentialebene an die Oberfläche längs des Randes, nicht mehr elementar durchzuführen ist; gleichen auch nicht die der Gestalt der Oberfläche in Punkten verschiedenen Abstände von der Wand (Figg. 222, 224). Doch zeigen Rechnung und Beobachtung, daß in sehr engen Röhrchen von kreisrundem Querschnitt die Oberflächen sehr annähernd Kugeln angehören (Figg. 221, 225).



IV. Wie sich aus der Adhäsion das Benetzen und aus dem Benetzen die Konkavität der Oberfläche erklärt, so endlich aus dieser die Höherstehen der Flüssigkeit in einem engen Rohre (Fig. 226). nämlich nach II an einer nach oben konkaven Fläche ein ge-

ringerer Druck nach innen herrscht als an einer ebenen Fläche, muß zu dem molekularen Zug nach einwärts noch ein hydrostatischer Druck nach abwärts kommen, um dem ringsum herrschenden Druck das Gleichgewicht zu halten. — Analog die Erklärung des Tieferstehens (Kapillardepression) nach Fig. 228.

Fig. 229.



Fig. 230.



Fig. 231.



Umgekehrt bietet die Höhe der gehobenen Säule ein bequemeres Mittel zu einer Messung der Unterschiede einwärts gerichteten Flüssigkeitsdrücke, als die erwähnten metrischen Versuche an Seifen-

Weitere Kapillarerscheinungen: Die Bewegung von Flüssigkeitstropfen in konischen Röhren, das engere, bezw. weitere Erscheinen von Anziehungen und Stößen von Körperchen, Flüssigkeiten schwimmen (Fig. 231) u. dergl. m. Praktische Anwendungen: Lampendocht

§ 56. Diffusion von Gasen und von Flüssigkeiten. Osмосe. Mischen und Lösen. Absorption.

Versuch 1: Ist von den beiden Ballons (Fig. 232) der eine mit einem Gase von irgend welcher Dichte erfüllt, der andere leer

Fig. 232.



werden die beiden Ballons miteinander durch Stellungs-Hähne in Verbindung gesetzt, so strömt das Gas aus dem einen in den anderen Ballon (wobei es keinen merklichen Unterschied macht, ob das Gas mit der Richtung der Schwerkraft von oben nach unten oder in der entgegengesetzten Richtung strömt) und es herrscht erst dann Gleichgewicht, wenn die Dichte in beiden Räumen gleich ist (entsprechend dem allgemeinen Gesetze über Bewegung und Gleichgewicht nach Verschiedenheit, bezw. Gleichheit der Spannkraft verschiedener Punkte je eines gleichartigen Gases). 2. Aber auch wenn beide Ballons mit verschiedenen Gasen von gleicher Spannkraft gefüllt waren, erst dann keine Bewegung statt, wenn gleichmäßige Mischung eingetreten ist (d. h. es hält nicht etwa ein Gas vermöge seiner Spannkraft das andere ab vom Strömen ab); nur geht das (nunmehr beiderseits) Überströmen langsamer vor sich als bei Versuch 1. Die Strömungsgeschwindigkeit bei 1 wie bei 2

in Zeitpunkte von der jeweiligen Differenz der Spannkraft der Gase (überdies aber auch von der „inneren Diffusionsfähigkeit“, vergl. § 59) ab. Ist Gleichgewicht eingetreten, so herrscht an dem Punkte ein Druck, welcher einfach gleich ist der Summe der Kräfte, welche von jedem Gase für sich ausgeübt würden (Gesetz).

In den beschriebenen Erscheinungen der Diffusion der Gase sind bis zu einem Grade ähnlich die der Diffusion von Flüssigkeiten: z. B. roter Wein über Wasser, Wasser über Kupfersulfatlösung u. s. f. geschichtet, zeigt wohl für eine Zeit die Schwerkraft gegenüber Gleichgewicht gemäß dem Archimedischen Prinzip, dennoch tritt alsbald Verwaschung der Trennungsfläche und schließlich eine Vermischung der Flüssigkeiten ein. (Damit hier der wichtige Schluss aus der Eigenbewegung der Flüssigkeitsteilchen, § 57, einwandfrei sei, müßte man es als mit den Flüssigkeiten vor allen äußeren Erschütterungen geschützt, z. B. etwa auf dem Pfeiler einer Sternwarte stehen.) Sogar an festen Stoffen (z. B. in massivem Blei) sind ähnliche, nur noch bei weitem langsamer sich vollziehende Diffusionen beobachtet worden.

Die Diffusionsbewegungen der Gase und Flüssigkeiten erfahren weitere Modifikationen durch Wände aus festen Stoffen; so bei folgendem Versuch:

Versuch: Von einer Flasche ist der Boden abgenommen und durch eine Tierblase ersetzt; im Halse ist ein wasserdicht schließender Pfropf mit einer weichen offenen hohen Röhre (Fig. 233). Ist der Inhalt der Flasche mit Kupfersulfatlösung bis zu einer bestimmten Stelle des Halses gefüllt, und wird das Gefäß bis zu dieser Stelle in Wasser getaucht, so tritt trotz der Gleichheit des hydrostatischen Druckes Wasser durch die Membran hindurch ein und zwar so, daß mehr Wasser als Kupfersulfatlösung austritt, was sich an dem allmählichen Steigen der Flüssigkeit im Rohre zeigt.

Dieser Vorgang heißt **Osmose**, und der hydrostatische Druck der Flüssigkeit im Rohre über dem Spiegel der äußeren Flüssigkeit ist ein Maß des osmotischen Druckes des Kupfersalzes auf die Membran und der Flüssigkeit ausgeübten „osmotischen Druckes“. Wenn die Membran als **Endosmose** bezeichnet (das Gegenstück als **Exosmose**).

Die Kräfte der **Endosmose** werden durch pflanzliche Membranen die Flüssigkeiten aus der Erde in den Pflanzenzellen, die Speisesäfte durch die Darmwände in die Blutgefäße (Venen) gesogen.

Die früher auf derartige Wirkungen von festen Membranen eingeschränkte Wirkung des osmotischen Druckes hat in neuester Zeit eine große Erweiterung

Fig. 233.



erfahren, indem **PREFPHER** und **VAN 't HOFF** die Analogie seiner Gesetze mit des Gasdruckes nachwiesen. Auch ist osmotischer Druck die bewogende bei allen Diffusions- und Auflösungsvorgängen (— sogar die Entstehung des trieblichen Stromes in den galvanischen Elementen hat man auf ihn zurückzuf. versucht).

Fig. 234. Mischen und Lösen. — Pulverisierte feste Körper (z. zweier Malerfarben; Schwefelblumen und Eisenpulver, § 203) g noch so innig zu einem möglichst gleichartigen Pulver rieben, zunächst nur „mechanische Gemenge“; über ihre U schiede von „chemischen Verbindungen“ vergl. §§ 203.

Quecksilber und Wasser, Wasser und Öl sind nicht misel Paare von Flüssigkeiten; Alkohol und Wasser, Schwefel und Wasser mischen sich, und zwar in allen Verhältnissen (und Wasser nur teilweise).

Wird eine einerseits geschlossene Röhre zur Hälfte mit Wasser, d vorsichtig mit reinem Alkohol gefüllt (**Fig. 234**) und dann durch wenden und Schütteln Mischung erzielt, so zeigt sich diese mit V vermindern und Erwärmung verknüpft; woraus zu schließen is es schon hier nicht mehr rein mechanische Mischung sei. Um so aus der starken Erwärmung beim Vereinigen von Wasser und Schwefel

Zucker, Kochsalz . . . in Wasser, Schwefel in Schwefelko stoff gebracht, werden gelöst. Dabei vermag z. B. Wasser mehr als 37 Proz. Kochsalz (bei Zimmertemperatur) aufzuneh die Lösung ist gesättigt.

Es läge hier nahe, sich den festen Stoff als nur in kleine Teilche fallend zu denken, die aber ihrerseits immer noch fest sind. Es weise namentlich die Tatsachen des Wärmeverbrauches beim Lösen darauf hin, da die festen Stoffe eine dem Schmelzen ähnliche Veränderung erfahren, d. i z. B. das im Wasser gelöste Kochsalz wirklich den flüssigen Aggregatzust genommen hat. — Des näheren zeigen sich die Vorgänge beim Lösen vor reichen mechanischen und aufermechanischen Bedingungen abhängig, nam der innigen Berührung zwischen den Teilen der Flüssigkeit und des festen K (Zerteilen, Umrühren, Einbringen in die Flüssigkeit von oben in einem Sä aus porösem Stoffe, namentlich aber Erwärmen).

Auch die **Absorption** von Luft, Ammoniak-, Salzsäure-, Ko säure- . . . Gas in Wasser (Sodawasser, natürliche Säuerlinge . . nicht einfache Mischung, sondern Lösung. — Was beweist es,

§ 57. Die Molekularhypothese.

Diejenigen mechanischen Einwirkungen, durch welche feste Körper zerdrückt, zerschnitten, . . . allgemein: „mechanisch geteilt“ werden, finden bei fortschreitender Zerteilung immer stärkere Hindernisse (namentlich wegen der immer kleineren Kraftmomente; z. B. ein Zündhölzchen können wir — warum? — nicht in beliebig kleine Stückchen zerbrechen). Auch feinstes Pulverisieren liefert Körnchen, die für das Mikroskop noch als selbständige Körperchen wahrnehmbar sind. — Flüssigkeiten und Gase lassen sich durch Überleiten in Röhren u. dergl. mechanisch teilen. — Bei der Auflösung von Karmin, Fuchsin . . . in Wasser, Verteilung von Riechstoffen (Moschus) in der Luft schliessen wir, dass die neben noch wahrnehmbaren Mengen des Lösungs- oder Verteilungsmittels eine viel kleinere Menge des gelösten Farb-, Riechstoffes, welche für sich nicht wahrnehmbar wäre, enthalten müssen. — Ausziehen von Platindraht, der die Rolle eines Silberdrahtes bildet und nach Wegätzen des Silbers in einer Feinheit von 0,00005 mm Durchmesser zurückbleibt. Blattgold (bis zu 0,0003 mm).

Es drängt sich nun die Frage auf, ob jenseits der Grenzen der Wahrnehmbarkeit die mechanische Teilbarkeit der Materie ins Unendliche gehe oder ob sie endliche Grenzen habe, d. h. ob die Materie aus mechanisch kleinsten Teilen (wie man zum Unterschiede von „chemisch kleinsten“ Teilchen = Atomen, vergl. § 209, sagen kann) bestehe. Diese Frage selbst kann wieder in vielerlei Sinn genommen werden, je nachdem wir uns die auf Zerteilung hindurch wirkenden Kräfte selbst über die erfahrbaren Kraftgrößen hinaus, allenfalls ins Unendliche, gesteigert denken, oder aber uns auf die in der Natur wirklich vorkommenden mechanischen (thermischen, elektrischen . . .) Kräfte beschränken. Im ersteren Sinne wäre ein mechanisch unteilbares Körperchen dasjenige, welches gegen unendlich großen zerreißenden, zerdrückenden . . . Kräften, bezw. Kraftmomenten ausgesetzt, eine unendlich große Festigkeit aufwiese. In diesem Sinne ist dann die Frage empirisch überhaupt nicht zu entscheiden. Der folgenden Definition liegt dagegen der zweite Sinn zu Grunde:

Wir verstehen unter einem mechanisch kleinsten Teilchen oder Materie (Molekel, Molekül, *molecula* = kleine Masse) dasjenige Teilchen, das auch durch die größten in der Natur vorkommenden und unter den günstigsten Bedingungen auf die Zerteilung hinwirkenden mechanischen Kräfte ungeteilt bleibt. (Vergl. über chemische Atome § 209.)

Dass es Molekeln in dem hiermit definierten Sinne wirklich gebe und dass alle Materie aus solchen zusammengesetzt sei, ist insofern nur eine Hypothese, als tatsächlich kein einzelnes Molekül direkt (oder auch unter dem besten Mikroskop, dessen Linsen ja dann selbst aus Molekeln bestehen) wahrgenommen werden kann. Zu dieser physikalischen Molekularhypothese ist die physikalische Gegenhypothese die, dass in der Natur mechanisch kleinste Teilchen irgendwo vorkommen oder dass wenigstens nicht alle Materie aus solchen bestehe. Mit der physikalischen Molekular- und der chemischen Atomhypothese bleibt immer noch die außerphysikalische Hypothese verträglich, dass unendlich großen Kräften gegenüber die Materie unendlich teilbar wäre). Die Entscheidung zwischen den beiden physikalischen Hypothesen kann hier wie überall (log. Anh. Nr. 36) Anh. 36. darin liegen, welche die tatsächlichen Erscheinungen ungezwungener erklärt. Die Physik des 19. Jahrhunderts hat namentlich die erstere Hypothese bis ins einzelne

ausgebildet, indem sie sich nicht überhaupt bloß mit der Annahme der kleinsten Teilchen begnügte, sondern anschauliche Bilder davon zu gesucht, welche Größe und Gestalt diese Teilchen haben, ob sie berühren oder durch leere Zwischenräume getrennt sind, ob sie in relativer Ruhe oder in relativer Bewegung befinden; und wenn letzteres, Art diese Bewegungen sind, ob und wann fortschreitend oder drehend schwingend oder aperiodisch u. s. f. Überall müssen es spezielle Annahmen sein, welche für je eine Art Stoff, eine bestimmte Temperatur u. eine oder andere Annahme wahrscheinlicher machen. Namentlich sind Wärmeerscheinungen an Gasen, welchen man die weitestgehenden der Aufschlüsse verdankt. Einiges über die „kinetische Gastheorie“ als Hilfe zur Erklärung zunächst der Tatsachen der „mechanischen Wärme“ vergl. § 83. Doch gibt es auch schon rein mechanische Erscheinungen, welche durch diese kinetische Gastheorie in sehr befriedigender Weise werden. Das einfachste Beispiel ist die

Erklärung des Mariotteschen Gesetzes. In einem geschlossenen Gefäß mit reibungslosem Kolben (Fig. 180—182, S. 1) ist eine Gasmenge von Mg Masse durch einen Druck von pg per v cm³ Volumen gebracht. Daß dann das Gas auf je 1 cm³ des Gefäßes einen Gegendruck von pg ausübt, erklärt sich aus der Annahme, daß das Gas aus sehr vielen Molekeln besteht, die mit großer Geschwindigkeit geradlinig nach allen Richtungen fortschreiten und dabei schon binnen sehr kurzer Zeit sehr viele Stöße auf den Kolben ausführen. Durch jeden solchen Stoß wird der Kolben wenig gehoben; infolge seines Gewichtes wird er dann wieder herabsinken, sogleich wieder emporgestoßen u. s. w. Das gegen die „Spannkraft“ des Gases scheinbar völlig ruhige Gleichgewicht des Kolbens erklärt sich hiernach als „dynamisches Gleichgewicht“.

Diese insoweit noch ganz allgemein gehaltene Vorstellung erhält eine Bestätigung und Weiterbildung dadurch, daß, wenn durch Verschieben des Kolbens das Volumen des Gases auf die Hälfte vermindert wird, die „Spannkraft“ des Gases sich verdoppelt; denn es ist unmittelbare Folge jener Hypothese, daß bei halbem Volumen die Zahl der Stöße sich verdoppeln muß. Somit erlaubt die Theorie des dynamischen Gleichgewichtes auch den mathematischen Ausdruck des Mariotteschen Gesetzes $p v = \text{Konst}$ zu erklären.

Eine Weiterführung dieser Betrachtung, wobei $\text{konst} = \frac{M u^2}{3}$ sich

rüber, inwieweit beim Verdichten des Gases die einzelnen Teilchen einander beeinflussen. Auf solche und zahlreiche andere Arten gelangte man sogar dazu, die Größe der Molekeln im Vergleich zu ihrer mittleren Weglänge, ihre Geschwindigkeit u. s. f. zu ermitteln. Einige Zahlenangaben hierüber vergl. LA 128, 154. LA 128, 154.

Wie durch die Hypothese der zum überwiegenden Teil geradlinig fortbreitenden Gasmolekeln zunächst die in MARIOTTES Gesetz ausgesprochene charakteristische Eigenschaft des vollkommenen Gases erklärt ist, so können wir aus dem flüssigen und festen Aggregatzustande folgende Bilder entwerfen: beiderlei Stoffe annähernd unzusammendrückbar sind, so müssen die Molekeln durchschnittlich gleiche Abstände einhalten. Sie brauchen aber nicht in relativer Ruhe zu sein, vielmehr haben sich folgende Vorstellungen von der molekularen Struktur des II. und I. Aggregatzustandes bewährt (wenn auch nicht so einfach sind wie das vom III. Zustand, dem der Gase):

Ein fester Körper bringt auf den Gesichts- und Tastsinn den Eindruck, als ob die Teilchen unverrückbar miteinander verbunden wären, dadurch hervor, daß diese in Wahrheit (größtenteils) um stabile Gleichgewichtslagen Schwingungen ausführen, deren Amplituden aber weit unter der Grenze der Sicht- und Tastbarkeit liegen.

Daß dagegen die Flüssigkeiten zwar ebenfalls konstantes Volumen haben, die Teilchen aber keine festen Lagen gegeneinander annehmen, erklärt sich so, daß die Molekeln nicht um stabile Lagen hängen, sondern gleichsam zwischeneinander hindurchkriechen.

Die überzeugendsten mechanischen Belege für molekulare Bewegungen innerhalb der Flüssigkeiten bilden die Erscheinungen der Diffusion (§ 56).

Sollen wir nun alle diese Bewegungen der Molekeln so erfolgend denken, daß sie die Gesetze der Mechanik wahrnehmbarer Massen („Molarmechanik“ — *les*, Masse) anwendbar bleiben, so müssen wir auch zwischen den Molekeln bestimmte Kräfte denken. In diesem Sinne sprachen wir schon in § 50 von „Molekularkräften“. Die letzte Aufgabe der Molekularmechanik und überhaupt der Molekularphysik wäre die, für je zwei Molekeln das zwischen ihnen bestehende Kraftgesetz anzugeben nach dem Vorbilde des Newtonschen Gesetzes für

zwei Massen $f = \gamma \cdot \frac{Mm}{r^2}$. In dieser Hinsicht wissen wir aber aus zahlreichen Erscheinungen zunächst nur so viel, daß dieses Gesetz, speziell das der umgekehrten zweiten Potenz des Abstandes, für je zwei Molekeln nicht gelten kann. (MAXWELL hat u. a. als eine rechnerische mögliche Hypothese aufgestellt, daß für die Molekularkräfte in erster Annäherung statt der zweiten die fünfte Potenz des Abstandes zu setzen sei.) Alles in allem aber sind wir noch sehr weit davon entfernt, eine ähnliche Mechanik der Molekularkräfte zu besitzen wie die Newtonsche Gravitationsmechanik für die Bewegungen kosmischer Massen. Und die einzelnen Molekeln, ihre Abstände und gegenseitigen Beschleunigungen auch infolge nie so wahrnehmbar sein werden, wie es die je zweier Planeten sind, so werden immer nur Wahrscheinlichkeitsschlüsse aus dem molaren Verhalten des Körpers auf die Art der Molekeln und Molekularkräfte zu ziehen sein.

Noch unabhängig von der eigentlichen Molekularhypothese ist es z. B., wenn wir das Verhalten eines Kautschukzylinders, welcher ausgedehnt sich zusammenziehen, zusammengedrückt sich auszudehnen sucht, in Gedanken so verfolgen, daß wir uns durch das Entfernen und Annähern je zweier

benachbarter Teilchen Anziehungs-, bzw. Abstofsungskräfte gedenken. Da es nun für den Kautschukzylinder ein natürliches Volumen bei welchem zwischen seinen Teilchen weder Druck- noch Zugspannungen herr

Fig. 235.

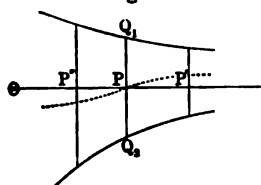


Fig. 235.

so haben wir uns zu denken, daß dann je Teilchen O und P (Fig. 235) einem Abstand für welchen zwischen ihnen entweder überhaupt Kraft, oder wahrscheinlicher einander gleichziehungs- und Abstofsungskräfte wirken. Die Annahme ist dadurch dargestellt, daß wir die Abstände $OP = r$ gehörige Anziehung durch und die Abstofsung durch PQ , graphisch dar (wobei diese Kräfte in Wirklichkeit als läng

Strecke OP wirkend zu denken sind, in der graphischen Darstellung als positive und negative Ordinaten aufgetragen erscheinen). Um dann weit Tatsache darzustellen, daß bei einer Dehnung des Körpers eine Zugspannung wirkt hat, also eine Kraft geherrscht, welche ihn auf die frühere Länge zu bringen sucht, nehmen wir an, daß bei Vergrößerung des Abstandes auf OP überwiegende Anziehung eintritt; und analog bei Verkleinerung des Abstands auf OP'' eine überwiegende Abstofsung.

Was dabei insbesondere die abstofsenden Kräfte betrifft, so suchte die kinetische Molekularhypothese durch ältere Stofswirkungen zu ersetzen, w auf welche oben die Spannkraft der Gase zurückgeführt worden ist. Freilich diese Erklärungsweise auf die weitere Frage, ob denn eine Stofswirkung und meiner die „Undurchdringlichkeit“ wahrnehmbarer und molekularer Massen haupt denkbar wäre, wenn wir nicht schließlich doch wieder annehmen, dass d rdingen einer Masse in eine andere durch Abstofskräfte verhindert wird (

Denken wir uns nun je eine Molekel ähnlich als Sitz von anziehenden Molekularkräften, wie wir uns einen Planeten oder Fixstern (bzw. seine ein Massenteilchen) als Sitz von Gravitationskräften denken, so liegt es am nächsten auch diese Molekularkräfte sich als radial nach allen Richtungen gleichmäßig wirkend zu denken und in diesem Sinne jeder Molekel eine „Anziehungs-sphäre“ zuzuschreiben (ähnlich wie dies in § 55 für je ein Flüssigkeitsteilchen geschehen war, und zwar dort noch unabhängig von der Molekularhypothese). Doch besteht eine solche Gleichwertigkeit aller Richtungen keineswegs allgemein, höchstens für die molekularen Kräfte homogener isotroper Körper (§ 53), wogegen die ausgezeichneten Richtungen der Krystallachsen auf Unterschiede in der Größe der Molekularkräfte nach verschiedenen Richtungen hinweisen. Insofern kann es auch nur in erster Annäherung der wahren Substitution der Materie entsprechen, die Molekeln selbst als Kügelchen vorzusetzen, die chemischen Tatsachen legen es vielmehr nahe, die Molekeln als selbst aus Atomen bestehend zu denken (§ 209), und hier machen es wieder die Tatsachen der verschiedenen Wertigkeiten unwahrscheinlich, daß man auch nur die Molekeln als Kügelchen annehmen dürfe. — Übrigens ist die Hypothese von der molekularen Substitution der Materie eine Hypothese, die sich nicht auf die Tatsachen

3. Nähere Beschreibung und Analyse der Vorgänge beim Stofs fester, flüssiger und gasförmiger Körper.

§ 16, S. 57 wurde der Vorgang beim Stofs bis zu demjenigen Zeitpunkte betrachtet, in welchem die beiden aufeinander treffenden Massen einander keine Geschwindigkeitsänderung mehr erteilen, indem sie die

$$\text{gemeinschaftliche Geschwindigkeit } c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad . . . (1)$$

erhalten und einander die größte Deformation erteilt haben. Dabei war zu berücksichtigen, dass die Geschwindigkeit der Bewegung der Körper von der besonderen Gestalt der einander treffenden Körper abhängen werden, indem es bei der gegenseitigen Beeinflussung der Geschwindigkeit nur auf die Grösse dieser und der Massen ankommt, weshalb die Ableitung der Gleichung (1) noch ganz eine Aufgabe der „Mechanik des Punktes“ war. Deshalb war andererseits sowohl von der Art, wie jene Deformationen zu Stande kommen, wie auch davon abgesehen worden, dass diese Deformationen verhältnissmässig klein bei festen, gross bei tropfbaren und gasförmig flüssigen Körpern sind, dass sie ganz, teilweise oder gar nicht bleiben, je nachdem die Körper vollkommen unelastisch, halbelastisch oder vollkommen elastisch sind. — In der That sind aber die Bewegungen während des Stosses und nach dem Stosse wesentlich abhängig von allen diesen Umständen, und auch speziell bei Körpern von der Gestalt der aufeinander treffenden Körper, sowie von der Richtung, in welcher sich die Massenmittelpunkte der Körper vor dem Stosse bewegten. — Eine der einfachsten so sich ergebenden Aufgaben ist folgende:

Gerader zentraler Stofs unelastischer Kugeln. Bewegungen der Mittelpunkte zweier Kugeln von den Massen m_1, m_2 und den Geschwindigkeiten c_1, c_2 längs derselben Geraden in der gleichen Richtung, so dass die langsamere durch die schnellere eingeholt wird ($c_1 < c_2$, beide von gleichem Vorzeichen), so steht jene Gerade durch die Mittelpunkte der Berührung auf der gemeinschaftlichen

Null, wenn $m_1 = m_2$, $c_1 = -c_2$ — Indem dabei die Körper vollkommen unelastisch vorausgesetzt sind (was annähernd bei Schneebällen, Kugeln aus feuchtem Ton, aus Blei zutrifft), ist dieser Verlust an kinetischer Energie nicht durch gleichen gewonnenen Betrag an potentieller mechanischer Energie ausgeglichen.

Die Lücke, welche so das Gesetz der Erhaltung der Energie durch Vorgänge beim unelastischen Stoß zu enthalten scheint (und welche das der Erhaltung der mechanischen Energie auch wirklich aufweist), wird gefüllt durch das Gesetz der Äquivalenz von mechanischer und calorischer Energie (§ 82). Inwieweit wir, unabhängig von der Rücksicht auf die begleitenden Wärmevergänge, schon aus rein mechanischen Gründen die Teilchen unelastischen Körper während des Stoßes in gegenseitige Bewegung geratend zu denken haben, siehe unten S. 222.

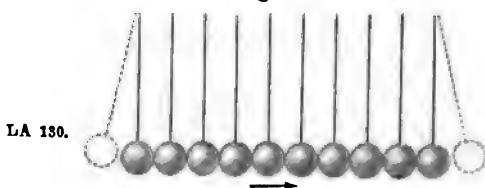
2. Gerader zentraler Stoß vollkommen elastischer Körper. Hier hat sich nach Erlangung der gemeinschaftlichen Geschwindigkeit und der bis dahin erfolgten größten Deformation die kinetische Energie ganz oder teilweise in potentielle, nämlich in elastische Spannkraft, verwandelt. Indem nun diese Deformationen sich gleichen, bis die volle Kugelgestalt wieder hergestellt ist, erteilen die Kugeln einander wieder so große Geschwindigkeiten, daß nach dem Stoß der volle Betrag der kinetischen Energie wieder hergestellt ist (LA 131).

Stößt z. B. eine Kugel auf eine gleich große ($m_1 = m_2$) ruhende, so wird $c = \frac{1}{2} c_1$. Indem nun die Kugeln sich gegenseitig stemmen, erteilt die früher ruhende der anderen eine entgegengesetzte Bewegung mit der Geschwindigkeit $-\frac{1}{2} c_1$, so daß diese zur Ruhe kommt; die früher bewegte erteilt dagegen der früher ruhenden zur gemeinschaftlichen Geschwindigkeit $\frac{1}{2} c_1$ noch einmal $\frac{1}{2} c_1$, so daß diese nun mit c_1 weiter geht. Es ist dies der einfachste Fall des allgemeinen Gesetzes (I), daß zwei gleiche elastische Kugeln im geraden Stoß ihre Geschwindigkeit austauschen (gleichsam durcheinander hindurchgehen, ohne Geschwindigkeiten zu ändern). — Diese einfachsten Gesetze sind speziell (Grenzfälle) der folgenden allgemeineren:

Sind die Massen der Kugeln ungleich, $M > m$, und stößt die größere auf die ruhende kleinere, so setzt die größere Bewegung in der ursprünglichen Richtung fort; stößt die kleinere auf die ruhende größere, so kehrt sich die Bewegung um: die kleine wird an der größeren „reflektiert“.

Versuche an Mariottes Stoßbällen (Fig. 236). — Die allgemeinen Formeln für den geraden Stoß elastischer Körper von beliebigen Massen vergl. L. Speziell die Formeln für den Stoß gegen eine „Wand“ ergeben sich, indem $M = \infty$, $C = 0$ gesetzt wird.

Fig. 236.



LA 130.

3. Schiefer Stofs einer elastischen Kugel gegen eine Wand. Bildet die Bewegungsrichtung des Massenmittelpunktes der Kugel einen Winkel mit der Wand, so läßt sich ihre Geschwindigkeit c zerlegen in die beiden Komponenten $c_{||}$ und c_{\perp} (Fig. 237). Von diesen bleibt $c_{||}$ durch die Wand unbeeinflusst, c_{\perp} ändert bei gleicher Gröfse ihre Richtung in die entgegengesetzte und setzt sich mit $c_{||}$ zusammen zu c' . Somit gilt für einen solchen Stofs das Reflexionsgesetz (II): **Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel; beide Winkel liegen in derselben Ebene, der Einfallsebene.**

Fig. 237.



Die Gesetze (I) und (II) bilden nur die einfachsten Typen der Vorgänge beim Hardspiel. Bekanntlich kann es hier geschehen, daß, wenn der Spieler den Ball „falsch“ genommen, d. h. mit der Queue nicht gegen den Mittelpunkt der Kugel gezielt hat, die auffallendsten Abweichungen vom Reflexionsgesetz eintreten. Diese erklären sich einerseits aus den zur Translationsbewegung der Kugel hinzukommenden, durch den nicht zentralen (exzentrischen) Stofs eingeleiteten Rotationen, anderseits durch die Reibung des Balles am Tuch, welche auch einen streifenförmigen Stofs herbeiführt und daher zunächst nur translatorisch bewegten Ball in Rotation versetzt. Soll z. B. der Ball keine solche Rotation haben, so wird er tiefer zu nehmen, d. h. in der Richtung unterhalb des Mittelpunktes zu sein, wobei dann beiderlei Rotationen sich aufheben. (Das Kunststück, durch einen vertikal exzentrisch geführten Schlag der Hand die Kugel zuerst von der Hand weg und dann „von selbst“ wieder zu ihr hin laufen zu machen.)

Bei allen nicht kugeligen Körpern gestaltet sich die Berechnung des translatorischen und rotatorischen Anteiles der Bewegungen meist noch bei weitem verwickelter. — Allgemein heißt der Stofs **nicht gerade (schief)**, wenn die Bewegungsrichtung des stossenden Körpers gegen die Berührungsebene schief ist; **nicht zentral (exzentrisch)**, wenn der Schwerpunkt des gestossenen Körpers nicht in der zur Oberfläche im Berührungspunkt Senkrechten liegt. Beim schiefen Stofs läßt sich die Bewegung immer, wie im obigen einfachsten speziellen Fall, in zwei Komponenten zerlegen, deren eine senkrecht gegen die Oberfläche des gestossenen Körpers gerichtet ist und einen geraden Stofs zur Folge hat, deren zweite mit der Richtung der Tangente im Berührungspunkte ein Nebeneinander-Vorbeigehen und unter Mitwirkung der Reibung Rotation zur Folge hat.

Der Begriff des Stosses ist keineswegs auf feste Körper einzuschränken, denn ja auch z. B. bei Wasser- und Windmühlen sich die Energie der Bewegung aufopfbarer oder gasförmiger Flüssigkeiten auf das Schaufelrad nach den Gesetzen des Stosses überträgt. Mit Rücksicht auf das Zurückströmen der Flüssigkeit (Stauen) gegen die neu ankommende und die hierbei eintretenden Strömungen sind natürlich die Vorgänge hier noch viel verwickelter.

Betrachten wir schliesslich allgemein die Vorgänge beim Stofs im Lichte der Molekularhypothese, nach welcher ja auch z. B. zwei Blei- oder Elfenbeinaggregat überaus zahlreicher und voneinander durch weite Zwischenräume getrennter Körperchen sind, so haben wir uns z. B. den Vorgang beim Zusammenwirken zweier unelastischer Körper etwa so vorzustellen, wie wenn ein Heere, deren einzelne Soldaten zuerst miteinander marschiert, also „als

Ganzes in Bewegung“, in Bezug aufeinander in Ruhe gewesen waren, beieinanderzutreffen „als Ganzes in Ruhe“, dafür aber innerhalb dieses Ganzes so heftigere gegenseitige Bewegung geraten.

Speziell die Vorgänge innerhalb eines in einem Gefäße eingeschlossene führen zur Aufgabe: Ein geschlossener Raum sei mit einer sehr großen Zahl von gleichen elastischen Kugeln erfüllt, welche einzeln beliebig verschieden, aber nach den verschiedensten Richtungen durchschnittlich gleich große Geschwindigkeiten haben; welche Gesamtwirkung üben sie infolge ihrer Stöße gegen und gegen die Wände des Gefäßes aus? Die Antwort liegt in der Grundgleichung der kinetischen Gastheorie: $p = \frac{nmv^2}{3v}$, wo n die Anzahl der

m die Masse einer derselben (daher $nm = M$ die Gesamtmasse des Gases), v die durchschnittliche Geschwindigkeit einer Kugel, v das Gesamtvolumen des Gefäßes (gleichviel von welcher Gestalt) und p der auf die Flächeneinheit der Wände ausgeübte Druck, in Dyn gemessen, ist. Eine Ableitung dieser Gl. in den ein

LA 132. Fällen und eine Erklärung einiger aeromechanischer Gesetze aus ihr vergl.

Gehen wir ähnlich auf was immer für einen mechanischen Vorgang Übertragung von kinetischer Energie ein, z. B. wenn auch nur eine Hand einen Hebebaum drückt und ihn so in Bewegung setzt, so müssen wir uns sagen, daß zwischen einer solchen allmählichen Bewegungsübertragung scheinbar „momentanen“, welche als Stöße im engeren Sinne bezeichnen keine scharfe Grenze, sondern ein stetiger Übergang ist. Es werden also die Molekeln der Hand denen des Hebebaumes allmählich Bewegung erteilen und ebenso die Teilchen in der von der Hand berührten Stelle den entfernteren der Stange. Jede solche Bewegungsübertragung wird also auch etwas von Wellenbewegung an sich haben (folg. Abschnitt VI, §

Speziell Strevins Prinzip der gleichmäßigen Druckfortpflanzung in Flüssigkeiten und Gasen, welches im § 36 zunächst durch die Fiktion harter Kugeln erklärt wurde, fügt sich unter die Hypothese, wenn wir uns vorstellen, daß z. B. bei der hydraulischen Presse durch das Herabdrücken des Druckstempels den angrenzenden Wasserteilchen größere kinetische Energie erteilt wird, dann auf die weiteren Teilchen und von diesen auf den Preßkolben und hier aber wegen der größeren Fläche nur eine kleinere Geschwindigkeit, also eine kleinere Verschiebung binnen der gegebenen Zeit bewirkt.

Ebenso läßt sich dann das Gesetz der Erhaltung der Arbeit (mechanischen wie hydro- und aeromechanischen) Maschinen, d. h. das Gesetz der größeren mechanischen Spannungen an Stellen kleineren Weges, den Wirkungen der Molekeln der einzelnen Maschinenteile aufeinander anschreiben. — Gleichwohl müssen wir uns schließlich eingestehen, daß bei solchen „Zurückführungen“ die Kraft der Elastizität selbst, welche den stoßenden Molekeln oder Atomen beilegen, unerklärt bleibt.

I. Die Reibung, und zwar zunächst fester Körper, setzt sich zusammen aus a) den Molekularkräften zwischen den einander berührenden Körpern (also namentlich Adhäsion), b) den Einflüssen der Unebenheiten, welche auch die bestpolierten Oberflächen zeigen, und zwar stoßen 1. die Erhebungen des einen Körpers beim Gleiten an die des anderen; sie senken sich aber auch in die Vertiefungen des anderen, und es muß daher 2. der gleitende Körper längs der Erhebungen des anderen etwas emporgehoben werden, teils werden diese 3. verbogen, 4. abgerissen. — Da die Wirkungen 2, 3, 4 beim Rollen zum Teil vermieden sind, ist die Reibung beim Rollen viel kleiner als beim Gleiten.

Zu vermindern sucht man die Reibung bei den Zapfenlagern der Maschinen, bei Türangeln . . . , und zwar durch Polieren, durch Schmieren (Metalle mit Öl, Holz mit Graphit . . .), dadurch, daß man z. B. Stahlzapfen in Messingpfannen, bei Uhren in Edelsteinlagern laufen läßt; Straßsen baut man aus hartem, gut zusammenhängendem Material; Schlitten, Wagen, Eisenbahnen. — Nützlich ist dagegen die Reibung beim Befestigen von Gegenständen mittels der Nägel, Keile, Schrauben . . . ; ohne Reibung würden alle Gewebe, Knoten, alles Genähte . . . auseinander fallen (Halten der Schreibstifte); es wäre keine Übertragung der Bewegung an Maschinen durch Riemen, Seile . . . , keine willkürliche Bewegung der Menschen, Tiere . . . , namentlich über geneigte Flächen, möglich (Glatteis). Bestreuen, Hemmschuh, Bremse.

Reibung findet keineswegs bloß an übereinander hingleitenden (rollenden) festen, sondern auch an flüssigen und gasförmigen Stoffen statt; z. B. Fließen von Quecksilber über Platten aus Glas, Holz . . . (bei adhärierenden Flüssigkeiten kommt wieder die Überwindung der Kohäsion dazu, § 52); Reibung des Windes an ebenen Boden . . . Insbesondere beruhen die (den Diffusionserscheinungen verwandten) Vorgänge beim Gleiten von Schichten tropfbarer oder gasförmiger Flüssigkeiten aneinander auf „innerer Reibung“. Sie spielt auch im Haushalte der Natur eine weit verbreitete Rolle; so (wie HELMHOLTZ in einer seiner letzten Arbeiten gezeigt hat) beim Hingleiten jedes Lüftchens über einen glatten Seespiegel, der sich dann sofort zu Wellen kräuselt, desgleichen bei der Entstehung der Zirkuswolken bis zu den Regenböen, welche Wellen mit Längen bis zu 30 km darstellen, § 194. — Um diese wichtigen Vorgänge zu durchschauen, bemerken wir zunächst, daß, wenn z. B. von zwei Gasmengen jede aus Teilchen bestand, die in Berührung aufeinander in Ruhe sind, sie beim Gleiten übereinander sich nur in verschwindendem Maße in ihrer relativen Geschwindigkeit beeinflussen könnten, da die Fläche, an welcher die Reibung stattfindet, im Verhältnis zur ganzen Masse der bewegten Luft sehr klein ist, indem an dieser Fläche nur verschwindend wenig Molekeln zusammentreffen im Vergleich zu den überhaupt bewegten. Da aber nach der kinetischen Gastheorie die Teilchen in raschen Bewegungen nach allen Richtungen begriffen sind, so bringen sie, wenn sie sich normal zur Trennungsfläche aus einer Gasmenge in die andere bewegen, in diese die Geschwindigkeit mit, welche sie parallel zur Trennungsfläche hatten. — Bei ungleich warmen Schichten mischen sich überdies die Gase von verschiedenem spezifischen Gewicht in Form unzähliger feiner Strömchen, mit welchen sich die beiden Gasmassen gleichsam gegenseitig anfassen, so daß die gegenseitige Beeinflussung der Geschwindigkeiten infolge der vieltausendfach vergrößerten Oberfläche sehr beträchtlich wird.

II. Der Widerstand des „Mittels“, d. h. der tropfbaren gasförmigen Flüssigkeit (Luft, Wasser . . .), in der sich die Körper bewegen, rührt teilweise her von der Trägheit der Flüssigkeitsteilchen, indem diese durch den Körper selbst erst in Bewegung gesetzt und beiseite geschoben werden müssen, teilweise von der inneren Reibung der Flüssigkeit (diese kommt namentlich bei zähflüssigen Stoffen in Betracht).

Mit Rücksicht auf die große Verwickelung der Strömungen und Wirbel, welche bei dem Durchgange eines (festen, flüssigen oder gasförmigen) Körpers durch eine tropfbare oder gasförmige Flüssigkeit eintreten, ist es nicht zu wundern, daß bisher ein einfaches Gesetz für die Abhängigkeit des Widerstandes des Mittels von der relativen Geschwindigkeit zwischen Körper und Mittel nicht gefunden werden können. Brauchbare Annäherungen sind für große Geschwindigkeiten Proportionalität des Widerstandes mit der ersten, für geringe Geschwindigkeiten mit der zweiten Potenz der relativen Geschwindigkeit. Ganz wesentlich von Einfluß ist aber überall die Gestalt des bewegten Körpers. Linsenform bei Uhrpendelkörpern; Spitzgeschosse; Schiffskörper. Versuch, ein Brett der Reihe nach durch Luft und Wasser, mit kleinerer oder größerer Geschwindigkeit, mit der schmalen oder breiten Seite voraus (einen aufgespannten Regenschirm mit der konvexen oder der konkaven Seite nach vorn) zu bewegen.

Nützlich ist der Widerstand des Mittels beim Rudern, Schwimmen (man kehrt man beim Zurückbewegen die breite, beim Vorwärtsbewegen die schmale Seite der Hand, des Ruders . . . gegen das Wasser?); Schaufelräder, Schiffsschrauben, Fallschirme. Fliegen der Vögel, Insekten . . . — Das Problem des „Leichten Luftschiffes“ stellt noch immer das lockendste Ziel für umfassende Forschungen auf dem Gebiete der Beherrschung aller dieser Verhältnisse nach theoretischer und praktischer Seite hin dar. —

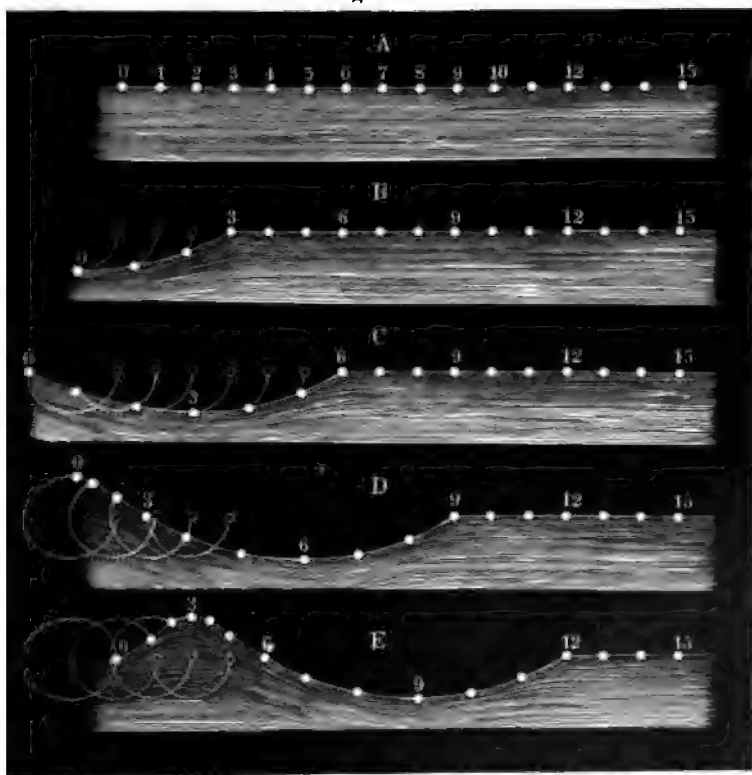
Beim Übergange aus einem Mittel in ein anderes tritt Ablenkung der Bewegungsrichtung ein, und zwar Ablenkung zum Lote, wenn der Körper in das neue Medium größere Geschwindigkeit hat (LA 133); Bedeutend ist die Exklusion der Emissionshypothese des Lichtes (§ 123).

VI. Mechanische Schwingungen und Wellenbewegungen.

sein Gleichgewicht z. B. durch Hineinwerfen eines Steines (Fallen von Tropfen, Anstreifen eines Vogels . . .) an einer Stelle gestört, so breiten sich ihr Wellenringe aus, indem je einer Erhebung des Wassers über den Wasserspiegel, einem Wellenberge, eine Vertiefung, das Wellental, folgt. Wenn wir mit dem Blicke von einem bestimmten Zeitpunkte an ein bestimmtes Stück des Wasserwulstes zwischen zwei Tälern, so scheint sich diese Wasseroberfläche von der Erregungsstelle weg mit konstanter Geschwindigkeit über den Wasserspiegel hinzuschieben. Daß aber nicht dieser Wasserkörper als Ganzes fortschreitende Bewegung mit jener Geschwindigkeit besitzt, erkennen wir, wenn wir auf der Wasseroberfläche z. B. ein Baumblatt (auf mächtigeren Wellen ein Schwimmer . . .) schwimmt, wobei dieser „Schwimmer“ keineswegs eine fortschreitende Bewegung nach der Richtung des Fortschreitens der Welle und mit deren Geschwindigkeit ausführt, sondern nur an Ort und Stelle so lange schaukelt (auf- und ab- und zugleich vor- und rückwärtsschwingt), als Wellen unter ihm weggehen. — Genauer, als es die bloße Betrachtung der in der Natur vorkommenden Wasserwellen erlaubt, zeigen die

Versuche mit der Wellenrinne (Gebrüder WILHELM und ERNST HEINRICH HOFMEIER 1825), einer 1 bis 2 m langen schmalen Wanne mit Glaswänden, daß

Fig. 238.



sehen an der Oberfläche des Wassers nahezu kreisförmige Bahnen in der horizontalen Ebene parallel den Längswänden der Rinne ausführen. Körperchen

unter dem Wasserspiegel bewegen sich in Ellipsen mit wagrechter Hauptachse, in noch größerer Tiefe (nahe dem Boden) schwingen die Teilchen in wagrechten Geraden, deren Länge in bestimmter Tiefe Null wird. Von dieser Tiefe an bleibt das Wasser von den Wellenvorgängen an seiner Oberfläche unberührt. Fig. 238 (a. v. S.) A bis E gibt ein phoronomisches Bild davon, wie nach und nach immer weitere Wasserteilchen der Oberfläche von der Kreisbewegung ergriffen werden und so die Wellenbewegung im ganzen zu stande kommt.

Die Erregung der Wellen, zunächst in der Wellenrinne, kann durch ein- oder mehrmaliges Emporsaugen und Wiederfallenlassen des Wassers in einem Röhrchen oder durch Hin- und Herfahren mit einem Stäbchen u. dergl. (meist an dem einen Ende der Rinne) vorgenommen werden. — Um den dynamischen Vorgang der Übertragung dieser Bewegungen an einem noch etwas vereinfachten Falle darzustellen und so die Wellenbewegung, zunächst des Wassers, als Wirkung bekannter Kräfte zu erklären, denken wir uns auf die ebene ruhende Wasseroberfläche eine begrenzte Wassermenge aufgelagert. Diese wird durch ihr Gewicht die unter ihr liegenden Wasserteile drücken, diese werden infolge des hydrostatischen Druckes zur Seite und dann nach oben auszuweichen suchen, so daß sich, indem die erste Erhebung des Wassers sich ausgleicht, neben ihr eine neue Erhebung (ein Wellenberg) bildet, welche nun ihrerseits neben sich wieder eine dritte Erhebung bildet u. s. f. Da die erste Wassermasse mit einer Beschleunigung sinkt, die wie im Kommunikationsrohr proportional dem Abstand vom Niveau ist, so kommt sie mit einer gewissen (Maximal-) Geschwindigkeit ins Niveau und geht von da noch ein Stück nach abwärts: es entsteht die Vertiefung neben der umliegenden Erhebung u. s. f. —

Der in der Volkssprache ganz oder fast ausschließlich auf Wasserwellen eingeschränkte Begriff der „Wellenbewegungen“ hat mit sich erweiterndem Erkenntnis der physikalischen Erscheinungen eine umfassende Erweiterung erfahren. So zeigen eine unverkennbare Ähnlichkeit mit den Wasserwellen z. B. die unter ganz anderen mechanischen Bedingungen auftretenden „Seilwellen“.

II. Versuch 1. Ein Seil (Kautschukschlauch, Spiralfeder . . .) wird an dem einen Ende festgehalten (etwa an der Zimmerdecke befestigt) und das andere Ende wird mit der Hand 1, 2, 3 . . . mal rasch auf- und ab- (hin- und her-) bewegt. Man sieht dann 1, 2, 3 . . . Ausbiegungen als „Seilwellen“ das Seil entlang hinlaufen. — Versuch 2. Wird an einer Stelle einer geeigneten Drahtspirale das Gleichgewicht statt durch eine seitliche Verschiebung wie bei Versuch 1 durch Zusammen- (bzw. Auseinander-) schieben einiger Spiralwindungen gestört, so schreitet eine Verdichtung (bzw. Verdünnung) längs der Spirale fort (— die Erscheinung wird deutlicher, wenn einzelne Windungen der Drahtspirale an Fäden aufgehängt sind, so bei Weinholds Wellenmaschine). —

III. Ähnliche Erscheinungen zeigen sich überdies an einem Ährenfelde, über welches der Wind hinstreicht, an den Leibringen einer Raupe, eines Regenwurmes, welche sich an verschiedenen Stellen zu verschiedenen Zeiten zusammen- und auseinanderschieben, an den Beinen eines Tausendfüßlers, an den Gliedmaßen eines langen Zuges Soldaten, welche nach dem Spiel der an der Spitze des Zuges marschierenden Musikkapelle marschieren, wobei der Schall zu den entfernteren erst später gelangt; beim Haltmachen und beim Weitergehen eines langen Zuges von Menschen, den Puffern eines Eisenbahnzuges. Weitere Beispiele!

Alle bisherigen Beispiele I, II, III haben folgendes gemeinsam:

a) Eine Wellenbewegung findet statt, wenn in einer Reihe von

Massenpunkten jeder einzelne gleiche (ähnliche) Bewegungen um eine gewisse Zeit später als der vorausgehende ausführt.

b) Aber auch Vorgänge, wie die Ausbreitung des Schalles, des Lichtes, der strahlenden Wärme, der elektrischen Zustände rings um eine Entladungsstelle u. s. f., welche sich ihrerseits zunächst nicht als Bewegung, sondern eben als Schall, Licht . . . der direkten sinnlichen Wahrnehmung darbieten, haben mit obigen rein mechanischen Erscheinungen so vieles gemeinsam, daß wir gegenwärtig auch von Schall-, Licht-, Wärme-, elektrischen Wellen, von Luftwellen, Ätherwellen u. s. f. sprechen. — Allgemein bildet der Begriff der Wellenbewegung ein Gegenstück (und zwar eine Art Gegensatz) zum Begriffe der Massenbewegung.

Zu a). Wenn nämlich z. B. ein Kahn über den Wasserspiegel eines Teiches einfährt, so nehmen die Teilchen des Holzes, des am Boden angesammelten Wassers u. s. w. immer andere und andere Orte in Bezug auf das Ganze der Wassermenge im Teiche ein. Was hier seinen Ort ändert, also sich „bewegt“, ist einfach die Masse des Kahnes, des in ihm befindlichen Wassers u. s. w. — Was gegen bei der scheinbaren Bewegung eines Stückes des sich ausbreitenden Wellenganges immer andere und andere Orte an der Oberfläche des Teiches einnimmt, so den Schein einer ebenfalls fortschreitenden Wassermasse hervorbringt, ist Wahrheit das Auftreten gleicher (oder ähnlicher) Bewegungszustände an einander folgenden Wasserteilchen. Ähnlich: Erdbebenwellen im Boden und im Luftmeer (eine solche ging 1883 beim Ausbruch des Krakatau über die ganze Erdoberfläche bis zu den Antipoden binnen 36 Stunden, von hier zur Ausgangsstelle zurück u. s. f. bis zu allmählichem Erlöschen). — Diese Übertragung des Begriffes der „Bewegung“ von einer ihren Ort ändernden Masse auf einen seinen Ort ändernden Bewegungszustand mußte angesichts der

b) Wärme-, Licht-, elektrischen Wellen sogar noch dahin erweitert werden, daß nicht nur ein Bewegungszustand, sondern auch ein Wärmezustand, ein elektrischer Zustand u. s. f. sich durch eine als Ganzes ruhende Stoffmenge ausbreiten oder, wie wir speziell bei Wellen sagen: „fortpflanzen“ kann. Im Gegensatz zu diesen Wärmewellen (wie sie sich z. B. von der Oberfläche des Erdbodens gegen die Tiefe hin fortpflanzen, vergl. § 196), den elektrischen Wellen (§ 157) u. dergl. können wir die Wasserwellen, die Seilwellen u. dergl., bei denen das, was sich „bewegt“ (ausbreitet, „fortpflanzt“), selbst eine Massenbewegung ist, als mechanische Wellen bezeichnen.

Zur vollständigen phoronomischen Beschreibung einer mechanischen Wellenbewegung gehört also a) die Beschreibung der Bewegung jedes einzelnen Punktes (welche meistens, wenn auch nicht immer, eine schwingende ist; wie diese Bewegungen schon bei den Wasserwellen in Kreisen, Ellipsen, Geraden vor sich gehen können, so kommen bei manchen Wellenvorgängen noch kompliziertere Schwingungsbewegungen der einzelnen Teilchen in Betracht (weshalb die in § 12 gegebene Darstellung der einfachsten Schwingungsbewegungen in den folgenden Paragraphen zu wiederholen und zu erweitern sein wird). b) Die Beschreibung der Beziehungen zwischen der Bewegung je eines Punktes zu den ihm benachbarten, namentlich die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“, mit welcher sich der gleiche oder ähnliche Bewegungszustand von je einem Teilchen auf die weiteren überträgt. Hierbei werden sich aus den

Wellenbewegungen in eindimensionalen Punktreihen auch ergeben die $a)$ in zwei- und dreidimensionalen Punktsystemen (Kreis-, Kugelwellen u. s. t.).

Die dynamische Erklärung der Entstehung und Ausbreitung von Wellenbewegungen hat anzugeben, infolge welcher Kräfte je ein Teilchen eine Bewegung auf die angrenzenden überträgt (bei den Wasserwellen waren dies die Schwerkraft und der aus ihr sich ergebende hydromechanische Druck, bei sehr vielen Wellenbewegungen, z. B. der Erschütterung, welche sich als Schallwellen durch einen elastischen Stab fortpflanzt, sind es elastische Kräfte). —

Für die Phoronomie und für die Dynamik der Wellenbewegungen ist der denkbar einfachste Fall, daß sich die Wellenbewegung „ungestört“ fortpflanzt, d. h. daß es zu jedem Teilchen wieder ein nächstes gibt, auf welches sich die Bewegung unter gleichen Umständen überträgt, weshalb wir anfänglich über unendliche Punktsysteme fingieren werden. In Wirklichkeit ist aber diese Voraussetzung schon z. B. bei den Wellenbewegungen in einem Teiche, aber auch bei den Meereswogen u. s. f. nicht erfüllt, und es treten dann komplizierte Erscheinungen ein, welche oft gerade die größte physikalische Wichtigkeit haben; zunächst die der Reflexion, Brechung und Beugung der Wellen, welche sich manchmal schon an den Ufern eines Teiches beobachten lassen; hier werden durch die früheren Wellen neue Wellen erzeugt. — Während z. B. in offener See (bei ruhiger Luft) selbst hohe Wogen ohne Veränderung ihrer Form fortschreiten, bilden sich in der Nähe des Strandes Schaumkämme, indem durch die Reibung am flachen Meeresboden die unteren Wasserteile ihre Geschwindigkeit früher verlieren als die oberen, so daß diese sich in der Richtung gegen den Strand hin überstürzen; indem hierbei die Wellenbewegung als solche aufhört, setzt sich ihre Energie um (in Wärme). — Auch die Vorgänge, durch welche Luftwellen und Ätherwellen in uns Schall-, Licht-, Wärmeempfindungen hervorrufen, können wir mit einem solchen „Strand“ vergleichen. Solange z. B. die durch ein Musikinstrument erzeugten Luftwellen sich nur durch den Luftraum selbst fortpflanzen, hören wir nichts, sondern erst, sobald sie nach der Übertragung auf die Gehörnerven sich in einen jedenfalls nicht mehr rein mechanischen Vorgang umsetzen. Ebenso hat, wenn Lichtstrahlen den dunklen Ackerboden erhitzen, gleichsam ein Stranden der Lichtwellen an dem dunklen Körper („Absorption“ des Lichtes) stattgefunden, indem die Energie der Lichtwellen in Wärme des Bodens sich umsetzte. In dieser Art der Übertragung von Energie (welche der Übertragung der lebendigen Kraft z. B. von einem stoßenden Körper auf den gestoßenen nicht unter-, sondern beigeordnet ist), liegt die hohe Bedeutung aller (mechanischen und nicht mechanischen) Wellen für fast alle Teile der Physik.

a) Schwingungen einzelner Punkte (Wiederholung und Erweiterung).

§ 61. Sinusschwingungen und andere Schwingungsformen

Eine einfache Sinusschwingung (harmonische Schwingung) ist bei gegebener Mittellage und Schwingungsrichtung bestimmt durch die Schwingungsweite (Amplitude) a und die Schwingungsdauer T . Phoronomisch beschrieben ist diese Bewegung eines einzelnen schwingenden Punktes nach § 12 durch die Gleichungen für die

$$\left. \begin{array}{l} \text{Elongation} \quad . \quad s = \quad a \sin \alpha t \\ \text{Geschwindigkeit} \quad v = \quad \alpha a \cos \alpha t \\ \text{Beschleunigung} \quad w = -\alpha^2 a \sin \alpha t \text{ oder } w = -\alpha^2 s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wo } \alpha = \frac{2\pi}{T}, \\ \text{also } T = \frac{2\pi}{\alpha} \end{array}$$

Die als unabhängig veränderlich gedachte GröÙe t gibt die „Phasenzeit“ an, so zwar, daÙ als Nullpunkt der Zeitzählung ein solcher Zeitpunkt gewählt ist, in dem der schwingende Punkt die Mittellage im Sinne der positiven Elongationsrichtung passiert. — Wird als Nullpunkt der Zeitzählung ein um ϑ Sekunden früherer gewählt, so ist in obigen Gleichungen statt t einzusetzen $t' = t + \vartheta$.

Ist z. B. $\vartheta = \frac{T}{4}$, so wird $s = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t + \frac{T}{4} \right) = a \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \frac{\pi}{2} \right) = a \cos \frac{2\pi}{T} t$.

Als allgemeinste dynamische Bedingung dafür, daÙ ein Massenpunkt solche Sinusschwingungen ausführt, wurde im § 18 die entwickelt, daÙ der Massenpunkt durch Kräfte bewegt wird, die direkt proportional seinem jeweiligen Abstand von der Mittellage gegen diese Mittellage hin wirken.

Hat der schwingende Punkt die Masse m und wirken auf ihn, während er die Elongationen $0, 1, 2, \dots s$ cm hat, } so ist seine Schwingungsdauer
die Kräfte $\dots 0, \pi, 2\pi, \dots s\pi$ Dyn, } $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\pi}} \dots$ (Gl. 6, § 18)

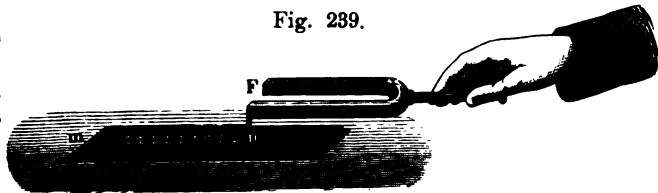
Der häufigste Fall solcher Kräfte sind die elastischen Kräfte. Deshalb führt jeder Punkt z. B. eines zylindrischen oder quadratischen Stabes, der an einem Ende festgeklemmt und aus seinem Gleichgewichtszustande durch Biegen oder Stoßen gebracht worden ist, um seine Gleichgewichtslage längs einer Geraden (vorausgesetzt, daÙ ihm nicht noch eine seitliche Geschwindigkeit erteilt ist) Sinusschwingungen aus; desgleichen jeder Punkt innerhalb der Spiralfeder bei den Vorversuchen II des § 16. — Ebenso in den LA 27–30.

LA 27–30.

Keineswegs alle Schwingungen folgen aber dem einfachen Wegzeitgesetz $s = a \sin \alpha t$. Schon längs einer Geraden können Schwingungen auch nach irgend welchen anderen Wegzeitgesetzen stattfinden; hiernach unterscheidet man schon an einem geradlinig schwingenden Punkte verschiedene Schwingungsformen. Zur

Erläuterung dieses Ausdrucks denke man sich unter dem schwingenden Punkte, der mit einer Schreibvorrichtung versehen sei, ein Blatt Papier (z. B. das berufste

Fig. 239.



des Scott'schen Phonautographen, § 86) mit konstanter Geschwindigkeit senkrecht gegen die Schwingungsrichtung fortgezogen. Es wird dann ein nach dem Gesetze $s = a \sin \alpha t$ sich bewegendes Punkt (z. B. die Spitze am Ende einer schwingenden Stimmgabel, Fig. 239) auf das Papier Sinuskurven zeichnen (ähnlich wie

sie die Schulknaben an die Hauswände zeichnen, wenn sie, ein Stück Rötel in Hand, den Arm vertikal auf- und abbewegend die Wand entlang laufen; dabei die Kurve nahe den höchsten und tiefsten Stellen weniger steil ist als der Mittellinie der Kurve, entspricht dem Umstand, daß der Arm nahe Umkehren unwillkürlich weniger schnell bewegt wird). Würde dagegen schwingende Punkt mit konstanter Geschwindigkeit aufwärts, dann nach gleicher Umkehr mit eben solcher Geschwindigkeit abwärts u. s. w. bewegt, entstünde statt der Sinuslinie eine Zickzacklinie u. s. f.

Fig. 240.



Fig. 241.



Fig. 242.



Die Schwingkurve, Fig. 240, spricht demnach, daß der schwingende Punkt dem Sinusschwingen nahe den Enden schnell nahe der Mittellage sich bewegt (— die größeren Geschwindigkeiten sind in drei Figuren auch durch die Art der Verdickungen der Linien am Anfang der Figur angedeutet). — Daß und inwiefern sich alle beliebigen Schwingungen eines einzelnen Punktes längs einer Geraden auf die Zusammensetzung von Sinusschwingungen längs derselben Geraden zurückführen lassen, im § 69 noch näher erörtert werden.

Alle Schwingungen eines einzelnen Punktes längs anderer Linien, gerader lassen sich in Sinusschwingungen längs zweier einander unter (oder schiefen) Winkeln sich schneidender Geraden zerlegen. Einige der verwickeltesten Fälle im folgenden Paragraphen.

§ 62. Zusammensetzung von Sinusschwingungen

I. Schwingungen von gleicher Dauer. — In § 12, Versuch 6, war die einfache Sinusschwingung als Projektion einer einfachen Kreisbewegung dargestellt. Wird dieselbe Kreisbewegung auf zwei zueinander normale Geraden in der Ebene projiziert, so ist die Kreisbewegung in zwei einfache Sinusschwingungen einer Phasendifferenz von $\frac{1}{2}T$ Sekunden zerlegt. (Versuch nach § 12). Ähnlich wie in § 12, Versuch 6, durch eine Lichtquelle, wird jetzt die kreisförmige Holz- oder Metallkugel durch zwei Lichtquellen beleuchtet, deren Strahlen sich in der rechten Kreisbewegungsebene rechtwinklig schneiden, und es führen dann an zwei Schirmen, deren Ebenen zu diesen Strahlen und daher auch untereinander senkrecht sind, die Schlagschatten Sinusschwingungen aus, die um $\frac{1}{2}T$ sec differieren. Daher auch umgekehrt:

ben die zwei Schwingungen bei gleicher oder ungleicher Amplitude keine Phasendifferenz, so setzen sie sich zusammen zu geradlinigen Schwingung. — Fig. 245.

Fig. 243.

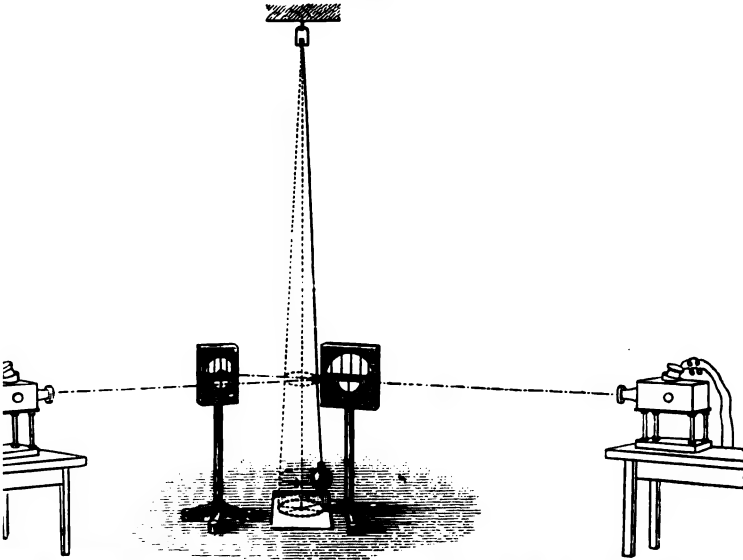
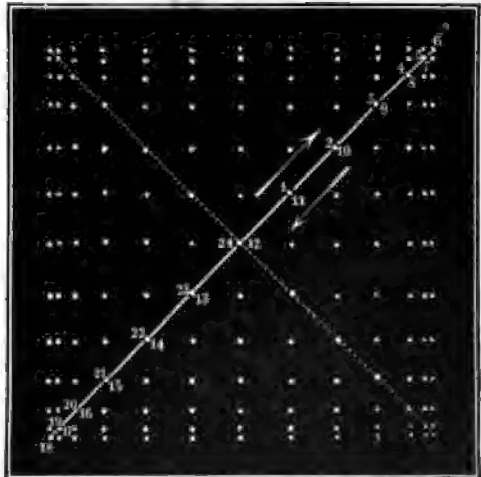
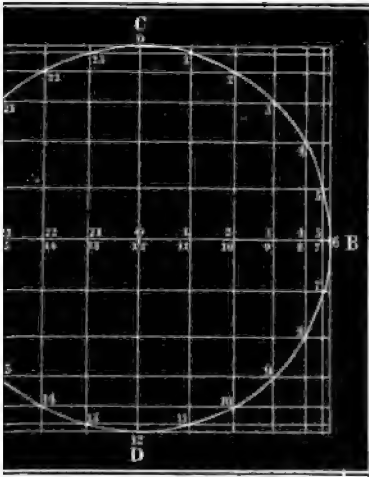


Fig. 244.

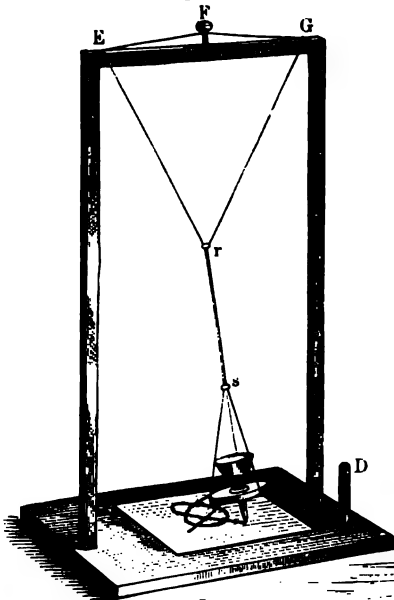
Fig. 245.



analytisch: Aus $x = a \sin at$ und $y = b \sin at$ ergibt sich die Gleichung der Ellipse $y = \frac{b}{a} x$. — Versuch ähnlich wie oben, wenn das Pendel und also die Holz- oder Metallkugel in einer Ebene zwischen den Schirmebenen schwingt.

II. Schwingungen von ungleicher Dauer. — *Versuch* (Fig. 246): Indem das Pendel an zwei Fäden aufgehängt ist, ist ihm eine bestimmte Schwingungsebene angewiesen; indem aber von der Verbindungsstelle r der beiden Fäden ein

Fig. 246.



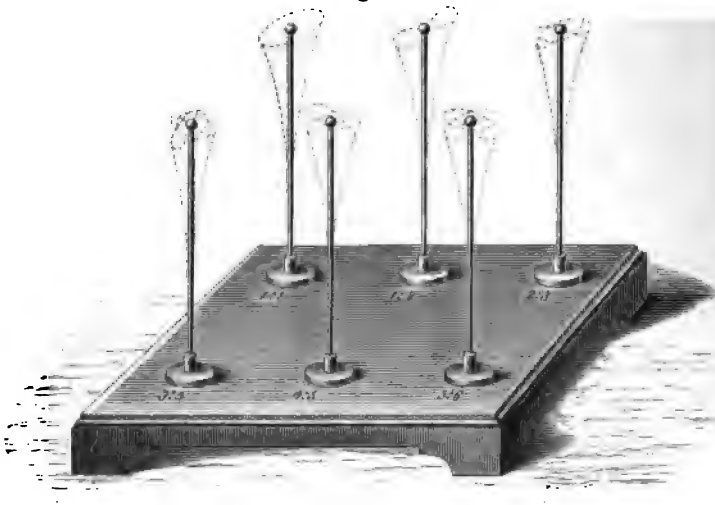
LA 134

Faden bis zum Pendelkörper führt, wird eine ihm nach irgend einer Richtung hin (z. B. durch Loslassen von der Ecke des Zeichenblattes aus) erteilte Schwingung zerlegt in die nach jener Ebene und in die normal dazu erfolgende Schwingung. Und diese beiden Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer setzen sich dann zu mannigfaltigen Schwingungsfiguren zusammen, welche durch das aus dem Trichterchen anfallende Sand oder durch andere Schreibvorrichtungen auf dem Papier ersichtlich gemacht werden können. Verhalten sich z. B. die Längen der einfachen und der Gesamtaufhängung wie 1:4, die Schwingungsdauern also wie 1:2, so entsteht eine 8 förmige Figur, falls beiden Schwingungen ein Passieren der Mittellage in denselben Zeitpunkte entspricht; war dagegen der Pendelkörper von der Ecke aus losgelassen, so entsteht eine parabelähnliche Figur (LA 134). Die Zeichnung in Fig. 246 entspricht 4:5 (vergl. Fig. 248).

Den rationalen Verhältnissen der Schwingungsdauern 1:1, 1:2, 1:3, 2:3 . . . u. s. f. entsprechen immer verwickeltere Figuren. — Sind dabei die V

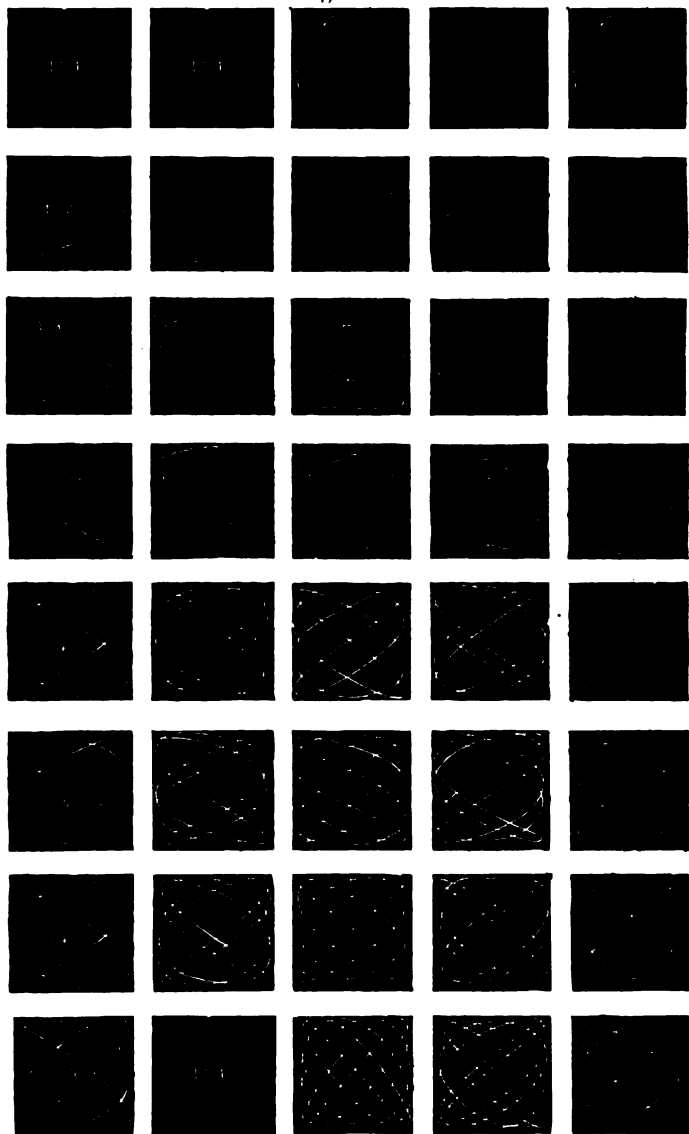
Fig. 247.

Fig. 248.



isse nicht genau eingehalten, so gehen die je einem Verhältnisse entsprechenden mehreren Figuren (Fig. 248), z. B. Gerade und Kreis bei 1:1, je nach der endifferenz allmählich ineinander über. [Lissajous Figuren, zu erzeugen

Fig. 248.



ch Stäbe von quadratischem, kreisförmigem, rechteckigem, elliptischem Querschnitt (Fig. 247), durch Paare von Stimmgabeln, deren eine einen Lichtstrahl die andere reflektiert vergl. Fig. 87, S. 303 u. dergl. m.]

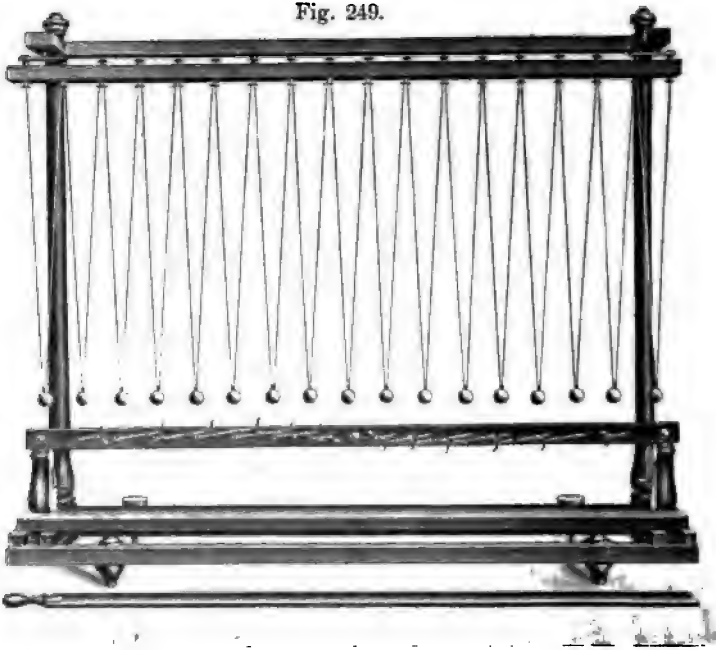
Die dynamischen Bedingungen für das Zustandekommen solcher zusammengesetzten Schwingungen können sehr mannigfaltige sein. Z. B.: Es führt elastischer Stab von rechteckigem Querschnitt (Fig. 247a, S. 232), wenn er parallel der Schmalseite angestoßen wird, langsamere Schwingungen aus als beim Stoß parallel der Längsseite. Bei einem nicht rein in die eine oder andere Richtung fallenden Anstoß zerlegt sich dann die Bewegung in zwei einfache Schwingungen von verschiedener Schwingungsdauer, die sich wieder zusammensetzen zu Schwingungen nach Figg. 247 und 248.

b) Wellenbewegungen in eindimensionalen Punktreihen

§ 63. Phoronomische Beschreibung der Wellenbewegung

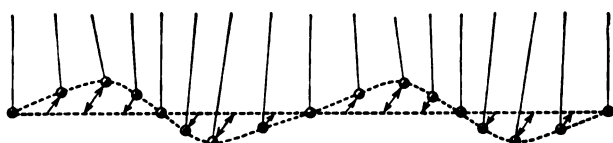
Machs Wellenmaschine (Fig. 249) besteht im wesentlichen aus einer Reihe von gleichen Pendeln, welche in gleichen Abständen bifilar aufgehängt sind (je nach Stellung der Doppelfadenebene) transversal, bzw. longitudinal (oder irgend einer Zwischenrichtung) schwingen können, d. h. so, daß die Schwingungsrichtung jedes Pendels („Punktes“) zur Reihe der Pendelkörper („Punktreihe“) normal ist, bzw. in sie fällt (oder auch irgend einen schiefen Winkel mit ihr bildet).

Fig. 249.



Versuch 1, Fig. 250: Bei Transversalstellung werden die Kugeln an einem Lineal um gleichviel verschoben gehalten. Wird dann das Lineal längs der Reihe weggezogen, so treten die Kugeln der Reihe nach in die gleichen Schwingungszustände ein und geben im ganzen das Bild einer fortschreitenden transversalen Welle (ähnlich den Seilwellen bei Versuch 1, § 60).

Fig. 250.



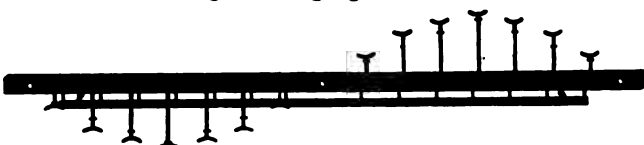
Versuch 2, Fig. 251: Bei Longitudinalstellung der Pendel bringt man diese mittels eines längs der Reihe hingeführten Schlittens oder direkt mit der Hand . . .) nacheinander zum Schwingen und erhält so fortschreitende longitudinale Wellen (ähnlich den Schwingungen der Spiralfeder an Weinhold's Lenmaschine). — Man kann auch, während wie bei Versuch 1 die Pendel transversal schwingen, die bifilare Aufhängung um 90° (langsam! — warum?) drehen, wobei sich die transversalen Wellen in longitudinale umwandeln.

Fig. 251.

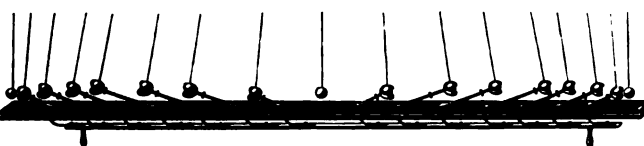
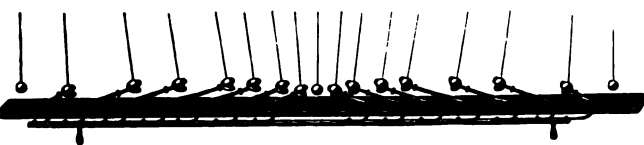


Bei einer Umstellung um 45° ergeben sich Wellen mit gleicher transversaler und longitudinaler Komponente.

Versuch 3: Die Kugeln werden mittels eines gebogenen Drahtes (oder einer Reihe mit ungleich langen, kurbelartig verstellbaren Drähten, Fig. 252) um leichte Stücke aus ihrer Gleichgewichtslage gebracht und dann durch rasches

Fig. 252.
(Grundriss)

zeitigen des Drahtes (bezw. Senken der Leiste) gleichzeitig schwingen lassen. Sie bilden als Ganzes eine stehende transversale Welle. (Solche Wellen lassen sich auch durch anhaltendes Hin- und Herbewegen eines Seilendes in bestimmtem Tempo hervorrufen; vergl. Figg. 258 I bis XIX, S. 243.)

Fig. 253 a.
(Grundriss)Fig. 253 b.
(Aufriss)Fig. 253 c.
(Grundriss)Fig. 253 d.
(Aufriss)

Versuch 4, Fig. 253 b, d (a. v. S.): Durch Verdrehen der Schwingung
 LA 135. (bzw. der Drähte an der Leiste, Fig. a, c, LA 135) um 90° ergibt sich v
 Versuch 3 die stehende longitudinale Welle. (Solche Wellen bilden
 auch an Weinholds Wellenmaschine, wenn von beiden Enden der S
 her in gleichem Tempo fortschreitende longitudinale Wellen erregt werd
 ferner § 65, Fig. 259; § 89, Fig. 321.)

Diesen vier Hauptarten von Wellen entsprechen also folgende :
 kreuzenden) Einteilungen der Wellen:

I. Fortschreitende Wellen (V. 1, 2) und stehende Wellen

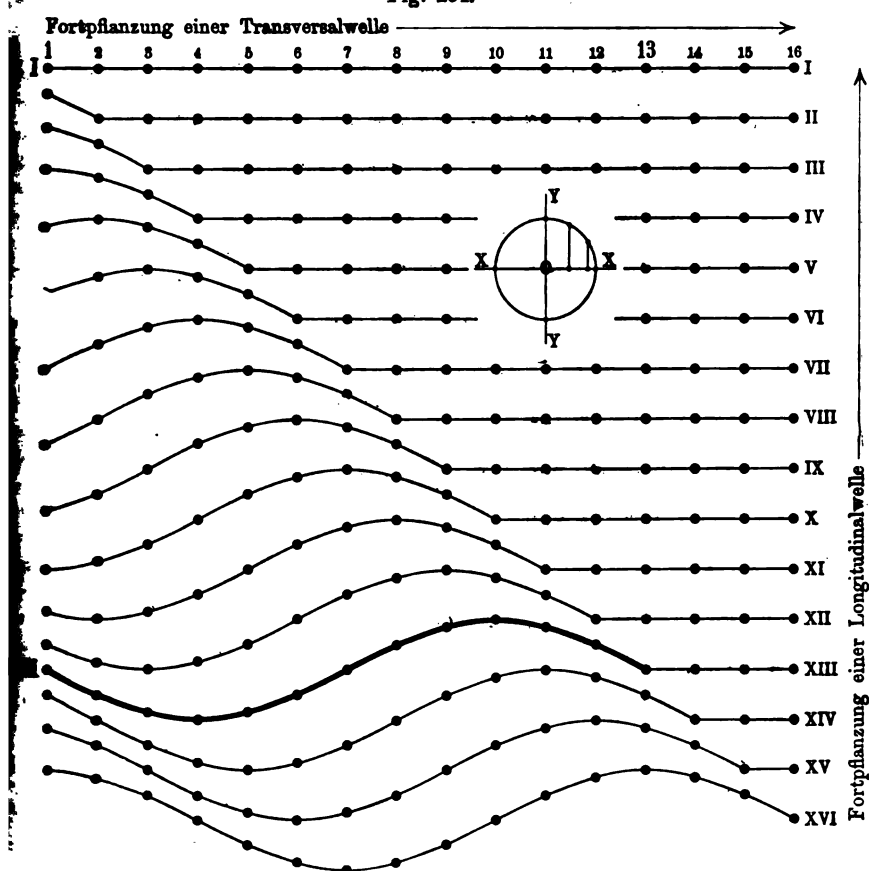
II. Transversale Wellen (V. 1, 3) und longitudinale Wellen

Zu I. Der Begriff „Welle“ ist ursprünglich von den fortschr
 Wellen genommen, und zwar, wie schon im § 60 bemerkt, von den Wa
 Da aber namentlich auch stehende transversale Wellen durch ihre
 die Wellenberge und Wellentäler der fortschreitenden Wellen erinnern,
 die Bezeichnung „Welle“ von den fortschreitenden auf die st
 übertragen. — Ein weiterer Grund für diese Übertragung ist der, daß
 Wellen unter bestimmten Umständen (§ 65) aus fortschreitenden ents
 Gleichwohl ist dies keine Zwischenstufe zwischen fortschreitenden ur
 den Wellen (d. h. die Einteilung I gibt einander ausschließende

Zu II. Ebenfalls liegt die ursprüngliche Vorstellung von einer „W
 transversalen näher als den longitudinalen; denn bei longitudinale
 gibt es nicht Wellenberge und Wellentäler, also keine Gestaltsände
 Punktreihe, sondern nur Verdichtungen und Verdünnungen. — Da
 Schwingungs- und Fortpflanzungsrichtung nicht nur die Winkel 90° und
 dern, wie eingangs bemerkt, auch alle schiefen Winkel vorkommen k
 gibt die Einteilung II in den Begriffen transversale und longit
 Schwingungen, bzw. Wellen nur die beiden Grundtypen, zwisch
 es stetige Übergänge gibt; so z. B. gegen Ende des Versuches 2, v
 transversale und longitudinale Komponenten vorhanden sind. Wäre statt
 Winkel 60° gewesen, so wäre die transversale Komponente überwiegend
 longitudinale. — Auch an den kreisförmigen Bewegungen eines Ob
 teilchens bei Wasserwellen sind gleiche transversale und longit
 Komponenten beteiligt; bei den elliptischen Bewegungen der Teilcl
 der Oberfläche überwiegt die longitudinale Komponente. — Rein tran
 sind dagegen wieder solche kreisförmigen Schwingungen, bei we
 Ebene der Bahnen normal auf der Fortpflanzungsrichtu
 (wie bei „zirkular polarisiertem Licht“, § 128). Es lassen sich nämlich :
 Bewegungen zwei rein transversale Wellen aussondern, aber gar keine lon
 Komponente. Desgleichen wenn die einzelnen Teilchen in Ebenen, die

von der schwingenden Bewegung ergriffen werde. Durch welche Kräfte diese Übertragung der Schwingungsbewegung geschieht, wird im folgenden Paragraphen untersucht werden; die nächstfolgenden Definitionen und Gleichungen beziehen sich auf die phoronomischen Eigenschaften der fortschreitenden Transversalwellen, und sie werden nach Bedarf später (§§ 65, 89) für die drei anderen Hauptarten von Wellen teils übertragen, teils entsprechend modifiziert werden.

Fig. 254.



In einer fortschreitenden Welle heißt **Wellenlänge** der Abstand eines Teilchens von demjenigen ihm nächsten, das mit ihm gleiche Schwingungsphase hat. — Die **Wellenhöhe** (d. i. Höhe eines Wellenberges, bzw. Tiefe eines Wellentales) ist gleich der Amplitude der einzelnen schwingenden Teilchen. — Ist die „Schwingungsform“ (§ 61) für jedes einzelne Teilchen die der einfachen Sinusschwingungen, so ist die **Wellenform** die einer Sinuslinie.

In Fig. 254, XIII ist also der Abstand der Punkte 1 und 13 (bzw. 2 und 14...) eine Wellenlänge; an den längs dieser Strecken liegenden Punkten sind

immer alle möglichen Schwingungszustände je eines Punktes je einmal vertreten. — Sind die Wegzeitgesetze der einzelnen schwingenden Punkte nicht mehr von der Form $s = a \sin \alpha t$, so ergeben sich auch entsprechend andere Wellenformen; z. B. Zickzacklinien (vergl. Fig. 241, S. 230), wenn die einzelnen Punkte mit konstanten Geschwindigkeiten hin- und hergehen (wie es an Violinseilen vorkommt). Ja sogar, wenn die Bewegung der einzelnen Punkte überhaupt nicht „Schwingungen“, d. i. periodische Bewegungen sind (z. B. wenn bei Seilwellen das Seilende nur einmal, und zwar etwa nur aufwärts und bis zur Mitte zurück, nicht mehr aber über die Mitte hinaus bewegt wird), kann man noch von „Wellen“ sprechen, die nun aber auch keine periodische Wellenform haben. Die folgenden Bestimmungen setzen aber wieder voraus, daß jedes Teilchen der Punktreihe wenigstens eine Schwingung von der Schwingungsdauer T Sekunden macht.

Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle. — Folgen wir mit dem Blick dem Wellenberge bei Wasser- oder Seilwellen oder bei Versuch 1 mit Machs Wellenmaschine, so liegt es uns nahe, den Begriff der „Geschwindigkeit“ von der Bewegung einer Masse auf die Bewegung einer Welle zu übertragen. Wurde z. B. an Machs Wellenmaschine das Lineal mit einer Geschwindigkeit von $c \text{ cm sec}^{-1}$ weggezogen, so schreitet auch eine Welle mit dieser Geschwindigkeit durch die Punktreihe vor. Ist nämlich zu einer Zeit $t = 0$ das Ende des Lineals vom Anfangspunkt der Pendelreihe weggezogen worden und hat dieses Ende nach der Schwingungsdauer $T \text{ sec}$ des ersten Pendels hinter der Punktreihe eine Strecke $cT \text{ cm}$ zurückgelegt, so hat das erste der freigesetzten Pendel eine volle Schwingung, das zweite noch nicht ganz eine Schwingung u. s. f. vollendet, während das letzte soeben frei werdende Pendel seine Schwingung beginnt. Auf jener Strecke cT sind also alle Schwingungszustände der Pendel vertreten, d. h. jene Strecke cT ist eine Wellenlänge. — Auch wenn dann das Lineal die Punktreihe schon längst ganz verlassen hat, sehen wir noch immer Wellen mit der nämlichen Geschwindigkeit die Reihe entlang laufen (bis die einzelnen Pendel infolge Reibung und Luftwiderstand zu schwingen aufgehört haben). Was wir hierbei am leichtesten mit dem Blicke verfolgen, ist der Abstand zweier Wellenberge (genauer: ihrer Gipfel), d. i. ebenfalls eine ganze Wellenlänge. Dieser Abstand verschiebt sich während einer Schwingungsdauer um seine eigene Länge. Bei allen fortschreitenden Wellen von $T \text{ sec}$ Schwingungsdauer und $\lambda \text{ cm}$ Wellenlänge gilt also für die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{\lambda}{T} \text{ cm sec}^{-1}$; $\lambda = cT$, $T = \frac{\lambda}{c}$.

Wegen der Beziehungen $T = \frac{1}{n}$ und $n = \frac{1}{T}$ (§ 12), gilt ferner

für die Schwingungszahlen: $c = n\lambda \text{ cm sec}^{-1}$; $\lambda = \frac{c}{n}$, $n = \frac{c}{\lambda}$.

Versuche: Ziehen wir an Machs Wellenmaschine schnell, bzw. langsam das Lineal weg, so entstehen lange, bzw. kurze Wellen; denn da T immer denselben Wert behält, also $\lambda : c$ konstant ist, so muß einem größeren Wert von c ein größerer Wert von λ entsprechen. — Wird ferner, während die der vollen Pendellänge entsprechenden Wellen durch die Punktreihe laufen, das Lineal gleichzeitig an alle Schnüre weiter unten gelegt, so wird die Schwingungsdauer T kleiner, und weil die Wellenlänge λ bleibt, so wird die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c größer. — Von obigen sechs Gleichungen läßt sich die Gleichung $c = n\lambda$ unmittelbar veranschaulichen durch Seilwellen: werden nämlich an dem einen Ende 2, 3, ... n

wingungen in 1 sec erregt, so ist die Strecke c cm des Seiles, bis zu welcher die erste Erregung binnen 1 sec ausgebreitet hat (und welcher Strecke die Pflanzungsgeschwindigkeit c cm sec⁻¹ maßzahlengleich ist), im ganzen von $\frac{1}{\lambda} \dots n$ Wellen ausgefüllt.

Durch Einführung der Größen c oder λ läßt sich nun auch die Wellenbewegung einer ganzen Punktreihe beschreiben durch

$$y = a \sin \frac{2\pi}{T} \left(t - \frac{x}{c} \right) \quad \text{oder} \quad y = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right),$$

wo die Gleichungen aus $y = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ für die Schwingung irgend eines Punktes der Reihe (wo die Elongation statt wie sonst mit s jetzt mit y bezeichnet ist) dadurch hervorgehen, daß ein von diesem Punkte

abstehender Punkt erst nach der Zeit $\frac{x}{c}$ sec dem gleichen Schwingungszustande ergriffen wird.

In diesen Gleichungen sind also sowohl t wie x zwei voneinander unabhängige, veränderliche Größen, und y hängt sowohl von der einen wie der anderen ab. Für einen speziellen Zeitpunkt, d. h. wenn t zu einer konstanten Größe gemacht wird, bildet dann jede der Gleichungen im Sinne der analytischen Geometrie die Gleichung der Wellenlinie für diesen besonderen Zeitpunkt; wird dann t ein etwas anderer konstanter Wert erteilt, so behält die Linie ihre Gestalt, scheint aber längs der Abszissenachse als Ganzes um ein Stück fortgerückt u. s. w., wobei das Eigentümliche der Wellenbewegung als solcher bildet.

Bei stehenden Wellen ist es gebräuchlich, schon einen „Berg“ oder ein „Tal“ als „Wellenlänge“ zu rechnen, so daß also z. B. Fig. 252 (S. 235) zwei Wellenlängen umfaßt.

Über die Gleichung einer stehenden Welle vergl. LA 136.

LA 136.

64. Dynamische Bedingungen für Wellenbewegungen in eindimensionalen Punktreihen.

Die Pendel an Machs Wellenmaschine hängen untereinander nicht zusammen; damit sie also das phoronomische Bild von transversalen (und longitudinalen) fortschreitenden Wellen geben, müssen sie der Reihe nach jedes eigens erregt werden. — Bei den in der Natur auftretenden Wellenbewegungen sind die einzelnen Teilchen der den Raum erfüllenden Materie (Luft, Äther . . .) durch bestimmte Kräfte aneinander gebunden, so daß ein Impuls, den eines der Teilchen empfängt, auf das zweite, von diesem auf das dritte u. s. f. übertragen wird. In sehr vielen Fällen sind dies elastische Kräfte, und zunächst nur solche Kräfte in diesem Paragraphen vorausgesetzt werden.

Wären z. B. die Massenpunkte 1, 2, 3, 4, 5 . . . der obersten Reihe in Fig. 254, S. 237 an einem Kautschukfaden in gleichen Abständen befestigt, so würde, wenn dem Punkte 1 eine transversale Verschiebung bis zur Elongation $\frac{1}{2}a$ erteilt wird, hierdurch sein Abstand vom Punkte 2 vergrößert, daher auch dieser Punkt 2 zu einer ähnlichen Bewegung angeregt, die er dann ebenso auf den Punkt 3

überträgt u. s. f. — In erster Annäherung wird, wenn die Bewegung des Punktes 1 eine rein transversale mit der Amplitude a und der Schwingungsdauer T gewesen war, auch die jedes weiteren Punktes eine gleiche Bewegung sein; diese Annäherung wird um so zutreffen, wenn der Punkt schon wiederholt die gleiche schwingende Bewegung ausgeführt hat.

Es ist unmittelbar ersichtlich, daß, wenn die gleichen Massen in gleichen Abständen an einer anderen Kautschukschnur angereiht wären, die bei Vergrößerung der Abstände größere Elastizitätskräfte entwickelt, die Übertragung der Bewegung je eines Teilchens auf das nächste schneller geschehen würde gegen langsamer, wenn auf dieselbe Schnur größere Massen in gleichen Abständen oder gleiche Massen in kleineren Abständen angereiht wären.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Wellenbewegung ist also größer, je größer die zwischen den Teilchen einer Punktreihe herrschenden Elastizitätskräfte und je kleiner die Dichte („**Lichtdichte**“) der Punktreihe ist. — Schon NEWTON entwickelte theoretisch (LA 137) die Gleichung für die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Welle $c = \sqrt{e:d}$ cm

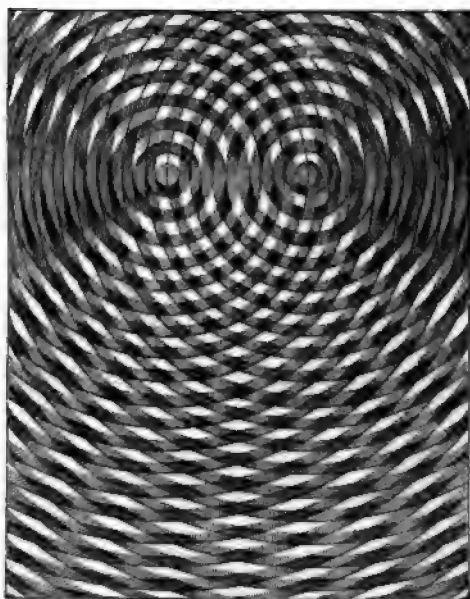
Die hier unter der Annahme getrennter Massenpunkte, die durch elastische Kräfte (versinnlicht durch die der Kautschukschnur) aneinander gefügt, entwickelte dynamische Erklärung für das Zustandekommen einer Wellenfortpflanzung führt zunächst unter Annahme der Molekularhypothese zur Vorhersage und warum sich z. B. in einem elastischen Stab aus festem Stoffe eine transversale Impuls auch als transversale Welle fortpflanzen wird: denn auf die transversale Verschiebung eines Moleküls eine Abstandsvergrößerung vom nächsten herbei, weckt also nach § 57, Fig. 235 anziehende Molekularkräfte, infolge deren das nächste Molekül vom vorigen nachgezogen, also transversal verschoben wird u. s. w. Doch läßt sich auch ohne Molekularhypothese, indem wir uns die Punkte stetig aufeinanderfolgend denken, das Eintreten der Wellen in festen Stoffen verstehen. — Anders geartet sind die Molekularkräfte — allgemeiner: die Anziehungs- (und „Abstoßungs“-) kräfte — in nicht festen Stoffen, weshalb z. B. in Luft auch nicht transversale, sondern nur longitudinale Wellen entstehen werden (§ 91); und umgekehrt: sobald wir annehmen, daß z. B. die Lichtwellen transversal, nicht longitudinal seien, werden wir den „Lichtäther“ (wenn überhaupt als elastisch) nicht als einen gasförmigen sondern als einen festen Stoff annehmen; Näheres §§ 123, 157.

§ 65. Superposition von Wellen. Interferenz.

Ist die Oberfläche eines Teiches, des Meeres . . . von langen und kurzen Wellen durchzogen, so wird die schon gekrümmte Wasserfläche durch Regentropfen, durch die Berührung eines vorüberstreichenden Vogels

ach: Wird ein hinreichend langes Seil an jedem der beiden Enden von Hand ein- oder mehrfach geschüttelt, so begegnen und durchdringen ein- Wellen, ohne einander eiteren Ausbreitung zu . So können auch zwei ischen von den Ecken D eines Zimmers aus Diagonalen AC und verständigen, wobei lwellen sich an jedem des Luftraumes zu- tzen und erst wieder erlegt werden (§ 96). —

Fig. 255.



e solche Erscheinungen gende Bezeichnungen:

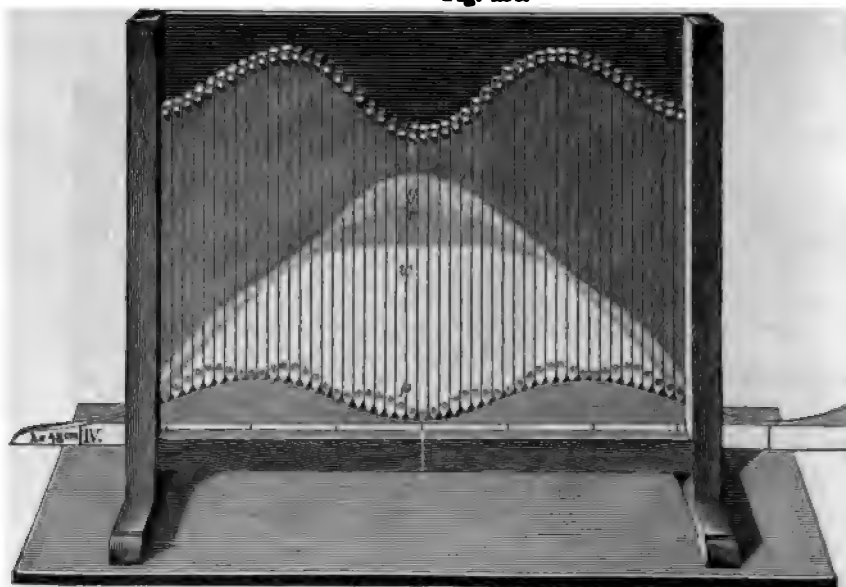
d dieselbe Punkt- eichzeitig zu zwei reren fortschreiten- r stehenden Wellen , so **superponieren** e Wellenbewegungen lafs jedem Teilchen ktreihe in jedem te diejenige eine Elongation (Geschwindigkeit, Beschleunigung, eit) zukommt, die sich aus der algebraischen Summierung ponierenden Bewegungen ergibt.

zieller nennen wir **Interferenz** der Wellen, bzw. Wellenzüge *interfere*, dazwischentreten) die Superposition von zwei (oder 1) Wellenzügen gleicher oder entgegengesetzter Fort- ngsrichtung, gleicher Wellenlänge und gleicher Wellen- Von Interferenz im engsten Sinne spricht man, wenn die renden Wellenzüge **um eine halbe Wellenlänge** (allgemeiner ungerade Anzahl halber Wellenlängen) gegeneinander ver- sind, wobei sie sich **völlig aufheben** (z. B. in Fig. 259, S. 243, II, XIII, XIX).

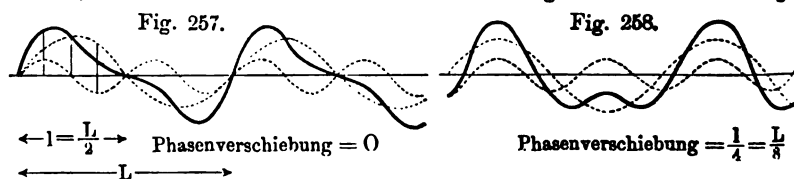
Apparat Fig. 256 (a. f. S.) zeigt, wie sich durch Superposition von zwei reren) Wellenzügen je nach der Wellenlänge, Wellenhöhe und Phasen- (Gangunterschied) mannigfaltige Wellen- (bzw. Schwingungs-) Formen önnen. — Sogar **alle** denkbaren **Wellenformen** lassen sich durch sition von **Sinuswellen** darstellen, entsprechend dem von FOURIER ieseenen geometrischen Satze (mathem. Anhang, Nr. 20), dafs sich alle Anh. 20. Kurven durch Superposition von Sinuslinien bestimmter Längen, Höhen seitiger Lage der Nullpunkte darstellen lassen.

guren 257. 258 (a. f. S.) stellen direkt wieder transversale Wellen vor, Physik.

Fig. 256.



bei welchen die Schwingungsebene sowohl der komponierenden als der resultirenden Wellen in die Ebene des Papiers fällt. Zugleich bilden aber diese Figuren wieder die entsprechenden graphischen Darstellungen für longitudinale Wellen; und zwar hierbei einerseits für die Elongation der Teile längs



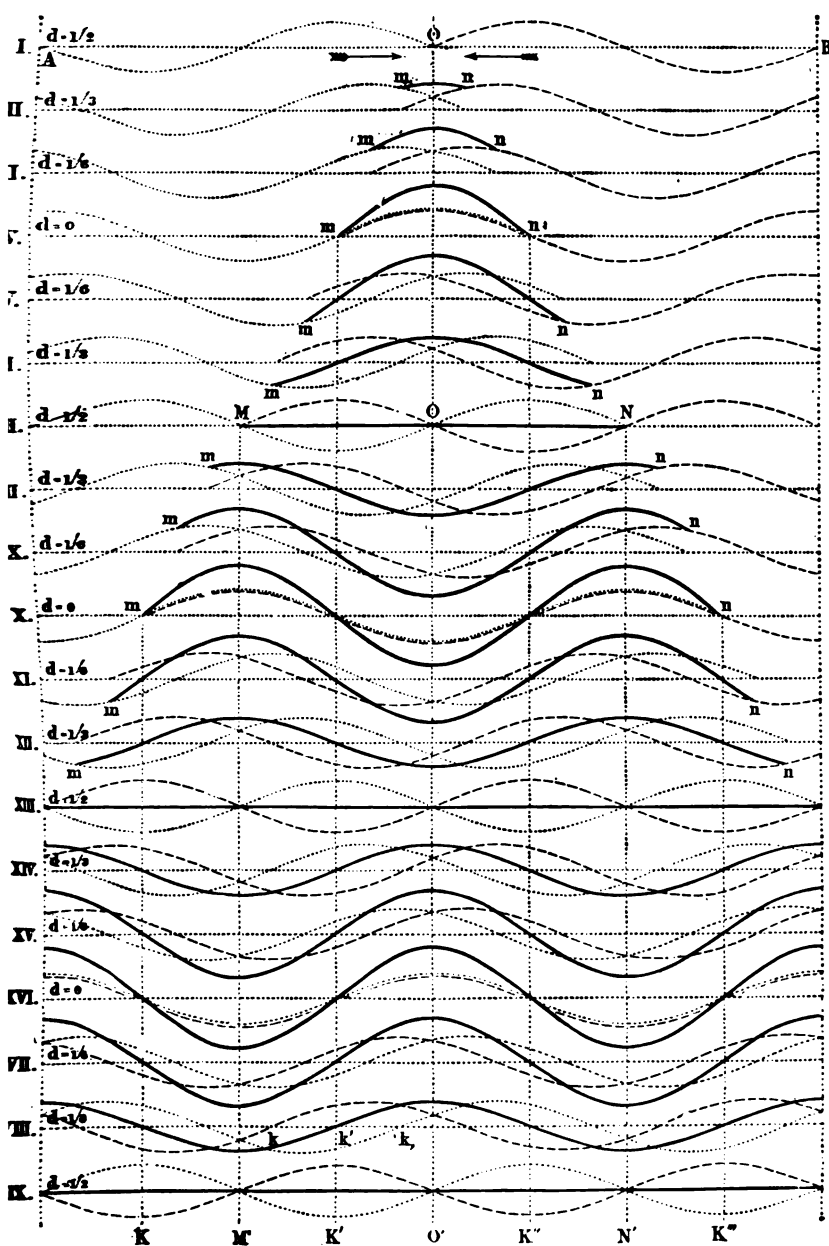
Punktreihe, anderseits (mit einer Phasenverschiebung, ähnlich wie in Fig. S. 305) für die Verdichtungen, bezw. Verdünnungen (wobei gewöhnlich Verdichtungen durch Wellenberge, Verdünnungen durch Wellenthäler dargestellt werden).

Aber auch für die Schwingungen eines einzelnen Punktes, welcher einer und derselben Geraden Schwingungen von der Schwingungsdauer T zugleich solche von $\frac{1}{2}T$ ausführt, geben die Kurven eine graphische Darstellung (vergl. § 61, Figg. 240–242) des Zustandes der Luft an einem demselben Punkte des Luftraumes, wenn durch diesen gleichzeitig longitudinale Wellen von einer Länge L und zugleich solche von $l = \frac{1}{2}L$ hindurchgehen (der wichtige Fall des Zustandes der Luft nächst dem Trommelfell eines Ohrs, das von zwei Luftwellenzügen vom Schwingungsverhältnis 1:2 getroffen wird).

Bei nicht rein longitudinalen Wellen, also z. B. rein transversalen Wellen, deren Schwingungsebenen aufeinander normal stehen, kann das Ergebnis der Superposition in Wellen bestehen, bei welchen die einzelnen Punkte in Kreise, Ellipsen, Geraden u. s. w. sich bewegen, entsprechend den verschiedenen Ergebnissen der Zusammensetzung von Schwingungen einzelner Punkte (§ 62). —

Einer der wichtigsten speziellen Fälle der Superpositionen zweier Wellenzüge n nicht gleicher Fortpflanzungsrichtung entspricht der folgenden Aufgabe:

Fig. 259.



Aufgabe: Wie interferieren zwei gleiche Wellensätze, die in einer Punktreihe nach entgegengesetzter Richtung fortschreiten, nach je einem Viertel der Schwingungsdauer? — Antw.: In Fig. 259 zeigen die Reihen VII, XIII, XIX, daß infolge Interferenz alle Punkte im selben Zeitpunkte die Gleichgewichtslage passieren, wogegen in IV, X, XVI... die stärksten Ausweichungen stattfinden; und

Durch Interferenz gleicher entgegengesetzt fortschreitender Wellenzüge bilden sich stehende Wellen. — Ist die Länge eines fortschreitenden Welle λ cm, die der stehenden l cm, so zeigt die Fig. 259, IV, wo mn als ganze Länge einer stehenden Welle bezeichnet wird, daß $\lambda = 2l \dots (1)$; in Worten?

Bei dieser Aufgabe war noch nichts vorausgesetzt darüber, woher der dem einen Wellenzug entgegenlaufende Wellenzug komme. Es könnten z. B. in einer Wellenrinne oder wie beim obigen Versuch an den beiden Enden eines Seiles selbständig Wellen erregt worden sein; der gewöhnlichste Fall ist aber der (wie schon bei den Versuchen mit Seilwellen, § 60, II, beobachtet wurde), daß die an einem Ende erregten Wellen am anderen Ende „reflektiert“ werden. Wir untersuchen diese Erscheinung im folgenden Paragraphen vorwiegend für eindimensionale, im § 69 eingehender für zwei- und dreidimensionale Punktreihen.

§ 66. Reflexion der Wellen.

Verfolgen wir die in einem Teiche (der Blechwanne bei den Vorversuchen in § 60) sich ausbreitenden Wellenringe bis dahin, wo sie an eine geradlinige Begrenzung des Wasserspiegels gelangen, so sehen wir, daß von hier sich wieder Wellenringe ausbreiten, als ob sie von einem Erregungszentrum kämen, das ebenso weit jenseits jener Geraden liegt, wie das wirkliche Erregungszentrum diesseits (Fig. 264, S. 249). Wir sagen, die Wellen werden an der Wand reflektiert. Die zurückkehrenden Wellenringe interferieren dabei mit den ankommenden. — Ebenso bemerkten wir, daß, wenn an einem Ende der Wellenrinne (§ 60) Wellen erregt wurden, sie am anderen Ende der Rinne reflektiert wurden. —

Alle diese Erscheinungen der Reflexion von Wellen erinnern an die Reflexion von Massen, z. B. beim Stöße einer elastischen Kugel an eine feste Wand. Zu einer solchen Reflexion käme es nur dann nicht, wenn wir uns eine Reihe von gleichen Kugeln ins Unendliche fortgesetzt dächten, da hier jede Kugel die ihr erteilte Bewegung an die nächste überträgt. Erst wenn an eine beliebig lange begrenzte Reihe von Kugeln a) eine Reihe von größeren, also schwerer beweglichen, b) eine Reihe von kleineren, also leichter beweglichen Kugeln grenzt, tritt an der Übergangsstelle eine Spaltung des Bewegungsvorganges ein. (Vergl. die Vorgänge beim Stöße zwischen einer großen und einer kleinen Kugel, § 58.) Wie nur an einer solchen ungleichartigen Kugelreihe eine Reflexion der Kugelmassen eintritt, so sind auch folgende die wesentlichen Bedingungen für das Zustandekommen einer

Reflexion der Wellen: In einer Punktreihe, die nicht überall gleichartig, sondern im einfachsten Falle aus zwei in sich gleichartigen Reihen zusammengesetzt ist, tritt an der Trennungsstelle eine solche Abänderung der Wellenausbreitung ein, daß von hier aus eine Welle, die reflektierte, in den ersten Teil der Punktreihe zurückkehrt. Dies auch dann, wenn die Reihe an dieser Stelle überhaupt endet.

Letzteren Grenzfall ausgenommen, bildet sich auch in dem zweiten Teile der Punktreihe eine Welle aus, die im Gegensatz zur reflektierten die **gebrochene** ist (wegen der bei zwei- und dreidimensionalen Punktsystemen mit einem ebenen Übergang aus dem einen Medium in das andere verbundenen Richtungsänderung der Welle, vergl. § 69).

Bei der Reflexion von Seilwellen fällt ein wesentlicher Unterschied auf, je nachdem das Seil an der Wand befestigt ist oder aber in einen langen dünnen Faden ausläuft (frei herabhängt). Fig. 260 und Fig. 261 stellen dar, daß an einem

Fig. 260.

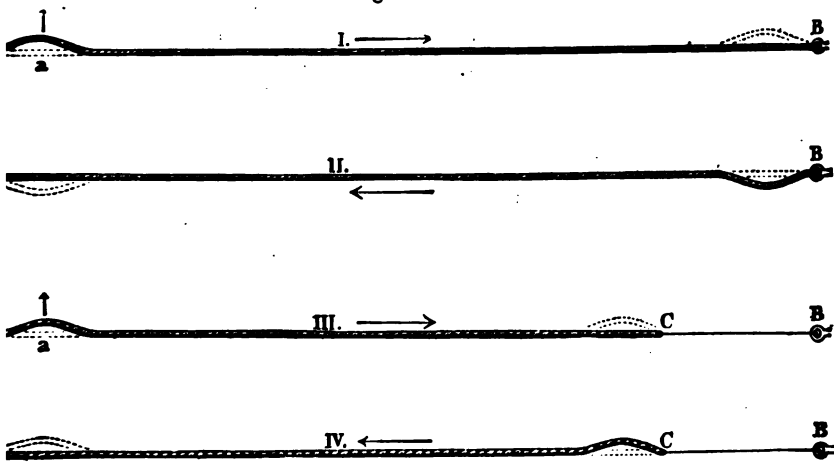


Fig. 261.

an einem Ende, bezw. beim Anlangen einer Welle an einen schwerer beweglichen Teil der Punktreihe jede Welle sich **umkehrt** (ein ankommender Wellenberg läuft in ein Tal zurück), an einem freien Ende, bezw. beim Anlangen der Wellen an einen leichter beweglichen Teil der Punktreihe hingegen eine solche Umkehrung nicht stattfindet. — Bilden die ankommenden und reflektierten Wellen stehende Wellen (wie in Fig. 259, S. 243), so zeigt ein festes Ende einen **Schwingungsknoten**, ein freies Ende einen **Schwingungsbauch**. — Ähnlich bei folgendem Versuch: Wird eine Gerte an dem einen Ende geschüttelt, so bildet sich zu einem bestimmten Abstände von dem anderen, freien Ende ein Knoten. Wird jenes Ende zuerst mit einer kleinen, dann mit einer größeren Masse (ein Stück Blei oder dergl.) belastet, so rückt der Knoten gegen dieses Ende hin. Wird das Ende festgemacht, so muß es selbst ein Knoten werden.

Wellenbewegungen in zwei- und dreidimensionalen Medien.

§ 67. Kreiswellen, Kugelwellen. Wellenstrahlen. Ebene Wellen.

Wie auf dem Wasserspiegel als einem zweidimensionalen Systeme zeigen sich „Wellenringe“ (Kreiswellen) zeigen, so zeigen sich z. B. die Schallwellen in der ein dreidimensionales System

darstellenden Luft nach allen Richtungen gleichmäßig aus und daselbst **Kugelwellen**.

Auf den vom Erregungszentrum aus gezogenen Geraden kommen eindimensionalen Punktreihen zu liegen, längs deren wir uns die Wellen fortschreitend denken. Die Geraden heißen **Wellenstrahlen**. Jede Kugel als geometrischer Ort gleicher Schwingungszustände innerhalb verschiedener Strahlen heißt **Wellenfläche**. Jedes Flächenstückchen (Element) einer Wellenfläche und der zugehörige Wellenstrahl sind zueinander normal.

Dynamische Bedingung für die Bildung von Kreis-, bzw. Kugelwellen ist, daß die Wellen vom Erregungszentrum aus nach allen Richtungen der Ebene, bzw. des Raumes sich mit gleicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit ausbreiten. Diese Bedingung ist in homogenen isotropen Medien (§ 53).

Da nach § 69 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in einem Medium bestimmt ist durch $c = \sqrt{e:d}$, so ist diese Geschwindigkeit überall dieselbe, dem Medium von allen Punkten aus und nach allen Richtungen hin die Werte von e und d (allgemeiner des Verhältnisses $e:d$) zukommen.

Ist das Medium homogen, aber anisotrop, so daß, wenn man immer für einer Stelle Gerade nach verschiedenen Richtungen legt, längs dieser verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten bestehen, so heißt die Wellenfläche keine Kreis-, bzw. Kugelwelle mehr. Umgekehrt kann man sich diese Wellenflächen z. B. als Ellipsen, bzw. Ellipsoide denken (wichtigstes Beispiel ist die Fortpflanzung ellipsoidischer Wellen in doppelbrechenden Krystallen, § 129), auf verschiedenen Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in verschiedenen Richtungen und auf deren verhältnismäßige Größe analog: Wärmeausbreitung in Holz- und Krystallplatten (§ 79).

Auch bei ellipsoidischen Wellen heißen Wellenstrahlen die Punkte des Ellipsoides aus gezogenen Geraden; es stehen aber nicht alle Strahlen auf den ihnen zugehörigen Elementen der Wellenfläche senkrecht, sondern nur an den Scheiteln des Ellipsoides.

Ebene Wellen. *Versuch:* Wird das Wasser in der quadratischen (Vorversuch S. 224) dadurch erregt, daß ein Stab von der Länge des Teiches parallel zu deren einer Seite in wagrechter Lage auf das Wasser gestößt, so schreitet parallel zum Stabe eine geradlinige Welle über die Wasseroberfläche hin. Annähernd geradlinig ist auch jedes Stück eines Wellenringes auf einem Teich, wenn das Erregungszentrum sehr ferne liegt. — Allgemeiner:

Denken wir uns eine Kugelwelle bis zu sehr großem Halbmesser erweitert, so stellt jedes Stückchen (Element) einer solchen

hervorragt. Werden dann an einer von jenem Körper möglichst entfernten Stelle Kreiswellen oder ebene Wellen erregt und breiten diese sich bis zu jenem Körper aus, so wird dieser zu einem „sekundären Erregungszentrum“, von welchem mehr oder minder deutliche neue Kreiswellen ausgehen. — *Versuch 2*: Es werden mehrere gleiche Körper längs einer geraden, bezw. krummen Linie aufgestellt und die Interferenzen der von diesen einzelnen sekundären Erregungszentren ausgehenden Wellenringe beobachtet.

Als wir uns im vorigen Paragraphen eine von einem „primären Erregungszentrum“ O ausgehende Kugelwelle, die binnen t sec den Radius r cm erlangt hatte, binnen weiteren τ sec auf den Radius $(r + \rho)$ cm anwachsend dachten, wo $t:(r + \rho) = \tau:(\tau + r)$, wurde bei dieser „primitiven Auffassung“ nicht darauf geachtet, daß jeder Punkt m_1, m_2, m_3, \dots (Fig. 262) jener Kugelwelle vom Radius r wieder als ein sekundäres Erregungszentrum“ aufgefaßt werden sollte, von welchem sich binnen der τ sec Kugelwellen von ρ cm Halbmesser ausbreiten. Zeichnet man sehr viele gleiche Kreise von dem Halbmesser, deren Mittelpunkte auf dem Umfange eines Kreises von r cm Halbmesser liegen, so haben alle diese Kreise als „einhüllende Linie“ (math. Anhang, Nr. 27) wieder einen Kreis vom Halbmesser $(r + \rho)$. Auf Grund dieser geometrischen Anschauung läßt sich somit die „primitive Auffassung“ des Anwachsens einer Kugelwelle vom Radius r auf $r + \rho$ ersetzen durch Huygens' Auffassung, daß die Kugelwellen vom Radius $r + \rho$ das Ergebnis einer Superposition der Elementarwellen vom Radius ρ seien. (Huygens betrachtete hierbei nur den Zustand der Welle an der Stirnseite der erweiterten Welle, d. h. nur den Schwingungszustand an der Außenfläche der Kugelwelle, nicht aber die sehr verwickelten Interferenzen innerhalb der sich kreuzenden Elementarwellen; z. B. erklärte er noch nicht, warum nicht auch der einhüllenden Fläche vom Radius $r - \rho$ eine Wellenbewegung entspricht. Viel später zeigte FRESNEL durch Rechnung, LA 138, daß wirklich dieselben Interferenzen auch für jeden Punkt im Innern einer primären Welle dieselben Zustände liefert, wie bei direkter Ausbreitung.) Auch die Erfahrung bestätigt

Fig. 262.



Anh. 27.

LA 138.

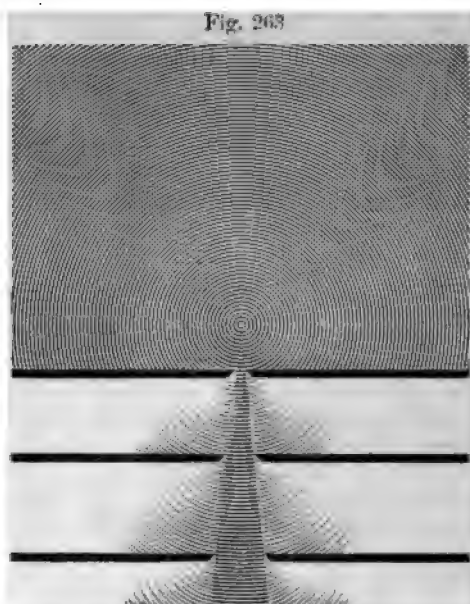
HUYGENS' Prinzip der Elementarwellen: Sowohl in einem homogenen Medium, wie beim Übergange in Medien von anderer Ausbreitungsgeschwindigkeit, erfolgen die wirklichen Wellenerscheinungen so, wie sie sich aus der Superposition der von den sekundären Erregungszentren ausgehenden Elementarwellen ergeben.

Während es somit für die geradlinige Ausbreitung gleichgültig ist, ob wir uns der primitiven oder der Huygensschen Auffassung bedienen, gibt nur die letztere Einblick in das Zustandekommen der Beugung, Reflexion und Brechung.

§ 69. Beugung. Reflexion und Brechung.

Versuch 1: Legen wir in die quadratische Blechwanne (S. 224) parallel zur einen Seite eine Holzleiste von etwa der halben Länge einer Seite, und lassen wir sie, oder wie beim Versuch zu Beginn des vorigen § eine ebene Welle parallel zur Leiste fortschreiten, so wird das freie Ende der Leiste ein sekundäres

Erregungszentrum für neue Kreiswellen. — 2. Stellen wir zwei Leisten so nebeneinander, daß sie einen 1 bis 2 cm breiten Spalt freilassen, so gehen auch von diesem sekundäre Wellen aus. Solche Erscheinungen werden als *Biegung der Wellenstrahlen* bezeichnet. — Vergl. Fig. 263.



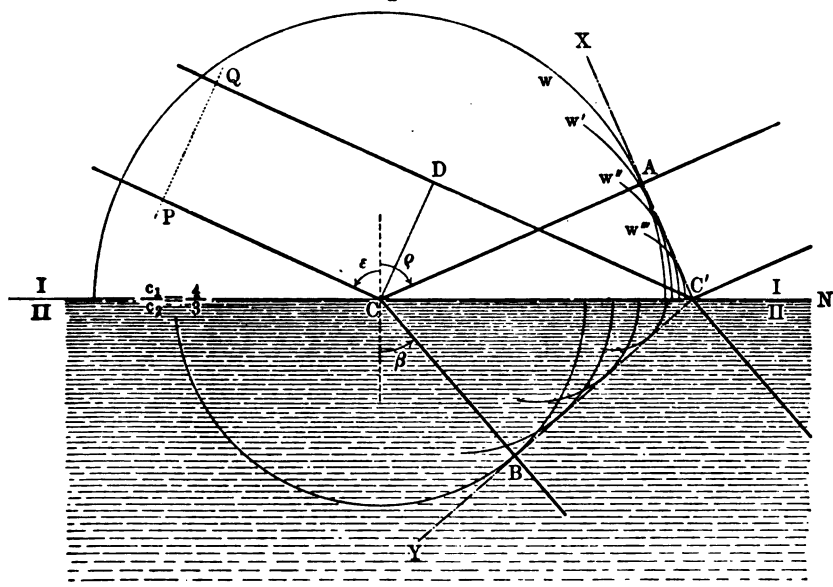
Diese Erscheinungen lassen sich nach Huygens' Auffassung daraus erklären, daß die Elementarwellen nicht mehr insoweit sich aufheben wie bei ungestörter Ausbreitung, sondern daß seitlich vom primären Wellenstücke auch die sekundären Wellen teilweise wirksam bleiben.

Die bei den Versuchen des § 67 nebenher bemerkten Reflexionserscheinungen, sowie die mit Reflexion in der Regel zusammen auftretenden Brechungserscheinungen ergeben sich ebenfalls als Folge von Huygens' Auffassung:

a) Für ebene Wellen.

Die Gerade MN stelle die zur Zeichenebene normale Trennungsebene zweier Medien I und II dar, welche (sei es infolge verschiedener Werte von e oder von d oder beider zusammen, § 67) für eine bestimmte Art von Wellen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 aufweisen, z. B. $c_1 : c_2 = 4 : 3$. Durch das Medium I schreite eine zur Zeichenebene normale ebene Welle fort, von der ein Stück durch PQ dargestellt sei, so daß PC und QC' Randstrahlen darstellen. Von allen Punkten der Ebene MN wird dann am frühesten der Punkt C , am spätesten der Punkt C' erregt. Die Fig. 264 stellt die Elementarwellen dar, wie sie sich bis zu diesem spätesten Zeitpunkt in beiden Medien ausgebreitet haben. Bis dahin hat sich z. B. von dem frühest erregten Punkte C im Medium I eine Halbkugel vom Halbmesser $CA = DC'$, im Medium II eine Halbkugel vom Halbmesser $CB = \frac{3}{4} CA$ ausgebreitet; wogegen die nachmals auch von C' sich ausbreitenden Wellen jetzt noch für beide Medien den Halbmesser Null haben. Die zwischen jenen größten und diesen kleinsten Halbkugelwellen liegenden Wellenflächen $w' w'' w''' \dots$ haben je eine einhüllende Ebene, dargestellt durch die Tangenten $C'X$ an den Kreis vom Halbmesser CA , bzw. $C'Y$ an den Kreis vom Halbmesser CB . So wie CD die einfallende Wellenfläche war, ist $C'A$ die Wellenfläche des reflektierten, $C'B$ die des gebrochenen Strahles. Dabei gilt

Fig. 264.



r den reflektierten Strahl CA das Reflexionsgesetz $\angle \rho = \varepsilon \dots (1)$

r den gebrochenen Strahl CB das Brechungsgesetz $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} \dots (2)$

eweise: 1. Wegen $\triangle CDC' \cong C'AC$ ist $\rho = \varepsilon$.

2. Wegen $DC' : CB = c_1 : c_2$ ist auch $\frac{DC'}{CC'} : \frac{CB}{CC'} = \sin \varepsilon : \sin \beta = c_1 : c_2$.

Die gleichen Konstruktionen bleiben auch anwendbar (wie Huygens zuerst in seiner Theorie der Doppelbrechung mit bewundernswerter geometrischer Anschauungskraft erkannt hat), wenn die von der Trennungsfläche in das neue Medium sich ausbreitenden Wellen Ellipsoide sind. Ist dabei die Schnittebene MN durch das anisotrope Medium so gelegt, daß sie nicht mit einer der Hauptebenen des Ellipsoids zusammenfällt, und daher die von C aus gezogene Achse des Ellipsoids aus der Zeichenebene heraustritt, so wird auch die Wellenfläche $C'B$ so liegen, daß der gebrochene Strahl CB aus der durch das Einfallslot CA und den einfallenden Strahl PC bestimmten Einfallsebene heraustritt. — Ein solches Heraustreten findet nicht statt bei dem Annahmegerenzen zweier in sich homogenen isotropen Medien; für diese lauten so die vollständigen Gesetze für Reflexion und einfache Brechung:

Der reflektierte und der einfach gebrochene Strahl bleiben der (hinreichend erweitert zu denkenden) Einfallsebene.

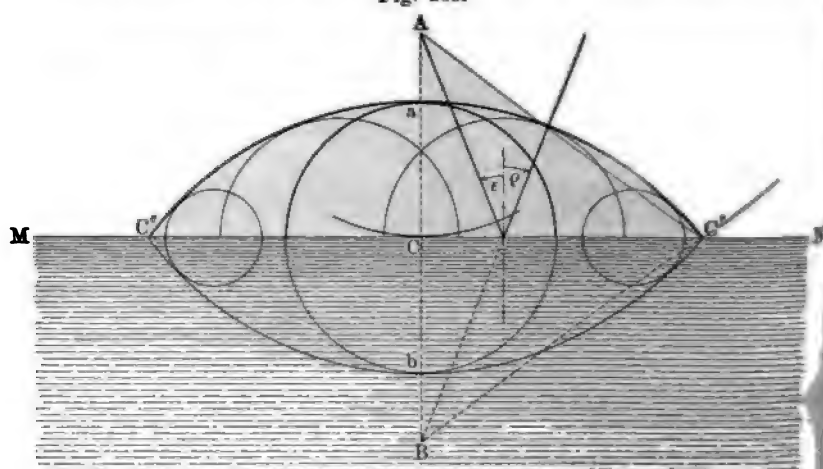
Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel.

Der Sinus des Einfallswinkels steht zum Sinus des Brechungswinkels in einem konstanten „Brechungsverhältnis“, welches

gleich ist dem Verhältnisse der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des einfallenden und gebrochenen Strahles in beiden Medien.

b) Reflexion von Kugelwellen an einer ebenen Fläche. Ist A das primäre Erregungszentrum (Fig. 265), so wird zuerst der Tangierungspunkt C aus

Fig. 265.



sekundären Erregungszentrum von Kugelwellen. Bis zu dem Zeitpunkte, in welchem die primäre Welle soeben die Punkte C' und C'' zu erregen anfängt, hat sich von C eine Welle bis Ca ausgebreitet und von den gegen C' und C'' hin gelegenen Punkten immer kleinere Kugelwellen, deren einhüllende Fläche eine mit $C'ac''$ kongruente Kugelwelle $C'aC''$ ist. Anstatt daß von A die Kugelwelle in das neue Medium nach $C'bc''$ eindringt, breitet sich also in das alte Medium eine Kugelwelle $C'aC''$ so aus, wie wenn sie von dem Punkte B käme, welcher, wie die beiden Kugelhappen, in Bezug auf MN symmetrisch zu A liegt. Daher ist auch für jeden Wellenstrahl wieder $\rho = \epsilon$.

Für die Kugelwellen (und alle übrigen nicht ebenen Wellen) gestaltet sich die Konstruktion der gebrochenen Wellenstrahlen und ihrer zugehörigen Wellenflächen aus Huygens' Elementarwellen sehr verwickelt (wie schon nach den verwickelten Ergebnissen der Sinuskonstruktion z. B. in Fig. 366, S. 337 zu erwarten ist).

Zweiter Teil:

Wärme, Schall, Licht

(Physik der Sinnesqualitäten).

Wärmelehre (Thermik und Kalorik).

§ 70. Wärmeempfindungen und physikalische Wärmeerscheinungen.

Kalt, kühl, lau, warm, heiss sind die Bezeichnungen für eine Reihe von Empfindungsmerkmalen; aber auch den Körpern, welche uns diese Empfindungen erregen, legen wir das Kalt-, Warm-, Heissein als Eigenschaft bei. — Die Empfindungen bilden eine Reihe, die wir, wiewohl kalt und kühl einerseits, lau, warm, heiss anderseits in der Empfindung einen Gegensatz aufweisen (psychol. Anh., Nr. 42), doch unter dem einen Namen **Wärmeempfindungen** zusammenfassen. — Entsprechend dieser Reihe von Empfindungsmerkmalen denken wir uns auch die Wärmezustände der Körper als eine graduell abgestufte Reihe und sagen von einem Körper, der zuerst kalt gewesen war, dann kühl, dann lau u. s. f. wurde, sein **Wärmegrad** oder seine **Temperatur** sei gestiegen. Anh. 42.

Was für eine Wärmeempfindung uns ein Körper erregt, hängt aber nur zum Teil von seinem eigenen Wärmezustande, zum Teil aber auch von dem Zustande unserer Empfindungsorgane ab: z. B. Eintauchen der erhitzten und der abgekühlten Hand in dasselbe laue Wasser; scheinbare Temperatur der Hölzer im Sommer und Winter; Fieberhitze und -kälte.

Derselbe Körper zeigt in verschiedenen Wärmezuständen auch verschiedenes anderweitiges physikalisches Verhalten; z. B. in demselben Thermometer hat das Quecksilber bei Kälte ein kleineres Volumen als bei Hitze. Ihr kaltes Wasser ist fest (Eis), sehr heisses gasförmig (Dampf). Eisen ist zu einer bestimmten Temperatur an rotglühend, bei noch höherer weisglühend; weitere Beispiele! — Die physikalische Wärmelehre als solche macht sich möglichst unabhängig von den jeweiligen Wärmeempfindungen (zu denen es überdies in einigen der letztangeführten Beispiele gar nicht mehr käme, da unsere Empfindungsorgane bei jenen Wärmegraden schon zerstört würden).

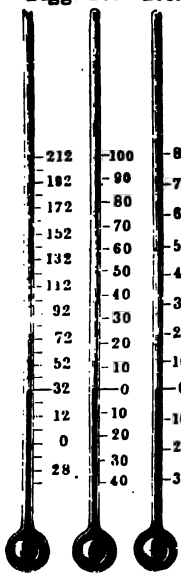
Zu diesem Zwecke führt die Physik schon für den Begriff Wärmegrad Temperatur neue Definitionen ausschließlich auf Grund der Volumenzug Thermoskops und Thermometers ein; so daß in diesem Sinne gesagt werden kann: „physikalischer Wärmezustand“ = thermoskopischer Zustand (vergl. die analoge Bezeichnung „elektroskopischer Zustand“, § 131). —

Allgemeine Bestimmungen über das Verhältnis der Physik der Sinne insbesondere Wärme, Schall, Licht, zu den einschlägigen Lehren der Physiologie. Anh. 39. und Psychologie vergl. psychol. Anhang, Nr. 39.

A. Wärmegrade und Wärmemengen.

§ 71. Wärmegrad oder Temperatur; Thermoskope Thermometer (Thermometrie).

Figg. 266—268.



Geschichtliches. Um 1600 gab es in Holland (De Witt) und Italien (GALILEI) Luftthermoskope, die auch vom Luftdruck abhängig waren. — Weingeistthermometer wurden schon um 1640 zu meteorologischen und biologischen Zwecken (z. B. bei der künstlichen Ausbrütung von Hühnereiern) verwendet. — Den „Eispunkt“ hat HOOKE, den „Siedepunkt“ des Wassers HUYGENS eingeführt, auch das Quecksilberthermometrischen Stoff empfohlen. Die ersten genauen Silberthermometer fertigte FAHRENHEIT 1714 an und auch bestimmt die Abhängigkeit des Siedepunktes vom Luftdruck nach. RÉAUMUR teilte (1730) den Abstand zwischen Eispunkt und Siedepunkt in 80 „Grad“. Die hundertteilige Skala gab CELSIUS 1786 an, aber so, daß der Eispunkt mit 0 und der Siedepunkt mit 100 bezeichnet war. Die somit nicht ganz treffend als „Celsiuskala“ bekannte Zählung rührt von LINDQVIST her, weshalb auch die herkömmliche Bezeichnung z. F. statt 15 Grad Celsius besser so zu lesen ist: 15 Centigrad. Für die beiden neben dieser wissenschaftlich fast allgemein durchgeführten Skala noch gebräuchlichen Skalen (die Fahrenheit fast nur noch in England und Amerika) gelten die Umrechnungsformeln (vergl. Figg. 266—268):

$$x = y \cdot \frac{5}{9} = (z - 32) \cdot \frac{5}{9}; \quad y = x \cdot \frac{9}{5} = (z - 32) \cdot \frac{9}{5}; \quad z = x \cdot \frac{9}{5} + 32 = y \cdot \frac{9}{4}$$

Bequemer:

$$x = y + \frac{1}{4}y; \quad y = x - \frac{1}{5}x; \quad \text{in Worten! — Z. B. } 20^\circ\text{C} = 16^\circ\text{R} (= 68^\circ\text{F})$$

Diese dem täglichen Leben geläufig gewordenen Temperaturangaben setzen überhaupt Einrichtung und Gebrauch des Thermometers setzen ihrem vollen wissenschaftlichen Verständnis tatsächlich schon fast alle Gesetze der verschiedenen Teile der Wärmelehre voraus; namentlich:

1. Das Volumengesetz (§ 73), daß bei den meisten Stoffen dem Wärmegrade ein größeres Volumen entspricht. Nur solche Stoffe, für die das Gesetz gilt, z. B. Quecksilber, Weingeist, Äther (Toluol), nicht aber z. B.

nen sich als „thermometrischer Stoff“. — Weiter ist aber zu beachten, es z. B. bei dem Quecksilberthermometer keineswegs bloß auf die Ausdehnung des Quecksilbers, sondern auch auf die des Glases ankommt. Bei Erhöhung der Temperatur erweitert sich nämlich der Hohlraum des Gefäßes um ebenso viel, als sich ein dem Hohlraum an Volumen gleicher Glaskörper ausdehnen würde. Das Steigen des Quecksilbers im Thermometer zeigt also nicht die ganze Ausdehnung des Quecksilbers, sondern nur deren Überschuss über die Ausdehnung des Glases an. (So erklären sich folgende feinere Beobachtungen: Wird ein empfindliches Thermometer in heißes Wasser getaucht, so zeigt sich während der ersten Augenblicke nicht ein Steigen, sondern ein Sinken des Quecksilbers. Wie schon CELSIUS [1736] beobachtet hat, steigt das Quecksilber über den Siedepunkt der Röhre, wenn das Thermometer rasch aus kochendem Wasser herausgenommen wird. — *Versuche!*)

2. Die **Ausgleichung der Wärmezustände** benachbarter Körper (§ 78). Es ist klar, daß jedes Thermoskop und jedes Thermometer unmittelbar immer nur seinen eigenen Wärmezustand anzeigt. Indem man gleichwohl aus dem Stande des Thermometers, das z. B. in ein warmes Bad getaucht ist, auch den Wärmezustand des Wassers erschließt, setzt man voraus, daß das Thermometer den Zustand des Wassers angenommen habe; dies geschieht hierbei durch Wärmeleitung (dünnwandiges Glas). Ist dagegen ein Thermometer an der Schatten- (bezw. Sonnen-)seite eines Hauses aufgehängt, damit man daran die Temperatur im Schatten kennen lerne (über die Unzulässigkeit der Bezeichnung Temperatur an der Sonne“ vergl. § 196), so ist es die Wärmestrahlung, genauer das Verhältnis zwischen der Einstrahlung auf das Thermometer von Seiten der Hauswand und auch von entfernteren Gegenständen (insoweit nicht zwischen ihnen und dem Thermometer „athermane“ Stoffe, § 119, sich befinden) und der Ausstrahlung des Thermometers gegen die Hauswand, ja gegen den Hohlraum, wovon die schließliche Einstellung des Thermometers abhängt.

3. Das **Mischungsgesetz** (§ 72). Taucht man ein ziemlich großes massives Thermometer, welches etwa soeben noch in einem sehr kalten Raume gelegen war, in ein kleines Gefäß mit Wasser, das soeben noch gekocht hatte, so wird man sich nicht wundern, wenn das Thermometer nach dem Eintauchen statt 100° C nur etwa 80° C oder 50° C anzeigt. Denn gemäß 2. hat zwischen dem Wärmezustande der großen Masse des Thermometers und dem der kleinen Masse Wasser ein Wärmeausgleich stattgefunden, und nur diese Ausgleichstemperatur wird vom Thermometer angezeigt. Wird dagegen ein Thermometer in eine gefüllte Wanne getaucht, so wird offenbar der überwiegenden Wassermasse nur eine verhältnismäßig kleine Wärmemenge entzogen, welche zur Erwärmung des Thermometers bis zur Ausgleichstemperatur erforderlich ist. — Damit das Thermometer auch bei Körpern von nicht sehr großer Masse möglichst annähernd die Temperatur, welche sie vor der Messung hatten, angebe, muß die thermometrische Substanz kleine spezifische Wärme (§ 72) haben, was namentlich bei Quecksilber in ausgezeichnetem Maße der Fall ist und so einen Vorzug der Quecksilberthermometer bildet. Bei feinen Versuchen empfiehlt es sich, das Thermometer auf die annähernd zu erwartende Temperatur vorzuwärmen.

4. Die **Konstanz des Schmelzpunktes**. Hält man ein Thermoskop (oder ein richtiges Thermometer) in ein Gemenge von Eis und Wasser, so nimmt das Quecksilber, der Weingeist . . . eine bestimmte Stellung in der Röhre ein. Wird nun dem Gemenge (z. B. durch eine darunter gestellte Flamme) Wärme zugeführt oder durch Einsenken des Gefäßes in eine Kältemischung) Wärme entzogen, so ändert

das Quecksilber seinen Stand nicht; sondern bei Zuführung einer bestimmten Wärmemenge wird ein Teil des festen Wassers flüssig, bei Entziehung einer gewissen Wärmemenge wird ein entsprechender Teil des flüssigen Wassers fest. Man nennt daher den Wärmegrad des Gemisches „Temperatur des schmelzenden Eises“ und findet sie gleich der „Temperatur des gefrierenden Wassers“. — Damit der Versuch das beschriebene Ergebnis liefere, ist nötig, α) das Eis und Wasser, welche beide schlechte Wärmeleiter sind, bereits so lange gemischt waren, daß sie einerlei Temperatur angenommen haben, β) daß bei untergestellter Flamme, wobei sich das flüssige Wasser beträchtlich über den Gefrierpunkt erwärmt und in einem Strome ansteigt, das Thermometer nicht in diesen Strom, sondern in solche Teile des Gemisches gehalten wird, in welchen schon wieder Wärmeausgleich hatte stattfinden können. — Es bleibt noch das Bedenken offen, ob jedes Wasser und jedes Eis die gleiche Gefrier-, bezw. Schmelztemperatur zeige. Dieses Bedenken durch sorgfältige Versuche beseitigt zu haben, ist ein Hauptverdienst von CELSIUS, welcher Schnee und Eis bei verschiedenem Wetter, verschiedenem Barometerstand, von Orten verschiedener Breite (Torneå, Paris u. s. f.) untersuchte. — Daß und inwiefern der Schmelzpunkt zwar auch von dem Druck abhängig ist, der auf dem Gemisch lastet, aber in so unerheblichem Maße, daß nicht, wie beim Siedepunkte, das Hinzufügen des Barometerstandes nötig ist, vergl. § 77.

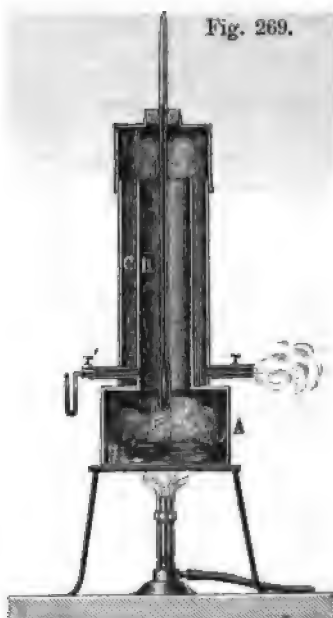


Fig. 269.

5. Die Konstanz des Siedepunktes bei gegebenem Drucke. Wird ein Thermometer in ein Gefäß von der in Fig. 269 im Durchschnitte dargestellten Form angebracht und so von den Dämpfen kochenden Wassers umspült, so nimmt das Quecksilber in der Röhre wieder einen bestimmten Stand ein. Dabei läßt ein seitlich angebrachtes Manometer erkennen, daß, bezw. ob die Spannkraft der Dämpfe gleich ist den äußeren Luftdrucke. Der Stand des Thermometers bleibt dann derselbe, gleichviel ob das Wasser durch eine mehr oder weniger starke Flamme im Sieden erhalten wird. Das siedende Wasser zeigt infolge von Beimengungen oft eine etwas höhere Temperatur, als die aus ihm sich entwickelnden Dämpfe. Den Siedepunkten bei 99°, 100°, 101° C entsprechen die Spannungen gesättigten Wasserdampfes 73,3, 76, 78,7 cm Quecksilberdruck (§ 77). — Auch die Konstanz der Siedetemperatur des Wassers bei je einem gegebenen Luftdruck hat CELSIUS durch umfassende Versuche bestätigt, indem er verschiedenes (Quell-, Fluß-, Brunnen-) Wasser kochen ließ und dabei die Barometerhöhen bis auf Bruchteile einer Linie ($1'' = \frac{1}{12}'' \neq 2\frac{1}{2} \text{ mm}$) notierte.

Auf die beiden Tatsachen 4. und 5., die in dem Verbrauche von Wärmemengen (§ 76, § 77) bei Erhöhung des Aggregatzustandes ohne Erhöhung des Wärmegrades begründet sind, stützen sich nun zunächst folgende Definitionen:

Für je ein bestimmtes Thermometer bilden der Eispunkt E und der Siedepunkt S , auf die sich die thermometrische Substanz bei der

atur des (bei nicht abnorm großem Druck) schmelzenden Eises, si der Temperatur des unter 76 cm Druck gesättigten Wasser- einstellt, die beiden **Fundamentalkpunkte** und ihr räumlicher den **Fundamentalabstand** dieses Thermometers. — Dieser wird in 100 gleiche Teile geteilt und der Eispunkt mit 0°C , der akt mit 100°C bezeichnet. Ferner werden gleich lange Skalen- terhalb 0°C und oberhalb 100°C so weit aufgetragen, als es nometrische Substanz und das sie einschließende Glas (bei Metall- ietern, Pyrometern . . . deren ganze sonstige Einrich- Fig. 270. läßt. — Warum müssen die Röhren sorgfältig kalibriert üngel-, zylinder-, spiralförmige „Gefäße“ unterhalb der — Verfahren beim Füllen der Quecksilberthermometer Fig. 270). — Empfindlichkeit der Thermometer (bis ad, Bolometer [§ 119] bis $\frac{1}{1\,000\,000}$ Grad); besondere neter für sehr hohe und sehr tiefe Temperaturen.

d je ein Thermometer T mit zwei oder mehreren Körpern K , Wärmeausgleich gebracht und zeigt es für beide denselben m tten Skalenteil, so darf man zunächst nur schließen, daß, e Körper die gleiche Temperatur haben wie das Thermometer, untereinander die gleiche Temperatur haben. Dagegen ir noch nicht schließen, daß das Thermometer und die Körper eine Temperatur von $t^{\circ}\text{C}$ haben; höchstens dürften wir sagen: ses speziellen Thermometers“. Es ist nämlich Tatsache, daß ene Thermometer $T, T' \dots$, bei denen die Fundamentalkpunkte eschriebene Art bestimmt sind und ihr Abstand in 100 gleiche ilt worden ist, mit einem und demselben Körper K in Wärme- gebracht, im allgemeinen doch nicht Stände bei genau gleich be- sondern bei etwas verschiedenen Skalenteilen $t, t' \dots$ ein- was sich daraus erklärt, daß die Wärmeausdehnungen ver- ier Stoffe einander nicht genau proportional sind ipeziell zeigen bei Thermometern aus Quecksilber und Glas ver- Glassorten Ungleichheiten der Ausdehnung, die innerhalb 0° Abweichungen zwar nur um etwa $\frac{1}{100}$, bei 350°C aber schon 10° zur Folge haben. Es muß daher ein **Normalthermometer** werden und zwar eignet sich hierzu das Gasthermometer (aus § 74, 83 zu entwickelnden Gründen — und zwar wieder am s Heliumthermometer, fast ebenso gut das Wasserstoffthermo- l mit großer Annäherung auch noch das Luftthermometer). ir aber im folgenden von diesen feineren und feinsten Ab- en verschiedener Thermometer voneinander absehen, bleibt die ausreichend:

Körper K hat eine Temperatur $t^{\circ}\text{C}$ (spr. t Zentigrad, id: den Wärmegrad t), wenn ein mit ihm in Wärmeaus- stehendes Thermometer einen Stand beim Skalenteil t an- en hat.



Über die Frage, ob die Temperaturnahlen eigentliche Maßzahlen:
 Anh. 42. vergl. psychol. Anhang, Nr. 42. Die Frage ist physikalisch jedenfalls zu b
 für Thomsons absolute Skala, § 83.

Einige besondere Formen von Thermoskopen und Thermometern. — 1. Das Differentialluftthermometer von LESLIE (Fig.

Fig. 271.

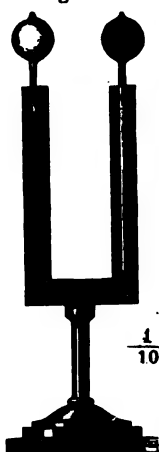


Fig. 272.

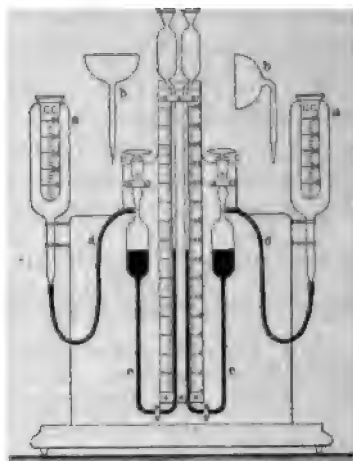


Fig. 273.



Bei Bestrahlung der beruften Kugel *b* verschiebt sich ein Flüssigkeitsfaden gegen *a* hin. — Ähnlich das für vielerlei Schulversuche verwendbare

Doppelthermoskop von LOOSER (Fig. 272): An jeder der zwei symmetrisch angeordneten Hälften sind die Hauptbestandteile der Rezeptor *a*, d. i. ein kubiziertes Gläschen, das in ein weiteres, mit Luft gefülltes Glasgefäß eingeschmolzen ist. Dieses ist durch einen Schlauch *d* in Verbindung mit dem Indikator *e*, der mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt ist und als Manometer wirkt.

In allen vier Schenkeln steht vor dem Versuche (bei der Zimmertemperatur) die Flüssigkeit bei Teilstrich 15 einer (nicht mit der Centigradskala sich deckenden) Centimeter-skala. Werden in die Rezeptoren *a* und *a* Körper verschiedener Temperaturen hervorgebracht), so zeigt die Verschiedenheit der Stände eine sehr kleine Verschiedenheit der Wärmegrade der Luft in *a* und *a* an (d. Name Differentialthermoskop). Nach jedem Versuche werden durch die Hähne *c* die Indikatoren wieder auf Teilstrich 15 eingestellt.

2. **Maximum- und Minimumthermometer** zeigen die und niedrigste Temperatur an, die in der Umgebung des meters innerhalb eines bestimmten Zeitraumes geherrscht hat.

Bei der in Fig. 273 dargestellten Form ist thermometrische Substanz das in befindliche Kreosot; dieses schiebt einen langen Quecksilberfaden in einer Thermometeröhre mit zwei parallelen Schenkeln vor sich her, an deren beiden Enden sich Stahlstifte mit elastischen Glasfäden verschieben. Diese Zeiger bleiben nun an den Stellen des höchsten und niedrigsten Standes stecken; vor jeder neuen Beobachtungsperiode werden sie mittels eines kleinen Magneten bis an die Enden des Quecksilberfadens herzugeschoben.

Selbstregistrierende Thermometer geben (nach ähnlichem Prinzip wie die selbstregistrierenden Barometer, § 44) den Gang der Temperatur während längerer Zeiträume durch eine stetige Kurve an (wodurch natürlich die Aufgabe der Maximum- und Minimumthermometer auch von selbst mit erfüllt ist).

Über Metallthermometer und Pyrometer § 73; Luftthermometer § 74; SHANN'S Aspirations-thermometer (speziell zur Bestimmung der Lufttemperatur, mit Psychrometer) vergl. § 196. — Temperaturmessung durch Thermoelementen § 153, Bolometer § 119.

72. Wärmemenge und spezifische Wärme (Kalorimetrie).

Wenn das Wasser eines über einer Gasflamme oder einem Herdfeuer stehenden Gefäßes die Reihe der Wärmegrade z. B. von der Brunnentemperatur bis zur Siedetemperatur durchläuft, so liegt die Vorstellung nahe, daß aus der Flamme, oder den glühenden Gasen, eine „Wärmemenge“ in das Wasser übergegangen ist. Ähnlich, wenn das kühle Wasser eines ganzen Teiches durch die Sonnenstrahlung während eines Tages lau wird. — Für die zu bestimmten Veränderungen des Wärmegrades erforderlichen Wärmemengen kommen in Betracht:

1. Die zu erzielende Temperaturdifferenz. (Das kalte Wasser eines Topfes wird lau, wenn es eine geringe Wärmemenge dem Herdfeuer entnommen hat, um, heiß durch immer größere Wärmemengen, nämlich nach längerem Stehen über der Flamme. Doch ist es nicht selbstverständlich, ja auch im allgemeinen nicht genau richtig, daß den zugeführten Wärmemengen die Temperaturerhöhungen einfach proportional sind.)

2. Die zu erwärmende Stoffmenge. (Das viele Wasser im Teich braucht viel mehr Sonnenwärme, um lau zu werden, als das Wasser eines Topfes zum Lau-, selbst zum Heißwerden braucht. Dabei versteht es sich zwar nicht von selbst, aber durch die feinsten Messungen bewährt, daß als „Stoffmenge“ in thermischer Hinsicht dieselbe Größe einzuführen ist, welche in der Mechanik als der durch gegebene mechanische Kräfte erzielten Beschleunigung entspricht und als Masse bezeichnet worden ist (§ 16); somit: Die Wärmemengen sind den Massen genau proportional.

3. Die stoffliche (chemische) Beschaffenheit des zu erwärmenden Körpers. Man zeigt folgende Versuche: 1. Kugeln aus Blei, Kupfer, Eisen von gleichem Gewicht werden in demselben Wasser- oder Ölebad erhitzt und dann auf eine Wachstafel gelegt; sie sinken bis zu verschiedener Tiefe nach der obigen Reihenfolge ein (Fig. 274).

2. Über einer gleichmäßig brennenden Flamme steht ein dünnwandiges Metallgefäß, in das nacheinander gleiche Gewichtsmengen von Wasser, Alkohol, Quecksilber . . . geleitet werden. Waren die Anfangstemperaturen gleich und wird beobachtet,

Fig. 274.



binnen welcher Zeiten die Temperatur der Flüssigkeiten (unter Umrühre dieselbe Anzahl von Graden gestiegen ist, so liegt der Schluss nahe, daß, wenn diese Zeiten verhalten wie $1 : 0,6 : 0,03$, sich annähernd auch die zu diesen Veränderungen des Wärmegrades erforderlichen Wärmemengen z. B. für Wasser und Quecksilber wie $1 : 0,03 = 1 : \frac{1}{33}$ verhalten haben.

Der folgenden Definition der Wärmeeinheit liegt also eine bestimmte Temperaturerhöhung (um 1° , bzw. von 0 bis 100°), eine bestimmte Masse (1 g, bzw. 1 kg) und ein bestimmter Stoff (Wasser) zu Grunde; nämlich:

Einheit der Wärmemenge oder kurz Wärmeeinheit ist die **Grammkalorie (cal)**, bzw. **Kilogrammkalorie (Cal)**, d. i. die Wärmemenge, welche erforderlich ist, um 1 g, bzw. 1 kg flüssiges Wasser von 0° auf 1°C (nach neuerer Übereinkunft von $14,5$ auf $15,5^\circ\text{C}$) zu erwärmen. — Es erfordern dann m g Wasser von 0° zur Erwärmung auf 1°C genau m cal und zur Erwärmung von t° auf $T^\circ\text{C}$ annähernd $m(T - t)$ cal. — Ebenso viel cal werden bei der Abkühlung von T° auf t° abgegeben.

Der durch unsere gewöhnlichen Heizmethoden uns geläufigste Fall der Erhitzung durch eine Flamme (ähnlich: durch Bestrahlung seitens der Sonne) ist nur ein besonderer Fall der Übertragung von Wärme aus einem Körper zu höheren in einen Körper niedrigeren Wärmegrades; woran sich unterscheiden lassen: die Abgabe dieser Wärmemenge seitens des einen Körpers und die Aufnahme seitens des anderen. Von einem solchen Doppelfall ist wieder ein spezieller Fall jede Mischung zweier Stoffmengen von unterschiedenen Wärmegraden. Hier werden wir nun erwarten, daß z. B. 1 kg Wasser von 10°C mit 1 kg Wasser von 30°C 2 kg Wasser von 20°C geben werden; der Versuch bestätigt dies auch (annähernd). Werden hingegen dem 1 kg Wasser von 10°C 3 kg von 30° zugesetzt, so verschiebt sich die Mischungstemperatur von dem einfachen arithmetischen Mittel gegen den Wärmegrad des der Masse nach leichteren Körpers hin, nämlich von $\frac{10 + 30}{2} = 20^\circ$ auf $\frac{1 \cdot 10 + 3 \cdot 30}{1 + 3}$.

Allgemeiner ist das ausgesprochen in RICHMANNS Regel (1750) für die

$$\text{Mischungstemperatur: } t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2} \quad . \quad . \quad .$$

Anh. 9. Ähnlichkeit dieses Gesetzes mit dem für Schwerpunkte (math. Anh., Nr. 16) für den Stofs (§ 16); Verallgemeinerung für 3, 4...n Körper desselben Stoffes.

Eine weitere Verallgemeinerung erhält das die Mischungstemperatur durch das arithmetische Mittel, wenn wir nebst der Masse der Körper auch ihre spezifische Wärme schweigend als gleich vorausgesetzte stoffliche Beschaffenheit in Betracht ziehen.

Die **spezifische Wärme** s (Kilogrammkalorien per Kilogramm) nimmt einem Stoffe (bei $t^\circ \text{C}$) zu, wenn s Cal erforderlich sind, um 1 kg von ihm um 1°C (von t° auf $t + 1^\circ$) zu erwärmen. (LA 139.)

Gemäß der Definition der Kalorie kommt also dem Wasser die spezifische Wärme 1 zu; und zwar hat Wasser von allen Stoffen (Wasserstoff ausgenommen) die größte spezifische Wärme.

Wie schon oben (unter 1) bemerkt, sind die durch Zu- und Abfuhr von Wärmemengen erzielten Differenzen der Wärmegrade jenen Wärmemengen fast genau proportional. Dies hat einen doppelten Grund: α) in den kleinen Ungleichheiten der Temperaturskalen verschiedener Thermometer, von denen aber im folgenden wieder abgesehen wird; β) in den Verschiedenheiten der spezifischen Wärmen desselben Stoffes innerhalb verschiedener Temperaturregionen. So erreicht die spezifische Wärme des Wassers, wenn bei 0°C als 1 angenommen wird, bei 25°C ihr Minimum von 0,991, bei 65°C den Wert 1, bei 80° das Maximum 1,0053, bei 100° sodann 1,0033 u. s. w. Abgesehen von diesen immerhin geringen Verschiedenheiten wird im folgenden wieder abgesehen werden (wo sie berücksichtigt werden müssen, geschieht es durch die Unterscheidung der mittleren spezifischen Wärme innerhalb eines bestimmten Temperaturintervalls z. B. von 0° bis 100° und der wahren spezifischen Wärme bei einer bestimmten Temperatur t° ; vergl. mathem. Anhang, Nr. 13; LA 139). Die mittlere spezifische Wärme des Eises (festen Wassers) zwischen -20°C und 0°C $0,52 \pm \frac{1}{2}$, die des Wasserdampfes zwischen 123°C und 226°C ist $0,48 \pm \frac{1}{4}$. Einige weitere spezifische Wärmen: Quecksilber $0,0330 \pm \frac{1}{20}$, Kupfer $0,0949 \pm \frac{1}{10}$, Eisen $0,177 \pm \frac{1}{6}$, Wasserstoff 3. — Daraus, daß die spezifische Wärme des Erdens beträchtlich kleiner ist als die des Wassers (je nach der verschiedenen Beschaffenheit des Gesteins, Humus u. s. f. durchschnittlich etwa $\frac{1}{4}$), erklärt sich auch mancherlei Erfahrungen des Landwirtes) insbesondere der auffallende Unterschied von Land- und Seeklima, § 197.

Anh. 13.
LA 139.

Durch Mitberücksichtigung der verschiedenen spezifischen Wärmen erweitert man nun RICHMANNS Regel auf Grund der Versuche so:

Für zwei Körper von m_1 und $m_2 \text{ g}$ Masse, den spez. Wärmen s_1 und s_2 und den Temperaturen t_1 und t_2 gilt BLACKS Gesetz (1760) für die

$$\text{Mischungstemperatur: } t = \frac{m_1 s_1 t_1 + m_2 s_2 t_2}{m_1 s_1 + m_2 s_2} \quad (2)$$

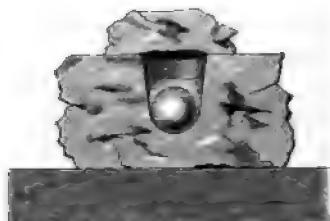
Diese Gleichung bestätigt sich und wird angewendet in BLACKS Mischungsmethode zur Bestimmung der spezifischen Wärmen.

So ergibt sich obiger Wert von $s = \frac{1}{20}$ für Quecksilber, wenn wir z. B. in einem Probiergläschen 100 g Quecksilber auf $t^\circ \text{C}$ erwärmen (etwa $t_1 = 100^\circ$), dann wir das Gläschen in den Kochkolben senken, wie in Fig. 282, S. 265), das flüssige Quecksilber dann rasch in ein Becherglas mit $m_1 \text{ g}$ Brunnenwasser von $t_2^\circ \text{C}$ senken und die Mischungstemperatur beobachten. Es ist dann die Gleichung (2) nach s_2 aufzulösen. Ebenso bei anderen Flüssigkeiten oder festen Körpern. — Andere Versuche mit Kalorimetern (auch mit Loosers Doppelthermoskop).

Bei BLACKS Eisschmelzmethode zur Bestimmung der spezifischen Wärme werden die zu untersuchenden Körper in die vorher angedachte und gut ausgetrocknete Höhlung eines blasenfreien Eis-

blocks gebracht (Fig. 275), dann das Schmelzwasser mittel-
tarierten Schwämmchens ausgetupft und samt diesem gewogen
ergibt sich dann s , aus der bei
Schmelzwärme des Eises ($= 80$
Gramm Eis von 0° ; § 76).

Fig. 275.



Die zur Bestimmung von spez
Wärmen und allgemeiner überha
Wärmemengen dienenden Apparate
Kalorimeter; die erste Anforder
sie ist möglichst vollkommene
isolierung gegen außen.

Diese wird erreicht durch mehrere ineinander gesetzte Gefäße, deren Z
räume durch schlechte Wärmeleiter (Sägespäne, Watte ...) ausgefüllt sin
Eiskalorimeter von LAVOISIER und LAPLACE wird dann (ähnlich
Fig. 275) die Menge des abfließenden Schmelzwassers gewogen; es lief
wesentlich bessere Werte als obige Methode mit dem Eisblock. — Bei
Eiskalorimeter wird auf die Menge des abgeschmolzenen Eises an
Volumverminderung beim Übergang in flüssiges Wasser volumetrisch ge
— Für jedes Kalorimeter einschließlich der Thermometer, Wärmemant
rohre, Rührer u. s. w. ist die Kenntnis seines „Wasserwertes“ nötig,
jenigen (gedachten) Wassermenge, die zur Erhöhung des Wärmegrades um
gleiche Wärmemenge erfordert wie das Kalorimeter. — Dieser Begriff de
wertes ist ein spezieller Fall zum Begriffe der

Wärmekapazität eines Körpers. Erfordert zu irgen
Temperaturveränderung 1 kg eines bestimmten Stoffes s Cal,
fordern m kg desselben Stoffes ms Cal. Dieses Produkt bil
Maß der „Wärmekapazität“ des Körpers, indem wir uns vo
daß der Körper um so größere Wärmemengen „fasse“, je
seine Masse und seine spezifische Wärme ist.

Analogieen der Wärmekapazität zur elektrischen Kapazität
Für je eine Masseneinheit eines Körpers ist die Maßzahl der Wärm
azität gleich der Maßzahl seiner spezifischen Wärme; mit anderen
Die Wärmekapazität eines Stoffes ist gleich der spezifischen Wärm
Stoffes, und es ist somit die Unterscheidung von „spezifischer Wärme“ und
kapazität“ je eines Stoffes überflüssig — nicht aber für ganze Kör
denen wir nebst der stofflichen Beschaffenheit auch die Stoffmenge in
ziehen. Wie aussieht sich unter Benennung des Begriffes „Wärmekapazität“

Bezeichnung **Thermometrie**, für die der Wärmemengen **Kalorimetrie** einbürgerte, ist sich die „Wärmelehre“ in eine Thermik und eine Kalorik scheiden.

Dem Begriff der Wärmemenge liegt die zunächst instinktive Voraussetzung zu Grunde, daß z. B. bei einer Mischung dieselbe GröÙe (sei sie nun nach Black die Menge eines Fluidums oder nach der mechanischen Theorie der Wärme eine bestimmte Menge aktueller Energie, § 83), die der eine Körper abgibt, an andere unvermindert und unvermehrt wieder als „Wärmemenge“ aufnimmt. Nur wo diese Voraussetzung zutrifft, gilt die einfache Richmannsche Regel und das verallgemeinerte Blacksche Gesetz; denn diese stellen nur die Beziehungen zwischen je zwei Wärmemengen $m_1(t - t_1) = m_2(t_2 - t)$, bezw. $m_1(t - t_1) = m_2(t_2 - t)$ nach t aufgelöst dar. Dagegen gilt eine solche „Erhaltung der Wärmemenge“ bei Mischungs- und anderen Wärmevorgängen keineswegs, wo während der Ausgleichung der Wärmegrade auch ein Umsatz von Wärme in andere Formen der Energie eintritt; z. B. wenn zu einer Masse Wasser von $+5^\circ$ eine gleich große Masse Eis von -5° gebracht wird, wobei nicht nur der Wärmegrad, sondern auch der Aggregatzustand verändert, wo die Kohäsion der Eisteilchen überwunden wird, vergl. § 76 und § 82.

Eines der einfachsten Beispiele eines solchen Umsatzes von Wärme in Lichtwärme, nämlich in mechanische Arbeit, liegt darin, daß die spezifische Wärme der (meisten) Gase bei konstantem Druck 1,41 mal so groß ist als die spezifische Wärme desselben Gases bei konstantem Volumen. In der Tat stützte an dieses schon von CLÉMENT und DESORMES, später von GAY-LUSSAC fundierte Verhältnis R. MAYER die erste Methode zur Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents. Daher über die Ursache dieser Erscheinung Näheres ist in § 82.

Über DULONG-PETITS Gesetz vom Zusammenhang zwischen spezifischer Wärme und Atomgewicht siehe Chemie, § 209.

3. Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Wärmegrad, Volumen und mechanischer Spannung.

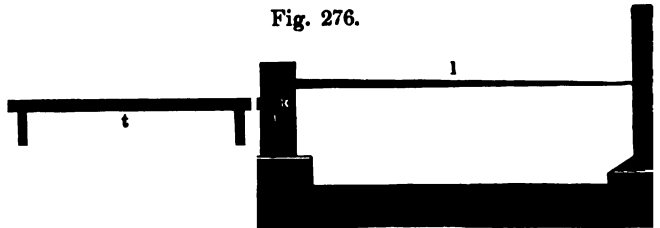
§ 73. Das Volumengesetz.

Die sogen. „Ausdehnung der Körper durch die Wärme“, wie sie z. B. beim Thermoskop und Thermometer Anwendung findet, ferner in der Verlängerung, bzw. der Verkürzung der Eisenbahnschienen bei Sommerhitze und Winterkälte, beim bekannten Versuch mit Kugel und Ring u. dgl. m. beobachtet wird, stellt eine Abhängigkeitsbeziehung zunächst zwischen dem Wärmegrad einerseits, den Längen-, Flächen-, Raumdimensionen andererseits je einer bestimmten Stoffmenge dar. Aber mit diesen Abhängigkeitsbeziehungen Hand in Hand gehen auch solche zwischen den Wärmegraden und den in diesen Körpern herrschenden mechanischen Spannungen. Diese äußern sich an festen und flüssigen Körpern in der „unwiderstehlichen Gewalt“ (siehe unten), mit der sie sich bei Erwärmung auszudehnen, bei Abkühlung zusammenzuziehen suchen (Sprengen der Steinsockel durch Gitterstäbe, wenn diese beim Erwärmen keinen Spielraum finden; Rutschen der Radreifen; Geradstellen auseinandergewichener Mauern . . .). Am deutlichsten zeigt den Einfluß des Wärmegrades auf Volumen und Spannung bei Gasen (Luft) folgender

Vorversuch: Eine dünnwandige Glasflasche ist mit einem Pfropf versehen durch den eine rechtwinkelig gebogene, beiderseits offene Röhre mit einem silbertropfen als leicht verschiebbarem Kolben geht. Schon die Erwärmung der Flasche mit der Hand reicht hin, den Tropfen in der Röhre auszuverschieben. Der Tropfen kann aber an dieser Bewegung gehindert werden, wenn entweder von außen gegen ihn Luft eingeblasen wird, oder die Röhre statt wagrecht schief oder lotrecht gehalten wird, wobei das Ausweichen des Tropfens dem Bestreben nach Ausdehnung entgegenwirkt. — Soll die Abhängigkeit zwischen Wärmegrad und Volumen für sich untersucht werden, muß dafür gesorgt sein, daß während des ganzen Versuches der äußere Druck der ihm gleiche innere Druck konstant bleibt. — Dies ist in den nächsten quantitativen Versuchen überall stillschweigend angenommen, und dann das Volumengesetz: Dem höheren Wärmegrade entspricht das größere Volumen desselben Körpers.

A. Feste Körper. Versuch: Stäbe aus verschiedenen (Kupfer, Eisen, Zink . . .) werden mit dem einen Ende an den

Fig. 276.



Arm eines Fühlhebels k gelegt, dessen längerer Arm auf dem Punkt einer Teilung zeigt. Das andere Ende v der Stäbe wird geklemmt, während diese von Eiswasser umgeben sind. Wird dieses bis zum Sieden erhitzt, so steigt der Zeiger an der Skala empor und zeigt so die Verlängerung des Stabes zwischen dem Siedepunkt des schmelzenden Eises und dem Siedepunkt des Wassers an. — Diese Verlängerung ist merklich größer für Kupferstab als für einen gleich langen Eisenstab.

Ist ein Stab aus bestimmtem Stoffe beim Eispunkte 1 m lang, Siedepunkte $(1 + \lambda)\text{ m}$ lang, wo λ als Verlängerung für 1°C Längenausdehnungskoeffizient dieses Stoffes für den Fundamentalsgrad bezeichnet, so ist für einen 2°C langen Stab aus

Man nennt $\alpha = 3\lambda$ den **kubischen Ausdehnungskoeffizienten** des Stoffes für den Fundamentalabstand.

Es sind z. B. für Glas $\lambda = 0,0008$ ($\alpha = 0,0025 \neq \frac{1}{400}$), Kupfer $\lambda = 0,00167$ $= 0,0051 \neq \frac{1}{200}$), Silber $\lambda = 0,001943 \neq \frac{1}{500}$, Platin $\lambda = 0,000886$.

Für Alkohol $\alpha = 0,1$, Wasser $\alpha = 0,0429 \neq \frac{1}{25}$, Quecksilber $\alpha = 0,0181 \neq \frac{1}{50}$.

Für alle Gase (§ 74) $\alpha = 0,367 \neq \frac{1}{3}$.

Allgemeiner sind die beiderlei Ausdehnungskoeffizienten definiert durch

$$\left. \begin{aligned} \frac{L-l}{l} &= \lambda \neq \frac{1}{3} \alpha \text{ der lineare} \\ \frac{V-v}{v} &= \alpha \neq 3\lambda \text{ der kubische} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Ausdehnungskoeffizient} \\ \text{für den Fundamentalabstand} \\ \text{(unabhängig von dessen Teilung} \\ \text{in 100 Grade).} \end{array}$$

Für je 1°C sind bei den meisten Stoffen in erster Annäherung die Ausdehnungen je $\frac{1}{100}$ der entsprechenden Ausdehnungen zwischen 0° und 100°C . Setzen wir dann für einen bestimmten Stoff $\frac{1}{100}\lambda = \beta$, $\frac{1}{100}\alpha = \gamma$, wobei dann λ der lineare, γ der kubische Ausdehnungskoeffizient dieses Stoffes für je 1° ist, so ist wieder $\gamma = 3\beta$. Ist dann v_0 das Volumen eines Körpers aus diesem Stoffe bei 0° , l_0 eine seiner Längsdimensionen, so drückt sich jene Erfahrung, daß die Zunahme der Länge, bezw. des Volumens der der Temperatur direkt proportional ist, so aus:

$$\frac{l-l_0}{l_0} = \beta t, \text{ woraus folgt } l_t = l_0(1 + \beta t); \text{ daher auch } l_t = l_0\left(1 + \frac{\gamma}{3}t\right);$$

$$\frac{v-v_0}{v_0} = \gamma t, \text{ woraus folgt } v_t = v_0(1 + \gamma t); \text{ daher auch } v_t = v_0(1 + 3\beta t).$$

Sehr genaue Versuche haben aber gezeigt, daß eine solche Proportionalität der Ausdehnung verschiedener Stoffe nicht völlig zutrifft. Mit anderen Worten: Die Ausdehnungskoeffizienten, berechnet nach je 1° je eines Thermometers, sind für alle Körper aus anderem Stoff als jenes Thermometer nicht völlig konstant, sondern mit der Temperaturregion veränderlich. Dies der Grund, warum auch die Angaben von Thermometern mit verschiedener Thermometersubstanz untereinander im allgemeinen nicht völlig übereinstimmen (§ 71; s. überes LA 140). — Mit Rücksicht auf diese Ungleichmäßigkeiten (von denen aber im folgenden wieder abgesehen wird), geben die Hundertel obiger Zahlen nur die mittleren Ausdehnungskoeffizienten für je 1° zwischen 0°C und 100°C ; z. B. Glas: $= 0,000025$, Quecksilber $\gamma = \frac{1}{5000}$.

Die Ungleichheit der Ausdehnung verschiedener Stoffe findet Anwendung a) beim **Kompensationspendel**. Wenn sich nämlich bei Erhöhung der Temperatur nur die Eisenstäbe (in Fig. 277 dunkler gehalten) abwärts verlängern, würde die Pendellänge größer. Indem sich aber die kürzeren Kupferstäbe HG, KI aufwärts ausdehnen, ist durch richtige Wahl der Längen dafür gesorgt, daß die Pendellänge von der Temperatur unabhängig wird. b) **Kompensationsstreifen**

Fig. 277.



LA 140.

sind der Länge nach aus zwei Metallen von verschiedenem Ausdehnungskoeffizienten zusammengelötet und nehmen bei verschiedenen Temperaturen verschiedene Krümmung an. Anwendung bei der Kompensation der Taschenuhren nach F.

Fig. 278.

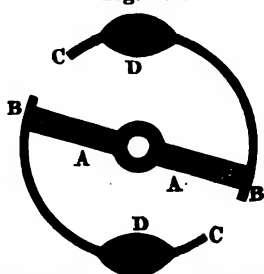


Fig. 279.



Fig. 280.



(indem hier das Trägheitsmoment verändert und damit die Schwingungsdauer elastischen Drehschwingungen unverändert erhalten wird). **Metallthermometer** Fig. 279 und 280 (— letzteres mit Maximum- und Minimumzeiger).

B. Werden tropfbare oder gasförmige Flüssigkeit in zylindrische (kalibrierte) Röhren eingeschlossen und die Verlängerung der Flüssigkeitssäule für die Erwärmung vom Eis- bis zum Siedepunkte beobachtet, so wird hierdurch nicht die lineare, sondern die kubische Ausdehnung dieser Stoffe gegeben.

Dass nämlich z. B. bei der Erwärmung einer zylindrischen Röhre etwa nur die Außenfläche sich nach außen, dagegen die Innenfläche nur nach innen verschiebt und die Röhre also durch Erwärmen wohl gar enger wird, sondern dass die Erweiterung des Innern genau gleich viel beträgt, ob es durch den Stoff der Wände ausgefüllt wäre, ergibt sich aus folgenden Überlegungen: a) Ist ein massiver zylindrischer Stab gegeben, kann man ihn als aus einem zylindrischen Kern und beliebig vielen röhrenförmigen Hüllen bestehend betrachten.

zusammengesetzt denken, deren jede sich dann nur nach außen, nicht nach innen erweitern kann (Fig. 281). b) Werden normal zur Achse der Röhre mehrere einander nahe Ebenen gelegt, so schneiden sie aus dem ringförmigen Stab heraus, der bei Erwärmung länger wird, eine Reihe von Ringen. — Auf Grund dieser Regel für die Erweiterung von Gasen lässt sich dann aus dem bekannten wahren Ausdehnungskoeffizienten des festen Stoffes, aus dem das Gefäß, z. B. eine Kugel und Röhre besteht, und aus der scheinbaren Ausdehnung der im Gefäße eingeschlossenen Flüssigkeit (z. B. des Quecksilbers) die wahren kubischen Ausdehnungskoeffizienten der Flüssigkeit

Fig. 281.



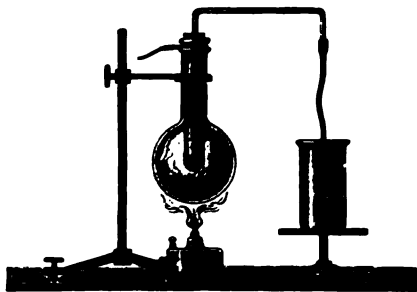
Er beträgt bei Quecksilber für den Fundamentalabstand $0,0181 \pm \frac{1}{55}$. — Für gasförmige Flüssigkeiten, z. B. das Quecksilber im Thermometer, beim Erhitzen des Gefäßes im allgemeinen noch immer Ausdehnung zeigen, wiewohl der Gasraum sich vergrößert hat, so folgt, daß die Flüssigkeiten sich weniger ausdehnen als die festen Stoffe.

Es gilt um so mehr für die Gase, so daß im Vergleich zu ihrer Ausdehnung die Ausdehnung der festen Stoffe meist vernachlässigt werden kann. Unter dieser Annahme ist die GröÙe der Ausdehnung zunächst der Luft folgender

Versuch: Ein zylindrisches (möglichst großes) Probiergläschen, das durch ein Korkpfropfen mit Glas- und Kautschukrohr luftdicht zu verschließen ist, wird mit Luft gefüllt und durch umgebendes schmelzendes Eis auf 0°C abgekühlt.

Das Ziehen des Schlauches wird Zuzuführen weiterer Luft verhindert und das Gläschen mit Dämpfen siedender Flüssigkeiten umgeben (z. B. indem es in den Hals eines Kochkölbehens wird, Fig. 282); es entweicht durch das Rohr ein Teil der Luft, die

Fig. 282.



in Form von Blasen aufsteigt. Nach der Erhitzung der Luft im Wasserbad unterbrochen, so drückt der Luftdruck Wasser in das Probiergläschen; dieses hierbei nicht zerbrechen, sondern jenes Wasser genügend vor-

setzen. Ist endlich das Gläschen wieder auf 0° abgekühlt, so ist ein Viertel des Volumens mit Wasser gefüllt. Die Volumina der Luft bei 0° und 100° verhalten sich also annähernd wie 3:4 und es ist (etwas mehr als) ein Drittel der ursprünglichen Menge beim Erhitzen entwichen. Der kubische Ausdehnungskoeffizient für den Fundamentalabstand ist also für Luft $\frac{1}{273}$ (im folgenden Paragraphen wird sich genauer ergeben $\frac{1}{273}$ — nicht nur für Luft, sondern für alle Gase).

Die Kraft, mit der sich Gase bei Erwärmung ausdehnen, kann im Vergleich gesetzt werden kann mit der Erhöhung der Spannkraft eines Gases. so ist auch die „unwiderstehliche Kraft“, mit der flüssige Stoffe sich bei Erhöhungen der Temperatur ausdehnen, bei Erniedrigung der Temperatur zusammenziehen (Versuch über Abknicken eines Eisenstäbchens durch einen sich ausdehnenden Eisenstab), nicht etwa als unendlich groß zu denken, sondern in unmittelbarer Beziehung zu den GröÙen der Zug-, bezw. Druckkraft. Indem z. B. ein Stahlstab von 1 m Länge und 1 mm² Quer-

schnitt durch einen Zug von 1 kg um $\frac{1}{20000}$ m verlängert wird und die gleiche Verlängerung durch eine Erwärmung um 2°C erfährt, so wird durch einen Druck von 1 kg jene Wärmeverlängerung verhindert. Es ist aber die mechanische Spannung im Betrage von 1 kg in dem Stabe eine Spannung, die entsprechend bei einem $100\text{ mm}^2 = 1\text{ cm}^2$ dicken Stab eine Spannung von 100 kg/cm² — Gegenüber diesen Spannungen ist dann bei flüssigen und festen Stoffen der äußere Luftdruck meist als belanglos sowohl für das Volumen bei der Erwärmung als bei künstlich erhöhter und erniedrigter Temperatur außer acht zu lassen.

Abweichungen vom Volumengesetz — Ton, Leinwand, Holz ... nehmen beim Erhitzen an Volumen ab, aber nur, weil die Luft entweicht; die Ausnahme vom Volumengesetz ist also nur eine scheinbare, in der Erniedrigung der Temperatur.

Fig. 283.

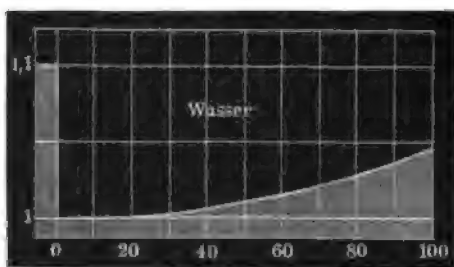


LA 141.

Erniedrigung der Temperatur; das Volumen auch nicht mehr vergrößert. Anwendung bei Pyrometern für hohe Temperaturen.

Eine wirkliche Ausnahme vom Volumengesetz bildet neben einigen Stoffen das Wasser zwischen 4°C und 0°C , indem innerhalb dieser Grenzen bei niedrigeren Wärmegraden das größere Volumen entspricht; und zwar so, daß ein und dasselbe Volumen bei 5° und 2° , 7° und 1° , 8° und 0° gleich ist (Versuche mit dem Wasserdilatometer Fig. 284; hierzu LA 141). — Noch weit stärker als das flüssige Wasser dehnt sich das Wasser beim Gefrieren bei 0° aus, nämlich um

Fig. 284.



LA 142.

um $\frac{1}{11}$ seines Volumens. Es befolgt das feste Wasser das Volumengesetz, indem es bei zunehmenden Wärmegraden — 1° , -2° ... auch abnimmt. Die Volumina entsprechen

Vergl. die graphische Darstellung Fig. 284, genauer. — Über die Bedeutung des Verhaltens des Wassers für die Natur vergl. § 1. Wasser ist aber nicht der

Stoff, der solche Abweichungen vom Volumengesetz zeigt; z. B. auch geschmolzenes Wismut dehnt sich beim Erstarren aus.

. Boyle (Mariotte) — Gay-Lussacs (Charles) Gesetz.

a die beiden im vorigen Paragraphen geschilderten Vorversuche zu messen-
suchen auszubilden, dient der im § 45 zunächst nur zum Nachweis des
schen Gesetzes benutzte Apparat Fig. 187, S. 183; vergl. Fig. 285, S. 269.

1 Volumrohre seien v_0 cm³ eines trockenen Gases (Luft, Leucht-
) unter einem bestimmten Drucke von p_0 abgeschlossen. Durch
bezw. Senken des Druckrohres tritt eine Änderung des
mens von v_0 auf v cm³ ein. Während dieser Versuche habe
dieselbe Temperatur $t_0^\circ\text{C}$ innerhalb der abgeschlossenen
ge geherrscht. — Umgekehrt lassen sich dann jene Verände-
des anfänglichen Volumens von v_0 auf v auch durch ent-
nde Änderungen der Temperatur herbeiführen, falls
d des ganzen Versuches das Gas unter demselben Druck p_0
n wird. — Endlich läßt sich das Volumen der Gasmenge auch
die gleichzeitige Veränderung von Druck und Tempe-
verändern.

ie die Abhängigkeit von Volumen und Druck durch das BOYLE-
rre)sche Gesetz, so wird die Abhängigkeit von Volumen und
ratur durch das GAY-LUSSAC-(CHARLES)sche, endlich die von
en, Druck und Temperatur durch das MARIOTTE-GAY-
sche Gesetz dargestellt.

Beispiel: Es sei das Volumrohr umgeben von einem „Mantelrohr“, das
wasser gefüllt ist. Das Druckrohr werde so gestellt, daß bei 0°C in dem
hr eine Luftsäule von 27,3 cm (— im Hinblick auf die für die Gase so
Zahl 273, siehe unten) abgeschlossen ist, und das Quecksilber stehe im
und Druckrohr gleich hoch, somit die Gasmenge unter dem Druck der
Luft p_0 , welcher durch den augenblicklichen Barometerstand b angezeigt
un wird das Mantelrohr mit den Dämpfen von siedendem Wasser erfüllt
eingeschlossene Gasmenge nimmt 100°C an. Sie dehnt sich hierbei aus,
cksilber im Druckrohr steigt zunächst; wird aber das Druckrohr so
enkt, daß wieder das Quecksilber beiderseits gleich hoch steht, so hat
menge von 100°C eine Länge von 37,3 cm angenommen. Einer Länge
cm bei 0° entspricht also eine Verlängerung um 10 cm beim Erwärmen
uf 100° ; also einer Länge von 273 cm eine Verlängerung von 100 cm. Da
ängen des Luftzylinders auch die Volumina proportional sind, so ist
stantem Drucke p_0 das Volumen $v_{100} = v_0 (1 + \frac{1}{273} \cdot 100) = 1,367 v_0$.

Beispiel: Wird beim vorigen Versuch, nachdem das Gas bei der Er-
; von 0° auf 100°C sich ausgedehnt hat (statt durch Senken auf gleichen
durch Heben des Druckrohres auf gleiches Volumen eingestellt, d. h.
h die Erwärmung ausgedehnte Gas auf sein Volumen wie bei 0°C zurück-
, so zeigt der Unterschied der Stände in Druck- und Volumrohr, daß
stantem Volumen v_0 der Druck $p_{100} = p_0 (1 + \frac{1}{273} \cdot 100) = 1,367 p_0$.
versteht sich nicht von selbst, daß hier 1. dieselbe Zahl $\frac{100}{273}$ ($\neq \frac{100}{300}$
ür je 100° , also speziell auch für den Fundamentabstand, die Erhöhung

des Volumens wie der Spannung mißt; und um so mehr ist es zur als eine merkwürdige Tatsache hinzunehmen, daß 2. auf je 1°C die um $\frac{1}{273} = 0,00367$ gilt, und zwar 3. für alle Gase, gleichviel ob einfache (H, O, N . . .) oder chemisch zusammengesetzte (CO_2 , mechanische Gemenge (Luft . . .)). — In der Tat ergaben sehr genaue für verschiedene Stoffe und verschiedene Temperaturintervalle eine wenn auch sehr geringe Verschiedenheit jener beiden Größenkoeffizient bei konstantem Druck, kurz: **Ausdehnungskoeffizient** des Gases α_v (Gaskoeffizient bei konstantem Volumen, kurz: **Spannungskoeffizient** des Gases α_p). — In den beiden obigen Beispielen, aber nicht nur sondern auch für irgendwelche t° (die ein in das Wasser des Mantelgesenktes Thermometer anzeigt), ergibt sich die sehr allgemeine Beziehung

Für dieselbe Menge eines beliebigen Gases, das unter dem Drucke $p_0 = 1 \text{ at}$ bei 0°C das Volumen $v_0 \text{ cm}^3$ erfüllt hat durch verschiedene Drucke $p', p'', \dots p$ auf die zugehörigen Volumina $v', v'', \dots v$ gebracht wird, gilt bei jeder durch das Quecksilbermeter gemessenen Temperatur $t^{\circ}\text{C}$ für zusammengehörige Werten p, v, t das

Boyle (Mariotte) – Gay-Lussacsche Gesetz: $p v = p_0 v_0$, wo der Gaskoeffizient $\alpha = \frac{1}{273} = 0,00367$ (genauer: $\alpha =$

- LA 144. Graphische Darstellung dieser Abhängigkeit zwischen p, v, t vergl. Luftthermometer und Quecksilberthermometer; Normalskala. — Absoluter Nullpunkt. — **Luftthermometer** heißen welche in Bau und Verwendung wesentlich mit dem oben beschriebenen übereinstimmen; denn während wir durch Beobachtung der einer Temperaturveränderung entsprechenden Veränderung des Volumens oder beider den Ausdehnungs- und Spannungskoeffizienten bestimmen konnten, kann man umgekehrt auf Grund dieser Kenntnis den Veränderungen von Volumen und Spannung auf die Temperaturveränderung schließen. Bei JOLLYS Luftthermometer wird ein mit trockener Luft gefüllter Glasballon, der in ein kalibriertes Kapillarrohr mündet, in die auf ihn zu untersuchende Flüssigkeit gebracht und aus dem Stand des Quecksilbers in einem Druckrohr bei unverändertem Volumen der Luft im Ballon die Spannung und somit deren Temperatur geschlossen. — Die verschiedenen Arten von Gasthermometern sind zwar alle bei weitem weniger handlich als Quecksilberthermometer, sie haben aber große theoretische Bedeutung.

Fig. 285.

Übersicht der Versuche mit dem Apparat
Figg. 187 und 285.

a) Aeromechanische Versuche:

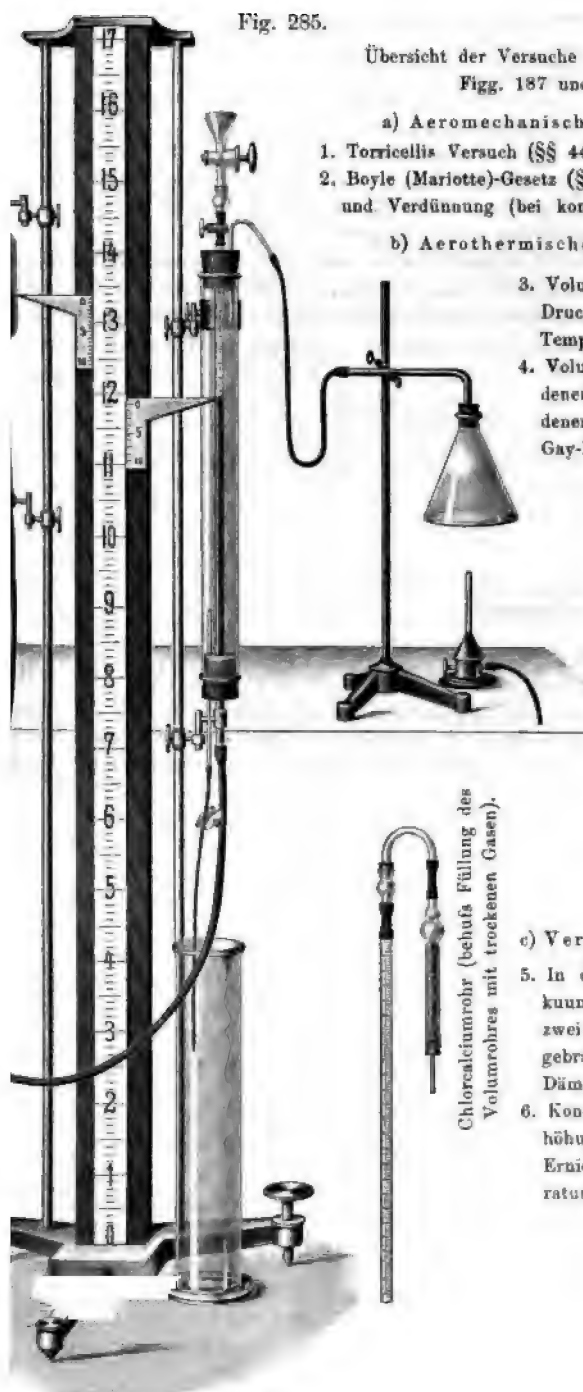
1. Torricellis Versuch (§§ 44, 45).
2. Boyle (Mariotte)-Gesetz (§ 45) für Verdichtung und Verdünnung (bei konstanter Temperatur).

b) Aerothermische Versuche:

3. Volumina bei konstantem Druck und verschiedener Temperatur.
4. Volumina bei verschiedenem Druck und verschiedener Temperatur (Boyle-Gay-Lussacs Gesetz, § 74).

c) Verhalten der Dämpfe.

5. In das Torricellische Vacuum wird mittels der zwei Hähne Flüssigkeit gebracht; Spannung der Dämpfe (§ 77).
6. Kondensation durch Erhöhung des Druckes oder Erniedrigung der Temperatur.

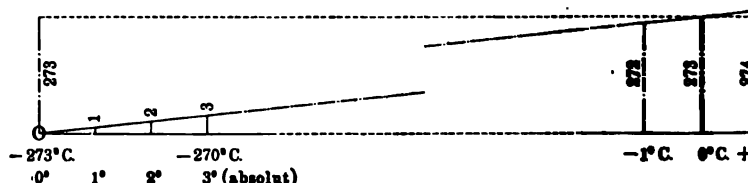


Chlorcalciumrohr (behufs Füllung des
Voluminrohrs mit trockenen Gasen).

des Luftthermometers sind nach diesem Gesichtspunkte die des Wassers am vollkommensten die des Heliumthermometers, vergl. § 77, V. Indem mit den Angaben der Gasthermometer doch auch die der Quecksilberthermometer erfahrungsmäßig sehr nahe übereinstimmend erweisen (wenigstens viel z. B. die von Eisen-, Kupfer-... Thermometern), darf auch die Skala der Quecksilberthermometers als eine nicht bloß willkürliche gewiesen werden, wieweit der sehr verbreitete Satz: „das Quecksilber dehnt sich gleichmäßig aus“ freilich nur ein tautologischer ist, vergl. log. Anhang, Nr. 38.)

Ein Luftthermometer einfachster Form wäre eine zylindrische Röhre, in der durch einen Quecksilbertropfen eine gewisse Luftmenge eingeschlossen ist (vergl. Fig. 286 und Mariottes Röhre, LA 142), die unter dem Normaldruck 1 at (76 cm Quecksilber) einander entsprechende Längen 273 cm, 272 cm, 271 cm... 172 cm... 72 cm... 1 cm die Temperaturen 0°, -1°, -2°... -100°... -200°... -273° entsprechen.

Fig. 286.



Der physikalischen Wirklichkeit entspricht dieses Schema schon deshalb, weil z. B. die Luft schon bei -194° flüssig ist (§ 77), und auch, wenn sie sich zu flüssig machen würde, die Luft jedenfalls nicht gänzlich auf das Volumen herabzubringen wäre. — Leichter vorstellbar ist, daß wir die eingeschlossene Luft auf konstantem Volumen erhielten, wobei dann mit abnehmender Temperatur die Spannung abnähme; angenommen, der Temperaturabnahme um 1° entspräche wieder ohne Rücksicht auf Kondensation und sonstige Abweichungen eine Spannungsabnahme um je $\frac{1}{273}$ der Spannung bei 0° , so hätte die Luft bei -273° eine Spannung Null erreicht. Trotzdem nun beide Vorstellungen fiktiv (physisch weder realisiert noch realisierbar) sind, bezeichnet man doch eine gewisse Temperatur von -273° als absoluten Nullpunkt der Temperatur. (Weil es physikalische Richtigkeit haben mag, dies als die „Temperatur des Weltraumes“ anzunehmen, vergl. § 196.) Die Annahme dieses neuen Nullpunktes hat wesentlich den rechnerischen Vorteil, daß sich der in allen Formeln vorkommende Ausdruck $1 + \alpha t = 1 + \frac{1}{273} t$ folgendermaßen vereinfacht: Einer Temperatur von t° entsprechen in der Skala $T^\circ = 273^\circ + t^\circ$, daher ist $1 + \frac{1}{273} t = 1 + \frac{1}{273} (T - 273)$; somit $1 + \alpha t = \alpha T$. Speziell vereinfacht sich auch der Ausdruck für Gay-Lussacs Gesetz in $p v = p_0 v_0 \alpha T$; indem überdies abkürzend $p_0 v_0 \alpha$ gesetzt wird, ergibt sich als kürzeste Form für

Abhängigkeiten zwischen Wärmegraden, Wärmemengen und Aggregatzuständen.

Übersicht der Erscheinungen. — Die Aggregatregel.

Vorbemerkung. An den Vorgängen des Schmelzens und Siedens, des Kondensierens und Erstarrens anderseits — vergl. das Schema, 87 —, welche gewöhnlich als die „Änderungen des Aggregatzustandes“ bezeichnet werden, sind genauer folgende zwei Arten von Abhängigkeitsbeziehungen auseinander zu halten:

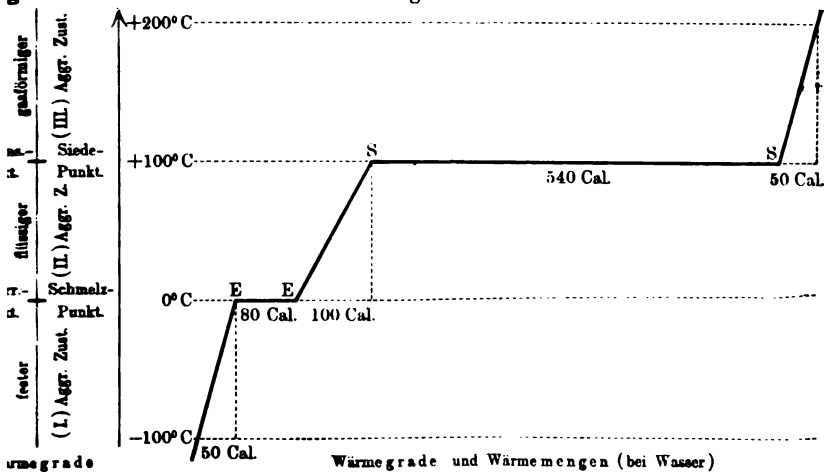
1. Dem höheren Wärmegrade entspricht in der Regel der höhere Aggregatzustand desselben Stoffes („Aggregatregel“).

2. Während der durch Zufuhr, bezw. Abfuhr von Wärmemengen herbeigeführten Änderung des Aggregatzustandes bleibt der Wärmegrad (die Verdampfungstemperatur) mehr oder weniger annähernd konstant. — Der (bei dieser Verdampfungstemperatur) zugeführten oder entzogenen Wärmemenge ist der nächst höhere, bezw. nächst niedrigeren Aggregatzustand überwindende Stoffmenge direkt proportional.

Die nähere Beschreibung der Vorgänge beim Schmelzen, Verdampfen u. s. w. ist also nicht nur in der Feststellung der als Schmelzpunkte (in der Regel die Erstarrungspunkte) und Siedepunkte (Kondensationspunkte) bezeichneten Wärmegrade, sondern auch der als Schmelzwärmen und Verdampfungswärmen bezeichneten Wärmemengen. Während das Schema Fig. 287

g. 287.

Fig. 288.



in Wärmemengen einerseits, den Wärmegraden und Aggregatzuständen anderseits in den einfachsten Fällen durch das Schema Fig. 288 darstellen. Soll 1 kg festes Wasser von -100° durch den flüssigen Zustand hindurch in flüssiges Wasser von 200° übergeführt werden, so erfordert (in runden Zahlen,

mit Rücksicht auf die mittlere spezifische Wärme des flüssigen Wassers = festen und gasförmigen $\neq \frac{1}{2}$) die

Temperaturerhöhung des Eises von -100° bis 0° C	50
Überführung des festen Wassers von 0° in flüssiges von 0°	80
Temperaturerhöhung des Wassers von 0° bis 100° C	100
Überführung des flüssigen Wassers von 100° in gasförmiges	540
Temperaturerhöhung des Wasserdampfes von 100° bis 200° C	50

Dieses einfachste Schema trifft aber schon nicht mehr zu bei allen welche sich vor dem eigentlichen Schmelzen erweichen. Hier sind nämlich Ecken bei E abzurunden, indem ein Teil der zugeführten Wärme noch zur Erhöhung der Temperatur, ein anderer Teil zur Änderung des Aggregatzustandes braucht wird. Bei solchen Stoffen kann auch, streng genommen, nicht von einem bestimmten Schmelzpunkt gesprochen werden. — Noch mehr: der Übergang vom ersten in den zweiten Aggregatzustand ist die Beziehung zwischen Wärmegrad und Aggregatzustand kompliziert beim zweiten und dritten, bei allem Verdunsten (unter dem Siedepunkt) demselben Wärmegrade Zustände entsprechen. Mit Rücksicht hierauf, sowie auf das „Unterkalten“ (§ 76) und den „Siedeverzug“ (§ 77) stellt die „Aggregatregel“ 1. Wege ein so selbständiges Gesetz dar wie das „Volumengesetz“ (§ 78), das höheren Wärmegrade das größere Volumen entspricht.

§ 76. Schmelzen und Erstarren.

A) Die Wärmegrade des Schmelzens und Erstarrens. Der Schmelz-, bzw. Erstarrungspunkt (letzterer speziell Gefrierpunkt, wenn er hinreichend tief liegt, wie bei Wasser, Kohlendioxyd, wo man z. B. von dem bei 1000° C fest werdenden Silber zwar ebenfalls sagt: es erstarre, aber nicht: es gefriere).

Fig. 289.



Wie bei der Bestimmung des Eispunktes, unteren Fundamentalpunktes der Réaumur- und Gradskala bemerkt wurde, ist beim Versuch über Konstanz des Schmelz- bzw. Erstarrungspunktes des Wassers Rücksicht auf das geringe Wärmeleitungsvermögen von Eis und Wasser zu nehmen; sonst kann ein Thermometer, das in eine Gemenge von Eis und Wasser bei zu rascher Zufuhr äußerer Wärme auch 5 Grad über 0 ausweisen, wiewohl noch feste Eisteile im Wasser schwimmen. Aber auch wo solche Fehler beim Experimentieren vermieden sind, zeigt sich als eine Ausnahme von der Gleichheit des Schmelz- und Erstarrungspunktes das

Unterkalten (Überschmelzen). FAHRHENDRICH machte 1740 zuerst die Beobachtung, daß Wasser, das in kalten Räumen vor jeder Erschütterung geschützt ist, bis auf -10° C neueren Versuchen sogar bis -13° C, ja — erkaltet werden kann, ohne zu gefrieren.

Das unterkaltete Wasser nur ein wenig erschüttert, so tritt augenblicklich Eiskristallbildung und Steigen der Temperatur auf 0°C ein. (Ähnlich noch auffallender bei unterschwefligsaurem Natron, *Versuch* nach Fig. 289.)

B) Die Wärmemengen beim Schmelzen und Erstarren. — **BLACK'S Versuch:** Werden zu $m\text{g}$ Wasser von $t^{\circ}\text{C}$ $m\text{g}$ Schnee von 0°C gebracht, so sinkt die Mischtemperatur viel tiefer, als wenn die $m\text{g}$ flüssiges Wasser von 0°C gewesen wären. Solche und feinere Versuche ergeben, daß die Schmelzwärme des Wassers 80 (genauer 79,25) Cal per kg ist, d. h.: Um 1 kg festes Wasser von 0°C in 1 kg flüssiges Wasser bei 0°C zu verwandeln, sind 80 Cal erforderlich (also ebenso viel, wie man 1,2 . . . 80 kg flüssiges Wasser von 0°C auf 80° , 40° . . . 1°C zu erwärmen).

Früher sagte man, beim Schmelzen werde Wärme „latent“. Jetzt sagt man, die Wärmemenge werde zum Erhöhen des Aggregatzustandes verbraucht. Ein solcher „Wärmeverbrauch“ wird plausibel, wenn man bedenkt, daß schon beträchtliche mechanische Arbeit kostet, z. B. 1 kg Eis durch Schaben in Eispulver zu verwandeln: diese Arbeit wird hier verbraucht zum Überwinden der Kohäsion der Eiskristalle. Nun kostet bei der Verflüssigung des Wassers die Überwindung der Kohäsion jedenfalls noch viel mehr Arbeit — aber nicht mechanische (denn durch bloßes Schaben, Pulverisieren u. dergl. ist bekanntlich ein fester Stoff nicht zu verflüssigen), sondern „thermische (besser: kalorische) Arbeit“. — Durch den Satz von der Äquivalenz der mechanischen Arbeit und Wärme wird sonach die zunächst überraschend große Schmelzwärme des Wassers (wie anderer Stoffe) vollends verständlich (§ 83).

Dem Wärmeverbrauch beim Schmelzen entspricht umgekehrt das „Freierstarren“ der Wärme beim Erstarren, wie es sich z. B. beim plötzlichen Steigen der Temperatur unterkalteter erstarrender Flüssigkeiten zeigt.

Einige Schmelz- (und Erstarrungs-)punkte [in $^{\circ}\text{C}$] und Schmelz- (und Erstarrungs-)wärmen [in Cal per kg]:

Kohlendioxyd — $78,2^{\circ}\text{C}$; Quecksilber — $39,4^{\circ}\text{C}$, 2,82; Wasser 0°C , 80; Butter 0°C ; Silber 100°C , 21; Schmiedeeisen 1600°C ; Platin 2000°C , 27,2.

Kältemischungen. *Versuche:* Mischt man zu annähernd gleichen Teilen Wasser (Schnee, Eis) und Kochsalz, so erniedrigt sich die Temperatur (und der Gefrierpunkt) um einige Grade; bei Salmiak um $18\frac{1}{4}^{\circ}$; noch weiter durch entsprechende Zusätze von Säuren oder von gewissen Paaren von Salzen. — Diese Abkühlungen zeigen, daß das Lösen (§ 56) jener Salze ein Flüssigwerden mit Verbrauch von Wärmemengen ist. Die bei manchen Mischungen, z. B. von Wasser und Schwefelsäure, erzielten Erhöhungen des Wärmegrades rühren her von den durch chemisches Verbinden produzierten („freiwerdenden“) Wärmemengen.

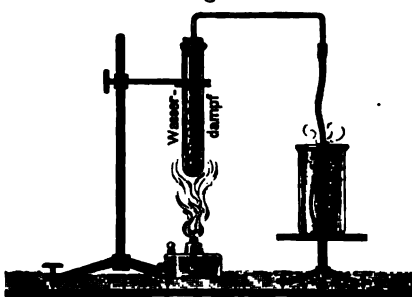
77. Verdunsten und Verdampfen; Sieden, Kondensieren. Dämpfe und Gase. — Dampfwärme. — Kritischer Punkt.

I. Die vorwissenschaftlichen Wörter Dunst und Dampf („dunstige“ Atmosphäre über einer Stadt, vor einem Gewitter, die „Dampfwolke“, die aus dem Schornstein einer Lokomotive, einer Waschküche . . . dringt) haben in der Physik eine wesentlich andere Bedeutung angenommen: **Dunst** oder **Dampf** hießen (solange Höfler, Physik.

noch nicht die Kondensation sämtlicher Gase gelungen war) nur die Stoffe im dritten Aggregatzustand, die als aus dem zweiten durch Verdampfung oder Verdampfung hervorgegangen gedacht wurden und auch wieder zum zweiten Aggregatzustand zurückzuführen waren. Hiernach war und ist „Wasserdampf“ = Wasser im dritten Aggregatzustand = gasförmiges Wasser, dagegen ist die sichtbare Wolke über der Lokomotive schon wieder Wasser im zweiten Aggregatzustand, bestehend aus feinen Tröpfchen, die in der Luft schweben. — Überdies drängen sich der gewöhnlichen Erfahrung beim Beobachten über den Wasserdampf auf, während es ebenso Äther-, Aqueous-, Natrium-, Schwefeldampf . . . gibt (— daß überdies SO_2 u. a. fälschlich „Schwefeldämpfe“ genannt werden, vergl. § 218). — Seitdem die Kondensation sämtlicher Gase gelungen war, hätte man sie auch alle als „Dampf“ ansehen und bezeichnen können; doch stellte sich eine neue Scheidung zwischen „Dampf“ und „Gas“ auf Grund der kritischen Temperatur (siehe unten V.) als zweckmäßig heraus. —

Zunächst geben den Beweis, daß der unsichtbare Wasserdampf nichts noch Luft sei, die folgenden Vorversuche: In dem Probierglas

Fig. 290.



I.A. 148.

nach Fig. 290 befindet sich nicht bloß trockene Luft wie beim § 73, sondern auch etwas Wasser. Dieses durch das umgebende Wasser (Kochkolben) oder auch durch die das Gläschen gehaltene Flamme, das Wasser ohnedies nicht über 100° wärmen läßt) bis zum Sieden erhitzen, dringen aus dem Schlauche wieder aus, aber sie entwickeln sich viel mehr und stürmischer als die Luftblasen, auch das Kühlwasser viel ausgekühlt. Wird dann das Probiergläschen abgekühlt, so füllt sich durch das zurückströmende Wasser nicht nur ein Teil des Probiergläschens, sondern sein ganzer Raum. Beim Einströmen von trockener Luft (Quecksilber zeigen sich die aus dem ganzen Raum des Gläschens kondensierten Dämpfe als einige spärliche Wassertröpfchen. Aus einem gegebenen Volumen Wasser entwickelt sich nämlich ein etwa 1700faches Volumen Dampf von 100° (siehe unten VI. und LA 148. — Zwischen dem aus der Röhre in die Luft entweichenden Dampf, Kondensieren und Sichtbarwerden in einem Abstande von der Mittelebene einer in einen Dampfstrahl gehaltenen kalten Glas- oder Metallplatte. — Diese vorläufigen Feststellungen gestatten nun auch erst einen näheren Einblick in die Bedingungen für die fallendste aller Erscheinungen des Überganges aus dem zweiten in den dritten Aggregatzustand, nämlich das

II. Sieden: Bringen wir über einer Gasflamme das Wasser in einem Becherglase zum Kochen, so lassen sich folgende Teile der Erscheinungen unterscheiden: 1. Sofort nach Entzünden der Flamme beschlägt sich das Glas von außen; es sind dies Wasserdunsttröpfchen, die sich beim Verbrennen der Kohlenwasserstoffe des Leuchtgases an der kühlen Glaswand bilden und am kühlen Glase kondensieren. 2. Bei weiterer Erwärmung zeigen sich an der Innenseite des Glases Bläschen

stehen aus den im Wasser absorbiert gewesenen Gasen (Luft, Kohlendioxyd). 3. Diese Bläschen dehnen sich aus, reißen sich vom Wasser los und erreichen die Oberfläche. 4. An einzelnen Stellen der Oberfläche treten Bläschen auf, die in den oberen Schichten des Wassers wieder verschwinden: es sind Dampfblasen, welche sich in den höheren, minder heißen Schichten des Wassers wieder kondensieren. 5. Sowie diese Blasen bis an die Oberfläche dringen und dort platzen, ist die ganze Flüssigkeit ins Wallen geraten, worin das äußerliche Kennzeichen des Siedens besteht.

Werden neben diesen vorwiegend mechanischen Vorgängen mittels eines das Wasser gesenkten Thermometers auch die Wärmegrade beobachtet, so gibt sich für die Art des Verbrauches der jeweilig zugeführten Wärmemengen einiges an: Auch wenn durch Verkleinern und Vergrößern der Flamme die Dampfentwicklung und damit das Wallen beliebig verkleinert oder vergrößert wird, so ändert dies doch nichts an der Siedetemperatur: Alle zugeführte Wärmemenge wird also nicht mehr zur Änderung des Wärmegrades, sondern nur zur Änderung des Aggregatzustandes verbraucht; über die Wärmemenge der Dampfwärme des Wassers (540 Cal per 1 kg) siehe unten VII.

III. Wird die Temperatur beliebig tief unter der Siedetemperatur konstant erhalten (z. B. Wasser in einer flachen Schale bei Raumtemperatur — feuchte Wäsche . . .), so findet ebenfalls ein Übergang von dem zweiten in den dritten Zustand statt, aber nur an der Oberfläche der Flüssigkeit. Diesen Übergang nennt man **flüchtige Verdunsten** zum Unterschiede von dem bei der Siedetemperatur auch im Innern der Flüssigkeit stattfindenden **Verdampfen**.

Wird also einer Flüssigkeit unter dem Siedepunkte eine Wärmemenge zugeführt, so wird diese teils zur Änderung (nämlich Erhöhung) des Wärmegrades, teils zur Änderung des Aggregatzustandes verwendet. Eine Erklärung, warum eine solche Spaltung der zugeführten Wärmemenge beim Sieden nicht mehr eintritt, gibt die kinetische Wärmehypothese § 83. Unabhängig von dieser Hypothese erhalten die beschriebenen Tatsachen ihren festen Ausdruck durch die folgenden Begriffe:

IV. Maximum der Spannkraft; gesättigte und ungesättigte (überhitzte) Dämpfe. *Versuch*: Wird in das Torricellische Vakuum eine kleine Menge Äther gebracht, so verdunstet sie fort ganz, eine größere Menge nur zum Teil bei derselben Temperatur; dagegen eine noch größere Menge oder wieder der ganze Äther, wenn die Röhre von außen hinreichend erwärmt wird. Indem hierbei die Quecksilbersäule sinkt, zeigt sie (wie beim Mariotteschen Gesetz für Verdünnung, § 45) die jeweilige Spannkraft der Ätherdünste. — Ähnliche Versuche mit Alkohol, Wasser . . .

Das Einbringen der Flüssigkeit in das Vakuum kann entweder vom unteren oder vom oberen Ende der Röhre oder aber bequemer von oben her geschehen, wenn sich oben am oberen Ende zwei Hähne übereinander befinden, durch deren oberen Wasser,

Alkohol oder Ather in den Raum zwischen den Hähnen eingebracht werden von welcher Flüssigkeitsmenge man dann nach Verschluss des oberen und des unteren Hahnes beliebig wenig oder viel in das Vakuum abtröpfeln lassen lässt. — In dem Apparat Fig. 285, S. 269 und S. 183 kann zum Heben des Druckrohres das Quecksilber im Volumrohr bis an den unteren Hahn gehoben und dann durch geringes Senken des Druckrohres die gewünschte Flüssigkeit zwischen Hahn und Quecksilber eingeführt werden. Wird das Druckrohr weiter gesenkt, so verdunstet die Flüssigkeit in dem sich vergrößernden Raum oberhalb des Quecksilbers im Volumrohr; und umgekehrt tritt sie wieder als Flüssigkeit zum Vorschein beim Verkleinern dieses Raumes mittels Heben des Druckrohres. — All dies zunächst bei der Zimmertemperatur.

Werden überdies mittels eines Mantelrohres (durch das sich, wie in Fig. 285, S. 269, die Versuche über das Gay-Lussacsche Gesetz, § 74, das Volumrohr auf Temperaturen zwischen 0° und 100° bringen lässt) Flüssigkeit und das Volumrohr auf beliebige gleiche Wärmegrade gebracht, so zeigt sich:

Bei je einem bestimmten Raum und Wärmegrad gibt es gewisse grösste Menge Flüssigkeit, die eben noch ganz flüssig bleibt (ein Überschuss bliebe flüssig). Der Raum ist dann mit Dampf gesättigt, oder abgekürzt: der Dampf ist gesättigt. Wird diese Dampfmenge auf ein größeres Volumen (also bei gleicher Spannung) gebracht, so ist der Raum nicht mit Dampf gesättigt, oder abgekürzt: der Dampf ist ungesättigt.

Aber auch wenn das Volumen des gesättigten Dampfes unverändert geblieben war, aber seine Temperatur erhöht wird, so ist jetzt der Dampf ungesättigt oder überhitzt.

Diese beiden Bezeichnungen „ungesättigt“ und „überhitzt“ werden auf zwei verschiedene Seiten derselben Erscheinung hin; dies wird auffällig durch Umkehrung der Vorgänge in folgendem Versuch.

Versuch. Ist der Dampf im Volumrohr ungesättigt oder überhitzt, so wird er sich in gesättigten verwandeln entweder durch Erhöhen seiner Spannung (mittels Hebens des Druckrohres) oder durch Abkühlung (mittels des Mantelrohres oder schmelzenden Eises im Mantelrohr) — beidemals bis zum Sättigungspunkt (übrigens gleichviel, ob neben dem nunmehr wieder gesättigten Dampf noch Flüssigkeit da ist oder nicht).

War bei diesen Versuchen nebst dem gesättigten Dampf im Volumrohr hinreichend große Menge tropfbarer Flüssigkeit vorrätig, dass man das Auftreten von Blasen verfolgen kann, so zeigt, sobald durch Druckvermehrung oder Temperaturerhöhung die Grenze zwischen Gesättigt- und Ungesättigt-Dampf erreicht ist, diese Flüssigkeit die Erscheinungen des Aufwal-

Normalsiedepunkt einer Flüssigkeit wird speziell der dem luftdrucke von 76 cm entsprechende Siedepunkt bezeichnet. **ze Normalsiedepunkte:** (Wasserstoff — $243,5^{\circ}\text{C}$, Luft — 194°C , siehe Kohlendioxyd — 78°C , Chlor — $33,6^{\circ}\text{C}$, Schwefeldioxyd — 10°C , Schwefel — 448°C , Alkohol — $78,4^{\circ}\text{C}$, Wasser 100°C , Quecksilber 357°C , Schwefel 448°C , C. — LA 149.

LA 149

dem oben zunächst nur an einer Reihe von Versuchen entwickelten Abhänge erklärt sich nun vor allem die äußerliche Verschiedenheit von Sieden und Verdampfen: Hat z. B. das in einer flachen Schale an der Oberfläche des Wasser nicht die dem augenblicklichen Luftdruck entsprechende Temperatur erreicht, so würden, wenn im Innern des Wassers sich tropfenbläschen entwickeln könnten, diese doch sogleich durch den größeren Druck wieder zusammengedrückt und kondensiert. Ist dagegen die Temperatur erreicht, so hält die Spannkraft einer solchen Dampfmenge aufseren Drucke das Gleichgewicht, und sie vermag sich als Dampf zu erhalten, steigt also auf u. s. f. — So erklärt sich auch die paradoxe Erscheinung, daß Wasser in einem Kochkolben, der während des starken Siedens dampfdicht zugepfropft wurde, immer wieder von neuem aufzuwallen beginnt, je mehr die Dämpfe über dem Wasser abgekühlt werden (denn ihre Spannung nimmt hierbei ab u. s. f.); *Versuch!* — Umgekehrt künstliche Steigerung der Dampfspannung und somit der Siedetemperatur in Papins Topf.

Methoden zur Messung der Siedetemperatur. Fig. 291 a u. b.

Die Methoden zur Messung der Siedetemperatur sind sehr zahlreich. Eine der einfachsten ist z. B. die, daß in einer barometrischen Vorrichtung (Fig. 291) oberhalb des Quecksilbers im Schenkel luftfreies Wasser und darüber durch Ausströmen in einen umgebenden Raum sich befindet, der durch ein umgebendes Medium auf eine bestimmte Temperatur gebracht werden kann. Die Temperatur wird dann durch das Quecksilber im längeren Schenkel abgelesen.

Die dynamischen oder Siedepunktmethoden beruhen auf der Messung der Temperatur, bei der Aufwallen stattfindet (z. B. durch eine Verdünnungsluftpumpe mit hinreichend langer Barometer-Röhre). Bei den isothermischen Methoden beobachtet man bei gleichbleibender Temperatur (daher der Name) die Spannung des Dampfes bei verschiedenen äußeren Drucke die Spannung des Dampfes nicht mehr zunimmt (daher in graphischer Darstellung: eine zur y-Achse parallele Gerade übergeht, LA 150). — Solche Versuche wurden von zahlreichen Forschern immer wieder neuerdings mit größter Sorgfalt durchgeführt, als sich zwar immer mehr herausstellte, daß mit zunehmender Siedetemperatur die Maximalspannkraft rasch wachsen, daß es aber bisher nicht gelungen war, die mathematische Abhängigkeit zwischen Siedetemperatur und Spannkraft anders als durch bloß empirische Formeln auszudrücken (mit anderen Worten: für die jene Ableitung darstellende Kurve die analytische Gleichung aus den empirischen Gesetzen abzuleiten; math. Anh., Nr. 12).



LA 150.

Anh. 12.

Bisher war angenommen, daß der Dampf an allen seinen Stellen dieselbe Temperatur habe. Ist die Temperatur an verschiedenen Stellen eines Dampfes verschieden (z. B. im Kondensator einer Dampfmaschine, § 84), so entspricht die Spannung im ganzen Raume (Minimalspannung) dem der Stelle niederster Temperatur entsprechenden Maximum der Spannkraft. —

Fig. 292.

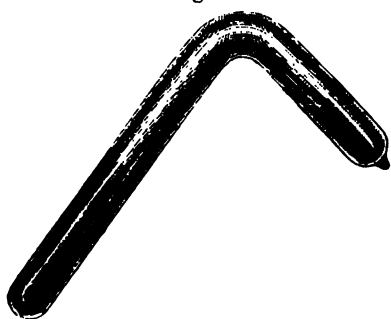


Abweichungen von dem bisher entwickelten Satze des Siedens und Kondensierens stellen dar: a) Leidenfrosts Phänomen (sphäroidaler Zustand): Auf einer über die Siedetemperatur erhitzten Metallplatte (z. B. auf Herdplatte), einer Porzellanschale, auf heißem Öl... bildet sich Wasser in großen Tropfen mit vibrierender Oberfläche. Hier schützt die bildende Dampfzelle die übrige Masse vor rascher Verdampfung. Zerreißt die Hülle, so tritt die Verdampfung mit explosionsartiger Heftigkeit ein. Hierin liegt eine teilweise Erklärung des „Siedeverzuges“ (u. a. eine Hauptursache von Dampfkesselexplosionen).

b) Nach Beobachtungen von AITKEN bedarf es zum Beginn der Kondensation fester Kondensationskerne, z. B. Staubteilchen. (Hieraus Erklärung der reichlichen Nebelbildung in staubiger, rauchiger Luft, § 194.) Fehlt es an solchen Kernen, kann in einem Raum auch eine größere Dampfmenge, als dem Sättigungsdampf entspricht, sich unkondensiert erhalten und es muß insofern der Raum als überdampfend bezeichnet werden.

V. Leicht und schwer kondensierbare Gase. Kritische Temperatur. Während bei zahlreichen Stoffen wie Wasser, Schwefeläther..., die im zweiten und dritten Aggregatzustand bekannt waren, auch die Überführung aus dem dritten in den zweiten durch Druck oder Abkühlung seit langem bekannt war, gelang erst DAVY und FARADAY auch die Kondensation von Chlor, Ammoniak, Kohlendioxyd u. s. f., die von da an als „koerzible Gase“ bezeichnet wurden.

Fig. 293.



Faraday bediente sich u. a. starker Röhren nach Fig. 293, in deren einen Schenkel die das Gas liefernden Stoffe gegeben wurden, das sich nach eingeleiteter Gasentwicklung im anderen zugeschmolzenen Schenkel unter seinem eigenen Drucke kondensierte. Mehrere Jahrzehnte widerstand dann nur noch die „permanenten Gase“ Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff, Kohlenoxyd, Stickoxyd, Sumpfgas (Methan); und zwar trotzdem NATAN 1844 Drucke bis zu 2700 at angewendet (und COLLADON die Gase bis -30° abgekühlt hatte. Erst als auf Grund von ANDREWS

Entdeckung, daß es für jeden Stoff eine „kritische Temperatur“ gebe, oberhalb deren eine Kondensation überhaupt nicht möglich ist, 1877 CAULLEUX in Paris und fast ganz gleichgiltig PICTET in Genf zwar bei weitem nicht so hohen Drucke, aber um so tiefere Temperaturen anwendeten, gelang die Kondensation (und zwar zunächst Wasserstoff noch ausgenommen, den erst OLSZEWSKI bei $-234,5^{\circ}$ unter 20 at aufbrausen, also sieden sah; bei $-243,5^{\circ}$ C erfolgte das Sieden bei 1 at, es ist also dies der Normalsiedepunkt des Wasserstoffs). Von den später entdeckten Gasen Argon und Helium ist letzteres auch bei d

edrigsten bisher erreichten Temperatur von $-263,9^{\circ}$ nicht kondensiert worden, ist also das permanenteste Gas und eignet sich deshalb am meisten zur Messung tiefster Temperaturen nach dem Prinzip der Gasthermometer (§ 74).

Jener Begriff der kritischen Temperatur (sowie die damit zusammenhängenden des kritischen Druckes, kritischen Volumens und kritischer Dichte) gibt folgender Tatsache Ausdruck: Ist in einer Glasröhre flüssiges Kohlendioxyd eingeschlossen, über dem sich gasförmiges Kohlendioxyd befindet, so sind bei hinreichend niedriger Temperatur, z. B. 0°C , Flüssigkeit und Gas durch einen sichtbaren „Meniskus“ gegeneinander abgegrenzt. Wird das Gas auf 10° , 20° , 30° erwärmt, so entwickelt sich zwar immer neues Gas aus der Flüssigkeit; bei etwa 31° , der „kritischen Temperatur“ des Kohlendioxyds, wird aber baldies der Meniskus unsichtbar und es ist also bei dieser und allen höheren Temperaturen der sichtbare Unterschied des zweiten und dritten Aggregatzustandes weggefallen. (Eine genauere Charakteristik vergl. LA 150.) — Indem sich auch für andere Stoffe solche kritischen Temperaturen ergeben (z. B. für Schwefelwasserstoff 100°C , für Chlor 141°C , für Wasser 364°), wies ANDREWS: „Der gewöhnliche Gas- und der gewöhnliche Flüssigkeitszustand sind nur weit voneinander getrennte Formen eines und desselben Aggregatzustandes und können ineinander übergeführt werden, ohne daß eine Kontinuitätsstörung diesem Übergang bemerkbar ist.“ — Gleichwohl bleiben natürlich nicht nur alle fern von der kritischen Temperatur liegenden Zustände die Begriffe des flüssigen und gasförmigen theoretisch und praktisch in Kraft, sondern es ergibt sich auch, trotzdem durch die Kondensation sämtlicher Gase der Unterschied zwischen Dampf (Dunst) und Gas hinfällig geworden zu sein schien, gerade die scharfe Unterscheidung:

Jeder Stoff ist Gas bei jeder Temperatur oberhalb seiner kritischen; der Stoff ist Dampf abwärts vom kritischen Punkt bis zum Kondensationspunkt (d. i. zugleich der dem jeweiligen Druck entsprechenden Siedetemperatur); von da abwärts Flüssigkeit (bis zum Erstarrungspunkt; unter diesem fest).

VL. Dampfdichten. Die im § 46 angegebene Methode zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes (der Dichte) der Gase erleidet mannigfache praktische Abänderungen, wenn sie auf Dämpfe übertragen werden soll, die zwar ungesättigt (überhitzt), aber dem Sättigungspunkt nahe sind; und um so mehr die Bestimmung der Dichte gesättigter Dämpfe. Dabei werden meist die relativen Dichten Bezug auf trockene Luft bei gleicher Temperatur und gleichem Druck (der auch bei 0° und 76 cm) kurz als Dampfdichten bezeichnet; in der Chemie auch speziell für ungesättigte Dämpfe die relativen Dichten Bezug auf die des Wasserstoffes, diese = 2 gesetzt (vergl. § 211).

Eine der Methoden besteht darin, daß in einem Glasballon mit ausgezogener Spitze etwas von der auf ihre Dampfdichte zu prüfenden Flüssigkeit gebracht wird; dann wird der Ballon in einem Bad (Wasser-, Öl- . . .), dessen Siedepunkt unter dem der zu untersuchenden Flüssigkeit liegt, so lange erhitzt, bis keine Dämpfe mehr aus der Spitze ausströmen, worauf die Spitze zugeschmolzen, der Ballon abgewogen, seine Spitze unter Quecksilber abgebrochen und so sein

Fassungsraum bestimmt wird. — Die relative Dichte des Wasserdampf
 LA 148. Bezug auf trockene Luft von gleicher Temperatur ist rund $\frac{5}{8}$ (LA 148).

VII. Wärmemengen beim Verdampfen und Kondensieren.
 Wie die Schmelzwärme des Wassers 80 Cal, so beträgt die Dampfwärme des Wassers 540 Cal (genauer 536,7 Cal), d. h. um flüssiges Wasser von 100° in 1 kg Dampf von 100° zu verwandeln eine Wärmemenge erforderlich, mit der 5,4, 54 . . . 100 kg Wasser von 0° in flüssiges Wasser von 100°, 10° . . . 5,4° (warum nicht 1 kg auf 540°?) zu erwärmen wären.

Eine Erklärung, warum dieser Wärmeverbrauch beim Verdampfen so viel größer ist als der beim Schmelzen, vergl. § 83. Warum sind Heizungen viel ausgiebiger als Heißwasserheizungen? — Destillationsanlagen.

Der nicht erst beim Sieden, sondern schon beim Verdunsten ein Wärmeverbrauch gibt sich als **Verdunstungskälte** (Frösteln nach einem Bad und findet Anwendungen bei der künstlichen Eisbereitung (§ 84).

Über den Unterschied beim Abkühlen feuchter und trockener Körper.
 LA 225. vergl. Meteorologie § 195 und LA 225.

VIII. Verflüchtigen, Sublimieren. Kampfer, Jod . . . (in geringem Maße wahrscheinlich die meisten festen Stoffe, u. a. auch riechende Metalle, wie Zinn . . .) gehen aus dem festen in den gasförmigen Aggregatzustand über ohne merklichen Durchgang durch den flüssigen. Diesem Verflüchtigen entgegengesetzt ist das **Sublimieren** z. B. Schwefeldämpfen an kalten festen Körpern.

D. Ausbreitung der Wärme.

§ 78. Ausbreitung der Wärme durch Leitung, bei Strömung und durch Strahlung.

Wenn ein geheizter Ofen die Körper im kalten Zimmer erwärmt, dreierlei Arten des Überganges der Wärme zu unterscheiden: 1. Durch **Leitung** erwärmen sich die der Feuerstelle näheren Teile des Ofens früher, die entfernteren später; der Boden eines auf dem Ofen stehenden leeren eisernen Topfes als dessen oberer Rand; bei einem irdenen Topf geschieht dies noch langsamer. 2. Durch **Strömung** gelangt das nahe dem Boden des Topfes erhitzte Wasser an die Oberfläche und es tritt früher eine gleichmäßige Durchwärmung ein. 3. Durch **Strahlung** erwärmen sich die Körper, die dem Ofen gegenüber stehen, früher als die, die ihm den Rücken zuwenden.

2. um so rascher, je größer der jeweilige Unterschied zwischen den Wärmegraden ist. Nach NEWTONS Abkühlungsgesetz ist die Geschwindigkeit der Temperaturänderung dem Temperaturunterschiede nahezu proportional.

So sinkt ein über die Zimmertemperatur stark erhitztes Thermometer anfangs rasch, später langsam; desgleichen steigt die Temperatur von Wasser, dem durch eine gleichmäßig brennende Flamme in gleichen Zeiten gleiche Wärmemengen zugeführt werden, dennoch nicht gleichförmig (sondern anfangs rasch, später langsamer), da das Wasser, je heißer es schon ist, einerseits dem Wärmeherd der Flamme näher gerückt ist, und anderseits auch um so mehr Wärme von der annähernd gleichwarm bleibende Umgebung abgibt.

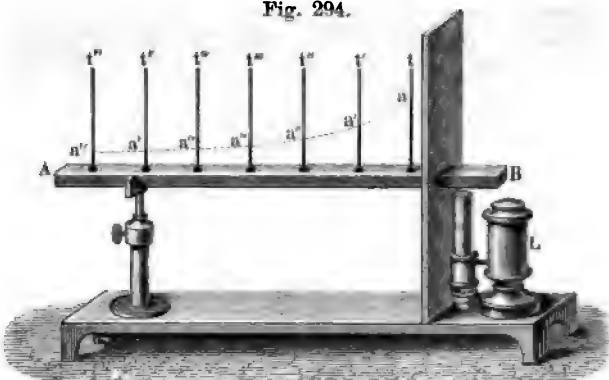
Von den drei Arten des Überganges werden die ersten beiden in den beiden folgenden §§ näher untersucht, dagegen die Strahlung erst im Zusammenhang mit der Erscheinungen der Lichtstrahlung (§ 119 ff.).

§ 79. Wärmeleitung.

Die Unterscheidung von Gut-, Halb- und Schlechtleitern der Wärme drängen schon alltägliche Erfahrungen auf; z. B. daß wir einen Schürhaken, dessen ein Ende im Feuer liegt, am anderen Ende alsbald nicht anfassen können, wenn er aus Metall ist, wohl aber, wenn er einen Holzgriff besitzt. Das scheinbare Wenigere Nichtleiten der Wärme wird näher untersucht im folgenden

Versuch: Eine bis 1 m lange Eisenstange (Figur 294) hat in gleichen Abständen Vertiefungen mit Quecksilber, in welche gleiche Thermometer tauchen. Wird an ein Ende durch eine Flamme oder in Dampfbad erhitzt (und hierbei

Fig. 294.

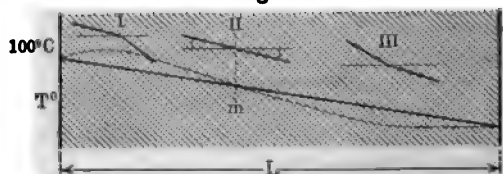


durch einen Schirm die Strahlung von den Thermometern abgehalten), so steigen anfänglich alle Thermometer der Reihe nach (wobei die jeweiligen Quecksilberstände Ordinaten einer Kurve bilden, die sich also anfänglich mit der Zeit verändert). Nach einiger Zeit aber tritt ein stationärer Zustand ein (so daß sich jene Kurve nicht mehr ändert). In bestimmten Abständen von der Heizstelle bringt die Wärmequelle überhaupt keine Temperaturänderung mehr hervor: dies aber nicht, weil bis dahin überhaupt keine Wärme geleitet werden kann, sondern weil eine der jeweilig zugeführten Wärmemenge gleiche

durch die Oberfläche des Stabes in die umgebende Luft (Leitung, Strömung und Strahlung) übergeht.

Um für die theoretische Untersuchung die in der Erwärmung durch zusammenwirkenden Umstände wenigstens in Gedanken zu isolieren, st

Fig. 295.



uns nach FOURIER (Stab bei gleich Länge L cm unendlich dick vor, d. h. er wie eine Platte von der Fig. 295, in der, in allen zu diesen dimensionen normalen

ist, eine Wärmeabgabe durch Seitenflächen ausgeschlossen bleibt. Der (ebenfalls unendlich groß zu denkendes) Reservoir zu beiden Seiten werden deren Grenzschichten auf den konstanten Temperaturen T° erhalten; z. B. $T = 100^\circ$, wenn in dem einen Reservoir siedendes Wasser, wenn im anderen Eiswasser sich befindet. Gesetzt nun, es hätte in einem zeitpunkte auch die ganze Platte z. B. die Temperatur $t = 0^\circ$ gehabt, kurze Zeit darauf von der heißen Seite her die Wärme auf eine kurze längere Zeit auf eine längere Strecke vorgedrungen, „geleitet“ oder „geströmt“ sein. (Ebenso könnten wir uns denken, daß, wenn die Platte anfangs die Temperatur T° gehabt hätte, allmählich von der anderen „Kälte vordringe“.) Nach einer bestimmten Zeit, welche bei gutleitenden klein, bei schlechtleitenden groß ist, muß sich in der ganzen Platte wie beim Stab, ein stationärer Zustand hergestellt haben, in der Weise, noch immer Wärme von den Stellen höherer zu Stellen niedriger Temperatur geleitet wird oder „strömt“, daß aber jeder Stelle m ebenso viel Wärme zugeführt wird, als nach der anderen hin abfließt (d. h. es tritt keine „Wärmestauung“ wie bei III, also Temperaturerhöhung, bzw. Temperaturerniedrigung ein). Dazu gehört aber, daß in zwei zu m symmetrisch gelegenen Stellen gleiche Differenzen gegen die Temperatur in m bestehen beim „Abfall nach einer geraden Linie“ erfüllt ist, wie bei II. Von $L = 100$ cm, $T = 100^\circ$, $t = 0^\circ$, so käme auf je 1 cm ein Temperaturgefälle von 1° C. — Allgemein ist das Maß für das

Temperaturgefälle $\frac{T-t}{L}$, indem der Abfall um so größer

je größer bei gegebenem Abstand L der Grenzflächen der Unterschied $T - t$ der daselbst herrschenden Temperaturen ist; wogegen

Die **Einheit des spezifischen inneren Wärmeleitungsvermögens** setzt ein Stoff, in welchem durch je 1 cm^2 Querschnitt auf je 1 cm Abstand bei einem Unterschiede der Wärmegrade von 1°C eine **Wärmemenge** von je 1 cal binnen 1 sec hindurchgeht.

Dieses Wärmeleitungsvermögen kommt sehr nahe dem Kupfer zu, dem binnen 1 min (nach welcher Einheit man aus praktischen Gründen öfter häufiger rechnet als nach Sekunden) 61 cal , also in 1 sec $1\frac{1}{60}\text{ cal}$ durch 1 cm^2 Querschnitt gehen. Das spez. Leitungsvermögen des Eisens ist 6 mal, das des Glases und des Wassers etwa 600 mal, das der Luft 1000 mal so klein (in beiden letzteren Stoffen Konvektion ausgeschlossen).

In anisotropen, anisotropen Körpern (§§ 53, 67), z. B. Krystallen, Holz . . . ist das Wärmeleitungsvermögen nach verschiedenen Richtungen verschieden.

Da die fiktiven Versuchsbedingungen wie bei der unendlichen Platte in Wirklichkeit nicht hergestellt werden können, so wird meistens auf das innere Wärmeleitungsvermögen aus Versuchen über das **äußere Wärmeleitungsvermögen** geschlossen. Dies kann geschehen auf Grund des von FOURIER aus theoretischen Überlegungen abgeleiteten Gesetzes, daß für einen homogenen Stab von gleichem, überall konstantem Querschnitt die Temperaturüberschüsse über die umgebende Luft nach einer geometrischen Reihe abnehmen, wenn man längs des Stabes um gleiche Strecken (nach einer arithmetischen Reihe) fortschreitet. Damit ist auch die Natur der Kurve beim obigen Versuch gegeben.

Über das langsame Fortschreiten der durch die jeweiligen Temperaturänderungen im Erdboden erzeugten „Wärmewelle“ vergl. § 196.

Anwendungen guter und schlechter Wärmeleiter. Drahtgitter an Davys Sicherheitslampe. Wärmeschutz an Dampfleitungsröhren u. s. f.

Über die weitgehenden Analogieen zwischen Wärmeleitung und Elektrizitätsleitung vergl. § 149. Während wir aber bekanntlich elektrische Ströme mithin durch verhältnismäßig dünne Drähte leiten können, geschieht solches nicht mit der Wärme; es ist deshalb auch der theoretische Begriff des „Wärmestroms“ nicht so ins praktische Leben übergegangen wie der des „elektrischen Stroms“. Insofern hat auch der Ausdruck für die

$$\text{kalorische Stromstärke } i = k \frac{q}{l} (T' - T) \text{ cal (per cm}^2 \text{ und sec),}$$

k das spezifische innere Wärmeleitungsvermögen, q den Querschnitt in cm^2 , $—T$ die Temperaturdifferenz in $l\text{ cm}$ Abstand bedeutet, vorwiegend erst Interesse nach seiner Analogie zu OHMS Gesetz für elektrische Stromstärken (§ 149).

80. Strömungen in erwärmten Flüssigkeiten und Gasen; Wärmeübertragung durch Konvektion.

Versuche: Die Strömungen im Wasser, das von unten her erwärmt wird, werden deutlich ersichtlich, indem man dem Wasser Sägespäne oder dergl. beisetzt. Je enger begrenzt die erwärmte Stelle gewählt wird (z. B. nach g. 296 [a. f. S.] durch galvanische Erhitzung eines kurzen, schlechter leitenden Stabes in die Flüssigkeit versenkten Drahtes), um so deutlicher zeigt sich der fortschreitende Strom der durch die lokale Erwärmung spezifisch leichter gewordenen Wasserteilchen. — Analoge Beobachtungen an dem Spalt einer Tür zwischen einem kalten und einem geheizten Zimmer: eine an den Spalt gehaltene Kerze

Wärmelehre (Thermik und Kalorik).

unten kalte Luft ein-, oben warme Luft ausströmt. „Aufwärts“ . Bedeutung richtiger Luftzirkulation für Ventilation, Heitzschorn der Luft über einem erhitzten Blech (sich verratend durch diese Luft hindurch gesehenen Gegenstände) zeigt, daß auf

Fig. 296.



größeren Flächen die gasförmige Flüssigkeit (und auch eine tropfbare) nicht in gleichmäßigen Schichten, sondern in unregelmäßigen Strömen aufsteigt, bzw. abwärts sinkt. Erst hierdurch kommt in solchen von unten erwärmten tropfbaren und gasförmigen Flüssigkeiten der Wärmeausgleich, nämlich die Mischung der verschiedenen warmen Flüssigkeitsschichten, weit mehr rascher, als es durch Wärmeleitung in ruhenden Flüssigkeitsmengen geschehen würde.

Theoretisch bleibt also scharf auseinander, was die Leitung der Wärme vermittelnde Strömung (Konvektion) der ungleich erwärmten Flüssigkeiten und das „Strömen“ der Wärme in ruhenden, flüssigen und festen Körpern.

d. i. die eigentliche Wärmeleitung selbst wieder hypothetisch, wenn man sich denkt, daß die Moleküle des Körpers aneinander die Wärme abgeben; werden hier als die „Teilchen“ der Moleküle angenommen, so ist dies die Erklärung der Wärmeleitung gemäß der kinetischen Wärmehypothese, § 83.

E. Wärmequellen. Mechanische Wärmetheorie.

§ 81. Überblick über die Arten der Entstehung und des Verbrauches von Wärme.

Zunächst nach praktischen Gesichtspunkten geordnet, ist als erste und wichtigste Wärmequelle für die Erde die Sonne zu nennen; Näheres über die Wärme der Sonne durch Strahlung ausgehende und nach teilweise Absorption in der Erdatmosphäre an die Erdoberfläche gelieferte Wärmemenge vergl. § 196. Ihr gegenüber ist für das Leben auf der Erdoberfläche schon die **Eigenwärme des Erdinneren** zu nennen; vergl. § 196. Nächste der Sonne verdanken wir die größten Wärmemengen den **Verbrennungen**; und zwar ist das weitest ausgiebigste Brennstoff, nämlich die Steinkohle, selbst als „aufgespeicherte Sonnenstrahlung“ aufzufassen, § 225. Wärmeproduktion bei zahlreichen anderen **chemischen Vorgängen**, z. B. beim Kalklösen, Mischen von Schwefelsäure und Wasser, Zündung faulenden Heues u. s. w. Ferner Wärmeproduktion durch **elektrische Vorgänge**, § 152. Endlich Wärmeproduktion durch **mechanische Arbeit**: Erhitzung schlecht geschmierter Achsen, pneumatisches Feuerzeug (Fig. 297) u. s. f.



Für die theoretische Erforschung der Entstehung und des Verbrauches von Wärme sind die letztgenannten Vorgänge, die Beziehung von Wärme und mechanischer Arbeit, grundlegend ge-

Geschichtliches: Im Lichte der folgenreichsten theoretischen Entdeckung des 19. Jahrhunderts, der des mechanischen Wärmeäquivalents durch ROBERT MAYER (1842) und der darauffolgenden Ausbildung der kinetischen Wärme-
 Hypothese durch THOMSON, CLAUSIUS, MAXWELL, BOLTZMANN und andere stellten
 zahlreiche frühere Spekulationen und Forschungen als Vorläufer jener Entdeckung
 dar. — So hatte schon LUCRETZ und ähnlich wieder FRANCIS BACON (1665) in den
 Bewegungen der kleinsten Teilchen“ das „wahre Wesen der Wärme“, d. h. die
 Ursache der durch sie in anderen Körpern hervorgebrachten Wärmeerscheinungen,
 wie der in uns erregten Wärmeempfindungen vermutet. — Unabhängig von
 diesen Spekulationen hatte Graf RUMFORD (1798) beobachtet, es werde beim
 Kanonenbohren so viel Wärme erzeugt, daß das umgebende Kühlwasser bis zum
 Sieden sich erhitzt. Auch hatte RUMFORD die Bedingungen für das Auftreten
 dieser Wärme schon so richtig zurückverfolgt, daß er darauf hinwies, es hätte
 eben diese Wärmemenge erzeugen lassen, wenn das Futter, statt von den die
 Arbeit in Drehung setzenden Pferden gefressen und verdaut zu werden, verbrannt
 und so das Wasser erhitzt worden wäre.

CARNOT (gestorben 1832 im 36. Lebensjahre) kam durch seine Theorie der
 Reibtheorieleistung in Dampfmaschinen der Entdeckung des Wärmeäquivalents noch
 näher, irrte aber von diesem Ziel wesentlich nur noch dadurch ab, daß er meinte,
 die geleistete Arbeit wäre Folge des Überganges der Wärme vom höheren Wärme-
 grade auf einen niedrigeren (ähnlich wie beim Umsetzen der potentiellen in
 kinetische Energie, wenn Wasser aus höherem Niveau über ein Mühlrad in tieferes
 hin bewegt), und daß hierbei die übergehende Wärmemenge konstant bleibe;
 er hat sich CARNOT von letzterem Irrtum (der eben der Verwandlung von
 Wärme in Arbeit widerspräche) kurz vor seinem Tode noch frei gemacht.

R. MAYER'S Entdeckung, daß einer bestimmten mechanischen Energie,
 die als solche verschwindet, eine bestimmte Wärmeenergie, die als
 solche auftritt, äquivalent sei und umgekehrt, ist eine von Hypothesen freie
 Tatsache. Dagegen ist es eine über diese Tatsache hinausgehende, wenn auch
 vielen Beziehungen sehr ansprechende Hypothese, „die Wärme als eine Art
 Bewegung“ zu erklären. Es werden daher in den beiden folgenden Para-
 graphen getrennt jene Tatsache und diese Hypothese abgehandelt. —

Noch unabhängig von der in jenem Äquivalenzgesetz ausgesprochenen
 quantitativen Beziehung zwischen Arbeit und Wärme und um so mehr von der
 mechanischen Wärmehypothese sind die allgemeinen

Umkehrungsbeziehungen zwischen mechanischer Arbeit und
 Wärme: Z. B. Im pneumatischen Feuerzeug tritt an Stelle der beim Hineinstoßen
 des Stempels gegen die Spannkraft der Luft geleisteten mechanischen Arbeit eine
 Wärmemenge auf, welche den Wärmegrad der Luft und des Feuerschwammes
 (des Schwefelkohlenstoffs) so stark erhöht, daß dieser sich entzündet. Umgekehrt
 wirkt in der Dampfmaschine der heiße Dampf, indem er den Kolben im
 Zylinder entgegen dem Widerstande der äußeren Luft und vielmehr noch entgegen
 dem Trägheitswiderstande der in Bewegung zu setzenden Massen (des Eisenbahn-
 wagens und seiner Lasten) Arbeit leistet, eine bestimmte Wärmemenge (gemessen
 von HIRM 1858), so daß sich auch der Wärmegrad des Dampfes mehr herabsetzt,
 als es durch die Wärmeverluste infolge Leitung und Strahlung geschehen würde.
 — Als eine Umkehrung der Vorgänge in der Dampfmaschine sind auch die
 in der Eismaschine (§ 84) aufzufassen.

§ 82. Das mechanische Wärmeäquivalent.

ROBERT MAYERS Aufgabe: In einem würfelförmigen Raume, Deckfläche als beweglicher Kolben gedacht ist, befinde sich 1 m³ Luft bei 0°C und 76 cm Spannkraft und werde um 1°C α) bei konstantem Druck, β) bei konstantem Volumen erwärmt.
 a) Welche mechanische Arbeit ist bei der Ausdehnung durch Verschiebung jenes Kolbens entgegen dem konstanten Druck von 76 cm geleistet worden? b) Eine um wieviel größere Wärmemenge ist zur Temperaturerhöhung um 1°C verbraucht worden, wenn sich der Kolben verschob (α), als wenn er unbeweglich (β) wäre? c) Wieviel Meterkilogramm sind also 1 Cal äquivalent?

Zu a: Beim Luftdruck von 76 cm lastet auf 1 cm² ein Druck von $p = 1,0334 \text{ kg}$, also auf 1 m² ein Druck von $p = 10334 \text{ kg}$. Die Verschiebung des Kolbens entgegen diesem Druck beträgt infolge der Ausdehnung der Luft bei Erwärmung um 1° den Weg $h = \frac{1}{273,6} \text{ m}$. Somit geleistete mechanische Arbeit $ph = 10334 \times \frac{1}{273,6} = 37,861 \text{ mkg}$.

Zu b: Die spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck ist 0,2377, die spezifische Wärme bei konstantem Volumen 0,1685. Um 1 kg Luft um 1°C zu erwärmen, erfordert 0,2377 — 0,1685 = 0,0692 Cal Wärme, wenn es sich nicht nur um 1°C zu erwärmen (β), sondern auch um $\frac{1}{273,6}$ seines Volumens auszudehnen (α) und dabei gegen den Luftdruck zu leisten hat. Für 1 m³ Luft von der Dichte 1,293 kg beträgt somit dieser Mehrverbrauch an Wärme $0,0692 \times 1,293 = 0,0899 \text{ Cal}$.

Zu c: Es sind also einander äquivalent 37,861 mkg und 0,0899 Cal, also 424 mkg und 1 Cal oder 1 mkg und $\frac{1}{424} \text{ Cal}$.

Man nennt die Zahl $J = 424 \text{ mkg}$ das mechanische Wärmeäquivalent und $A = \frac{1}{424} \text{ Cal}$ das kalorische Arbeitsäquivalent (siehe unten I. und II.).

Da 1 mkg = 9,81 Joule und 1 Cal = 1000 cal, so entspricht dem des irdischen Maßsystems 0,2394 im C-S-G-System 1 Joule = 0,2394 Cal.

Die Tragweite dieser Größenbeziehung besteht darin, daß sie 1. zwei qualitativ ganz verschiedenen Gebieten, wie es mechanisch

denken) in Energie der Lage des Wassers. Stürzt nun dieses Wasser aus der Höhe wieder herab und verliert im Stofs gegen den Boden alle mechanische (sowohl kinetische wie potentielle) Energie, so tritt dafür eine Wärmemenge von A auf, welche, wenn sie nur zur Erwärmung dieses Wassers (nicht auch des Umröhrs . . .) verwendet würde, es um 1°C wärmer machen würde. So wurde das Wasser des 85 m hohen Niagarafalles unten um etwa $\frac{1}{3}^\circ\text{C}$ wärmer gefunden als oben; nach einem Sturme soll nach alter Seemannserfahrung das gepeitschte Wasser wärmer sein. ROBERT MAYERS Versuch mit wiederholtem Hin- und Herbewegen von Quecksilber aus einem Glase in ein anderes. Ausführlicher besagen die Zahlen 424 und $\frac{1}{424}$:

I. Verschwindet mechanische Energie im Betrage von $J = 424$ mfg und tritt dafür als neue Energieform nur Wärme auf, so beträgt dies 1 Cal (mechanisches Äquivalent der Wärmeeinheit).

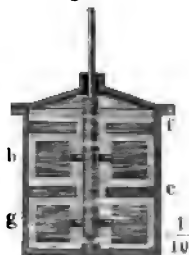
II. Verschwindet kalorische Energie im Betrage von $A = \frac{1}{424}$ Cal und tritt dafür als neue Energieform nur mechanische Energie auf, so trägt diese 1 mfg (kalorisches Äquivalent der Arbeitseinheit).

Die Zahl 424 ist ein Mittelwert aus zahlreichen Bestimmungen, welche nach mannigfaltigsten Methoden vorgenommen worden sind.

R. MAYER selbst hatte zuerst 365 angegeben, aber nicht, weil der Gedanke an die rechnerische Durchführung seiner Methode irgend welche Fehler zwies, sondern weil die Zahl 0,2669 (Delaroche und Berard 1813), welche er von Gay-Lussac überkommen hatte, durch die richtigere 0,2735 (Regnault 1840) zu ersetzen gewesen wäre. Auch hat er schon in seiner ersten Schrift: „Bemerkungen über die Kräfte der unbelebten Natur (1842)“ und in seinem Hauptwerke: „Die mechanische Bewegung in ihrem Zusammenhang auf den Stoffwechsel 1845“ auf die Wechselbeziehungen zwischen mannigfaltigen anderen „Kräften“ (gemeint war, was wir heute „Energien“ nennen), nicht nur auf die zwischen mechanischer und kalorischer Energie hingewiesen; vergl. Chemie § 225.

Ein Jahr nach MAYER und ohne Kenntnis von dessen Entdeckung führte JOULE (sprich Djoul) direkte Versuche zur Bestimmung von A nach mehreren Methoden aus. Er liess ein Schaufelrad (Fig. 298) durch langsam sinkende Gewichte in Drehung versetzen und so die durch die Gewichte geleistete Arbeit in Wärme durch Reibung des Rades im Wasser oder Quecksilber umsetzen. Auch andere Formen der Energie als mechanische und thermische zog JOULE heran, wie z. B. die Wärme, welche bei der Rotation von Kupferscheiben und Spulen in magnetischen Feldern auftritt (150).

Fig. 298.



HELMHOLTZ veröffentlichte 1847, ebenfalls ohne von R. MAYERS vorausgegangen Arbeiten zu wissen, sein Buch „Über die Erhaltung der Kraft“, worin ebenfalls für die mannigfaltigsten Energieformen das Umwandlungs- und Erhaltungsgesetz nachwies und so zwischen den verschiedensten Teilen der Physik auch rechnerisch zu verfolgenden Zusammenhang herstellte.

§ 83. Die kinetische Wärmehypothese.

Wie schon im § 57 und § 58 an dem Beispiel des Mariotteschen Gesetzes zeigt wurde, erklären sich aus der Hypothese, dass die kleinsten Teilchen

(Moleküle und Atome) aller Körper in lebhaften Bewegungen sind, nicht erst die Wärmeerscheinungen, sondern auch schon rein mechanische Vorgänge; denn die Spannkraft eines Gases, welche durch das Mariottesche Gesetz in Abhängigkeit vom jeweiligen Volumen gesetzt ist, und welche die kinetische Gastheorie aus den Stößen der Moleküle gegen die festen und flüssigen Wände des Gefäßes erklärt (§ 57), wäre auch noch vorhanden, wenn Körper einerlei Temperatur oder wenn wir keine Wärmeempfindung hätten. Indem nun aber nach dem Gay-Lussacschen Gesetze jene Spannkraft bei gleichbleibendem Volumen zunimmt, falls die Temperatur erhöht wird, und nach dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz auf die Spannkraft bei Temperaturerhöhung ganz gleichartigen Einfluß haben, so

Anh. 36. es den logischen Regeln der Hypothesenbildung (log. Anhang, Nr. 36), die Temperaturerhöhung durch nichts anderes zu erklären, als durch eine lebhaftere Bewegung jener Teilchen; genauer: den physikalischen Wärmezustand des Körpers mechanisch „zurückzuführen“ auf die kinetische Energie der

Anh. 36. tiven Bewegungen seiner Teilchen. (Vergl. psychol. Anhang, Nr. 36.) Diese Hypothese am ausführlichsten durchgebildet ist für Gase, wird sie die „kinetische Gastheorie“ bezeichnet; doch erklären sich aus der kinetischen Gastheorie auch für die beiden anderen Aggregatzustände alle einzelnen Tatsachen der Wärmelehre. Hier nur einige einfache Beispiele solcher Erklärungen (LA 1).

1. Das Volumengesetz: Wird die Gesamtmasse eines flüssigen oder gasförmigen Körpers auf einen höheren Wärmezustand gebracht, also nach der Hypothese die kinetische Energie der Teilchen in Form der lebendigen Kraft seiner einzelnen Teilchen vergrößert, so werden diese zu ihren größeren Bewegungen auch „mehr Raum“ brauchen (ähnlich wie eine lebhaft durchgehende Menschenmenge im Vergleich zu einer ruhigen). —

Dabei ist zunächst vorausgesetzt, daß die Körper, welche den flüssigen Körper umgeben, auch nach seiner Temperaturerhöhung und Vergrößerung denselben Druck gegen ihn ausüben; ist dagegen jener durch Vergrößerung dieses äußeren Druckes verhindert, sich auszudehnen, so wird er um so größere Spannung zeigen, die sich an Gasen gemäß dem Mariotteschen Gesetz, an flüssigen und festen Körpern als die „unwiderstehliche“ ihres Ausdehnungsbestrebens, richtiger als die Beziehung zwischen Ausdehnungskoeffizient und Elastizitätskoeffizient (§ 73, S. 265) äußert.

Auch die Abweichungen im Verhalten der wirklichen Gase von dem Mariotteschen Gesetz haben sich aus der kinetischen Gastheorie sehr befriedigend erklären lassen. Daß die diesem Ideal am meisten sich nähernden Gase Helium, Wasserstoff, Stickstoff, Sauerstoff . . . sehr annähernd die gleichen Ausdehnungen zeigen, ist ebenfalls aus der kinetischen Gastheorie zu verstehen.

Thomsons absolute Temperaturskala gilt unabhängig von der thermischen Substanz, der der Reihe nach Wärmemengen $w, 2w, 3w \dots \text{cal}$ zugeführt werden, die äquivalent sind mechanischen Arbeiten von $a, 2a, 3a \dots$ Erg. so erhalten Wärmegrade des Körpers von $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ \dots$ nach mechanischer Maßen bilden dann ein absolutes Maß von Temperaturunterschieden auf Grund der mechanischen Messung von Wärmemengen (wogegen im § 72 die Wärmemengen umgekehrt erst nach den Wärmegraden bestimmt worden waren). Dieser absoluten Maßen geht die Skala des Luftthermometers proportional, insoweit die Anziehungen zwischen den Molekülen der Luft als verschwindend angenommen werden dürfen. Man beachte, daß dieser Gedanke, Temperaturen (richtiger Temperaturdifferenzen) mechanischem (u. zw. nach absolutem Maße im Sinne auch des § 16) zu messen, nicht von der Tatsache des mechanischen Wärmeäquivalents, nicht auch von der kinetischen Gashypothese als solcher abhängig ist.

2. Die Aggregatregel (§ 75, 1): Nach der kinetischen Theorie der drei Aggregatzustände, die im § 57 auf Grund des rein mechanischen Verhaltens der Teilchen fester, flüssiger und gasförmiger Stoffe zueinander entwickelt wurde, ist zu erwarten, daß, wenn zunächst den festen Gleichgewichtslagen schwingenden Molekülen eines festen Körpers kinetische Energie in Form von Wärme zugeführt wird, sie die Amplituden ihrer Schwingungen so vergrößern, daß sie die elastischen Kräfte überwinden (sozusagen nicht mehr in ihre Gleichgewichtslagen zurückfinden — ähnlich wie ein durch Hineinsingen in eine Mittönen versetztes Glas bei allzu kräftigem Singen zerspringen kann): **Schmelzen**. — Ebenso werden dann von den gleichsam durcheinander kriechenden Molekülen flüssiger Körper bei immer kräftigerer Bewegung zuerst einzelne, dann immer mehr sich von der Gesamtmasse losreißen: **Verdunsten**. Bei fortgesetzter Wärmezufuhr und Temperaturerhöhung wird die Dampfbildung auch im Innern eintreten: **Kochen**. — Hieraus erklärt sich auch sogleich

3. Der Wärmeverbrauch beim Schmelzen und Vermpfen (§ 75, 2): Die zugeführte kinetische Energie der Wärmebewegung wird nicht mehr dazu verwendet, die Geschwindigkeit einzelner Teilchen zu vergrößern, sondern nur dazu, ihren Zusammenhang mit den anderen zu lösen.

Vorbildlich hierfür ist der Aufwand an Arbeit schon beim Schaben des Eises; es ist begreiflich, daß ein noch größerer Arbeitsaufwand erforderlich ist, nicht nur Eispulver, sondern flüssiges Wasser herzustellen (§ 76), und ein noch größerer Arbeitsaufwand, um einzelne Moleküle der Anziehungssphäre der Eismasse so weit zu entreißen, daß sie überhaupt nicht mehr diesen Anziehungen unterliegen, sondern geradlinig als Gasmoleküle durch den Raum fortfliegen.

Durch Schlüsse aus der mechanischen Wärmetheorie sagten JAMES THOMSON und ROBERT CLAUSIUS voraus, daß Eis, weil beim Schmelzen sein Volumen abnimmt, je 1 at Druckerhöhung einen um je $0,0074^\circ\text{C}$ tieferen Schmelzpunkt haben muß; daß dagegen bei Stoffen, die sich normalerweise beim Schmelzen ausdehnen, der höhere Druck der höhere Schmelzpunkt entspreche (analog wie der höhere Druck den höheren Schmelzpunkt des Wassers bewirkt). Die Prophezeiung wurde durch WILLIAM THOMSONS Versuche glänzend bestätigt. (Vgl. *Philosophical Magazine*, 1874, 4, 1, 11.)

bestätigt. — Aus jenem abnormen Verhalten des Eises erklären sich Errel im größten Maßstabe bei der Gletscherbildung („Regelation des Eises“, nach TYNDALL über Herstellen klaren Eises aus Eispulver u. dergl.).

Der Unterschied zwischen ungesättigten und gesättigten Dämpfen sich so erklären: Von den im Dampfraum umherfliegenden Molekülen immer eine Anzahl wieder in die Flüssigkeit zurück; u. zw. solange noch Dampfmoeküle im Raum sind, also auch nur wenige gegen die Flüssigkeit fliegen, wird diese Zahl übertroffen werden durch die der Moleküle Flüssigkeit neu entsendet. Ist Gleichheit der beiden Zahlen erreicht, ist Dampf gesättigt.

Da die Dampfwärme (z. B. des Wassers zu 540 cal) und somit auch mechanisches Äquivalent bekannt ist, so läßt sich schließen auf die kalorischen Arbeit, die zur Überwindung der Anziehung zwischen den Molekülen nötig ist; diese aber ist andererseits auch bekannt aus der Messung der Kapillarkräfte. Über eine hierauf sich gründende Methode zur Berechnung der Größe der Dampfmoeküle (die hiernach nichts anderes sind als die Tröpfchen, die sozusagen beim Zerplatzen der Flüssigkeit entgegen ihrer

LA 154. infolge der aufgewendeten Dampfwärme entstehen) vergl. LA 154. — In des Sättigungspunktes (und umsomehr des kritischen Punktes) werden Abweichungen der Dämpfe vom Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz immer seltener.

4. Ausbreitung der Wärme: Denken wir uns die eine Seite eines Gefäßes mit heißem, die andere mit kaltem Gase erfüllt werden die schnelleren Teilchen zum Teil zwischen den langsameren hindurchfliegen, zum Teil auch diesen selbst durch Stoß mit ihrer Energie übertragen, also Wärme mitteilen. Ähnlich bei festen Stoffen (vergleiche ein Billard mit vielen anfänglich ruhenden und langsam bewegten und einigen schnell rollenden Kugeln)

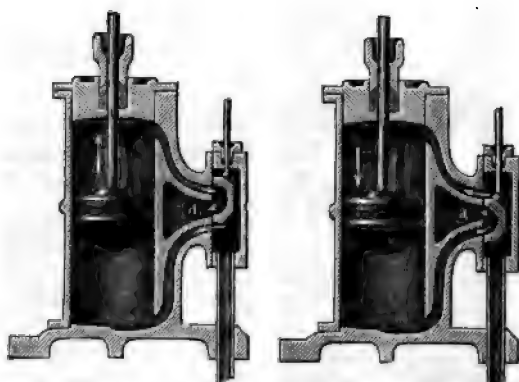
Die Ausbreitung der Wärme durch Konvektion gibt das direkte Vorbild einer solchen Übertragung von Wärme (gleichsam gebunden an Massenbewegung); die Wärmeleitung wiederholt nach der Hypothese den gleichen Vorgang von Molekel zu Molekel (gleichsam ungeordnet). Bei der Strahlung ist es nötig, außer den Bewegungen der Körpermolekel auch Schwingungszustände des hypothetischen Äthers zur Erklärung heranzuziehen, zwar aus denselben Gründen, um derentwillen auch die Lichterschreitung die Annahme eines Äthers außer der wägbaren Materie verlangen (§ 121).

§ 84. Dampfmaschinen. — Eismaschinen.

bwechselnd von der einen und der anderen Seite des Kolbens wirken.asmenge, welche so ihre Arbeit verrichtet hat, entweicht teils in reie Luft, wo sie ruck dieser Luft zu inden hat; teils wird ampfmaschinen der f in einen Kondensator geleitet, wo seine kraft herabgesetzt teils (bei Compoundmaschinen) verrichtet der strömende heisse f nochmals Nutz- (in einem Niederzylinder mit Kondensator).

Fig. 299.

Fig. 300.

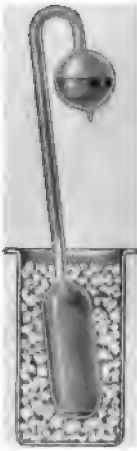


ähere Beschreibung besonderer Formen von Dampfmaschinen (mit stabilem oszillierendem Zylinder, mit verschiedenen Formen von Steuerungen, stabiler lung, Lokomobilen und Lokomotiven u. s. f.) nach Modellen und Wand- — Man unterscheidet Niederdruck- und Hochdruckmaschinen, je nachdem mpf eine Spannung von weniger oder mehr als 2 at besitzt. Angenommen, ire der Dampf im Kondensator alle Spannung (in Wahrheit entspricht sie ggleichstemperatur von Dampf und Kühlwasser), so müßte auf der mit ondensator in Verbindung stehenden Seite des Kolbens der Dampf die ng 0 haben (gemäß dem Gesetz § 77, IV, daß in einem geschlossenen Raum r Stelle die Minimalspannung herrscht) und es käme somit die Spannung npfes auf der anderen Seite voll zur Arbeitsleistung. Strömt dagegen der ohne Kondensator ins Freie, so hat er (falls hier ein Luftdruck von 76 cm t) 1 at Gegendruck zu überwinden. Es wird also durch die Anbringung ndensators annähernd 1 at leistungsfähigen Druckes gewonnen, i einer Niederdruckmaschine, z. B. von $1\frac{1}{2}$ at Spannung, eine Steigerung rkung im Verhältnis $1\frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 3 : 1$ bedeutet (weshalb sich bei Nieder- aschinen — die aber fast ganz außer Gebrauch gekommen sind — die ung eines Kondensators lohnt; nicht so lohnend ist ein solcher bei Hoch- aschinen, z. B. Lokomotiven mit 10 at, wo der Gewinn nur 10:9 betrüge, lich aber das Kühlwasser nicht zu beschaffen ist).

eschichtliches. HERONS Versuch (um 100 n. Chr.); PAPINS Versuch 1690; aktisch verwendete Dampfmaschine von NEWCOMEN 1705; POTTER erfindet be die Selbststeuerung (1710); WATT vervollkommnet die Maschine (von); erstes Dampfschiff (FULTON) 1807, erste Lokomotive (STEPHENSON) 1829. eoretisch fallen alle kalorischen Maschinen unter den Typus von Robert Aufgäbe (§ 82, S. 286), indem auch bei dieser die sich ausdehnende Luft olben entgegen dem Widerstande des äußeren Luftdruckes zu verschieben ie hier ein Verbrauch von Wärmemenge darin gegeben ist, daß die he Wärme bei konstantem Druck größer ist als bei konstantem Volumen, HEN durch direkte Versuche gezeigt, daß sich der Dampf, nachdem er im Arbeit geleistet hat, um mehr abkühlt, als sich aus den Wärmeverlusten

durch Leitung und Strahlung ergibt; worin also die direkte Bestätigung mechanischen Äquivalents der Wärme liegt, während Mayers Mel nächst das kalorische Äquivalent der Arbeit betraf.

Fig. 801.



Eine Umkehrung des Vorganges in der maschine in anderem Sinne stellen die Eismas dar. Ihr Vorläufer ist Wollastons Kryophor (Fig. 801). Im Zylinder werden durch eine umgebende Kältem fortwährend Dünste kondensiert, wodurch sich neue aus dem Wasser der Kugel entwickeln. Sie er dem Wasser daselbst so viel Wärme, daß es frie

Noch einfacher: Gefrieren des Wassers durch verd den Ather oder Schwefelkohlenstoff, indem man dieser dünnwandiges Schälchen von Kupferblech bringt, unter de die Dünste mittels eines Blasebalges rasch weggeschafft einige Tropfen Wasser zum Gefrieren kommen. — In den Fabriken von „Kunsteis“ werden durch Dampfmaschine hierbei den Druck der äußeren Luft zu überwinden habe geschaffen, in denen Ammoniak immer wieder zum Ve gebracht wird, worauf dann die beim Wiederverdicht werdende Dampfwärme des Ammoniaks durch Kühlwa seitigt wird. So läßt sich in großen Bassins mit Salzlösungen die Tem bis auf mehrere Grade unter 0°C herabsetzen, und in diesen Bassins gefrie das Wasser in Hunderten metallener Gufsformen. (LINDES Maschine zur Er flüssiger Luft; zahlreiche Versuche mit dieser; Temperatur -194°C .)

Wäre es möglich, die Wärme, welche mit dem Kühlwasser wegfliel dessen selbst wieder zum Heizen der Dampfmaschine zu verwenden? ebenso wenig, als daß eine Dampfmaschine funktioniert, wenn sie sich Umgebung befände, die die Temperatur des Dampfkessels hat. Vielm die Wärme, um sich in mechanische Arbeit umsetzen zu könne einem höheren auf ein niedrigeres Temperaturniveau sinken und hiermit hängt es zusammen, daß immer nur ein Teil der Wä mechanische Arbeit zu verwandeln ist, wogegen alle mechanische in Wärme verwandelt werden kann. Mit diesen Tatsachen beschäfti der „Zweite Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie“ (und griff der „Entropie“), auf Grund dessen die Thermodynamik noch allg zeigt, daß auch alle anderen Formen von Energie sich zwar le ganz in Wärme umwandeln lassen, die Wärme aber immer nur z in jene anderen Formen (weshalb man die Wärme das schließliche aller Energie“ nennen kann); doch dies unbeschadet der Erhaltu Energie, d. h. des Gesamtbetrages aller potentiellen und aktuellen Energi ROBERT MAYERS Satz, daß die Wärme zu diesen in gegenseitigen Äq verhältnissen stehenden Energieformen gehöre, u. zw. daß sie aktuelle E sei, bildet den „Ersten Hauptsatz der mechanischen Wärmeth

Lehre vom Schall (Physikalische Akustik).

§ 85. Schallempfindungen und physikalische Schallerscheinungen.

Alles Hörbare nennen wir Schall. Der Qualität nach unterscheiden wir **Geräusche und Klänge**; an einem Klange sind weitere qualitative Merkmale **Tonhöhe und Klangfarbe**.

Zur Bezeichnung der Unterschiede der Tonhöhe besitzt die Verkehrssprache die Namen **hoch und tief**. Die Musiker (und nach ihnen die Physiker, Biologen und Psychologen) bedienen sich zu genauerer Benennung von bestimmten **absoluten Tonhöhen** der Notenbezeichnungen *C, D ... c, d ...* *f ... cis, des ...*, ferner zur Bezeichnung der **relativen Tonhöhen** der Intervallbezeichnungen **Sekund, Terz** (große, kleine), **Oktave ...**, **Doppel-o**; **Ganz-, Halbtöne** (Viertel ... -Töne).

Die Klangfarbe wird teils bezeichnet als **klangvoll, schmetternd, dumpf ...**, mittelbar als **Klangfarbe** der Geige, Trompete, einer Knaben-, Frauenstimme.

Jeder Schall besitzt (neben seiner Qualität als Klang, bezw. Geräusch) auch eine bestimmte **Intensität** (laut, leise, *pp, p, f ...*). — Jedem Schall kommt eine Dauer zu. — Beim **Knall** ist die Intensität groß, die Dauer sehr kurz, Qualität die eines Geräusches.

1. Alle vorstehenden Beschreibungen betreffen nur unsere Schallempfindungen, sind also rein psychologischer Natur. — 2. Die nächste Bedingung für das Entstehen von Schallempfindungen einer bestimmten Art kommt, ist ein **gesundes Gehörorgan**; von seinem Bau handelt die Anatomie, von seinen Funktionen die Physiologie. 3. Ein gesundes Gehörorgan funktioniert nur, wenn es von bestimmten physikalischen Vorgängen erregt wird. Diese sind für Geräusche **regelmäßige**, für Klänge **regelmäßige oder periodische, schwingende Bewegungen** der Schallerreger (Glocken, Saiten ...) und **Wellenbewegungen** der Schalleiter, meist der Luft vom Schallerreger bis zum Gehörorgane. —

Entsprechend der Reihenfolge der Vorgänge bis zum Hören gliedert sich die Lehre vom Schall (Akustik, ἀκουή hören) in die Abschnitte:

- A. Erregung des Schalles, insbesondere der Klänge;
- B. Ausbreitung des Schalles (Fortpflanzung der Schallwellen);
- C. Bau und Funktionen des Gehörorganes.

Hieron fallen A. und B. in die physikalische Akustik, C. in die physiologische Akustik. Beide setzen voraus, daß man schon wisse, wie ein Geräusch ein Klang, eine Dur-, eine Molltonleiter sich anhört, was dumpfe, grelle Klangfarbe, Konsonanz, Dissonanz heißt u. s. f. Diese zum Teil aus dem alltäglichen Leben und genauer aus der Musik bekannten rein deskriptiven Merkmale der Schallempfindungen und der zwischen ihnen bestehenden Beziehungen mit der psychologischen Akustik zum Gegenstande selbständiger wissenschaftlicher Untersuchung (psychol. Anh., Nr. 43).

A. Die Erregung des Schalles.

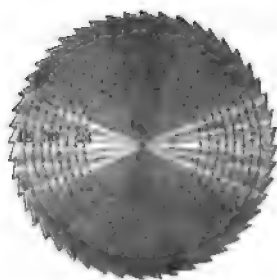
a) Abhängigkeit der Tonhöhe von der Schwingung

§ 86. Relative und absolute Schwingungszahlen

Geschichtliches. PYTHAGORAS (um 500 v. Chr.) hat einen Zusammenhang zwischen Tonhöhen und Zahlen bemerkt und ihn mittels des „Monochord“ experimentell verfolgt. Er beachtete nämlich, daß, wenn eine bestimmte Saitenlänge einen bestimmten Ton gegeben hatte, sie bei Verkürzung z. B. auf die Hälfte (bei unveränderter Spannung) die höhere Oktave jenes Tones gibt. Ebenso von den Intervallen der damals gebräuchlichen Tonleitern, daß sie rationalen Verhältnissen der zugehörigen Saitenlängen entsprechen. — Da hierbei die Saitenlänge nur dadurch mittelbar einen Einfluß auf die Tonhöhe hat, daß von der Saitenlänge die Schwingungszahl und daß nur die Schwingungszahl, gleichviel was immer für ein Klangerreger, die Tonhöhe abhängt, ist erst seit GALILEI bekannt; er hatte bemerkt, daß z. B. der Klang, den man beim Überstreichen des Randes einer Münze, je nachdem man langsamer oder schneller über ihn mit dem Fingernagel hinfährt, tiefere oder höhere Töne gibt: das Vorbild der Zahlen.

I. Relative Schwingungszahlen. — *Versuche* mit der Zahnlochsirene: An die Zähne der Scheibe (Fig. 302) wird ein Kart

Fig. 302.



gehalten, bzw. gegen die eine der Lochreihen wird geblasen und die Scheibe allmählich immer rascher gedreht: man hört anfangs Geräusche der einzelnen Stöße, später einen kontinuierlichen Klang, der sich allmählich in die Höhe

Damit man bei gleichförmiger Drehung und Anblasen der einzelnen Lochreihen die Töne einer Tonleiter hören kann, müssen die Zahlen der Zähne der Löcher je einer Reihe in den Verhältnissen der relativen Schwingungszahlen

	für Prim	Sekund	Terz	Quart	Quint	Sext	Septim
	24	27	30	32	36	40	45
oder	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$

wie dies in §§ 87–89 an einigen der einfachsten Aufgaben solcher Art werden wird. —

Der **Molltonleiter** tritt an Stelle der „großen Terz“ die um einen Ton tiefere „kleine Terz“ (mit der Schwingungszahl $\frac{3}{4} < \frac{4}{3}$; überman beim Absteigen durch die Molltonleiter die Septim und Sext oder letztere um einen halben Ton tiefer zu nehmen).

Namentlich für die Theorie der Teil- oder Partialtöne und hiermit farbe (§ 90) wichtige Reihe von Tönen ist diejenige, für welche die Schwingungszahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... gelten. Da hier $2 = 2 \cdot 1$, $4 = 2 \cdot 2$, $5 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{5}{4}$, $6 = 2 \cdot 2 \cdot \frac{3}{2}$, $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$... , so sind dies die zu jenen ganzen Zahlen zugehörigen Töne für Grundton, 2 Oktav, 3 Quint der Oktav, 4 Doppeloktav, 5 Terz der Oktave, 6 Quint der Doppeloktave (7 annähernd die kleine Septim oder Oktave), 8 dreifache Oktav, 9 Sekund der Oktave u. s. f. — Da von diesen Tönen 3., 4., 5., 6., —, 8., —, 10., —, 12... Ton Grundton konsoniert, heißt jene Tonreihe **reine Tonreihe**. —

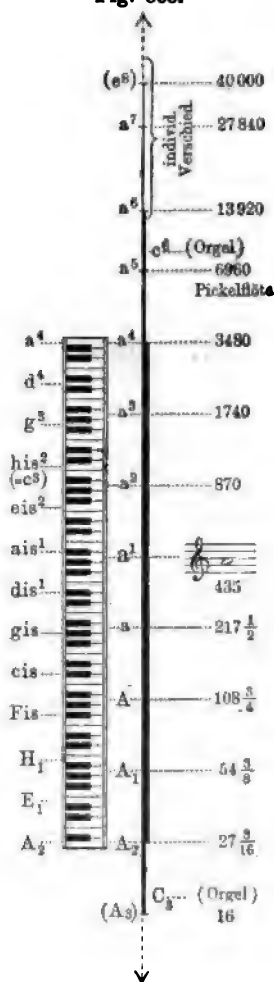
Der Hervorbringung einer Durtonleiter mittels der Winkelgeschwindigkeit der Umdrehungszahl) bei je einem streng konstant bleiben. Wird bei einem Versuch eine größere konstante Winkelgeschwindigkeit gewählt, so erhält man wieder eine Tonleiter, aber in höherer Tonlage. Somit:

Die relativen Schwingungszahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... hängen nur die relativen Töne; mit den **absoluten Schwingungszahlen** ändern sich auch die **absoluten Töne**.

Zahlen 1, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$... gelten also (abgesehen von feinen Unterschieden, welche durch die „reine Stimmung“, siehe unten, bedingt werden) für die „Tonart“ C-Dur, wie für die anderen Dur-Tonarten (D-Dur, A-Dur u. s. f.), nur durch die absolute Tonhöhe ihrer Grundtöne (die einander entsprechenden übrigen Töne) voneinander unterscheiden.

Fig. 303 gibt einen Überblick über die auf dem Klavier verwendeten 85 Töne (sowie über die hinaus überhaupt noch hörbaren Töne). Die 7 Oktaven des Klaviers stellen 7 Quinten dar: dies aber offenbar nur andeutend die siebente Oktave eines Tones (die Schwingungszahl $2^7 = 128$, die zwölfte Quinte eines Tones ($\frac{3}{2}$)¹² = 129,742 hat. Da wir nun die Verfälschung der Oktave viel empfindlicher als gegen eine der Quinten, so werden in

Fig. 303.



der „temperierten Stimmung“ statt der reinen Quinten von der Schwahl $\frac{1}{2} = 1,5$ solche von $\sqrt[12]{128} = 1,49831$ gewählt. — Da ferner eine 0 zwölf „halbe“ Töne unterteilt ist, so wird in der „gleichschwebend temperierten“ Stimmung als relative Schwingungszahl für einen Halbton $\sqrt[12]{2}$ gewählt, für den ganzen Ton somit $(\sqrt[12]{2})^2 = 1,12246$. Von den unrationale Zahlen der reinen Durtonleiter weichen diese irrationalen Zahlen (Ausnahme der für die Oktaven) ab.

Zwischen reiner Quarte $\frac{1}{2}$ und reiner Quinte $\frac{2}{3}$ besteht das $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = \frac{3}{4}$, d. i. derselbe „große ganze Ton“ wie zwischen Prim und Sekunde. Zwischen der reinen Quinte $\frac{2}{3}$ und der reinen Sexte $\frac{4}{5}$ dagegen das Intervall $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$, welches als „kleiner ganzer Ton“ (zu verwechseln mit einem Halbtone) bezeichnet wird. Das Verhältnis $\frac{5}{6}$ war schon den alten Musikern als ein „Komma“ bekannt. Es ist ersichtlich, bei solcher reinen Stimmung die Tonfolgen C, D, E und F, G, A gleich, G, A, H etwas verschieden klingen. In der gleichschwebend temperierten Stimmung z. B. eines Klaviers werden von jedem beliebigen Tone aus in gleich Durtonleitern (bzw. Molltonleitern) gespielt.

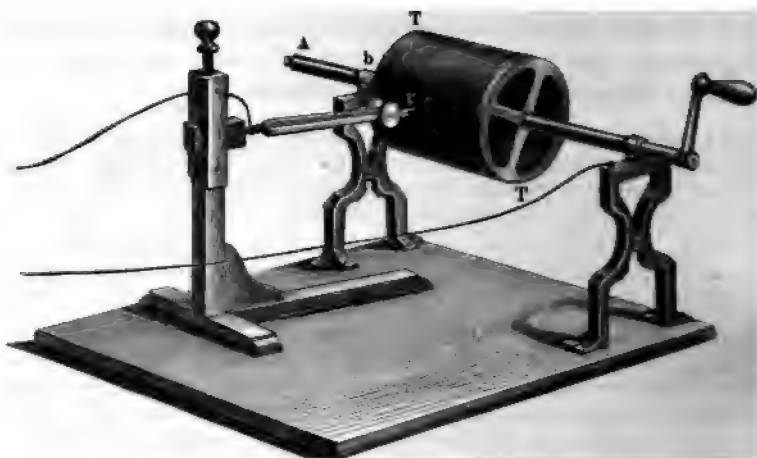
Die Fragen, warum aus dem Kontinuum der von einem beliebigen Ton allmählich steigenden Töne gerade die in die „Tonleitern“ aufsteigende Reihe bevorzugt wurde, und warum mit einem Grundtone die Oktave, Quart, Terz, Sext konsonieren, Sekunde und Septime dissonieren, sind psychologische (Anhang, Nr. 43), da die Musiker als solche von Zahlen nichts wissen. Tatsache aber ist es, daß nur die Töne von bestimmten Tonhöhen „konsonieren“, deren relative Schwingungszahlen die kleinsten Zahlen 1:2, 2:3, 3:4, 4:5, 5:6, 1:3, 1:4, 1:5, 1:10 ... ausdrückbar sind. Den Dissonanzen Sekunde und Septime entsprechen die größeren Zahlen 8:9, 8:15. Über die durch die größeren relativen Schwingungszahlen bedingten Rauigkeiten des Zusammenklangs vergl. § 98.

Der vollkommenste „Dreiklang“ ist der von Grundton, Terz und Quinte entsprechend 1: $\frac{3}{2}$: $\frac{5}{2}$ oder 4:5:6. Denken wir uns einen solchen z. B. C, E, G, je einen nach abwärts, C, A, F, und einen nach aufwärts hinzugefügt, so kommen hierin alle Töne der Durtonleiter (bzw. d. Molltonleiter C, D, E, F, G, A, H, c vor.

II. Absolute Schwingungszahlen. Es ist geschichtliche Tatsache, schon lange vor Kenntnis irgend welcher Schwingungszahlen in Orchestern u. dergl. unter den Namen C, D, ... a ... gewisse Tonhöhen verstanden waren, so daß, wenn für ein Tonstück z. B. C-Dur war, dieses in verschiedenen Orchestern um nicht allzu viel höher oder tiefer in einer gewissen durchschnittlichen „Stimmung“ ausgeführt wurde. (Allerdings zeigt die Stimmung in der Regel eine merkwürdige

(Scotts Phonautograph. 1860, Fig. 305); es werden dann die Wellen, welche auf je 1 sec entfallen, direkt abgezählt.

Fig. 305.



Endlich lassen sich an Klangerregern einfacher Form, namentlich Saiten und Pfeifen (sowie longitudinal schwingenden Stäben), die Schwingungszahlen aus den Dimensionen, den Dichtigkeits- und Elastizitätsverhältnissen berechnen und dazu deren Tonhöhe mit dem Tone einer geeichten Stimmgabel durch das Gehör vergleichen. — Um mit einem schon genau geprüften Klangerreger andere sehr genau in das Verhältnis des Einklanges, der Oktave, der Quinte u. s. w. zu bringen, dienen bei Stimmgabeln die Lissajouschen Figuren (§§ 62 und 88), welche um so langsamer (oder gar nicht) aus einer Form in die verwandte sich verwandeln, je genauer das Intervall getroffen ist. Ferner die Methode der Schwebungen (§ 95).

Auch zu anderweitigen physikalischen Untersuchungen, bei welchen es große Zahlen zu ermitteln gilt (z. B. die Umdrehung des Foucaultschen Spiegels, § 122), läßt sich umgekehrt aus der Tonhöhe auf die Schwingungszahl, und von dieser wieder bei bekannten Dimensionen auf die Elastizität und Dichtigkeit schließen. Z. B. Bei Gitterbrücken werden Änderungen der mechanischen Spannungen manchmal aus Änderungen der Tonhöhe einer eingespannten Saite erkannt.

b) Schwingungen einiger musikalischer Klangerreger.

§ 87. Tönende Saiten.

Die Saiten an Musikinstrumenten sind durch Spannen (Drehen der Wirbel) auf bestimmte Töne gestimmt; sie werden am Klavier durch Anschlagen mittels der Hämmer, an der Harfe und Zither durch Zupfen, an der Geige (Violine), Bratsche (Viola), Kniegeige (Violoncello), Bassgeige durch Streichen mittels eines durch Kolophonium klebrig gemachten Bogens in schwingende Bewegungen versetzt. Diese Schwingungen sind in weitaus den meisten Fällen sehr annähernd rein transversal, und zwar solche in stehenden Wellen. Nur wenn z. B. der Geigenbogen unter einem spitzen Winkel gegen die Saiten bewegt wird, bilden sich auch longitudinale Schwingungen. Von den hierbei erregten, musikalisch

mit verwendeten Klängen sind zu unterscheiden die „Flageoletttöne“, welche gewissen Partialtönen der Saite (siehe unten) entsprechen. — An den Geigen hat der Spieler durch Niederdrücken der Saite ihr die für verschiedene Töne nötige Lage zu geben; am Klavier, Harfe u. s. f. ist für jeden Ton eine Saite (bezw. sind zwei, drei gleichgestimmte Saiten) vorhanden. Die Saiten für die tieferen Töne pflegt man dicker zu wählen, damit das Instrument in allen Tonlagen „geglichen“, d. h. in durchschnittlich gleicher Stärke erklinge.

Bekanntlich entsprechen z. B. am Klavier, an der Harfe u. s. f. 1. den tiefsten Tönen die längsten, den höchsten Tönen die kürzesten Saiten. 2. Die dickste Saite gibt einen höheren Ton, wenn sie stärker gespannt wird. 3. An der Harfe ist für die höchsten Töne die dünnste Saite (c'') bestimmt — Diese Einrichtungen, zunächst zu 1, werden zahlenmäßig ausgestaltet durch

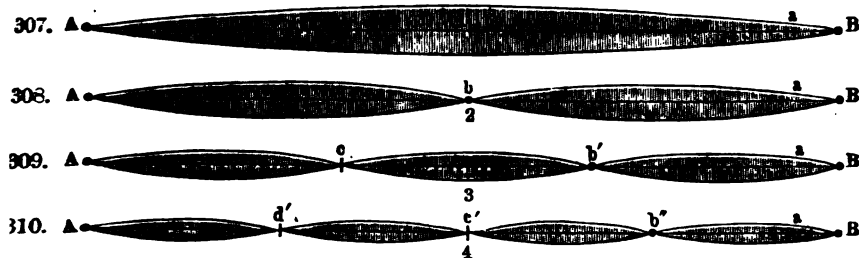
Fig. 306.



Versuche an dem Monochord (richtiger: Dichord, Fig. 306, Monochord): Zu 1: Ist der Abstand der Befestigungsstellen der Saite an beiden Enden L cm, so muß durch einen verschiebbaren Steg (bei unveränderter Spannung) der schwingende Teil der Saite auf die Längen L , $\frac{2}{3}L$, $\frac{1}{2}L$, $\frac{3}{4}L$, $\frac{2}{5}L$, $\frac{3}{5}L$, $\frac{2}{7}L$, $\frac{1}{3}L$ gebracht werden, damit wir die Töne einer Durtonleiter hören.

Fühlt man die Längen	L	$\frac{1}{2}L$	$\frac{1}{3}L$	$\frac{1}{4}L \dots$
so hört man	Grundton,	Oktave,	Quint d. Oktave,	Doppeloktav,
entspr. den rel. Schw.-Z.	1	2	3	4 ...

Allgemein sind Schwingungszahl und Saitenlänge einander **umgekehrt proportional**. Hierbei ist zunächst vorausgesetzt, daß die Saite als Ganzes schwingend ihren „Grundton“ gebe.



Teilschwingungen und Teiltöne. — Wird wieder die Saite z. B. im ersten Drittel (b' , Fig. 309) durch den Steg unterstützt, oder wurde sie hier auch mit dem Finger leise berührt, so zeigt das Aufsetzen von Papierreiterchen, daß die übrigen zwei Drittel der Saite weder in Ruhe blieben, noch zusammen als Ganzes schwangen, sondern daß sich auch im zweiten Drittel ein Schwin-

gungsknoten (c) gebildet hat. Die Saite schwingt hierbei „in drei gleichen Teilen“, so zwar, daß, wenn z. B. die Teilehen des ersten und letzten Drittels nach aufwärts sich bewegen, die des mittleren nach abwärts sich bewegen und umgekehrt. Ähnlich kann die Saite veranlaßt werden, in 3, 4, 5 ... gleichen („aliquoten“) Teilen zu schwingen (Figg. 807 bis 810): alle diese Teilschwingung wie bei den Versuchen über Seilwellen (§ 68). **MAXIMS Apparat** (Fig. 811).

Fig. 811.



Wird die Saite, während sie in drei Teilen schwingt, im ersten oder zweiten Drittel, d. h. an den Schwingungsknoten berührt, also unbeweglich gemacht, so hindert das die Schwingungen nicht, wohl aber, wenn sie zwischen diesen Stellen, insbesondere an der Stelle eines Schwingungsbauches berührt wird. — Um-

gekehrt: Die Saite kann dann nicht in drei gleichen Teilen schwingen, wenn im Abstände $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ vom Ende, da wo die Schwingungsknoten auftreten soll bewegt (gezupft, gestrichen, geschlagen) wird. So wird z. B. eine Saite, die $\frac{1}{7}$ ihrer Länge angeschlagen wird (wie die Saiten guter Klaviere — Erkläre aus der Theorie der Klangfarbe, § 90), nicht in sieben gleichen Teilen schwingen.

Daß aber eine Saite sogar Schwingungszustände besitzen kann, in welchen sie Töne mit relativen Schwingungszahlen 1, 2, 3 ... 12 ... zugleich hören läßt, kann man schon bei passender Lenkung der Aufmerksamkeit auf die durch Streichen erregten Klänge bemerken (SAUVENUR 1701, RAMBAU 1726). Solange man in diesem „Heraushören“ der „Teiltöne“ noch nicht hinreichend geübt ist, erleichtert man sich das Bemerken je eines einzelnen dieser Töne, indem man, nachdem die Saite in Schwingung versetzt war, wobei sie nur den Grundton zu geben schien, sie nun im ersten Drittel berührt, worauf die übrigen Töne gedämpft werden. Der Ton mit der relativen Schwingungszahl 3 (die Quint der Oktave des Grundtons) deutlich hervortritt. Diese Erfahrungen an schwingenden Saiten sind erstes Beispiel zu dem Begriffe der „Teiltöne“ oder „Partialtöne“, die wir auch beinahe sämtlichen anderen Klangerregern bemerken werden; somit:

Ein Klangerreger kann je nach der Art der Erregung verschiedenen Formen schwingen, denen verschiedene Teiltöne oder Partialtöne entsprechen. Der tiefste Teilton heißt Grundton, übrigen Obertöne und zwar werden sie gezählt

als 1.	2.	3.	4. ...	Teilton
oder als Grundton,	1.	2.	3. ...	Oberton.

Die Teiltöne schwingender Saiten gehören der harmonischen Reihe mit den relativen Schwingungszahlen 1, 2, 3, 4 ... an (§

Die Erklärung der bisher beschriebenen und der sonstigen Abhängigkeiten zwischen der Schwingungsart einer Saite von der Art der Erregung, von der Länge, Spannung u. s. f. ergibt sich, wenn wir uns vorstellen, daß an einer in ihren beiden Enden befestigten Saite fortschreitende Wellen, und zwar anfänglich aller erdenklichen Wellenlängen hervorgerufen und an den beiden Enden reflektiert worden sind, worauf sie mit den neu ankommenden Wellen stehende Wellen zu bilden beginnen (§ 65). Aber es werden nur wenige der so eingeleiteten Schwingungszustände dieser „angepaßt“, d. h. verträglich sein mit den mechanischen Bedingungen, unter welchen die verschiedenen Teile der Saite stehen. Die erste dieser Bedingungen ist, daß die beiden befestigten Stellen Knotenpunkte sein: es werden also einerseits überhaupt nur solche stehenden Wellen sich halten können, bei denen an den Enden der Saite Knotenpunkte zu liegen kommen (wogegen fortschreitende Wellen auch an den Enden der Saite Elongationen verlangen würden). Andererseits werden von den verschiedenen mit diesen Bedingungen gleich verträglichen stehenden Wellen, nämlich bei welchen die Saite über an den Enden noch 1, 2, 3 . . . Knoten hat, also in 2, 3, 4 . . . gleichen Teilen schwingt, je nach der Erregungsweise bald die einen, bald die anderen, bald mehrere zugleich besonders begünstigt sein. In der Tat hören wir, wenn die Saite durch Reissen mit einem harten Stift (Zitherring) erregt wird, und höhere Teiltöne als beim Zupfen mit dem weichen Finger. Sollte die Saite nur den Grundton geben, so wäre sie allenfalls durch ein sinuskurvenförmiges Brett aus der Gleichgewichtslage zu bringen und loszulassen; ähnlich durch zwei nach entgegengesetzten Seiten gekrümmte und angedrückte Bretter für die zweite u. s. w. — Für je eine dieser Teilschwingungen (gleichviel, ob gleichzeitig noch andere Teilschwingungen stattfinden oder nicht) gelten also dann zwischen der Länge L cm der ganzen Saite und den Längen $l_1, l_2, l_3 \dots$ cm der einzelnen Saite gebildeten stehenden Wellen (über ihr Maß vergl. § 63) die Bedingungen:

$$\begin{aligned} L &= l_1, & L &= 2l_2, & L &= 3l_3, \dots \\ l_1 &= L, & l_2 &= \frac{L}{2}, & l_3 &= \frac{L}{3} \dots \end{aligned}$$

Diese Erklärung des Zustandekommens der verschiedenen stehenden Wellen in fortschreitenden führt auch (LA 156) von der Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \sqrt{e:d}$ (§ 64) auf die dem Grundton entsprechende

$$\text{Schwingungszahl einer gespannten Saite: } n = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{p}{d}}.$$

Von den hiermit zusammengefaßten Abhängigkeiten entspricht die zwischen n und L der oben direkt aus den Tonhöhen durch Versuch 1 gefundenen einfachsten Beziehung. Die Beziehung von n zu der Spannung p (gemessen durch spannende Gewichte) läßt sich ähnlich nachweisen, indem die Saite durch 1, 4, 9 . . . kg belastet wird.

Minder einfach durch Versuche zu bestätigen ist die Beziehung zwischen n und der auf die Längeneinheit entfallenden Masse oder der „Längendichte“ d . B. eine Aluminiumsaite gibt annähernd die Oktave einer Silbersaite von gleichen Dimensionen bei gleicher Spannung; Verhältnis der spezifischen Gewichte $3:12 = 1/4$.

§ 88. Tönende Platten und Stäbe.

Die Glocken stellen gekrümmte elastische Platten dar, welche durch den Klöppel angeschlagen in Schwingungen geraten. (Die Fülle des Klanges einer guten Glocke rührt aber nicht nur von den Schwingungen des Metalles, sondern auch von dem Mitschwingen der Luft im Kessel her, § 94.) Hören wir mit dem Klang einer soeben angeschlagenen und dann verklingenden Kirchenglocke, so bemerken wir neben dem Grundtone auch leicht einige Obertöne, die aber im allgemeinen zum Grundton unharmonisch sind. Die besondere Kunst des Glockengiessers besteht darin, die harmonischen Obertöne durch die Gestalt der Glockenwand und durch die Wahl der Anschlagstelle zu bevorzugen. Wegen der im allgemeinen unharmonischen Obertöne sind die schwingenden Platten als eigentliche Musikinstrumente wenig in Gebrauch (Pauken, Becken . . .).

Für die experimentelle Untersuchung der Schwingungen von Platten empfehlen sich überall gleich dicke quadratische und kreisförmige Platten. Eine quadratische Platte, in der Mitte festgeschraubt und an der einen Ecke mit einem Geigenbogen gestrichen, gibt den tiefsten Ton der Platte; in der halben Länge einer Seite gestrichen gibt sie annähernd die Quint. Ist die Platte wagrecht, und wird sie mit trockenem Sand bestreut, so werden die Knotenlinien durch „CHLADNIS Klangfiguren“ (Figg. 312 bis 316) sichtbar.

Fig. 312. Fig. 313. Fig. 314. Fig. 315. Fig. 316.



Hierbei ist *a* die jeweilige Erregungsstelle, *b* eine Stelle der Knotenlinie, welche sich entweder „von selbst“ oder durch den Druck mit den Fingern bildet. Daraus, daß der Sand empor-, aber auch zur Seite geschleudert wird und erst auf den Knotenlinien Ruhe findet, läßt sich erkennen, daß die Schwingungen einer solchen Platte vorwiegend, aber nicht ganz rein, transversale sind.

Fig. 317.



Bei genaueren Beobachtungen zeigen die Knotenlinien manchmal ein langsames Wandern in der Längsausdehnung der Platte. Hiervon abgesehen bilden diese Schwingungen ein Beispiel stehender Wellen im zweidimensionalen Punktsystem. — In je zwei längs einer Knotenlinie aneinander grenzenden Feldern sind die Schwingungsrichtungen der Plattenteilchen einander entgegengesetzt. Aufsetzen der gegabelten HOPKINSSCHEN Interferenzröhre auf

Membran (Fig. 317); die von Feldern gleicher, bzw. entgegengesetzter Schwingungsrichtung ausgehende Luftschwingungen zeigen an der mit Sand bestreuten Membrane Verstärkung, bzw. Schwächung der

erferenz an (§ 93). — Die sehr schwierige mathematische Theorie der schwingenden Platten als Erklärung der Chladnischen Figuren (die z. B. zur Aufstellung der Gleichungen der Kurven in Fig. 314 führt) wurde zuerst von SOPHIE GERMAIN 16) gegeben.

Tönende Stäbe sind die Stimmgabeln, die Stäbchen der Glas-, Metallharmonika (Spieluhren . . .). Auch die bei den Transversalschwingungen der Stäbe wahrnehmbaren Obertöne gehören zur harmonischen Reihe an.

Der Versuch (§ 66) mit der Gerte, die wir bei dem dicken Ende mit der Hand schütteln und die nahe dem dünnen Ende einen deutlichen Schwingungsknoten hat, zeigt den Unterschied in der mechanischen Definition des „steifen“ und der biegsamen Saite.

An Stimmgabeln bewegen sich die Zinken zueinander hin und voneinander weg. Daher sind (mindestens) zwei Schwingungsknoten zu erwarten, welche

nahe den Enden des gekrümmten Teiles der Gabel befinden (Fig. 318).

Der Stiel der Gabel nimmt an dem gekrümmten Teile longitudinale Bewegungen an, die beim Aufsetzen auf den Tisch oder in einen Resonanzkasten den Stimmgabelton kräftig hörbar machen. — Man stimmt die Gabel durch Laufgewichte. — Man legt zwei Stimmgabeln an den Enden der Zinken aneinander gegenüber parallel, die Zinkenrichtungen aber zueinander normal gestellt, so gibt ein von dem einen Spiegelchen

das andere und von hier auf einen Schirm reflektierter Lichtstrahl „Lissajous langfiguren“ (Fig. 319; vergl. § 62).

Longitudinale Schwingungen gibt z. B. ein Holz-, Glas- . . . -Stab, der an einem Ende befestigt ist, und der Länge nach mit einem Kolophoniumlappen gerieben wird. Die Teilschwingungen sind harmonisch und folgen ähnlichen Gesetzen, wie die Teilschwingungen tönender Luftsäulen in Pfeifen.

Fig. 318.

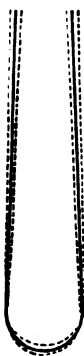
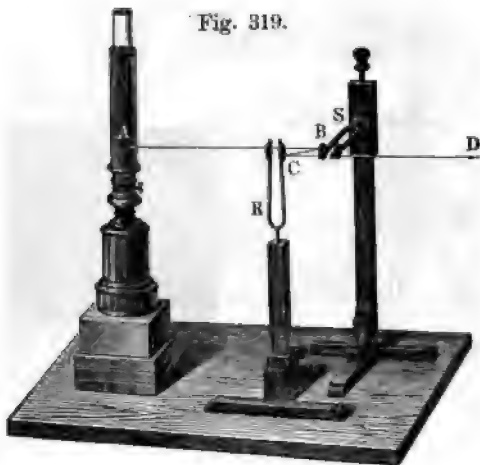


Fig. 319.



§ 89. Tönende Luftsäulen (Pfeifen).

Vorversuche: Ein beiderseits offenes Röhrchen gibt Töne, wenn man über seinen Rand hinbläst; desgleichen ein Schlüssel mit Längsbohrung, eine Flasche, ein Fingerhut. Da alle diese Körper nicht im Tönen gehindert werden, wenn die Seitenwände festgehalten sind, so liegt es nahe, die in ihnen eingeschlossene Luft als den schwingenden und daher tönenden Körper anzusehen. Diese Vermutung wird bestätigt, wenn man bemerkt, daß ein Probiergläschen, das

alwelle von der Wellenlänge
rschiedene gedeckte Pfei-
en Längen $L_1, L_2, L_3 \dots$ und
iedene offene Pfeifen von
n $L_1, L_2, L_3 \dots$ gebracht, so
den Anblasestellen Bäuche,
edeckten Enden Knoten, an
nen Enden wieder Bäuche zu
amen, wenn die Pfeifen zur
Welle passen sollen. Denken
erauf b) dieselbe Pfeife von
 L cm, und zwar abwechselnd
te und offene, von den zu ihr
longitudinalen stehenden Wellen
lener Wellenlängen l_1, l_2, l_3
erfüllt, so bestehen zwischen
den l die aus der Figur er-
Beziehungen und somit auch
a Beziehungen zwischen den
Ingszahlen.

isher entwickelten Vorstellungen
verschieden großen Elonga-
ar Luftteilchen werden nach
urch Versuche bestätigt, indem
(tambourinartiges) Rähmchen,
mbran mit Sand bestreut ist,
edene Stellen im Luftraum der
gt, wo dann der Sand am stärk-
n Stellen der erwarteten grös-
sation erschüttert wird (Fig. 312,
suche mit Seifenlamellen, Wind-
lergl.). Als „Luftteilchen“

ei nicht die einzelnen
und Sauerstoff-Moleküle
; sondern die ganzen
en rücken abwechselnd
und zusammen. In-
sind die Elongationen
on einem ebenfalls perio-
echsel der Dichtig-
zwar so, daß diese
ie größten sind an
en K ; gerade in diesem
sind aber die Elon-
die kleinsten, näm-
dig gleich Null. [— Das
ende Paradoxon erklärt
anschaulichsten an dem
rat zu Machs Wellen-
Versuch IV, Fig. 254 a, c;
Physik.

Fig. 321 a. Fig. 321 b.

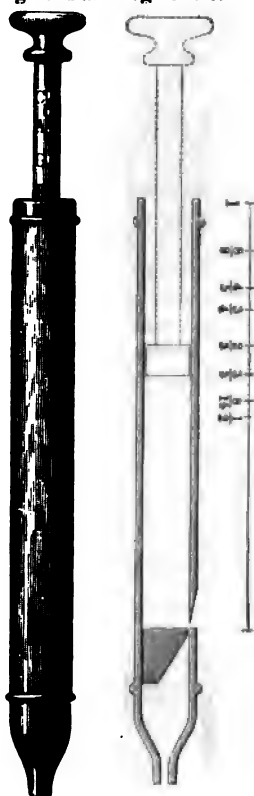
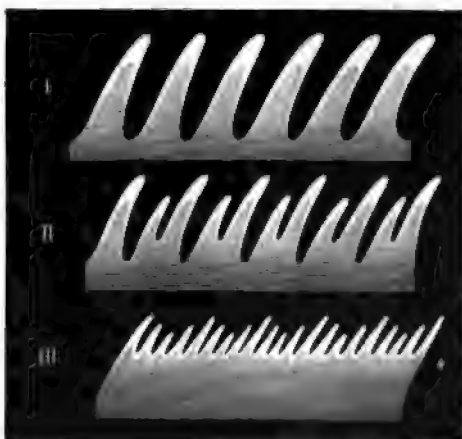


Fig. 322.



Fig. 323.



LA 125. vergl. LA 135.] — In der Tat zeigen Pfeifen, deren eine Wand aus Papier mit aufliegenden Pendelchen besteht, und noch schöner „manometrische Flammen“ (Fig. 323 a. v. S.), die stärkste Reaktion an den durch Bernoullis Theorie für die Schwingungsknoten zu erwartenden Stellen. Erst durch diese Übereinstimmung zwischen Theorie und Versuch ist auch der strenge Beweis erbracht, daß die Schwingungen der Luft in Pfeifen longitudinal sind.

Verfolgen wir nun den Vorgang der Entstehung solcher longitudinalen stehenden Wellen in den Luftsäulen der Pfeifen noch weiter zurück: Das aus der Spalte gegenüber der Lippe austretende Luftband oder Luftblatt stößt gegen die Lippe und teilt sich in einen Teil außerhalb und einen innerhalb der Pfeife, so daß abwechselnd mehr, bzw. weniger als die Hälfte des Luftstromes in das Innere der Pfeife dringt und daselbst Dichtigkeitswechsel hervorbringt, welche die Pfeife so lang fortschreiten. Indem diese fortschreitenden Wellen am gedachten, bzw. offenen Ende mit, bzw. ohne Umkehrung der Schwingungsphase (§ 66) reflektiert werden, setzen sie sich mit den immer neu ankommenden fortschreitenden Wellen zu stehenden Wellen zusammen, von welchen dann in der bereits erklärten Weise die mit den mechanischen Bedingungen und der jeweiligen Art der Erregung der Pfeife verträglichen (der Pfeifenlänge „angepaßten“) stehenden Wellen sich erhalten, die übrigen unwirksam werden. —

In der „chemischen Harmonika“ werden die Dichtigkeitswechsel durch die Hitze einer Leuchtgas- oder Wasserstoffflamme eingeleitet, und die beiderseits offene Röhre tönt dann nach den Gesetzen der offenen Lippenpfeifen. (Singende Flammen.) — Bei den Trompeten, Hörnern... unterbrechen die in Schwingung versetzten Lippen des Bläasers den Luftstrom.

Bei Blasinstrumenten mit Klappen (Flöten, Klarinetten...) kann die schwingende Luftsäule durch Öffnen der Klappen verkürzt werden; bei Instrumenten ohne Klappen entstehen durch entsprechendes stärkeres Anblasen höhere Obertöne (vergl. obigen Versuch); „Naturtöne“ der einfachsten Blasinstrumente.

Bei den Zungenpfeifen (Fig. 324 mit durchschlagender, Fig. 325 mit aufschlagender Zunge) wird der eingeblasene Luftstrom durch elastische Metallstreifen (wie bei der Mundharmonika) in regelmäßigen Stößen unterbrochen (ähnlich wie bei der

Sirene). Die Tonhöhe hängt hier einerseits von der Schwingungszahl der Zunge als eines elastischen Stäbchens, andererseits von der Länge

Fig. 324.



Fig. 325.



der Luftsäule in der Röhre und im Schallbecher ab, wobei beiderlei schwingende Körper einander in ihren Schwingungen beeinflussen.

Holzblättchen im Mundstück der Oboen, Fagotte. — Membranöse Zungen (ähnlich dem Grashalm, der in die Spalte zwischen den Daumen der ihn haltenden Hände gespannt den Luftstrom in Schwingungen versetzt) sind das einfachste Vorbild für

Bau und Funktionen des menschlichen Stimmorganes (Fig. 326, 327). Es besteht aus der Luftröhre, dem Kehlkopf, an dem sich zwei elastische Bänder (Stimmbänder) befinden, welche die Luftröhre bis auf eine kleine Spalte (Stimmritze) schließen, und dem Kehlkopf, der die Stimmritze schützt. — Durch Muskeln werden die Stimmbänder mehr oder weniger gespannt, und durch die aus der Lunge ausströmende Luft entsteht der Klang (ähnlich wie bei Zungenpfeifen), der durch den resonierenden Luftraum der Mundhöhle teilweise verstärkt wird und seine Klangfarbe erhält.

Bei Frauen und Kindern ist der Kehlkopf kleiner und die Stimmritze kürzer als bei Männern. Mutieren (Stimmwechseln).

c) Abhängigkeit der Klangfarbe von den Teilschwingungen.

§ 90. Klangfarbe und Teiltöne. Schwingungsform und Teilschwingungen.

Worin sich die weiche, dumpfe . . . „Klangfarbe“ einer Flöte von der schmetternden, glänzenden . . . einer Trompete unterscheidet (wobei Flöte und Trompete die gleiche Tonhöhe geben können), scheint zunächst ein ebenso unmittelbar gegebener und nicht weiter zu beschreibender Unterschied wie der zwischen der Tonhöhe eines tiefen, bzw. hohen Tones. Dabei scheinen an diesen

Fig. 326.

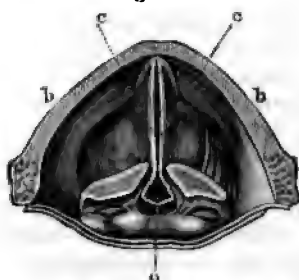
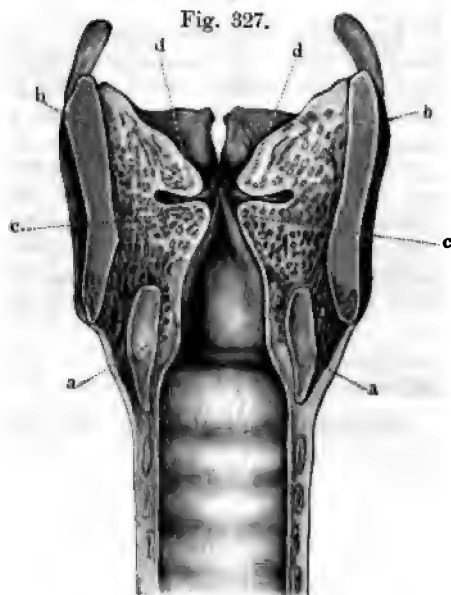


Fig. 327.



o Stimmritze. a Ringknorpel. b Schildknorpel.
c untere Stimmbänder. d obere Stimmbänder.

und anderen Klingerregern Tonhöhe und Klangfarbe innerhalb weiter Grenzen voneinander unabhängige Eigenschaften der Klänge zu sein.

HELMHOLTZ hat aber zuerst gezeigt, daß die Klangfarbe psychologisch notwendig und ausreichend bestimmt ist durch die den Grundton eines Klanges begleitenden Obertöne (psycholog. Anh., Nr. 43). Da das „Heraushören“ der Obertöne aus dem Klange mit „freiem Ohre“ bei wenig geübter Aufmerksamkeit schwierig ist, unterstützte **HELMHOLTZ** das Ohr durch Resonatoren, welche auf verschiedene Töne abgestimmt waren (über den Mechanismus des Mitschwingens vergl. § 99). — Schon vor **HELMHOLTZ** waren die den Grundton begleitenden Obertöne bemerkt (**SAUVEUR** 1701, § 87) und für verschiedene Klingerregger als teils harmonische, teils unharmonische festgestellt worden. Hieraus ergab sich die Frage, ob es auch einfache, d. h. obertonlose Klänge gebe. Ihr Dasein wurde festgestellt von **OHM** 1843, und zwar fand er als die physikalische Bedingung für ihr Gehörtwerden, daß der Klingerregger einfache Sinusschwingungen mache. Solche führen z. B. Stimmgabeln auf passenden Resonanzkästchen aus (indem die beim Anschlagen einer Stimmgabel etwa mit einem harten Körper zuerst hörbaren hohen Teiltöne bald verklingen), ferner kubische Pfeifen (angeblasene Flaschen). Ebenfalls schon vor **HELMHOLTZ** war es mehr und mehr wahrscheinlich geworden, daß, wie der Wellenhöhe die Stärke, der Wellenlänge die Tonhöhe, so der Wellenform die Klangfarbe entspreche; und zwar hatte man letzteres eben aus dem Umstande erschlossen, daß erstere beiden Eigenschaften der Wellen durch jene beiden Merkmale der Empfindung in Anspruch genommen (sowangen schon für sie vergeben) seien, so daß eben für die Klangfarbe nur die Wellenform übrig blieb. — Aber erst **HELMHOLTZ** hat ganz bestimmt die Art und Weise angegeben, inwiefern die Wellenform Einfluß gewinnt: er bewies nämlich in seinem klassischen Buche „Die Lehre von den Tonempfindungen“ (1863):

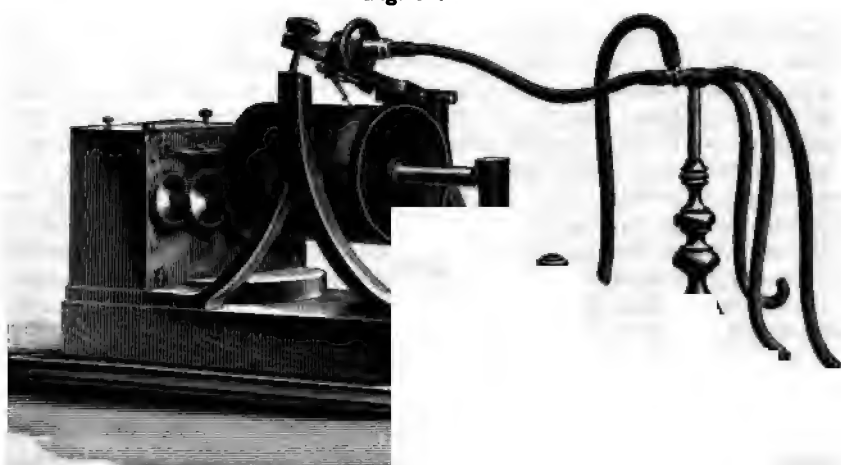
Klängen verschiedener Klangfarbe entsprechen verschiedene Schwingungsformen, und zwar jene, welche sich aus der Superposition der den Teiltönen des Klanges entsprechenden Sinuswellen ergeben. — Haben aber Wellen gleicher Länge und Amplitude nur eine Phasenverschiebung, so ergeben sich zwar verschiedene Schwingungsformen (vergl. Figg. 239 bis 242, Figg. 256, 257), denen aber dennoch nicht eine merklich verschiedene Klangfarbe entspricht.

Wie also die Klangfarbe psychologisch durch die Teiltöne, so ist sie physikalisch durch die Wellenlängen und Amplituden der Teilschwingungen notwendig und ausreichend bestimmt, wogegen deren Phasen für die Klangfarbe unwesentlich sind.

HELMHOLTZ zeigte auch, daß die Unterschiede zwischen den Vokalen nur solche der Klangfarbe sind (nicht der Tonhöhe, denn wir können auf dieselbe Tonhöhe verschiedene Vokale und denselben Vokal in verschiedenen Tonhöhen singen), also nur von den zum Grundton hinzutretenden Obertönen abhängen. So hören wir aus dem *U* beinahe keine Obertöne heraus; und in der Tat ist der Klang einer angeblasenen Flasche (der unsere Mundhöhle beim Aussprechen des *u* gleicht) ähnlich dem *U*. Mehr Obertöne hat das *A*, die meisten das *I*. — Nachdem die einzelnen Vokale mit Hilfe der Resonatoren analysiert waren, gelang es, durch Zusammensetzung der Klänge von elektromagnetisch erregten Stimmgabeln mit davorgesetzten Resonanzröhren, die einzelnen Vokale nachzuahmen; besser *U* und *A* als *E* und *I*. — Eine ähnliche Synthese der Konsonanten aus Teilgeräuschen ist bisher nicht gelungen. — Alte Sprechmaschinen.

Eine zusammenfassende Bestätigung für alle bisher dargestellten Abhängigkeiten der Tonhöhe von der Schwingungszahl und der Klangfarbe von der Schwingungsform, sowie der Schallstärke und Schalldauer von der Stärke und Dauer der physikalischen Erregung, gibt in seinem Bau und seiner Leistung das Telephon (§ 161) und noch einfacher und unmittelbarer der später erfundene

Fig. 328.



Rhonograph. — Nachdem schon 1860 Scott in seinem Phonautographen schwingende Körper ihre Schwingungen auf eine in Schraubenbewegung versetzte rufste Trommel hatte aufzeichnen lassen (§ 61), gelang es 1877 Edison, indem jene Schwingungen in die plastische Oberfläche eines Zylinders (zuerst Stanniol, dann eine Wachsmischung) eingraben liefs, durch diese Phonogramme umgekehrt wieder einen dem ursprünglichen Schall (Worte, Gesang, Orchestermusik . . .) nach Tonhöhe und Klangfarbe, Dauer und Stärke ähnlichen Schall zu erregen. — Wird nun bei der Wiedergabe des Schalles die Trommel z. B. zweimal so rasch gedreht als bei der Aufnahme des Phonogramms, so erklingt alles in der nächst höheren Oktave. Man kann man aus der Aufeinanderfolge der Pünktchen eines Phonogramms auf die Tonhöhe oder Höhe der entsprechenden Töne schließen (falls sie hinreichend lang aushalten sind), ebenso auf Stärke und Schwäche. Die feineren Unterschiede der Schwingungsform dagegen, nach welchen man sogar noch den Stimmcharakter einzelner Töne bei der phonographischen Wiedergabe sehr wohl unterscheiden kann, sind dem Auge bei weitem nicht mehr zu erfassen. (Das Grammophon ist ein vereinfachter Phonograph. — Der Telephonograph von Poulsen 1900, vergl. § 161.)

B. Ausbreitung des Schalles.

§ 91. Die Wellentheorie des Schalles.

Geschichtliches: Wenn der Nichtphysiker davon spricht, daß der Klang einer Geige, der Knall einer Kanone zu ihm dringe, so mag nicht selten mehr oder minder deutlich der „Schall“ wie ein körperliches Ding gedacht werden.

B. der Schall eines Waldhorns als ein rundes weiches, der eines Zündhütchens als etwas kleines spitzes). Gleichwohl ist es nie zu einer eigentlichen „Emissions-

theorie des Schalles* (analog der Newtonschen des Lichtes, § 123) gekommen, sondern schon im Altertum war gelegentlich die Ausbreitung des Schalles mit der von Wasserwellen verglichen worden (Vitruv). Als dann namentlich durch Galilei Schüler **MARSENUS** (1636) die wissenschaftliche Beschäftigung mit dem Schallerscheinungen begann, war die Mechanik schon so weit ausgebildet, daß sowohl die Erregung des Schalles als rein mechanisch durch Schwingungen, wie auch die Ausbreitung des Schalles als rein mechanisch durch Wellen verurteilt gedacht werden konnte. Daß es longitudinale Wellen der Luft seien, in welchen sich Geräusche wie Klänge von der Erregungsstelle rings durch den luft erfüllten Raum ausbreiten, war ebenfalls nicht erst Sache besonderer experimenteller Feststellungen, sondern es lag aus der um jene Zeit erforschten Eigenschaften der Luft (§ 43) sogleich nahe, daß in der Luft leichter Verdichtungen und Verdünnungen (longitudinale) als seitliche (transversale) periodische Verschiebungen herstellbar sind. — Schon ein halbes Jahrhundert später hatte sich die Einsicht in den mechanischen Vorgang so vertieft, daß **NEWTON** unter anderen die allgemeine Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Wellen in elastischen Körpern (§ 64) zunächst speziell für Schallwellen aus den Gesetzen der Mechanik ableitete, worauf dann die Anwendbarkeit dieser Formel für irgend welche Störungen des Gleichgewichtes in elastischen Medien allgemein erkannt wurde. —

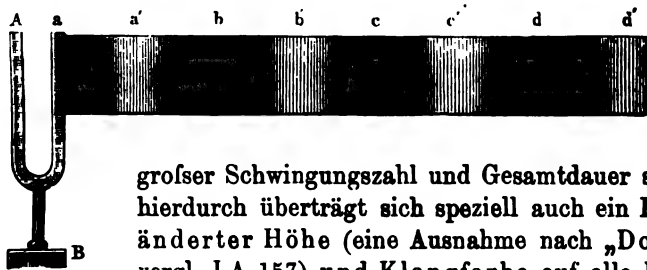
Die der Ausbreitung des Schalles zu Grunde liegende Fortpflanzung der Schallwellen ist im einzelnen so zu beschreiben und zu erklären:

a) Eine Verdichtung (z. B. infolge der aus dem Kanonenrohr dringenden Pulvergase) breitet sich im Luftraum von der Erregungsstelle weg dadurch aus, daß die Verdichtung begleitet ist von einer Erhöhung der Spannung, infolge deren die nächstfolgende Schicht eine Verdichtung erfährt u. s. f. Aber auch

b) eine Verdünnung (Herausreißen eines Stempels aus einer Knallbüchse, in welche die nächsten Luftteilchen hineinstürzen und so eine Verdünnung bewirken), breitet sich von der Erregungsstelle weg aus (so daß hier die Fortpflanzungsrichtung des Schalles entgegengesetzt ist der Bewegungsrichtung der in die Verdünnung jeweilig zurückströmenden Luftteilchen).

c) Ein Wechsel von Verdichtungen und Verdünnungen (z. B. 435 in 1 sec bei einer Normalstimmgabel, Fig. 329) breitet sich

Fig. 329.



LA 157.

so aus, daß an je einem anderen Punkte des Luftraumes ein gleicher Wechsel von ebenso

großer Schwingungszahl und Gesamtdauer stattfindet. Eben hierdurch überträgt sich speziell auch ein Klang in unveränderter Höhe (eine Ausnahme nach „Dopplers Prinzip“ vergl. LA 157) und Klangfarbe auf alle Punkte des Luftraumes, bis zu welchen er überhaupt noch hörbar ist.

Für eine genaue quantitative Beschreibung aller dieser Vorgänge ist die grundlegende Größe die der

§ 92. Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles.

Dafs dem Schalle eine auch noch im Vergleich zu den grössten Windgeschwindigkeiten (etwa 50 m sec^{-1}) verhältnismäfsig grofse Ausbreitungsgeschwindigkeit zukommt, beweisen die kunstlosen Beobachtungen des bei einiger Entfernung bald merklichen Zeitunterschiedes zwischen dem Sehen des Blitzes und Hören des Knalles einer Kanone; desgleichen dem Sehen und Hören eines Art-, eines Hammerschlages; zwischen dem Sehen des Wölkchens und Hören des Piffes einer Lokomotive, Blitz und Donner beim Gewitter u. dergl. Hierbei zeigt sich der Zeitunterschied um so gröfser, je entfernter wir von der Schallquelle sind. — Dafs dabei Geräusche und Klänge von beliebiger Stärke und beliebiger Tonhöhe sich mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreiten, folgt schon aus der einfachen Erfahrung, dafs die Musik eines Orchesters in allen Entfernungen, bis zu welchen sie überhaupt hörbar ist, zusammenstimmend bleibt und nichts von einem Vorseilen etwa der höheren Töne vor den tieferen, der schwächeren vor den stärkeren zeigt (eine Ausnahme für die ungewöhnlich starken Schallerreger z. B. Explosionen siehe unten).

Jene Beobachtungen an Kanonen wurden schon von der Florentiner Akademie (1660) zu messenden Versuchen ausgebildet. Im Prinzip wäre nur die Raumstrecke von $s \text{ m}$ zwischen der Kanone und dem Beobachter von Blitz und Knall, sowie die Zeitstrecke von $t \text{ sec}$ zwischen beiden Wahrnehmungen zu messen. Dann ist die gesuchte Fortpflanzungsgeschwindigkeit $c = \frac{s}{t} \text{ m sec}^{-1}$, vorausgesetzt, dafs diese Geschwindigkeit eine konstante ist. Dafs diese Voraussetzung zutrifft, liefs sich beweisen durch mehrere Beobachtungen, welche $\frac{s_1}{t_1} = \frac{s_2}{t_2} = \dots = \text{const}$ ergäben. — Bei der Ausführung der Versuche ist aber zu beachten, dafs zwischen Kanone und Beobachter die Luft zumeist eine Bewegung von unbekannter Richtung und Geschwindigkeit hat, wodurch die Geschwindigkeit des Schalles um einen zunächst unbekannten Betrag $x \text{ m sec}^{-1}$ vergrößert oder verkleinert wird. Diese Schwierigkeit wurde bei den sehr sorgfältigen Versuchen, die 1822 von einer Pariser Kommission durchgeführt wurden, an der unter anderen ARAGO, HUMBOLDT, GAY-LUSSAC teilnahmen, dadurch ausgeschaltet, dafs an zwei Stationen gleichzeitig in einem vorher verabredeten Zeitpunkte Kanonen abgefeuert und ihr Knall von je der anderen Station aus beobachtet wurde. Sind dann die Geschwindigkeiten $c_1 = c + x$ und $c_2 = c - x$, so wird: $c = \frac{1}{2} (c_1 + c_2)$. Aus 12 einzelnen Versuchen nach je fünf Minuten ergab sich für die Temperatur von 16°C (und der damals herrschenden Luftfeuchtigkeit) $c = 340,88 \text{ m sec}^{-1}$.

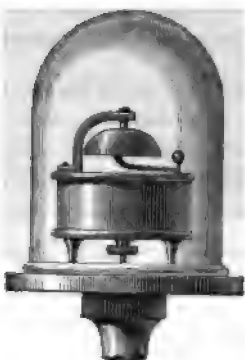
Dafs hiermit wirklich schon die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft ermittelt sei, ist aber auch nur unter der stillschweigenden Voraussetzung richtig, dafs das Licht (des Kanonenblitzes) die Strecke zwischen den zwei Stationen in unmerklich kurzer Zeit zurückgelegt habe; die Berechtigung dieser Voraussetzung bewährt sich aus der unabhängig von dem beschriebenen Versuch ermittelten Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes, welche so grofs ($300\,000 \text{ km sec}^{-1}$, § 122) ist, dafs es die Strecke von 19 km bei den Pariser Versuchen in $0,00006 \text{ sec}$ zurücklegt. Diese Größe ist verschwindend schon gegenüber der viel gröfseren „Reaktionszeit“ (psycholog. Anh., Nr. 41), welche auch für die

geübtesten Beobachter zwischen dem Sehen und dem Auffassen von Blitz, Knall und Zeigerstellung der Uhr verfiel. Die Beobachtungen bei je einem der Pariser Versuche differieren bis zu 0,4 sec, was schon einen Geschwindigkeitsunterschied bis zu 8 m in 1 sec bedeutet.

Dafs es bei den oben beschriebenen alltäglichen Erscheinungen und den wissenschaftlichen Versuchen wirklich die Luft ist, welche als Schallleiter fungiert (zum Unterschiede von dem die Ausbreitung des Lichtes vermittelnden „Lichtäther“ § 121), zeigt der sogleich als einer der ersten Luftpumpenversuche von GUERICKE erbrachte Nachweis, dafs wir von einer unter dem Resipienten einer Verdünnungsluftpumpe stehenden Glocke (einem Läutwerk) um so weniger hören, je mehr die Luft ausgepumpt ist (wegen der luftleeren Resipienten keineswegs weniger lichtdurchlässig ist), und dafs sich umgekehrt der Schall wieder stärker vernehmen läfst, wenn Luft zugelassen wird.

Überdies zeigt aber dieser Versuch mittelbar, dafs auch andere Stoffe als Luft den Schall leiten, indem er nur gelingt, wenn das Läutwerk durch „schlechte Schallleiter“ (Tuch, Kautschuk, Wolle, Elai...) gegen die guten Schallleiter (Metalle, Glas...) des Luftpumpentellers und Resipienten isoliert ist. — Aber auch schon vor diesen Versuchen waren es zunächst alltägliche Erscheinungen, bei welchen die Schallleitungsfähigkeit auch anderer Körper als Luft zur Geltung kommt: Man hört in der Luft erregten Schall, wenn man unter Wasser schwimmt, desgleichen durch geschlossene Türen, Fenster, durch Mauern. Legt man das Ohr auf das Eisenbahngleise, so kann man das Rollen des noch fernen Zugs vernehmen. Das Ticken einer Uhr hört man durch einen langen Holz- (Eisen-...)stab, wenn man das Ohr an das andere Ende des Stabes legt, oder es mit den Zähnen fafst.

Fig. 330.



Von diesen anderen Schallleitern ausser Luft ist auch für Wasser die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt und 1435 m sec⁻¹ gefunden worden.

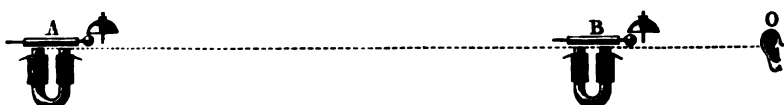
direkte Versuche (Glockenschlag im Genfersee, COLLADON und STURM 1827) bestimmt und 1435 m sec⁻¹ gefunden worden.

Die Erklärung der Tatsache einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft und anderen Stoffen ergibt sich für uns heute als eine Folge davon, dafs alle Schallausbreitung durch Fortpflanzung von Wellen und zwar fortschreitenden longitudinalen erfolgt; umgekehrt wird diese Vorstellung durch die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles bestätigt. Die Kräfte, infolge deren die Wellen sich ausbreiten, sind ausnahmslos die Elastizitätskräfte der Luft und der übrigen Schallleiter. Daher sind auch alle elastischen Stoffe Gutleiter, alle unelastischen Schlechtleiter des Schalles.

Indem Kautschuk sich als sehr schlechter Schallleiter erweist, werden wir aufmerksam, dafs hier nicht das Elastischsein des Kautschuks im populären Sinne, sondern seine geringe Fähigkeit, erhaltene Deformationen vollständig wieder herzustellen, wesentlich ist (§ 51).

Zu den direkten experimentellen Methoden für die Bestimmung der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles kommen noch direkte rechnerische Methoden auf Grund von NEWTONS Formel $c = \sqrt{e:d}$; sowie mancherlei indirekt-experimentelle, z. B. die nach Fig. 331.

Fig. 331.



Allerdings gab NEWTONS theoretische Formel sowohl im Vergleich mit den schon vor NEWTON gefundenen ungenaueren als auch den späteren genauen Versuchsergebnissen Werte, die etwa im Verhältnisse $1 : \sqrt{1,41}$ zu klein waren. Aber auch diese Nichtübereinstimmung wurde durch LAPLACE (1816) als eine Folge davon erkannt, daß die mechanischen Verdichtungen und Verdünnungen von thermischen Veränderungen begleitet sind, welche infolge des raschen Wechsels sich nicht so rasch ausgleichen, daß sie nicht die elastischen Kräfte der Luft beeinflussen müßten. Es wird nämlich in den Verdichtungen die Luft erwärmt und ihre Spannkraft vergrößert, in den Verdünnungen ebenso die Spannkraft verkleinert, daher der Unterschied der Spannungen, d. i. die die Fortpflanzung bewirkende Spannungsdifferenz, in stärkerem Maße vergrößert, als es bei gleichbleibender Temperatur wäre. Die durch LAPLACE korrigierte Formel lautet dann:

$= \sqrt{\frac{e}{d} \cdot \frac{S}{s}}$, wo $\frac{S}{s} = 1,41$ das Verhältniß der spezifischen Wärme der Luft

bei konstantem Druck zu jener bei konstantem Volumen (§§ 72, 82) ist. Zu diesem Zweck die Temperaturwechsel bedingten Korrektionsfaktor tritt noch der Faktor $(1 + \alpha t)$, wenn die durchschnittliche Temperatur nicht 0° , sondern $t^\circ \text{C}$

ist, wodurch sich die Formel zu $c = \sqrt{\frac{e}{d} \cdot \frac{S}{s} (1 + \alpha t)}$ erweitert. — Dagegen

ist eine Angabe des jeweiligen Dichtigkeitszustandes (gemessen durch den Barometerstand) für die Schallgeschwindigkeit in Gasen nicht nötig, weil bei 2, 3 . . . mal so großer Dichte auch die Spannkraft 2, 3 . . . mal so groß ist und somit der Quotient $e:d$ derselbe bleibt. — Wohl aber sind an obigen Formeln noch weitere Korrekturen anzubringen mit Rücksicht auf die Beimischung von Wasserdampf und anderen Gasen zur Luft. Erst durch Abrechnung dieser Mitbedingungen ergibt sich als

theoretische Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schall- und anderer elastischer Wellen in trockener Luft bei 0°C (unabhängig vom Barometerstand): $c = 333 \text{ m sec}^{-1}$ (genauer: 331,36). — Für Luft von mittlerer Temperatur und Feuchtigkeit kann rund 340 m sec^{-1} gelten.

Für ungewöhnlich starke Schallerregungen, wie Explosionen, aber auch für die Verdichtung der Luft vor einem Projektil, fand MACH durch mittelbare Methoden (es wurde die Luft um das fliegende und durch einen elektrischen Funken beleuchtete Projektil mit Hilfe der „Schlierenmethode“ photographiert), daß hier die Fortpflanzungsgeschwindigkeit solcher Impulse in Luft bis gegen 300 m sec^{-1} betragen kann. Von diesen Geschwindigkeiten wird die obige Geschwindigkeit von 340 m sec^{-1} als die normale Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft unterschieden.

Bei festen und flüssigen Stoffen sind Korrekturen für die Temperaturwechsel und für die Durchschnittstemperatur gewöhnlich nicht nötig (immerhin aber für geeichte Stimmgabeln, § 86), da weder Elastizität noch Dichte sich merklich mit der Temperatur ändern. Es gelten daher folgende Angaben annähernd für beliebige Temperaturen: In Hölzern ist die Schallgeschwindigkeit 10 bis 15mal, in Gufseisen 10mal, in Silber 9mal, im Wasser 4,2mal so groß als in der Luft. Dabei stimmt der bei Wasser direkt gefundene Wert sehr gut mit dem theoretischen. — Für feste Stoffe (Metalle, Glas, Holz . . .) läßt sich c am leichtesten ermitteln, indem man aus ihnen Stäbe formt, sie in longitudinale Schwingungen versetzt und deren Schwingungszahl aus der Tonhöhe entnimmt. Weil nun, wenn der Stab in der Mitte festgeklemmt ist und den Grundton gibt, die Stablänge L gleich ist der Länge l einer stehenden Welle (= der halben Wellenlänge einer fortschreitenden), so kann aus $2L = \frac{c}{n}$ geschlossen werden $c = 2Ln$. — Ebenso

läßt sich c für Luft und andere Gase bei beliebigen Temperaturen indirekt experimentell finden, indem man Pfeifen mit diesen Gasen füllt und die Tonhöhen beim Anblasen beobachtet; vergl. die Beziehungen zwischen L und l in § 89, Fig. 22.

Wie in diesen Beispielen kann überhaupt die Kenntnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in einem gegebenen Stoff für die mittelbare Erkenntnis der elastischen Kräfte dieses Stoffes Aufschluß geben.

§ 93. Reflexion und Brechung, Beugung und Interferenz des Schalles.

Beobachtungen und Versuche: Ruft man gegen eine hinreichend entfernte Wand (Gebäude, Waldessaum, Felsen . . .), so vernimmt man den Ruf als Echo oder Wiederhall. Ist der Schall so stark (Pistolenknall), daß eine 340 m entfernte Wand noch ein merkliches Echo gibt, so verfließen zwischen Schuß und Echo 2 sec; bei $340:18 = 18\frac{2}{3}$ m nur $\frac{1}{9}$ sec. Je nachdem der Schall hinreichend stark und zeitlich scharf abgegrenzt ist, vernehmen wir schon nach etwa $\frac{1}{9}$ sec, also in etwa 20 m Abstand von der Wand, das Echo, sonst nur bei entsprechend größerem Abstände. Bei kleinerem Abstände (in Sälen, Gängen . . .) zeigt sich nur ein Nachhall.

Bei einer entsprechend weit entfernten Wand gibt es ein mehrsilbiges, bei mehreren verschieden weit entfernten und entsprechend gerichteten Wänden ein mehrfaches Echo; z. B. bei Adersbach in Böhmen ein siebensilbiges dreifaches.

Daß bei den Erscheinungen des Widerhalles (wie man Wiederhall und Nachhall zusammen auch nennt) eine Reflexion der Schallwellen stattfindet, schließen wir zunächst nach Analogie zur Reflexion elastischer Körper an Wänden einerseits, der Reflexion von Licht- und Wärmestrahlen andererseits. Wir werden daher auch erwarten, daß auch für „Schallstrahlen“ das Reflexionsgesetz gilt: Der reflektierte Strahl bleibt in der Einfallsebene; und Der Reflexionswinkel ist gleich dem Einfallswinkel. Doch ist zu bemerken, daß weder der Begriff des „Schallstrahles“ auf so direkt nachweisbaren Tatsachen beruht wie der des Lichtstrahles, noch auch die Reflexion des Schalles sich auf annähernd ebene Flächen beschränkt, bei denen man überhaupt von einem Einfallslot und daher einem Einfalls- und Reflexionswinkel mit einiger Genauigkeit sprechen kann.

namentlich kann ja auch ein Waldessaum, der nichts weniger als einer Ebene ist, ein sehr kräftiges Echo geben; was sich immerhin daraus erklären läßt, da auch die Luft zwischen den Baumblättern und Zweigen schwerer beweglich ist. [Dies wieder läßt sich vergleichen mit den Erscheinungen der Reflexion am deckten Ende der Pfeifen. Überdies zeigt sich eine Reflexion auch an dem freien Ende von Gängen, die ins Freie münden, wovon dann die Reflexion am offenen Ende der Pfeifen (§ 89) ein spezieller Fall ist, und was sich, wie dort, aus erklärt, daß die Luft außerhalb des Ganges freier beweglich ist als in ihm.] Erst solche Tatsachen berechtigen uns also, den Begriff der Reflexion wirklich auch auf Schallwellen auszudehnen. In der Tat haben sich die Reflexionserscheinungen für Licht und strahlende Wärme auch für den Schall nachahmen lassen, z. B. Ticken einer Uhr zwischen zwei Hohlspiegeln, ähnlich dem Versuch mit zwei Brennsiegeln (§ 119). — Flüstergewölbe. Ohr des Dionysius.

Desgleichen wurden durch große linsenförmige Säcke, die mit Gasen von anderer Dichtigkeit als Luft erfüllt waren, die Erscheinungen der Lichtbrechung an Linsen nachgeahmt. In der Natur kommen solche Brechungen von Schallstrahlen vor, wenn Schall schief durch verschieden dichte Schichten der Atmosphäre hindurch weit sich fortpflanzt; also zu vergleichen der atmosphärischen Brechung des Lichtes (§ 197). Vorwiegend aus solchen Brechungen erklärt sich nach JÄGER, daß wir um so viel besser den Schall aus dem Tal auf dem Berg, als umgekehrt hören. — Viel auffallender als die Brechungen sind übrigens die Erscheinungen der Beugung des Schalles. Wir können ohne weiteres in die Ecke hören“. Es fehlt geradezu an Tatsachen, welche die volle Analogie haben zu denjenigen Grunderscheinungen der Optik, die uns zum Begriffe der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes“ führen, nämlich Dunkelkammer und Schatten (§ 99), wir könnten höchstens von sehr verschwommenen „Halbschatten des Schalles“ sprechen.

Namentlich diese Tatsachen der Beugung des Schalles und seiner Reflexion an sehr unebenen Wänden stehen aber in vollem Einklange mit der Huygensschen Vorstellung von der Ausbreitung der Wellen (§ 68), wenn wir bedenken, daß die Schallwellen so unvergleichlich größere Länge haben als die Lichtwellen. Denken wir uns nämlich z. B. in Fig. 264 und Fig. 265 (S. 250) statt der durch die Gerade MN dargestellten reflektierenden Ebene eine von dieser Ebene unregelmäßig abweichende Reihe von Punkten (die Bäume des echogebenden Waldessaumes darstellend), welche als jeweilige Erregungszentren Huygensscher Elementarwellen wirken, so wird die einhüllende Fläche der Elementarwellen doch noch einer Ebene ähnlich bleiben, wenn jene Abweichungen im Vergleich zu den Wellenlängen unbedeutend sind. — Erst nach Berücksichtigung aller dieser Lebensumstände dürfen wir sagen:

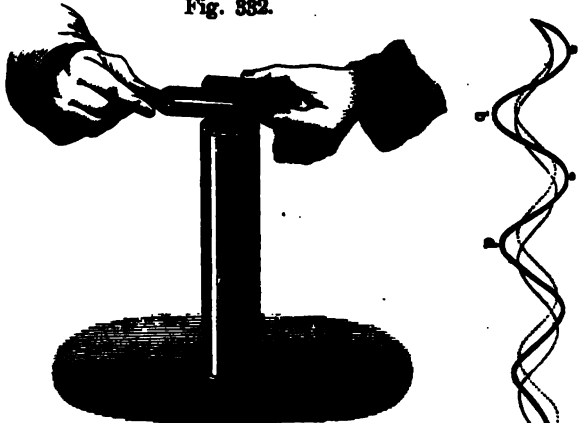
Auch für die als Schallwellen wirksam werdenden Luftwellen gelten die Gesetze der Reflexion, Brechung und Beugung gemäß der allgemeinen Wellenlehre.

Außer der gerade bei den Schallwellen namentlich für die Klangfarbe (§ 90) wichtigen Erscheinung der Superposition im allgemeinen läßt sich auch speziell Interferenz von Wellen gleicher Wellenlängen und Amplituden in zahlreichen Erscheinungen nachweisen; so in folgendem

Versuch: Eine Stimmgabel (ohne Resonanzkasten) wird nahe dem Ohre bei ihrer unveränderter Stellung zu diesem um ihre Längsachse gedreht. Man hört dann ein An- und Abschwollen des Tones. (Auch für einen größeren

Zuhörerkreis wird dieser Wechsel der Tonstärke deutlich, wenn man die Gabel über eine passend abgestimmte Resonanzröhre hält. Wird über die eine Zinke ein Papierrohr geschoben, so zeigt sich die Schwächung der Tonstärke nicht; Fig. 332. — Erklärung: Die Stimmgabelzinken befinden sich in Bezug auf die zwischen ihnen liegende Symmetrieebene in symmetrischen Schwingungszuständen und entsenden daher zu jedem Punkte jener Ebene Wellen, die, weil sie gleiche Wege zurücklegen müssen, immer im selben Zeitpunkte je eine Verdichtung, bezw. eine Verdünnung erregen, also sich zu allen Zeiten unterstützen. Da-

Fig. 332.



gegen wird es Punkte M, M' geben, bis zu welchen die Wegunterschiede je eine halbe Wellenlänge betragen; an diesen Stellen heben sich dann die Wellen auf. Die Erscheinung wurde von Th. Young beobachtet und von den Gebrüdern Waagen gründlich untersucht; sie ist vorbildlich für Fresnels Spiegelversuch (§ 126).

Weitere Erscheinungen der Interferenz des Schalles: HORKINS gegabelte Röhre (Fig. 316); KUNDTs Interferenzröhre mit posaunenartig zu verlängernden Röhren; hier gibt der leicht direkt zu messende Wegunterschied der Wellen ein Mittel zur Bestimmung der Wellenlänge und weiterhin der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in der Luft. — Eine besondere Art der Interferenzerscheinungen sind die

Schwebungen oder Stöße. Versuch: Werden von zwei gleich gestimmten Stimmgabeln die Zinken der einen mit leichten Laufgewichten versehen (oder mit Wachs beklebt), so vernimmt man ein An- und Abschwellen des gemeinsamen Tones in um so rascherer Folge, je stärker die Verstimmung ist. Die Anzahl der Schwebungen oder Stöße ist gleich der Differenz der Schwingungszahlen der beiden Gabeln, übrigens unabhängig von den absoluten Schwingungszahlen (LA 158).

Erklärung (vergl. Fig. 333): Beträgt z. B. diese Differenz 1, d. h. sind die Schwingungszahlen der Gabeln n und $n + 1$, so enthält der in 1 sec entsendete Wellenzug n , bezw. $n + 1$ Wellenberge, so daß in der Mitte dieses Wellenzuges Berg und Tal aufeinander fallen, also einander schwächen, am Anfang und Ende des Wellenzuges aber Berg auf Berg einander

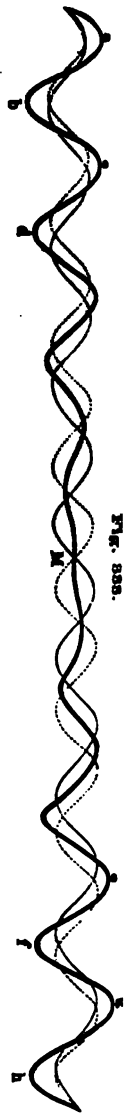


Fig. 333.

stärken. Bei n und $n + 3$ ist $n : (n + 3) = \frac{n}{3} : (\frac{n}{3} + 1)$ und es tritt somit ein An- und Abschwollen des Tones schon in je $\frac{1}{3}$ sec ein, also in 1 sec dreimal. Ist also z. B. eine Stimmgabel mit einer Normalstimmgabel in 1 sec ν Stöße, so trägt ihre Schwingungszahl $435 + \nu$ oder $435 - \nu$. Entscheidung zwischen diesen zwei Möglichkeiten durch direktes Anhören oder durch Aufkleben von Wachs auf die zu prüfende Gabel. — Über die Beteiligung dieser Stöße an dem gemeinsamen Zusammenklang dissonierender Klänge vergl. psycholog. Anh., Nr. 43. Anh. 48.

§ 94. Mittönen und Resonanz. Absorption und Intensität des Schalles.

Versuch a): Hält man in die Nähe einer klingenden Glocke eine Röhre, die zu solcher Länge ausgezogen ist, daß sie, wie eine Pfeife angeblasen, einen Ton von gleicher Höhe gibt, wie die Glocke, so verleiht die Luft in der Röhre ins „Mittönen“, und zwar selbst dann, wenn die Glocke nur mehr so schwach klingt, daß man sie allein kaum noch hören würde.

Versuch b): Eine von der Zimmerdecke oder dergl. herabhängende und durch ein Gewicht gespannte Saite gibt selbst bei starken Schwingungen nur einen kaum hörbaren Klang; wird sie auf das Monochord, eine Violine . . . gespannt, so wird ihr Klang durch die „Resonanz“ des elastischen Holzes und der Luft im Kasten voll und kräftig.

Das Mittönen tritt nur bei gleichgestimmten Körpern ein, Resonanz dagegen auch bei solchen, die nicht auf einen bestimmten Ton abgestimmt sind; letzteres dauert häufig (z. B. zwischen zwei gleichen Stimmgabeln) auch nach dem Aufhören des ursprünglichen Klanges noch, erst, letzteres nicht. — Wovon hängt die Stärke einer Violine hauptsächlich ab? — Abhängig in ein offenes Klavier, dessen Dämpfer gehoben sind, Klänge verschiedener Höhe und Klangfarbe (Vokale); nur die mit dem Grundton und den Obertönen jedes Klaves gleichgestimmten Saiten geraten in Mittönen, wodurch der Klang genau nachgeahmt wird. — HELMHOLTZ' Resonatoren (Fig. 334, hierzu § 90).

Fig. 334.



Das Mittönen erklärt sich als rein mechanische Folge der allmählichen Ummarmung schwacher Anstöße an einen Körper, dem eine bestimmte Schwingungszahl zukommt. Hat man z. B. von einem Pendel (Zwirnknauel an Faden) die ihm nach seiner Länge zukommende Schwingungsdauer ermittelt und bläst nun schwach, aber in gleichem Tempo mit den Schwingungen auf das Pendel, so gerät es bald in kräftige Schwingungen. (Dies auch noch, wenn man nur bei jeder zweiten, dritten . . . Schwingung bläst.) Läuten schwerer Glocken durch kleine Hämmer. Schwingungen einer Kettenbrücke beim Darübergehen im bestimmten Takte. . . Da strenge Gleichheit der Schwingungsdauern zweier zusammen schwingender Körper unendlich unwahrscheinlich wäre, so zeigen alle Erfahrungen über

das Mitschwingen, speziell Mittönen, daß dieses auch bei hinreichender Verschiedenheit der Schwingungsdauern eintritt. Es suchen sich aber zwei Körper in ihren Schwingungsdauern einander anzupassen, z. B. zwei Pendel, welche an demselben Brett befestigt sind, nehmen gleichen Gang an, auch sonst merklich differieren würden.

Die Tatsachen der Resonanz machen uns insbesondere darauf aufmerksam, daß, wenn z. B. eine Saite gar keine Gelegenheit hätte (sie hänge an einem starren Körper in luftleerem Raume), ihre lebendige Kraft an umgebende Körper abzugeben, zwar ihre Schwingungen ins Unendliche fortsetzen müßte, so lange, bis sie durch innere Reibung sich in Wärme umgesetzt hätte, auch keinerlei Ton von sich geben könnte. Indem die Resonanzkörper die Abgabe der lebendigen Kraft erleichtern, dämpfen sie zugleich die Schwingungen.

Daß der Schall sich nicht auf sehr große Entfernungen ausbreitet, ist bis auf höchstens 22 km gehört worden, die Explosion des 1883 allerdings auf Abstände wie von Berlin bis nach Petersburg und

Fig. 335.



hat mannigfaltige Reflexion, teils Reflexion, teils Brechung, beim Übergang in die Luft und dabei meistens in feuchteren Schichten Luft (Fig. 335), so

Umsetzung der lebendigen Kraft der Schallschwingungen in andere Formen von Energie, meist in Wärme. So wird durch ein Schneegestöber der Schall sehr gedämpft. Gefäß mit Schaumwein, Bier, gestandenem Wasser gefüllt sind, klingen beim Aufschäumen dumpf. Dieses Aufgezehrtwerden der Schallwellen als solcher kann verglichen werden mit der Absorption des Lichtes und der strahlenden Wärme (§§ 97, 117).

Nur wo solche Absorption des Schalles nicht stattfindet, gilt die physikalische Überlegung, daß, wenn von einem Punkte in einem allseitig gleichartigen Medium der Schall sich ausbreitet, dieselbe lebendige Kraft sich über Kugelflächen von 1, 2, 3 . . . r cm Radius und daher über 1-, 4-, 9-, 16 . . . r^2 mal so große Flächen verteilt, so daß auch für den Schall das Intensitätsgesetz gilt (§§ 97, 117).

C. Die Wahrnehmung des Schalles.

§ 95. Aus der Anatomie des Gehörorganes.

Fig. 336.



336. Schematischer Durchschnitt durch das Ohr, von vorne gesehen. Natürliche GröÙe. *yrinth*. *BB* Paukenhöhle. *cc* Trommelfell. *les Fenster [fenestra vestibuli]*, *des Fenster [fenestra cochleae]*.

Fig. 340.

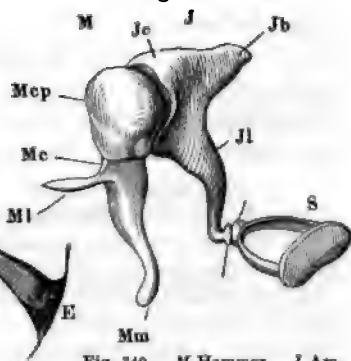


Fig. 340. *M* Hammer. *J* Amboss. *S* Steigbügel.

Fig. 338.



Fig. 339.

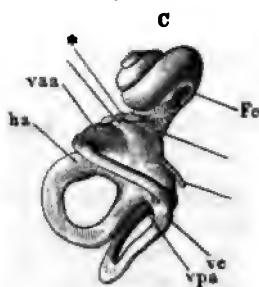
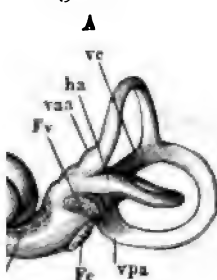


Fig. 337.



337—339. *A* Linkes Labyrinth, von außen. *B* Rechtes Labyrinth, von innen. *C* Linkes Labyrinth, en. — *Fc* *Fenestra cochleae* (der Schnecke). *Fv* *Fenestra vestibuli* (des Vorhofes). — *h* Horizontaler Bogengang. *ve* Gemeinsamer Schenkel der beiden vertikalen Bogengänge.

341.



341. *Fec* *Fenestra cochleae* (der Schnecke). — *H* Hackenförmiges Ende des Helikotrema (die Kom-
mündung begrenzend).

Fig. 342.

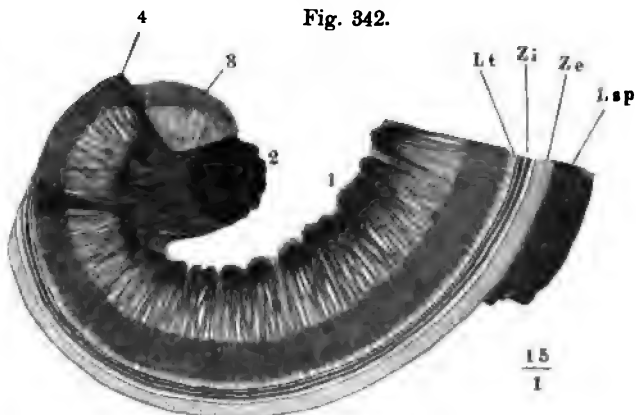


Fig. 342. Eintritt des Schneckenerven (des akustischen Zweiges des VIII. Hirnnerven, dessen anderer Teil dem statischen Sinne dient, psychol. Anh., Nr. 41) in die Spindel der Schnecke. — 1, 3, 4 knöcherne Anh. 41 Scheidewand der Schnecke.

die Schnecke durch die das runde Fenster überziehende Membran. Vom Trommelfell erstreckt sich in der Paukenhöhle die Kette der Gehörknöchelchen: Hammer, Amboss, Steigbügel (Fig. 340) bis an die Membran des ovalen Fensters. — Im übrigen sind die Paukenhöhle, Gehörgang und Eustachische Röhre von Luft, die Schnecke und Halbzirkelgänge von Gehörwasser erfüllt.

Da die peripheren Endorgane der Klangempfindungen vermittelnde gewisse Gebilde der Schnecke sind, so beschreiben wir diese noch etwas (nach HELMHOLTZ): Die Höhlung der Schnecke ist der des Gehäuses einer Bergschnecke durchaus ähnlich, nur ist der Schneckenkanal des Ohres eine quer verlaufende, teils knöcherne, teils häutige Scheidewand in zwei ständig voneinander getrennte Gänge getrennt. Nur an der Spitze der Höhle bleibt eine kleine Kommunikationsöffnung zwischen den beiden Gängen, dem *Helicotrema*. Der eine Gang kommuniziert mit dem Vorhofe, der andere mit dem runden Fenster. Ein Teil jener häutigen Scheidewand heißt *membrana basilaris* und ist eine feste, straff gespannte, elastische Membran, die in radialer Richtung ihren starken Radialfasern entsprechend gestreift ist. Auf dieser *membrana basilaris* sind die Enden des Schneckenerven und deren Anhänge befestigt (342 a. v. S.).

§ 96. Aus der Physiologie des Gehörorgans.

Wie von den Anfängen der wissenschaftlichen Akustik an klar war, daß die Ausbreitung des Schalles durch Wellenbewegung erfolge, so lag es nahe, diese Bewegungen bis an das Trommelfell und die Gehörknöchelchen zu verfolgen. Aber erst HELMHOLTZ erkannte allseitig im Zusammenhange mit seiner Theorie der Klangfarbe und Teiltöne (§ 90):

Die physiologische Funktion des Gehörorgans besteht darin, die Mitschwingen der peripheren Enden des Gehörnerven, der einzelnen Radialfasern der *membrana basilaris*.

Wegen der Ähnlichkeit, welche hiernach die Schnecke mit einem Klavier in welchem die Saiten je nach den ankommenden Schwingungen ins Mitschwingen geraten, nennt man diese Erklärung die „Hypothese von der Schnecken-Anh. 43. (psychol. Anhang, Nr. 43). Eine physikalische Stütze erhält die Hypothese darin, daß nach Versuchen von HENSEN je einige der äußeren Hörorgane einer Krebsart auf bestimmte Töne eines Klapphorns ins Mitschwingen gerieten — also wohl ebenfalls zu den Hörorganen des Tieres gehören.

Früher wurde der ganze VIII. Hirnnerv als „Gehörnerv“ bezeichnet.

Lehre vom Licht (Physikalische Optik).

§ 97. Lichtempfindungen und physikalische Lichterscheinungen.

Rot, gelb, blau . . . , auch weiß, grau, schwarz, braun . . . und die übrigen „Farben“ (im weiteren Sinne) gelten der vorwissenschaftlichen Auffassung als Eigenschaften der Körper — der wissenschaftlichen Auffassung (psychol. Anh., Nr. 44) zunächst nur als Qualitäten unserer Lichtempfindungen. — Ebenso bezeichnen hell, dunkel einerseits Intensitätsgrade unserer Lichtempfindungen, andererseits aber selbst wieder qualitative Unterschiede, indem sich uns z. B. gelb als eine helle, blau als eine dunklere Farbe darstellt. Anh. 44.

Welche Lichtempfindung uns ein bestimmter Körper erregt, hängt nicht allein von ihm, sondern ebenso wesentlich auch vom Zustande unseres Auges ab (z. B. aus einem halbdunklen Hausflur auf die sonnenbeleuchtete Straße tretend fühlen wir uns geblendet, von der Straße in den Hausflur tretend erscheint uns dieser für kurze Zeit ganz finster. Vergleiche dieser verschiedenen „Adaption der Netzhaut“ mit der verschiedenen Wärmedaption, § 70). — Wieder ist der Physiker als solcher bemüht, sich in der Untersuchung der „Lichtzustände“ der Körper (welcher Ausdruck nur zufällig nicht so gebräuchlich ist wie der analoge Ausdruck „Wärmezustand“) von seinen Gesichtsempfindungen möglichst unabhängig zu machen. — Von den Begriffen, die das „physikalische Verhalten der Körper zum Licht“ charakterisieren, sind schon der gewöhnlichen Erfahrung folgende geläufig:

I. **Selbstleuchtend** nennen wir Körper, wie die Sonne, Fixsterne, elektrisches Bogen- und Glühlicht, Flammen u. s. f., insofern sie Licht ausenden (Emission des Lichtes), ohne daß ihnen Licht von anderen Körpern zugekommen ist (— eine Erweiterung dieses Begriffes ist fluoreszierende, phosphoreszierende . . . Stoffe § 121). Alle nicht selbstleuchtenden Körper nennt man in der Physik (vom gewöhnlichen Sprachgebrauch etwas abweichend) **dunkle Körper**. Sie können **beleuchtet** werden durch selbstleuchtende oder auch wieder durch beleuchtete Körper; z. B. durch den Mond, der als Vollmond die Erde beleuchtet. — Der physikalische Vorgang an einem beleuchteten Körper unregelmäßige Reflexion (Diffusion § 116) des Lichtes.

II. **Durchsichtig, durchscheinend, undurchsichtig** nennen wir Stoffe nach der geringeren oder größeren Absorption des Lichtes, das in sie eindringt; feste Grenzen zwischen jenen drei Klassen gibt es nicht. Die durchsichtigen Stoffe heißen **Lichtmedien**.

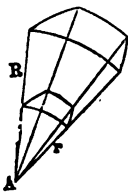
Auch klares Wasser ist in Schichten von mehreren Metern Dicke nur mehr durchscheinend, und zwar von grünblauer Färbung, bei noch größerer Dicke **Höfler, Physik.**

undurchsichtig. Umgekehrt ist Gold, welches, wie die übrigen Metalle, zu den undurchsichtigen Stoffen zählt, durchsichtig in äusserst feinen Schichten (0,0001 mm. durch chemische Vorgänge auf Glas niedergeschlagen); wobei die blaugrüne Färbung beweist, dass es nicht etwa nur Risse und Spalten in der Schicht sind, die Licht durchlassen. — Die Beispiele zeigen auch, dass die nähere Untersuchung über Durchsichtigkeit auf die verschiedene Absorption verschiedener Lichtqualitäten Rücksicht zu nehmen hat. Daher alles Nähere über Emission und Absorption des Lichtes erst im Abschnitt B (§ 114 ff.).

III. Nach alltäglichen Erfahrungen erscheint uns dieselbe Lichtquelle, aus grosser Entfernung gesehen, weniger hell leuchtend als aus kleiner; auch wird z. B. ein Buch in grosser Entfernung von einer hell leuchtenden Lampe nur wenig hell beleuchtet.

Gehen wir von der Annahme aus, dass die „Lichtmenge“, welche von einem leuchtenden Punkte *A* kommt, sich unvermindert (und unvermehrt)

Fig. 343.



über zwei um *A* als Mittelpunkt mit den Radien *r* und *R* cm beschriebene Kugelflächen ausbreite, und dass auch diese Kugelflächen, ohne etwas von dem Licht zurückzubehalten, dieses wieder (gegen innen) zurückwerfen, so ergibt sich schon aus diesen Annahmen rein geometrisch (wegen $o : O = 4\pi r^2 : 4\pi R^2 = r^2 : R^2$),

dass sich die Beleuchtungsstärken der beiden Flächen wie $\frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$

verhalten werden. Inwieweit diese Annahmen physikalisch verwirklicht sind, hängt aber ebenfalls wieder ganz 1. von der Emission seitens der Lichtquelle (die ja z. B. bei elektrischen Bogenlampen keineswegs nach allen Seiten gleichmässig erfolgt), 2. von der Absorption innerhalb des zwischen Lichtquelle und Fläche verbreiteten Mediums und 3. von der diffusen Reflexion der beleuchteten Fläche ab. Daher auch die nähere Untersuchung über Lichtintensitäten erst im Abschnitt B (§ 117). —

Wiewohl die physikalische Optik ihrem Namen nach (Stamm *is*, sehen — vergl. über physiologische und psychologische Optik psychol. Anh. 44. Anh., Nr. 44) es nur mit den Lichterscheinungen zu tun hätte, so haben sich doch die für sie geltenden physikalischen Gesetze (der geradlinigen Ausbreitung, Reflexion, Brechung; Emission, Absorption, Dispersion, Diffusion; Beugung, Interferenz; Polarisierung, Doppelbrechung) in so durchaus analoger Weise auch für die Wärmestrahlung und chemische Strahlung, ja zum grösseren Teil neuestens auch für die Ausbreitung elektrischer Strahlen, Röntgenstrahlen und anderer als gültig erwiesen, dass — unter Beibehaltung des herkömmlichen Namens „Optik“ (physikalisch sachgemässer wäre ganz allgemein: „Lehre von der Strahlung“) — in ihr auch diese für unsere direkten Sinnesempfindungen heterogenen Erscheinungsgebiete behandelt werden.

Dieser Mannigfaltigkeit der Erscheinungen gegenüber wird es notwendig (und entspricht auch der historischen Entwicklung), zuerst die geometrische Seite aller dieser Erscheinungen für sich in der „geometrischen Optik“ zu behandeln und zu diesem Behufe den der gewöhnlichen Sprache geläufigen Begriff „Lichtstrahl“ einer künstlichen Umbildung zu unterziehen.

A. Geometrische Optik.

§ 98. Lichtstrahl.

Die gewöhnliche Sprache nennt „Lichtstrahlen“ die hellen, mehr oder minder breiten Streifen, welche man bemerkt, wenn z. B. die Sonne durch zerrissene Wolken ihr Licht in die dunstige Luft sendet (Fig. 344), desgleichen die Streifen

Fig. 344.



der, Zylinder, Kegel . . .), innerhalb deren die Staub-, Rauch- . . . Teilchen Zimmerluft beleuchtet werden, wenn Sonnenlicht durch die Öffnung eines sterladens oder wenn elektrisches Bogenlicht aus der Linse des Skioptikons tritt.

Der Physiker bildet diesen populären Begriff des „Lichtstrahls“ mehrfach nämlich: 1. Der Lichtstrahl wird als eine Linie ohne jede Ausdehnung in Dicke gedacht; eine solche wäre also zu erhalten, wenn von einer punktlichen Lichtquelle Licht durch eine punktuelle Öffnung, z. B. des Fensters einträte — was beides physikalisch nicht genau, wohl aber an der Dunkelkammer ohne Linse (§ 99) annähernd herstellbar ist. Der Forderung, daß der Lichtstrahl keine Dicke haben soll, kommen wir übrigens auch dadurch näher, wenn wir an einem Lichtstreifen nicht ihn selbst, sondern nur seinen Rand in Betracht ziehen. 2. Es wird von allen qualitativen Unterschieden der Strahlen abgesehen, also zunächst von ihrer Farbe (§ 114), die sich für feinere Untersuchungen wieder von der Schwingungszahl, bezw. Wellenlänge (§ 124) abhängig ist. 3. Auch die hiermit zusammenhängende Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes, die außer in den subtilen Erscheinungen der §§ 122 und 186 überall als so riesig groß anzunehmen ist, kommt für die geometrische Optik nicht in Betracht. — Dagegen:

Dem Begriff des Lichtstrahles sind innerhalb der geometrischen Optik wesentlich die beiden Merkmale 1. **Richtung**, 2. **Geradlinigkeit**.

Daß wir z. B. sagen, das auf der Erde wahrnehmbare Sonnenlicht breite in der Richtung Sonne-Erde aus, nicht umgekehrt, ist zunächst nur ein

Ausdruck der allbekannten Tatsache, daß, wenn z. B. durch eine Öffnung Fensterladen ein Lichtstreifen auf eine Stelle C der gegenüberliegenden Wand und ich halte zwischen A und C in B meine Hand oder sonst einen undurchsichtigen Schirm, hierdurch nicht die Lichterscheinung längs AB , sondern nur die BC aufgehoben wird. Das Erlöschen und Wiederauftreten des Lichtes soll an allen Punkten dieser Strecken streng gleichzeitig zu geschehen. — Daß die Geradlinigkeit keineswegs allgemein, sondern nur unter der Bedingung eines „gleichartigen Mediums“ gilt (auf das wir aber umgekehrt selbst erst wieder aus der Geradlinigkeit schließen), zeigen die folgenden

Fig. 345.

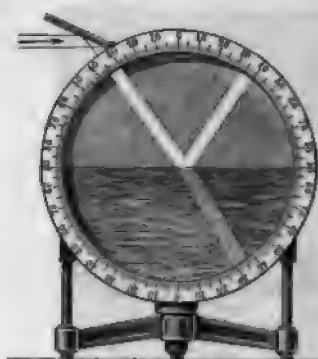
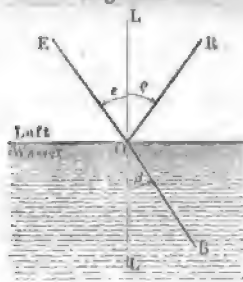


Fig. 346.



Von über Ref und Bre 1. Trifft ein Lichtband auf der Trennungsfäche Luft und (Fig. 345) sich die „Scheibe“ spaltet in zwei, das eine alte Medium (Luft) reflektiert, das andere das neue Medium (Wasser, Glas) gebrochen. Denken wir uns diese Bänder von verschiedener Dicke, also durch Gerade erzeugt, so gilt für diese: Der reflektierte Strahl und der gebrochene OB liegen in einer Ebene mit dem einfallenden EO und dem Einfallslot (Fig. 346) in einer Ebene, der Einfallsebene. Einfallslot und Einfallsebene stehen senkrecht auf der Trennungsfläche der beiden Medien, d. h. sind normal. Vom Einfallslot aus werden der Einfallswinkel α , der Reflexionswinkel φ , der Brechungswinkel β . —

2. In einem Gefäße seien mehrere Schichten Kupfervitriollösung verschiedener Konzentration übereinander gelagert. Fällt ein Lichtband schief auf die oberste Schicht, so zeigt es bei jedesmaligem Übergang in eine neue Schicht eine merkliche Ablenkung, es bildet also eine gebrochene Linie. Nach einiger Zeit Diffusion zwischen benachbarten Schichten eingetreten, so tritt an die Stelle der gebrochenen Linie eine stetig gekrümmte auf. Dies zeigt, daß Licht sich unter Umständen auch krummlinig ausbreiten kann.

Es ist also bei allen zunächst folgenden Konstruktionen und Rechnungen der geometrischen Optik in Erinnerung zu behalten, unter welchen Bedingungen die Darstellung von Lichtstrahlen durch mathematische Gerade nicht mehr



Indem ferner im Abschnitt II zunächst die Reflexion abgesehen von der g und dann in III die Brechung abgesehen von der Reflexion behandelt ist überdies zu beachten, daß in der Natur beide Vorgänge immer vorkommen (mit Ausnahme der „totalen Reflexion“, § 104).

I. Geradlinige Ausbreitung des Lichtes.

§ 99. Schatten und Dunkelkammer.

schichtliches: PORRA, dem die Erfindung der Dunkelkammer meistens zuben wird, beschreibt 1558 die Dunkelkammer ohne Linse, 1589 die mit mmellinse. Aber schon LIONARDO DA VINCI † 1519 hatte den Augapfel r Dunkelkammer verglichen, ohne noch der Linsenwirkung des Auges zu n. Ja schon im 14. Jahrhundert waren Sonnenfinsternisse mittels Dunkelwirkung beobachtet und messend verfolgt worden. —

versuch: Schneiden wir aus einem Stück Karton ein kleines Dreieck und stellen I. dieses undurchsichtige Dreieck, II. den mit der dreieckigen versehenen undurchsichtigen Karton zwischen eine Kerzenflamme und hirm, so treten bei I. die allbekannten Erscheinungen des Schattens, bei ninder allgemein beachteten Erscheinungen der Dunkelkammer ohne uf. Die verwaschenen Ränder des Bildes bei II. entsprechen den ratten bei I.

e Einzelheiten dieser Erscheinungen I. und II. (ausgenommen die sie iden „Beugungen“ siehe unten) ergeben sich, wenn wir von allen Punkten itquelle zu allen Punkten des schattenwerfenden Körpers (einschließlich

Fig. 347.

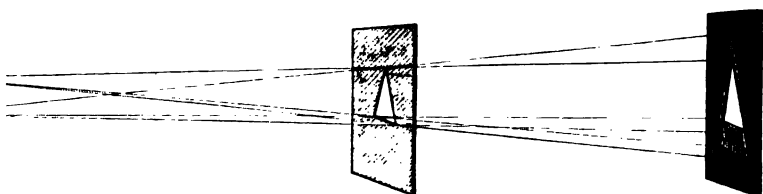
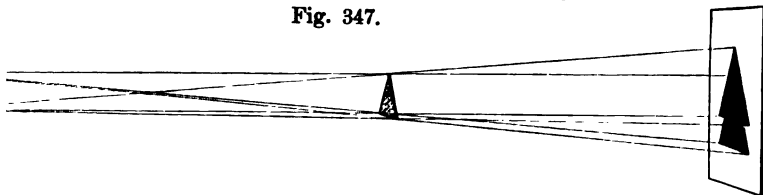


Fig. 348.

undurchsichtigen Karton umgrenzten Öffnung bei II) Gerade ziehen und Schirm verlängern (Fig. 347, Fig. 348). — Je nach den verschiedenen schen Gestalten der Lichtquelle (Kerzenflamme, Lampenkugel, Sonne ...)

Schattenwerfers (undurchsichtige Kugel, Schattenspielfiguren, Dia- mit kreisrunder, dreieckiger, spaltförmiger ... Öffnung) lassen sich eometrisch konstruieren und berechnen

I. α) 1. Selbstschatten, 2. Schattenraum, 3. Schlagschatten;
 β) 4. Kernschatten, 5. Halbschatten;

LA 159. sechs Kombinationen von α und β (LA 159), z. B. Kern- und Schatten im Schlagschatten, desgleichen im Schattenraum.

II. Gestalt und GröÙe der Bilder in der Dunkelkammer sind um so schärfer, aber auch um so lichtschwächer, je kleiner die Öffnung ist. Ist der Schirm sehr nahe an der Öffnung, so ist im Bilde vorwiegend die Gestalt der Öffnung, ist der Schirm weiter von ihr, so kommt vorwiegend die Gestalt des Gegenstandes zum Ausdruck; warum? Z. B. Auch eine schmale Spalte im Fenster gibt auf einem entfernten Schirm noch ein rundliches Seebild.

Indem nun die wirklich eintretenden Erscheinungen bei den Schattensystemen der Dunkelkammer mit diesen Ergebnissen der Konstruktion und Rechnung übereinstimmen, ist der Satz von der geradlinigen Fortpflanzung des Lichtes erst erwiesen, und zwar indirekt. Der direkte Beweis besteht darin, daß wir uns sowohl die Lichtquelle als auch den schattenwerfenden Körper (bzw. die Öffnung der Dunkelkammer) punktuell herstellen, was

Anh 36. vornherein physikalisch unmöglich ist. (Log. Anhang, Nr. 36.)

Aber auch wenn wir diesen Grenzfällen unendlich kleiner Lichtquellen und Schattenwerfer, bzw. Öffnungen wenigstens sehr nahe zu kommen suchen, z. B. Anwendung einer sehr schmalen Spalte im Fensterladen und eines sehr dünnen Drahtes (z. B. einer Stricknadel), so zeigt auf einem Schirm (wenn die Abstände von Spalte, Draht und Schirm hinreichend groß sind) doch sehr beträchtliche Abweichungen von der nach der bloßen Konstruktion „gerader Lichtstrahlen“ zu erwartenden Erscheinung; am auffallendsten sind dies die dunklen, sowie die farbig eingesäumten hellen Streifen parallel zum Schirm. Insofern diese Erscheinung über die der geradlinigen Fortpflanzung hinausgeht, heißt sie *Beugung*. Ähnliche Abweichungen von der Erscheinung der Dunkelkammer ergeben sich, wenn statt des Drahtes eine zweite schmale Spalte gebracht ist; Näheres über diese Erscheinungen im § 124.

§ 100. Optische Bilder.

Das Bildchen in der Dunkelkammer ohne Linse ist ein erstes Beispiel eines optischen Bildes. Solche Bilder entstehen namentlich auch bei der Reflexion (an ebenen und gekrümmten [Kugel-, Zylinder- . . ., Konkav-, Konvex-]) und bei der Brechung (Linsen, Prismen, auch an einer einzelnen Fläche von einer im Wasser liegenden Münze). Überall stellen wir hier den Fall

Alle von einem Punkte A ausgehenden Geraden bilden ein **homozentrisches Strahlenbüschel**. Ist sein Scheitel A ein leuchtender Punkt, so heißt er kurz Gegenstandspunkt. Werden nun diese Strahlen durch irgend welche Vorgänge (insbesondere Reflexion und Brechung) so abgelenkt, daß sie wieder ein homozentrisches

Fig. 349.

Fig. 350.

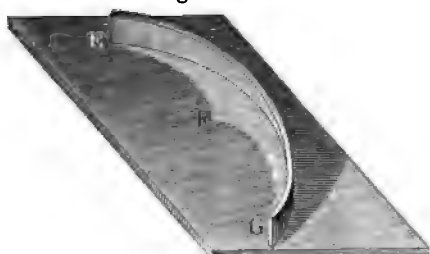
Fig. 351.



Strahlenbüschel mit einem anderen Scheitel B bilden, so ist B der Bildpunkt zu A . Gehen durch B die Lichtstrahlen selbst, so ist B ein **physisches Bild**; es läßt sich auf einem Schirm (in Rauch...) auffangen. Gehen durch B nur die Rückwärtsverlängerungen der abgelenkten Lichtstrahlen, so ist B ein **geometrisches Bild**; es läßt sich auf einem Schirm nicht auffangen.

In weitaus den meisten Fällen ist das Bild nur verschwommen, d. h. dem Punkte A entspricht nicht jeder genau ein Punkt B (scharfes Bild), sondern ein beleuchteter Raum, meistens begrenzt durch eine einhüllende Fläche" (math. Anhang, Nr. 27, „kaustische Fläche“); hat diese eine Spitze wie z. B. die leuchtende Kurve, die sich an der inneren Seite eines auf Papier liegenden und durch eine etwas entfernte Lichtquelle A beleuchteten Fingerringes zeigt (Fig. 352), so ist diese Spitze vorzugsweise das Bild B von A . —

Fig. 352.



Anh. 27.

Allgemeine Bemerkung zur geometrischen Optik: Begnügt man sich nicht nur mit der geometrischen Konstruktion und Berechnung der Schatten, Bilder u. s. f., sondern nimmt man hinterher wieder Rücksicht auf die Sichtbarkeit dieser optischen Erscheinungen, so kann dies von zweierlei Standpunkt geschehen, einem **objektiven** und einem **subjektiven**. Z. B. Objektiv: Ein Punkt O liegt im Kern-, bezw. Halbschatten oder im unbeschatteten Raum, nachdem infolge des Schattenwerfers von keinem, bezw. einigen oder allen Teilen der Lichtquelle Strahlen nach O fallen können. Subjektiv wird dann ein O befindliches Auge keinen oder ein Teil der Lichtquelle oder die ganze

mit Zinnamalgalam belegt ist. Wegen der Doppelbilder sind sie für wissenschaftliche Zwecke wenig brauchbar. — Auch von dem Einfallswinkel allein hängt bei demselben reflektierenden Stoffe die Lichtstärke des reflektierten Lichtes ab. So zeigt auch schon eine mangelhaft polierte Tischplatte bei sehr kleinem Darsaufehen (d. h. unter grossem Einfallswinkel) recht deutliche, bei kleinem fast keine Spiegelbilder. Diese Unterschiede hängen zusammen mit der Dispersion des Lichtes (§ 128), gehen also über die geometrische Optik hinaus.

Die *Diffusion* (oder sogen. unregelmässige Reflexion) des Lichtes, durch welche die Oberflächen der Körper sichtbar werden, ist kein reiner Reflexionsvorgang, wie sich schon daraus zeigt, dass das von rotem, blauem Papier zurückgeworfene Licht selbst rot, blau ist (genauer: gegenüberstehendes weisses Papier, blau erscheinen lässt). Daher Näheres über die Diffusion des Lichtes erst § 16. Übrigens ist auch das z. B. von einem noch so glatt polierten Messing- oder Spiegel zurückgeworfene Licht gelblich.

Für die rein geometrischen Folgerungen aus dem Reflexionsgesetz, namentlich für die Erklärung und Vorausbestimmung der Bilder an ebenen und Kugelspiegeln, ist sehr fruchtbar folgender allgemeine Satz:

Wegen der Gleichheit des Einfalls- und Reflexionswinkels ist das Reflexionsgesetz umkehrbar; d. h.: Ein Strahl, der in der Richtung des vorher reflektierten einfällt, wird in der Richtung des vorher einfallenden reflektiert.

Daher kann unter anderm jede Zeichnung, die einen Reflexionsvorgang darstellt, als für beiderlei Sinn der Ausbreitung des Lichtes längs der geometrischen Geraden physikalisch gültig aufgefasst werden.

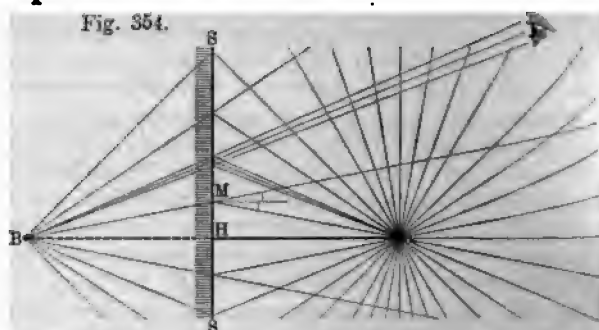
Geschichtliches. Das Reflexionsgesetz war schon den Alten wohl bekannt, wie namentlich die (wenn auch übertreibenden) Erzählungen über ARCHIMEDES' Riesenspiegel u. s. f. beweisen. Die arabische Physik des Mittelalters wufste sogar schon ziemlich schwierige Sätze über sphärische Abweichung an Hohlspiegeln u. dergl. ableiten aus dem Reflexionsgesetz abzuleiten.

§ 102. Ebene Spiegel (Planspiegel).

a) Bilder eines einzelnen Punktes. Aufgabe: Man konstruiere beliebig vielen der von A (Fig. 354, a. f. S.) nach allen Seiten ausgehenden und den Planspiegel SS' treffenden Strahlen die reflektierten Strahlen gemäss dem Reflexionsgesetze und verlängere jeden dieser Strahlen geradlinig hinter den Spiegel. Diese Rückwärtsverlängerungen schneiden sich alle in demselben Punkte B : dieser ist so ein geometrisches Bild von A .

Die Lage von B in bezug auf A und SS ergibt sich aus dem Reflexionsgesetze so: Es sei der *Hauptstrahl* $AH \perp SS$ geradlinig hinter den Spiegel verlängert, desgleichen der einem beliebigen Strahl AM entsprechende reflektierte Strahl; der Durchschnittspunkt beider Rückwärtsverlängerungen sei B . Da nun $\triangle AHM \cong BHM$ folgt: $AH = HB$, und zwar ganz unabhängig von der Lage des Punktes M , so ist bewiesen, dass alle Rückwärtsverlängerungen durch genau denselben Punkt B gehen. Somit:

Einem vor dem Planspiegel liegenden Gegenstandspunkt A entspricht ein auf dem Hauptstrahl gleich weit hinter dem Spiegel liegender Bildpunkt B .



Es ist also die Spiegelebene SS die Symmetrieebene zur Strecke AB ; hiernach die kürzeste Konstruktion von B bei gegebenem A und umgekehrt nur mittels des Strahles AHB (ohne AM, MB).

b) Bilder von Gegenständen. Aufgabe: Man konstruiere für eine größere Zahl von Punkten einer Geraden, eines ganzen Körpers Bildpunkte (Fig. 355). Allgemein ergibt sich:



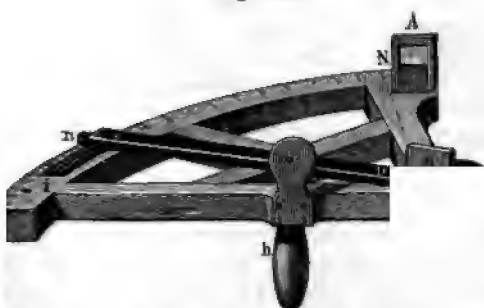
Einem vor dem Planspiegel liegenden Gegenstande entspricht ein zur Spiegelebene symmetrisch liegendes Bild; es liegt hinter dem Spiegel und ist geometrisch, aufrecht, gleich groß.

Vor einem Planspiegel kommen Bilder nur dann zu liegen, wenn an einem Orte schon ein konvergentes Strahlenbüschel aufgefallen war (z. B. eines, das in einem Punkte A mittels Sammelspiegel oder Sammellinse in einem hinter dem Planspiegel liegenden Punkte A' ein physisches Bild entworfen hätte); Anwendung bei einzelnen Spiegelfernrohren (§ 112).

Aus der Symmetrie von Gegenstand und Bild in bezug auf die Spiegelebene folgen zahlreiche speziellere Gesetze, namentlich für a) rein fortschreitende Bewegungen des Spiegels, b) rein drehende Bewegungen des Spiegels. Anwendung von b) beim Spiegelsextanten (Fig. 356), der zum Messen des Winkelabstandes α° zweier Licht-

3. Sterne, in Bezug auf das Auge des Beobachters dient; um das Spiegelbild einen und das direkt gesehene Bild des anderen Lichtpunktes zur Deckung zu bringen, ist eine Drehung des beweglichen Spiegels um $\frac{1}{2}\alpha$ erforderlich (LA 160). LA 160. Über die „Spiegelablesung“ als eine viel verwendete Methode feiner Winkelmessungen vergl. math. Anh., Nr. 2. — Über das Reflexionsgoniometer (als Anh. 2.

Fig. 356.



Neben auch die Spektralapparate dienen (Anh.) vergl. § 114. — Heliostat (mit Handtrieb oder Uhrwerk, Fig. 357), um trotz der Tagesbewegung der Sonne reflektierte Lichtstrahlenbündel von unveränderter Richtung zu erhalten. — Spiegelbilder bei Reflexion an zwei parallelen, bezw. geneigten Spiegeln (Winkelspiegel; Kaleidoskop); beträgt der Neigungswinkel den n^{ten} Teil von 360° ,

sieht man nebst dem einen Gegenstande noch seine $n - 1$ Spiegelbilder, hierbei ist die passende Stellung des Auges vorausgesetzt. — Ferner LA 161, 162.

Fig. 357.



§ 103. Kugelspiegel (Sphärische Spiegel).

Sphärische Konkavspiegel (gewöhnlich kurz Hohlspiegel genannt) sind Teile von Kugeloberflächen, die an der konkaven Seite reflektieren. — Der Mittelpunkt O der Kugel heißt Krümmungsmittelpunkt (math. Anh., Nr. 26), ihr Halbmesser von r cm Krümmungshalbmesser (Anh. 26) des Spiegels. Ein Punkt liegt außerhalb, in, bezw. innerhalb der Krümmungsweite, je nachdem sein Abstand vom Spiegel $\geq r$.

Gewöhnlich giebt man den Kugelspiegeln kreisförmige Ränder, also der Spiegelfläche die Form von Kugelhappen; doch bilden auch Stückchen mit unebenen unregelmäßigen Rändern noch Kugelspiegel und geben Spiegelbilder.

Begriff einer „geometrischen Achse“, wie sie bei den Linsen durch die beiden Krümmungsmittelpunkte definiert ist, wird also bei den Kugelspiegeln wesentlich, bezw. gegenstandslos. Dagegen nennt man die von einem beliebigen Brennpunkt A durch O gezogene Gerade „die zum Punkte A gehörige optische Achse des Spiegels“; in ihr liegt auch der zu A gehörige Hauptstrahl.

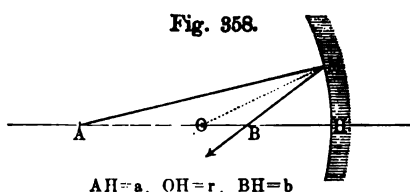
Vorversuche: Hält man das Gesicht in hinreichend kleinen Abstand von einem Hohlspiegel, so sieht man hinter diesem ein aufrechtes, vergrößertes

Bild des Gesichtes, bei hinreichend großem Abstände ein umgekehrtes, verkleinertes. (Dafs diese umgekehrten, verkleinerten Bilder des Gesichtes oder anderer Gegenstände der Umgebung vor dem Spiegel zu liegen kommen, widerspricht so sehr unseren in der überwiegenden Zahl der Fälle an Planspiegeln erworbenen Gewohnheiten hinsichtlich der Spiegelbilder, dafs wir uns zunächst einbilden, auch diese Bilder hinter dem Spiegel zu sehen. Treten wir aber einem solchen Bilde langsam näher und fixieren es dabei immer mit beiden Augen, so empfinden wir alsbald, dafs wir unter immer wachsender Anstrengung nach einwärts schielen müssen, indem wir wirklich auf eine Stelle vor dem Spiegel blicken. — Hohlspiegelbild eines Blumenstraußes in einer wirklichen Vase u. dgl.) Diese Bilder vor dem Spiegel sind auf einem Schirme auffangbar, also **physisch**, die hinter dem Spiegel nicht auffangbar, also **geometrisch**. — Die einzelnen Gesetze dieser Erscheinungen ergeben sich als besondere Fälle aus der allgemeinen

Aufgabe: Man konstruiere zu beliebig vielen der von einem Punkte A nach allen Seiten ausgehenden und den Hohlspiegel treffenden Strahlen die reflektierten Strahlen (ähnlich wie in Fig. 354, S. 330), wobei als Einfallslotte die Krümmungshalbmesser dienen.

Die hinreichend genaue Ausführung der Konstruktion zeigt, dafs die reflektierten Strahlen nicht mehr durch einen Punkt gehen (LA 163), sondern Anh. 27. eine einhüllende Fläche (Anh., Nr. 27) von der Gestalt geben, wie sie bei dem Versuche mit dem Fingerringe (§ 100) ersichtlich wurde. Die folgende Annäherungsrechnung liefert denn auch nur die Lage der Spitze dieser Lichtfigur.

Aufgabe: Man berechne aus der dem Punkte A entsprechenden



Gegenstandsweite $AH = a$ cm (Fig. 358, und aus der gegebenen Krümmungswerte $OH = r$ cm) die **Bildweite** $HB = b$ cm für die nahe bei dem Hauptstrahl auffallenden bzw. reflektierten Strahlen AM und MB .

Nach dem Satze über die Teilung einer Dreiecksseite AB durch die Winkelhalbierende des gegenüberliegenden Eckpunktes M ist

$$AO : OB = AM : MB \neq AH : HB, \text{ also } (a - r) : (r - b) = a : b;$$

Anh. 10. aus dieser „harmonischen Proportion“ (math. Anh., Nr. 10) folgt $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{r} \dots (1)$

Es empfiehlt sich (namentlich auch wegen der dadurch zu erzielenden Übereinstimmung mit der Linsenformel, § 107), in diese Gleichung statt des Krümmungshalbmessers r cm die Brennweite f cm des Hohlspiegels einzuführen. — Definiert ist die **Brennweite** als diejenige spezielle Bildweite, die zur Gegenstandsweite $a = \infty$ gehört. (Ihren Namen haben „Brennpunkt“ und „Brennweite“ daher, dafs die durch einen Hohlspiegel gesammelten „Wärmestrahlen“, § 119, die im oder nahe dem Brennpunkt befindlichen brennbaren Körper, wie Feuerschwamm, Holz, Schiefspulver . . . , entzünden.) Es wird daher $\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = \frac{2}{r}$, und da $\frac{1}{\infty} = 0$, so ist $\frac{2}{r} = \frac{1}{f}$; somit ergibt sich als endgültige

$$\text{Hohlspiegelformel: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \dots (2); \text{ in Worten!}$$

In dieser Gleichung ist f als konstante, a als unabhängig, b als hängig veränderliche Größe zu denken. Man unterscheidet folgende sechs Hohlspiegelfälle:

I. Fall: $a = \infty$; $b = f$; d. h. Strahlen, die aus unendlicher Entfernung kommen (kurz: **Parallelstrahlen**) **schneiden sich im Brennpunkte**.

II. Fall: $\infty > a > 2f$; $f < b < 2f$; in Worten: Wandert der Gegenstandspunkt aus dem Unendlichen bis an die doppelte Brennweite, so wandert der Bildpunkt aus der einfachen in die doppelte Brennweite.

III. Fall: $a = 2f$; $b = 2f$; d. h. **Strahlen, die aus dem Krümmungsmittelpunkt kommen, schneiden sich wieder in diesem**.

IV. Fall: $2f > a > f$; $2f < b < \infty$; in Worten!

V. Fall: $a = f$; $b = \infty$; d. h. **Strahlen, die aus dem Brennpunkt kommen, werden als Parallelstrahlen reflektiert**.

VI. Fall: $f > a > 0$; $b < 0$; d. h. Strahlen, die von einem Gegenstandspunkt innerhalb der Brennweite ausgehen, werden nicht als konvergentes Parallelstrahlenbündel, sondern als divergentes reflektiert; ihre Rückwärtserlängerungen gehen durch einen hinter dem Spiegel liegenden Punkt, der hier ein geometrisches Bild darstellt.

Viel übersichtlicher als durch vorstehende arithmetische Diskussion der für Gegenstands- und Bildpunkte geltenden Hohlspiegelformel ergeben sich die sechs Hohlspiegelfälle durch die auch die Bilder ganzer Gegenstände liefernde

Bildkonstruktion (Fig. 359 a. f. S.): Eine Strecke AA' des Gegenstandes sei normal zu der dem Punkte A entsprechenden Achse $AOFH$ des Hohlspiegels. Der Parallelstrahl $A'P$ wird dann (laut I) durch den Brennpunkt F , der Hauptstrahl $A'O$ wird (laut III) in sich selbst reflektiert. Daher ist B' das Bild von A' . Der Fußpunkt B der Normalen $B'B$ ist das Bild von A .

Dass der Geraden AA' wieder eine Gerade BB' entspricht, ist nur nähernd richtig — es wäre genau richtig nur dann, wenn an Stelle des Kugelspiegels eine zu AH normale Ebene träte, die gleichwohl alle Parallelstrahlen durch F reflektierte, wie dies auch in den Figg. 360 u. 361 fingiert ist.

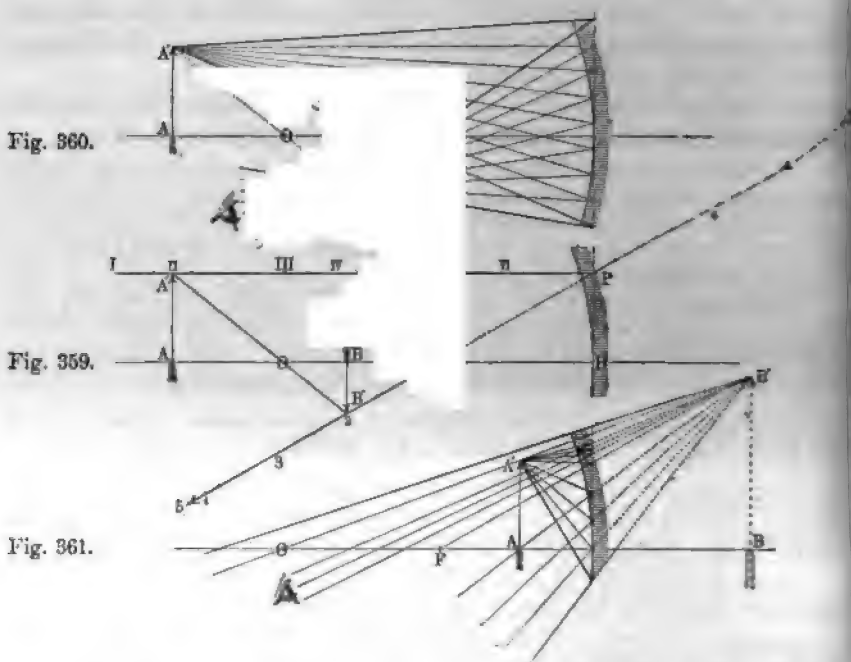
Denken wir uns denselben Gegenstand von unendlicher Entfernung her zum Hohlspiegel hin wandernd, so wandert das Bild in den Fällen I bis V vom Hohlspiegel weg, springt bei V aus $+\infty$ nach $-\infty$, d. h. hinter den Spiegel, und rückt bei weiterer Annäherung des Gegenstandes an den Spiegel innerhalb der Brennweite hinter dem Spiegel immer näher zum Hohlspiegel heran. Da bei diesem Wandern des Gegenstandes der Punkt A' immer im selben Parallelstrahl I II III IV V VI wandert, so wandert der Bildpunkt B' längs der Geraden 1 2 3 4 5 5' 6. — Behufs noch übersichtlicherer Veranschaulichung werden so ein für allemal der Parallelstrahl und der ihm zugehörige reflektierte Strahl 5 5' P vorgezeichnet und etwa ein Lineal um den Krümmungsmittelpunkt O gelegt. Es sind dann unmittelbar aus der Fig. 359 die sechs Fälle abzulesen; z. B.:

II. Hohlspiegelfall: Ist der Gegenstand aufserhalb der doppelten Brennweite, so ist das Bild zwischen der einfachen und doppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, verkleinert.

III. spiegelfall: Ist der Gegenstand in der doppelten Brennweite, so ist das Bild ebenfalls in der doppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, gleich groß.

VI. Hohlspiegelfall: Ist der Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite, so ist das Bild hinter dem Spiegel; es ist geometrisch, aufrecht, vergrößert.

Man führe für jeden der sechs Fälle die Bildkonstruktion eigens aus (zweckmäßig unter Gegenüberstellung der entsprechenden Linsenfälle, § 107) und ergänze



die Zeichnungen durch Eintragung der den Spiegel noch treffenden Grenzstrahlen und mehrerer dazwischen liegenden Strahlen, sowie des die Bilder sehenden Auges (wie z. B. in Figg. 360 und 361).

Warum ist die Bildkonstruktion auch anwendbar, wenn der Gegenstand beliebig größer ist als der Spiegel (wie z. B. bei Spiegelteleskopen)?

Parabolische Spiegel. Wird der den sphärischen Hohlspiegel darstellende Kreisbogen ersetzt durch diejenige Parabel, welche im Scheitel jenen Kreis zum Krümmungskreis hat (math. Anh., Nr. 26), so gelten für einen solchen Spiegel Anh. 26. die Sätze I und V genau, nicht wie beim Kugelspiegel nur annähernd (LA 163). Solche Paraboloiden, in deren Brennpunkt elektrisches Bogenlicht steht, dienen als Scheinwerfer; sie halten die austretenden Strahlen als achsenparallelen Zylinder zusammen. Wird dieser durch einen ebensolchen Spiegel aufgefangen, so sammeln dieser die Strahlen wieder in seinem Brennpunkte (vergl. Fig. 416, S. 375). —

stellt ein Ellipsoid an der Innenseite, so sammeln sich ebenfalls alle von einem Brennpunkt ausgehenden Strahlen im anderen Brennpunkt. Analoge Sätze für spiegelnde Hyperboloide. Beweise aus den Sätzen über Leitstrahlen und analogen an Kegelschnitten (mathem. Anh., Nr. 23). — Über Konvexspiegel Anh. 23. Ihre Analogie zu Konkavlinsen vergl. § 107.

III. Brechung des Lichtes.

§ 104. Das Brechungsgesetz.

Geschichtliches. SNELLIUS fand (1626) die zwischen dem Einfallswinkel α und dem Brechungswinkel β bestehende gesetzmäßige Beziehung, der von DESCARTES die Form gegeben wurde: $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ (LA 164). Diese im Vergleich zum Reflexions-

gesetz viel kompliziertere Beziehung macht es begreiflich, daß man sie lange vergeblich gesucht hat, obwohl schon PROLEMÄUS methodisch ganz richtig Reihen von Einfallswinkeln und zugehörigen Brechungswinkeln gemessen hatte. Noch PTOLEMÄUS hatte geglaubt, daß $\frac{\alpha}{\beta} = n$ sei, was als erste Annäherung für kleine α und daher auch kleine β gültig ist, auch z. B. für die Berechnung von Linsenbildern erster Annäherung ausreicht (§ 107; LA 165).

Eine von goniometrischen Bezeichnungen in Form des Brechungsgesetzes ergibt sich bei Versuchen mit dem Apparat Fig. 362: Es geben nämlich die gleich langen Strecken Oa und Ob (Fig. 363) die Projektionen $Om:On = 4:3$ den Übergang der Strahlen aus Luft in Wasser; desgl. für Luft und Glas 3:2. (Andere Brechungskonstruktionen vergl. LA 167.) Diese planimetrische Konstruktion ist dem obigen goniometrischen Ausdruck äquivalent; denn

$$\frac{4}{3} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}. \quad (\text{In Fig. 363 ist}$$

der Einfallswinkel nicht gezeichnet, da es bei dieser Konstruktion nicht verwendet wird.)

Zur vollständigen Formulierung bedarf indes das Brechungsgesetz noch einer Ergänzung mit Rücksicht auf die Farbe des gebrochenen Strahles. Es zeigen nämlich schon die Versuche mit dem Apparat Fig. 362 (und noch auffälliger alle Versuche mit Prismen, § 106), daß einem eintretenden „Strahl weißen Lichtes“ nicht ein gebrochener Strahl, sondern ein ganzer Farbenbogen entspricht. Es gelten somit alle innerhalb der geometrischen Optik aufzustellenden Gesetze zunächst nur für je eine als konstant vorauszusetzende Farbe (über die Abhängigkeitsbeziehungen zwischen Farbe und Brechungsindex vergl. erst Abschnitt B, § 114 ff.). Sonach lautet das Brechungsgesetz:

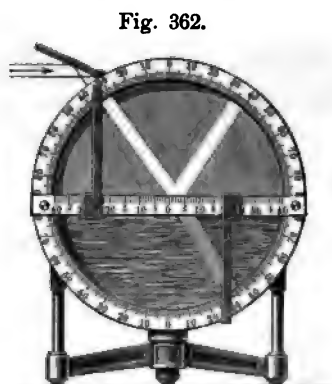


Fig. 362.

LA 165.

LA 167.

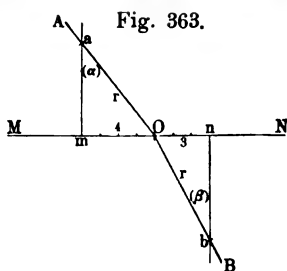


Fig. 363.

1. Der gebrochene Strahl bleibt in der Einfallsebene.
2. Zwischen den Sinus des Einfallswinkels und Brechungswinkels besteht ein konstantes Verhältnis („Brechungsverhältnis“ mit den Brechungsquotienten n) für je ein Paar von Medien (einschließlich des „leeren Raumes“) und für je einen Lichtstrahl von konstanter (einfacher

LA 164, 166. Farbe. — Aus $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n$ ergibt sich zu jedem α das β (LA 164, 166).

Denkt man sich den aus dem ersten Medium kommenden Strahl gewöhnlich in das zweite verlängert und beachtet man, wie von dieser Verlängerung der gebrochene Strahl abzweigt, so erklärt sich die Ausdrucksweise, der Strahl wird zum, bzw. vom Einfallslot gebrochen, je nachdem der Brechungswinkel kleiner oder größer ist als der Einfallswinkel. Dasjenige Medium, dem der kleinere Winkel entspricht, heißt das optisch dichtere. — Während dies Nominaldefinitionen sind, ist es eine physikalische Tatsache, daß keineswegs immer der mechanisch dichtere Stoff auch optisch dichter ist. (Sobon Newton hat es auf, daß brennbare Stoffe, z. B. Öle, Diamant . . . , verhältnismäßig große Brechungsquotienten haben, ohne doch besonders große mechanische Dichte oder spezifische Gewichte zu haben.) Nur bei Körpern von gleicher chemischer Beschaffenheit, z. B. dichter und dünnerer Luft, ist der mechanisch dichtere auch der optisch dichtere. — Über die physikalischen Methoden zur genauen Bestimmung der Brechungsquotienten vergl. § 106 und § 116. Dabei ist es üblich, alle Brechungsquotienten als unechte Brüche darzustellen; wenn also z. B. beim Übergange eines Strahles aus Wasser in Luft der Einfallswinkel α im Wasser, der Brechungswinkel $\beta > \alpha$ in der Luft zu liegen kommt, so ist $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{3}{4} = \frac{1}{n}$.

Totale Reflexion. Wendet man für den Übergang aus dem optisch dichteren in das dünnere Medium die Brechungskonstruktion an, so ergibt diese für kleine Einfallswinkel anstandslos die größeren Brechungswinkel; für einen bestimmten Grenzwinkel α_c wird aber der Brechungswinkel $\beta = 90^\circ$, und für Einfallswinkel $\alpha > \alpha_c$ gibt es überhaupt keinen Brechungswinkel mehr, wie sich beim Konstruieren darin zeigt, daß die Hypotenuse kleiner wäre als die Kathete, und goniometrisch darin, daß $\sin \beta > 1$ würde. — Während nun sonst beim Übergange eines Strahles aus einem Medium in ein anderes eine Spaltung des Strahles in einem reflektierten und gebrochenen Strahl stattfindet, ist aus diesen mathematischen Gründen für alle $\alpha > \alpha_c$ physikalisch zu erwarten, daß alles Licht in das dichtere Medium reflektiert werde. In der Tat bestätigt der Versuch dieses Eintreten von **totaler Reflexion** (so z. B. an dem Apparat Fig. 362, wenn der Strahl unter Wasser eingetreten war und die Einlaßöffnung mehr und mehr gehoben wird. Man beachte, daß hierbei von dem austretenden Strahlenfächer zuerst die violetten, zuletzt die roten Strahlen nicht mehr in die Luft austreten. — Fig. 365, S. 337 zeigt die Lage des Grenzstrahles, von welchem ab es nur mehr totale Reflexion gibt. — Erklärung des Silberglanzes an einem „leeren“ ins Wasser getauchten Probiergläschen; ähnlich an der Bauchdecke von Wasserkäfern, wo zwischen den Härchen eine Schicht Luft adhärirt und also Lichtstrahlen von bestimmten Winkeln an nicht vom Wasser aus bis zur Bauchdecke gelangen. (Über Reflexionsprismen vergl. § 106.)

Wie das Reflexionsgesetz (§ 101), ist auch das Brechungsgesetz umkehrbar, d. h.: Ein Strahl, der in der Richtung des vorher gebrochenen entfällt, wird in der Richtung des vorher einfallenden gebrochen.

Zusatz: Dafs ein Strahl aus einem Medium in eine angrenzende Schicht des gleichen Mediums oder auch eines stofflich verschiedenen, aber von gleicher optischer Dichte geradlinig weitergeht, kann dadurch ausgedrückt werden, dafs für dieses Paar Medien der Brechungsquotient $n = +1$ ist. — Denken wir uns dann einen solchen Strahl aus dem zweiten in das erste Medium unter gleichem Winkel zurückgedreht, so nimmt er die Richtung des reflektierten Strahles an und wir können somit das Reflexionsgesetz als einen speziellen Fall des (entsprechend erweitert gedachten) Brechungsgesetzes, nämlich für den Brechungsquotienten $n = -1$ auffassen. Es erklären sich hieraus mancherlei Analogieen zwischen den Anwendungen des Reflexions- und des Brechungsgesetzes, z. B. dafs das Gesetz für die Konkavspiegel die für die Konvexlinsen ganz analog sind.

Doppelbrechung. Alle bisher besprochenen Erscheinungen und Gesetze der Brechung haben stillschweigend vorausgesetzt, dafs es sich nicht um „Doppelbrechung“ handle, wie sie z. B. beim Kalkspat, ja im ganzen sogar häufiger als die einfache Brechung stattfindet. Die genauere Beschreibung dieser Erscheinungen (S. 129) wird zeigen, dafs von den zwei je einem einfallenden Strahl entsprechenden gebrochenen Strahlen nur der eine den obigen Gesetzen folgt; er heifst deshalb der ordentliche (ordinäre) Strahl; auf den anderen, außerordentlichen (extraordinären) Strahl findet nicht einmal der erste Teil des obigen Brechungsgesetzes Anwendung, indem dieser außerordentliche Strahl im allgemeinen aus der Einfallsebene heraustritt. — Die im folgenden aus dem allgemeinen Brechungsgesetz abzuleitenden besonderen Gesetze setzen also überall einfache gebrochene Strahlen oder bei Doppelbrechung doch nur ordentliche Strahlen voraus.

§ 105. Bilder, erzeugt durch Brechung an einer ebenen Fläche.

Vorversuche: Ein Gefäß, gegen dessen Boden wir in normaler oder schräger Richtung blicken, scheint weniger tief zu werden, wenn Wasser eingegossen wird. War eine auf dem Boden des leeren Gefäßes liegende Münze durch dessen Wand für unser Auge eben noch verdeckt gewesen, so wird sie am Grunde des gefüllten Gefäßes sichtbar (Fig. 365). — Ein schräg ins Wasser getauchter Stab erscheint geknickt; an welcher Stelle, nach welcher Richtung? (Fig. 364; LA 168.)

Erklärung: Liegt ein leuchtender Punkt A (Fig. 365) in der Tiefe h cm unter dem Wasserspiegel und werden zu hinreichend vielen der von ihm ausgehenden Strahlen die in Luft vom Einfallslot gebrochenen Strahlen

Fig. 365.

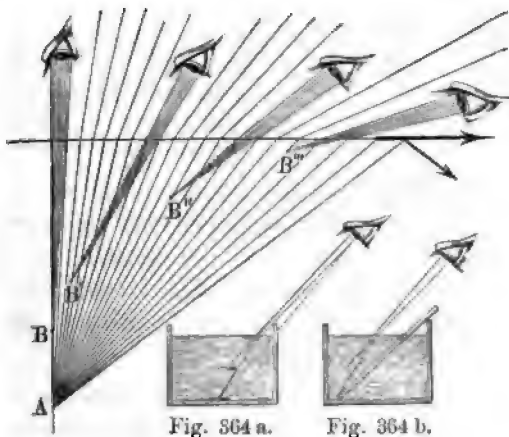


Fig. 364 a.

Fig. 364 b.

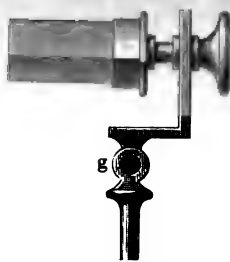
I.A. 168.

konstruiert und gegen das Wasser hinein rückwärts verlängert, so zeigt Konstruktion (und Rechnung), daß niemals die Rückwärtsverlängerungen drei sich in demselben Punkte schneiden, sondern daß alle diese Rückwärtsverlängerungen eine einhüllende Fläche (math. Anh., Nr. 27) besitzen. Anh. 27. reichend schmale Strahlenbüschel, wie sie in die Pupille des Auges einfallen, stellen aber die Punkte B, B', B'', B''' die Bilder dar; ihre Lage ist stets (auch nicht einmal annähernd) nur abhängig von der Lage des betrachteten Punktes A in bezug auf den Wasserspiegel, sondern durchaus mit von der Stellung des Auges in bezug auf A und den Wasserspiegel. geben Konstruktion (und Rechnung), daß speziell bei normalem Daraufsehen der Tiefe unter dem Wasserspiegel $\frac{3}{4}h$ (allgemein $\frac{1}{n}h$ unter der ebenen Grenzfläche innerhalb des dichteren Mediums) liegt. — Daher erscheint auch ein Teich bei sehr schiefer Daraufsicht viel mehr gehoben als bei schiefer; in einem wenig tiefen Wasser fahrend, glaubt man, der Kahn einen Kanal in den tiefen Seegrund eingesenkt zu haben.

§ 106. Optische Prismen und Platten.

Vorversuche: Hatte man ein Fensterkreuz auf einen vertikalen, bzw. horizontalen Stab aufgelegt und blickt man durch die Luft hindurch, so sieht man das Kreuz. Hält man zwischen ihm und dem Auge ein Glasprisma (Fig. 366), dessen Kanten dem Stabe parallel sind, so verschwindet der Stab nicht mehr, sondern sieht man ein farbiges Kreuz (mit starken Farbensäumen) erst dann, wenn das Auge durch das Prisma gegen eine Wand blickt.

Fig. 366.



Die vom Stab durch das Prisma gehenden Strahlen nämlich in einer gegen dessen Kanten Ebene abgelenkt, indem sie zuerst in das Prisma eintreten und dann wieder bei der Austrittsrefraktion aus demselben Brechungen erfahren. Da es sich bei diesen Brechungen nur auf diejenigen Flächenelemente der Seitenflächen des Prismas ankommt, welche der austretende Strahl durchsetzt (passiert), so wird der geometrische Inhalt des Prismas in der Optik folgendermaßen erweitert:

Als **Prisma** im optischen Sinne wirkt jeder homogene, durchsichtige Körper, an welchem zwei gegeneinander unter dem „**Einfallswinkel**“ geneigte Grenzebenen von demselben Strahl durchsetzt werden. Die wirkliche oder durch Erweiterung der Ebenen gewinnende Durchschnittslinie dieser Ebenen heißt die **Prismakante** des Prismas.

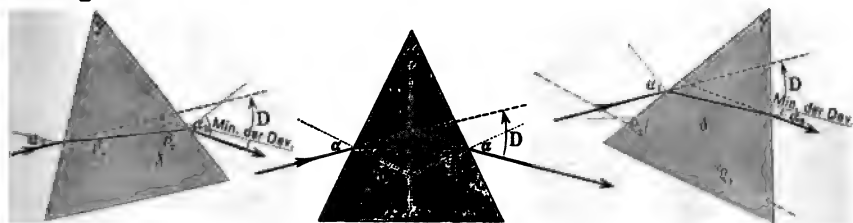
Aufgabe: Für ein Prisma vom Brechungsquotienten n und dem Einfallswinkel γ zu je einem eintretenden Strahle den eintretenden und austretenden Strahl zu konstruieren und den Ablenkungswinkel D (die „**Deviation**“) zu berechnen.

Von den Figuren 367, 368, 369 ist die mittlere so gezeichnet, daß zuerst der symmetrisch durchgehende Strahl und zu ihm die nun ebenfalls symmetrisch liegenden außerhalb des Prismas verlaufenden Strahlen, nämlich der einfallende

Fig. 367.

Fig. 368.

Fig. 369.



und der austretende Strahl, gemäß der Brechkonstruktion (Fig. 363) konstruiert worden sind. Sind dann in Fig. 367 und 369 die Einfallswinkel beliebig größer oder kleiner als der in Fig. 368, so zeigt die Messung und Vergleichung der drei Winkel D , daß dem symmetrischen Durchgang das Minimum der Ablenkung entspricht. Dieses Ergebnis der Konstruktion (und Rechnung, LA 169, LA 169, 170.) wird bestätigt durch den

Versuch: Fällt ein horizontales Lichtband auf ein Prisma mit abwärts gerichteter brechender Kante, so entsteht auf einer gegenüber der Öffnung (Spalte) liegenden Wand oder an der Decke des Zimmers ein prächtig gefärbter Lichtfleck („Spektrum“). Wird nun das Prisma in demselben Sinne (z. B. dem des Uhrzeigers) langsam immer weiter gedreht, so wandert im allgemeinen das Spektrum zuerst von der Seite des eintretenden Strahles weg, wird dann stationär und rückt dann wieder zur früheren Lage hin. (Außer diesem Spektrum zeigen sich noch mehrere durch ein- und mehrmalige — darunter auch totale — Reflexion und durch Brechung entstehende, teils ebenfalls gefärbte, teils farblose Bilder, LA 169.) — Die dem Minimum der Ablenkung entsprechenden Strahlen werden LA 169. vorwiegend bei der Entwerfung von Prismenbildern verwendet, da die einem asymmetrischen Durchgang entsprechenden Bilder nicht scharf sind.

Allgemein gilt für die den Durchgang der Strahlen bestimmenden Winkel:

1. $\delta = \beta_1 + \beta_2$; und da $\delta = \gamma$ (entweder aus dem Vierecke mit den zwei rechten Winkeln, oder weil der Winkel zwischen den Prismenebenen gleich ist dem Winkel zwischen den Einfallsloten), so ist auch $\gamma = \beta_1 + \beta_2$.

Allgemeiner ist $\gamma = \varphi_1 + \varphi_2$, worin φ_1 und φ_2 die Winkel der Lote mit irgend einer sie schneidenden Geraden sind (Fig. 369). — Anschaulich: Man denke zuerst die Prismenflächen zusammengeklappt ($\gamma = 0$) und die Lote längs derselben Geraden, wobei $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$; dann wachse allmählich γ und mit ihm $\varphi_1 + \varphi_2$.

2. $D = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) - (\beta_1 + \beta_2)$; also $D = (\alpha_1 + \alpha_2) - \gamma$.

Spezielle Fälle: I. Symmetrischer Durchgang bei beliebig großem brechenden Winkel: $D = 2\alpha - \gamma$, $\gamma = 2\beta$; daher

$$\alpha = \frac{D + \gamma}{2}, \quad \beta = \frac{\gamma}{2} \quad (\text{— auch unmittelbar ersichtlich aus Fig. 368}).$$

Eine Anwendung von diesen Beziehungen wird gemacht bei der Ermittlung des Brechungsindex eines durchsichtigen Stoffes. Der Stoff

Lehre vom Licht (Physikalische Optik).

in Form eines Prismas gebracht (an Kristallen finden sich natürliche Grenzflächen, an anderen festen Stoffen werden solche angeschliffen; in Flüssigkeiten werden in Hohlprismen aus Glasplatten mit

Fig. 370.



parallelen Grenzflächen, Fig. 370, Gase in Röhren (aus zwei gegen einander geneigten planparallelen Deckplatten zusammengebrach) und es werden dann gemessen der Einfallswinkel γ und das Minimum der Ablenkung D .

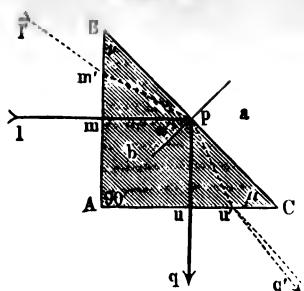
$$n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \text{ ist dann } n = \frac{\sin \frac{D + \gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \dots$$

Über die Durchführung solcher Versuche mit einem Reflexionsgoniometer unter Rücksicht auf die Größe des Einfallswinkels für verschiedene Farben (für bestimmte Fraunhofer'sche Linien) vergl. § 116.

II. Bei kleiner Ablenkung durch scharfkantige Prismen bei kleinem γ für kleinen Einfallswinkel: Wegen $\alpha \neq n\beta$ wird $D = n\beta_1 + n\beta_2 - \gamma = n(\beta_1 + \beta_2) - \gamma = n\gamma - \gamma$; $D = (n - 1)\gamma$. Ferner wegen $\gamma = \varphi_1 + \varphi_2$ auch $D = (n - 1)(\varphi_1 + \varphi_2)$.

Es ist hier also die ebenfalls kleine Ablenkung D unabhängig vom Einfallswinkel (entsprechend dem Stationärwerden des austretenden Strahls in der Nähe des symmetrischen Durchganges). Für verschiedene Prismen ist die Ablenkung D dem jeweiligen brechenden Winkel proportional. (Anwendung folg. § 107.)

Fig. 371.



Reflexionsprismen. Bildet der Querschnitt eines Prismas ein gleichschenkeliges rechtwinkliges Dreieck (Fig. 371) und fällt auf die Kathete ein Lichtstrahl normal auf, so daß er in der Kathete die Hypotenusenfläche unter einer Ablenkung von 45° trifft, so wird, da dieser Winkel oberhalb des Grenzwinkels liegt, der Strahl an der Hypotenusenfläche total reflektiert und normal zur anderen Kathetenfläche ausstrahlt. Prismen wirken also als sehr vollkommene Spiegel, da sie dem normal ein- und austretenden Strahl wenig von seiner Lichtstärke nehmen. - Die totale Reflexion wird angewendet in der Newton'schen Camera lucida.

Planparallele Platten stellen den Grenzfall des Prismas $\gamma = 0$ dar. In ihnen erfährt ein Strahl nur eine Parallelverschiebung, aber keine Änderung der Richtung.

Über atmosphärische Strahlenbrechung, Luftspiegelungen u. dergl. vergl. § 116.

§ 107. Sphärische Linsen.

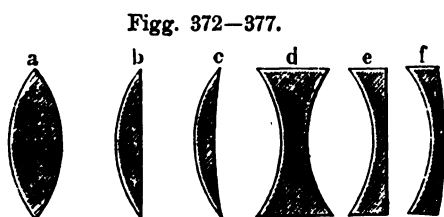
Sphärische Linsen im optischen Sinne sind durchsichtige Körper, die beiderseits von Kugelflächen begrenzt sind (ist eine der Grenzflächen eine Ebene, so kann sie als Grenzfall einer Kugel betrachtet werden).

nämlich für den Krümmungshalbmesser $r = \infty$ angesehen werden). Nach ihren geometrischen Eigenschaften nennt man (— nähere Beschreibung nach Figg. 372—377) die Linsen

a) bikonvex	} (in der Mitte dicker) als am Rande),	d) bikonkav	} (in der Mitte dünner als am Rande).
b) plankonvex		e) plankonkav	
c) konkavkonvex		f) konvexkonkav	

Die Mittelpunkte der die Linse begrenzenden Kugelflächen heißen **Krümmungsmittelpunkte**, die Halbmesser der Kugeln **Krümmungsradien**, deren reziproke Werte messen die Krümmungen der Linsen (math. Anhang, Nr. 26).

Die die beiden Krümmungsmittelpunkte verbindende Gerade heißt die **optische Achse** der Linse.



Anh 26.

Zählen wir die Krümmungsradien bei der bikonvexen Linse beide als positiv, so läßt sich die bikonkave Linse dadurch mathematisch beschreiben, daß bei ihr beide Krümmungsradien als negativ bezeichnet werden. Bei der konkavkonvexen Linse ist der positive Krümmungsradius kleiner als der negative, daher die positive Krümmung größer als die negative. Ähnlich bei den übrigen Linsen. — Die bisher genannten Eigenschaften sind geometrische.

Die physikalischen Grundeigenschaften der beiden Hauptarten von Linsen ergeben sich durch folgende

Vorversuche: Hält man die Achsen verschiedener Linsen in die Richtung der Sonnenstrahlen, so zeigt die Licht-, bezw. Schattenercheinung auf einem normal gegen die Achse gestellten Schirm, daß die parallel einfallenden Strahlen durch die Konvexlinsen konvergent, durch die Konkavlinsen divergent gemacht, daher Licht- (und Wärme-)Strahlen „gesammelt“, bezw. „zerstreut“ werden. Hiernach heißen die Konvexlinsen **Sammellinsen**, die Konkavlinsen **Zerstreuungslinsen**.

Weitere **Vorversuche** über die durch die verschiedenen Arten von Linsen entworfenen Bilder für verschiedene Gegenstandsweiten. — Ihre physikalisch-mathematische Erklärung geht davon aus, daß die in sie eintretenden Strahlen wie an einer Folge von scharfkantigen Prismen gebrochen werden. Die hierfür geltenden Größenbeziehungen werden aus den Gesetzen für die Prismen abgeleitet nach folgender

Aufgabe: Für eine Linse, und zwar zunächst eine bikonvexe, Fig. 378 (a. f. S.), sind gegeben die Krümmungshalbmesser r_1 und r_2 cm und der Brechungsquotient n in Bezug auf das als zu beiden Seiten der Linse gleich vorausgesetzte Medium. Für einen Strahl, der von einem Punkte A der Achse in der Gegenstandsweite a cm ausgeht, die Bildweite b cm zu konstruieren und zu berechnen.

Wie beim Hohlspiegel zeigt die Konstruktion auch hier, daß die von einem Punkte A ausgehenden Strahlen nicht in einem Punkte B sich sammeln;

vielmehr zeigt sich schon bei parallel auf die Linse fallenden Strahlen, daß die von der Achse weiter entfernten Strahlen nach dem Durchgang durch die Linse die Achse näher bei der Linse schneiden („Längenabweichung“). Die nachfolgende annähernde Berechnung gilt also wieder 1. nur für achsennahe Strahlen, bezw. für die Spitze der einhüllenden Fläche. 2. Die Dicke der Linse wird vernachlässigt gegenüber der Gegenstands- und der Bildweite; wir dürfen daher a und b von einem beliebigen Punkte innerhalb der Linse oder von deren Scheiteln aus zählen, und zwar werden wir sie von dem Fußpunkte der „Höhen“ h_1 und h_2 zählen. 3. Diese „Höhen“, d. h. die Strecken, um welche die von einem Strahl durchsetzten Stellen der beiden Linsenflächen von deren Achse abstehen, sind als gleich anzunehmen. 4. Alle Winkel zwischen den Strahlen, bezw. Einfallsloten und der Achse so klein, daß wir für sie nach Bedarf ihre Tangenten, bezw.

Anh. 21. Sinus einsetzen dürfen. (Über solche annähernde Rechnungen vergl. Anh., Nr. 21.)

Die verlangte Beziehung
wir die Deviation D des aus
eingetretenen einerseits durch Bild
den Brechungsquotienten und die

$$D = \alpha + \beta$$

$$\alpha \neq \tan \alpha = \frac{h_1}{a}; \quad \beta \neq \frac{h_2}{b}$$

$$D = \frac{h_1}{a} + \frac{h_2}{b}$$

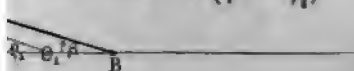


und b ergibt sich dann daraus, daß
ommenden Strahles gegen den in
egenstandsweite, anderseits durch
igradien ausdrücken. Es ist dann

$$D = (n-1)(\varrho_1 + \varrho_2) \quad (\S 106)$$

$$\varrho_1 \neq \sin \varrho = \frac{h_1}{r_1}; \quad \varrho_2 \neq \frac{h_2}{r_2}$$

$$D = (n-1)\left(\frac{h_1}{r_1} + \frac{h_2}{r_2}\right)$$



Da $h_1 \neq h_2$ vorausgesetzt wurde, so ergibt sich durch Gleichsetzung der beiden Werte von D und Ausfallen von h_1 und h_2

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) \quad \dots \dots \dots (1)$$

Nur wenn $r_1 = r_2 = r$ und $n = \frac{3}{2}$, wird $(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \left(\frac{3}{2} - 1\right)\frac{2}{r} = \frac{1}{r}$.

Die Linsenformel (1) ist also zunächst mit der im § 103 entwickelten Hohlspiegelformel (1) nicht gleichlautend; sondern während bei den Hohlspiegeln die Brennweite gleich ist der halben Krümmungswerte, ist bei den symmetrischen Konvexlinsen mit dem Brechungsquotienten $\frac{3}{2}$ die Brennweite gleich der ganzen Krümmungswerte. — Volle Übereinstimmung aber tritt ein, wenn in Gleichung (1) statt der Größen n , r_1 , r_2 wieder die Brennweite f der Convexlinse eingeführt wird. Definiert ist die **Brennweite** als diejenige spezielle Bildweite, die zur Gegenstandsweite $a = \infty$ gehört. Es wird

$\frac{1}{\infty} + \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)$, und da $\frac{1}{\infty} = 0$, so ist $(n-1)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) = \frac{1}{f}$; somit ergibt sich als endgültige

LA 171. Linsenformel $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \dots (2)$; in Worten! — LA 171.

Diskussion dieser Gleichung nunmehr wörtlich gleichlautend der der Hohlspiegelformel; während aber bei dem Hohlspiegel die physischen Bilder auf derselben Seite des Spiegels, die geometrischen auf der entgegengesetzten Seite wie der Gegenstand liegen, ist es bei den Kon-

Konvexlinsen umgekehrt. — Auch die Bildkonstruktion für Konvexlinsen (Fig. 379) entspricht ganz der für Hohlspiegel. Indem die Linse verschwindend dünn angenommen war, dürfen wir sie ersetzt denken durch die ihre Ränder

Fig. 379.

Fig. 381.

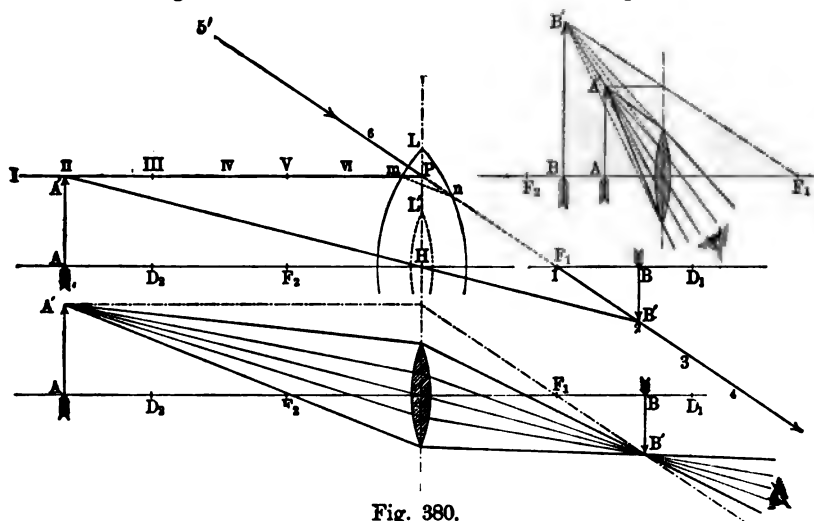


Fig. 380.

verbindende auf der Achse normale Gerade LH ; bis zu dieser Geraden wird dann der Parallelstrahl $A'P$ gezogen, von hier gegen den Brennpunkt abgelenkt und nun erst die gerade Verbindungslinie mn von Ein- und Austrittsstelle des Strahls in die wirkliche Linse eingetragen. Diese zweimal geknickte Linie entspricht dann, wie genauere Rechnung lehrt, sehr gut dem wirklichen Gang des Strahls sowohl für symmetrische wie für asymmetrische Linsen. — Ergänzung der Konstruktion durch die Randstrahlen, Zwischenstrahlen und durch das Auge; z. B. Figg. 380, 381. —

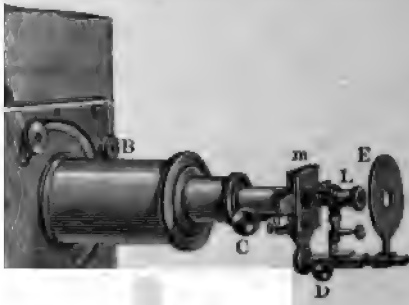
Alle sechs Linsenfälle finden die mannigfachste Anwendung in allen Arten optischer Instrumente. Im folgenden nebst der Formulierung der Linsenfälle auch sogleich je einige der einfachsten Anwendungen zu jedem Falle:

I. Linsenfall: Ist der Gegenstand in unendlichem Abstand, so ist das Bild in der einfachen Brennweite; es ist physisch, unendlich klein.

Wenn z. B. von der Sonne mittels einer Sammellinse ein Bildchen entworfen wird, so entsteht schon nicht mehr ein unendlich kleines Bildchen im Brennpunkt, sondern ein Scheibchen in der Brennebene. Es kann nämlich zwar, was die Gegenstandsweite betrifft, der Abstand Sonne—Erde = 20000000 Meilen als $a = \infty$ und daher $b = f$ angenommen werden. Da aber trotz dieses ungeheuren Abstandes die Sonne dank ihrer ungeheuren GröÙe sich als eine Scheibe von $\frac{1}{8}^{\circ}$ „scheinbarem Durchmesser“ darstellt, so bilden auch die von den entgegengesetzten Punkten des Sonnenrandes durch den Mittelpunkt der Linse gezogenen Hauptstrahlen miteinander diesen Winkel und es kommt auch dem Sonnenbildchen eben diese WinkelgröÙe zu. — Erst bei Fixsternen hat die noch viel gröÙere Entfernung zur Folge, daÙ sie wie Punkte erscheinen, und für sie ist dann auch das Bildchen in der Brennebene selbst ein Punkt; und zwar im Brennpunkt, wenn die

Achse der Linse auf den Fixstern gerichtet ist: Anwendung namentlich beim Objektiv aller astronomischen (dioptrischen) Fernrohre. — **Brenn- und Beleuchtungs-**

Fig. 382.



linsen (Kondensorlinsen); diese konzentrieren z. B. beim **Sonnenmikroskop** (Fig. 382) die parallel einfallenden Sonnenstrahlen auf das Objekt, welches jedoch etwas vor oder hinter der Brennweite gestellt wird, damit es durch die wärmende Wirkung der Strahlen nicht beschädigt werde. Ebenso bei den übrigen Projektionsapparaten (siehe unten IV).

II. Linsenfall: Ist der Gegenstand in der einfachen Brennweite, so ist das Bild in der doppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, gleich groß.

Anwendung in der Dunkelkammer (auch der Augapfel, § 108); es sei bemerkt, daß bei Bildern in oder über Lebensgröße der III. und IV. Linsenfall in Anwendung kommen. — Wirkung der Objektive bei terrestrischen Fernrohren. — Einem Wandern aus unendlicher Ferne bis an die doppelte Brennweite entspricht nur das geringe Wandern des Bildes von der einfachen gegen die doppelte Brennweite hin, LA 171; gleichwohl erlauben Distanzmesser aus der Bild- auf die Gegenstandsweite zu schließen.

III. Linsenfall: Ist der Gegenstand in der doppelten Brennweite, so ist das Bild ebenfalls in der doppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, gleich groß.

Anwendung bei Fraunhofers Dispersionsversuch (§ 114), wenn von dem Spalt ein gleich großes Bild entworfen werden soll.

IV. Linsenfall: Ist der Gegenstand zwischen der doppelten und der einfachen Brennweite, so ist das Bild außerhalb der doppelten Brennweite; es ist physisch, umgekehrt, vergrößert.

Anwendung bei den Projektionsapparaten (*Laterna magica*, *Skioptiken*, Fig. 383, Sonnenmikroskop, Fig. 382); Objektiv des zusammengesetzten Mikroskops (§ 111).

V. Linsenfall: Ist der Gegenstand in der einfachen Brennweite, so entsteht kein Bild (weder vor noch hinter der Linse); die vom Brennpunkt ausgehenden Strahlen kommen parallel aus der Linse.

Anwendung bei der Blendlaterne, wenn aus ihr nur ein Parallelstrahlenbündel austreten soll. — Kollimatorlinsen, die von einem in der Brennebene

liegenden Lichtpunkt oder Spalt ein Parallelstrahlenbündel auf eine (z. B. bei **Fiscus** Versuchen, § 122, sehr entfernte) mit gemeinschaftlicher Achse aufgestellte

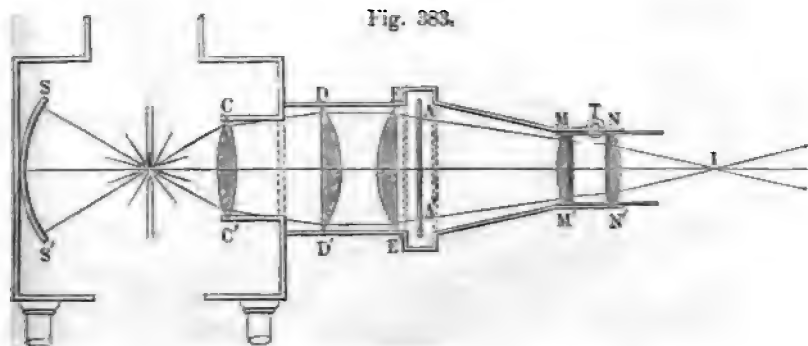


Fig. 383.

Linse senden; letztere sammelt dann die Strahlen wieder zu einem Lichtpunkt, bzw. einer Lichtlinie (gemäß dem I. Linsenfall).

VI. Linsenfall: Ist der Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite, so ist das Bild vor der Linse; es ist geometrisch, aufrecht, vergrößert.

Anwendung beim einfachen Mikroskop (Lupe), bei Brillen für Weitsichtige.

Die allgemeinere Theorie der Brechung des Lichtes an sphärischen Flächen hat die Aufgabe zu lösen: Die Mittelpunkte $O_1, O_2, \dots O_k$ von Kugelflächen beliebiger Krümmungshalbmesser liegen auf einer Geraden und bilden die Trennungsfächen von optisch verschieden dichten Medien. Welchen Weg nimmt ein Strahl beim Durchgang durch alle diese Trennungsfächen und Medien? [Eine solche Mehrheit brechender Kugelflächen liegt vor in unserem Auge, desgleichen in jedem zusammengesetzten optischen Instrument, zunächst Mikroskopen und Fernrohren. Die Lösung der Aufgabe gestaltet sich aber manchmal sehr schwierig, wenn, wie es diese Instrumente, ja sogar schon ein guter photographischer Apparat verlangt, noch bestimmte Nebenbedingungen dazukommen; so namentlich, daß einer als Gegenstand gegebenen zur Linsenachse normalen Ebene wieder möglichst annähernd als Bild ebenfalls eine Ebene entsprechen solle (aplanatische Linsen; „Linsen bester Form“). Alle Abweichungen, die die Bilder von der einfachen geometrischen Ähnlichkeit mit dem Gegenstande infolge der Kugelflächen zeigen, werden zusammengefaßt unter dem Namen „sphärische Abweichung“ der Linse. — Viel mehr als durch diese sphärische wird die Schärfe der Linsenbilder geschädigt durch die „chromatische Abweichung“; über diese und über Achromasie vergl. § 116.]

Konkavlin sen. Fällt auf eine Konkavlinse (Fig. 385 a. f. S.) ein Strahlenbündel parallel zur Achse, so tritt es divergierend so aus, wie wenn es von einem Punkte vor der Linse (dem „imaginären Brennpunkte“ F') käme. — Umgekehrt (Fig. 388 a. f. S.): War auf die Linse ein konvergentes Strahlenbündel gefallen, dessen Scheitel in F liegt, so tritt es parallel aus der Linse aus. — Daher Bildkonstruktion Fig. 384 (a. f. S.).

Für das Verständnis des Galileischen Fernrohres (§ 112, Fig. 400) ist der Vergleichung der Figuren 387, 388, 389 nützlich. Die Konvergenz des einfallenden

Fig. 384.

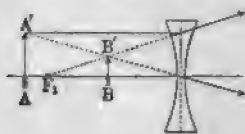


Fig. 385.

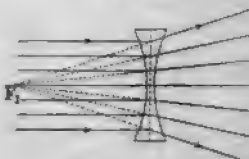


Fig. 386.



Fig. 387.

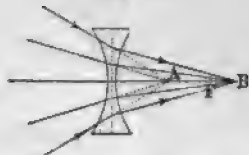
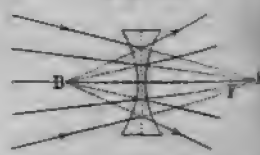


Fig. 388.



Fig. 389.



Büschels wird nämlich in Fig. 387 Parallelismus, in Fig. 389 statt eines physischen Bildes, für ein auf der Seite von A beim ein geometrisches Bild B.

Rechnerisch ergeben sich Formel für die Sammellinsen, indem n gesetzt werden. Z. B. Für eine symmetrische Konkavlinse vom Brechungs-
exponenten $n = \frac{3}{2}$ wird $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$; allgemein $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{f}$.

schere Konvergenz, in Fig. 389 diesem dritten Falle erscheint daher stierende Büschel in A erzeugt hätte, e auf der anderen Seite der Linse

ten für Zerstreuungslinsen aus der positiven Krümmungsradien negative ische Konkavlinse vom Brechungs-

Konvexspiegel. Fig. 386 zeigt, daß und warum die Konvexspiegelbilder durchaus analog sind den Konkavlinsebildern (— entsprechend den Analogieen von Konkavspiegelbildern und Konvexlinsebildern). Zeige an Fig. 386, daß und warum, wenn wir z. B. einer glänzenden Gartenkugel unser Gesicht bis auf kleine Abstände nähern, die Nase weniger verkleinert erscheint als Stirne und Kinn; daher Zerrbilder.

Für alle brechenden und spiegelnden Flächen von geometrisch definierter Gestalt (Kegel-, Zylinder . . . -Spiegel, Zylinderlinsen . . ., letztere anwendbar zum Entwerfen von Spaltenbildern u. dergl.) lassen sich von gegebenen wirklichen Gegenständen solche Zeichnungen (Anamorphosen) anfertigen, daß die von ihnen durch jene reflektierenden und brechenden Körper entworfenen Bilder den wirklichen Gegenständen wieder geometrisch ähnlich werden.

§ 108. Bau und physikalische Leistung des Auges.

Der annähernd kugelförmige Augapfel (Figg. 390, 391) besteht aus a) drei Systemen von Häuten, b) drei das Innere erfüllenden lichtbrechenden Medien; nämlich

a) 1. Außen die Sehhaut (weiße, harte Haut, *sclerotica*), welche nach vorn in die durchsichtige, stärker gekrümmte Hornhaut (*cornea*) übergeht.

2. An der Innenseite der Sehnenhaut die **Aderhaut** (*chorioidea*), welche nach vorn in die von dem Sehloch (Pupille) durchbrochene **Regenbogenhaut** (*iris*) übergeht; sie ist außen bei verschiedenen Personen verschieden gefärbt und innen wie die Aderhaut mit einem schwarzen Farbstoffe bedeckt.

3. Zu innerst die **Netzhaut (retina)**, welche aus den Verzweigungen ~~des~~ Sehnerven (und vorgelagerten Organen, unter ihnen die „Stäbchen“

Fig. 390.



Fig. 392.

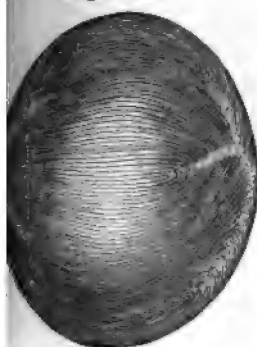
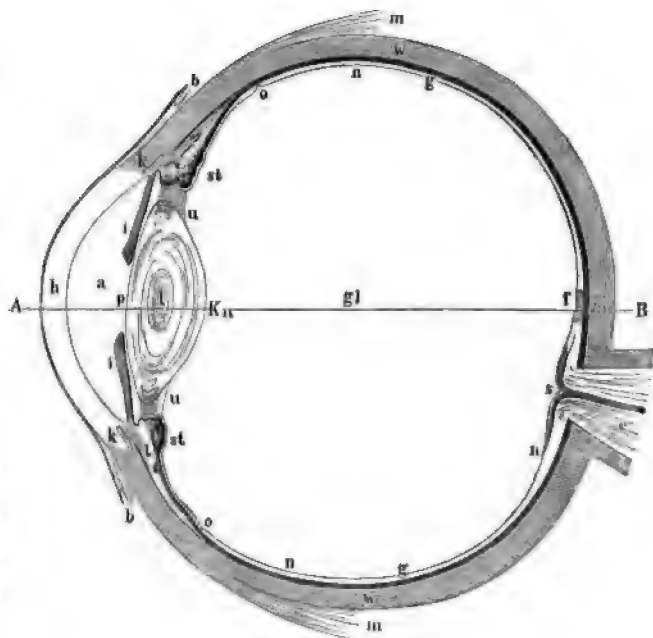


Fig. 391.



und „Zapfen“) gebildet wird und sich nach vorn nur bis gegen die Regenbogenhaut erstreckt; die hinterste Stelle ist der am meisten lichtempfindliche gelbe Fleck (in seiner Mitte die „Netzhautgrube“); die Eintrittsstelle des Sehnerven ist der für das Licht unempfindliche blinde Fleck¹⁾.

b) 1. Die **wässerige Flüssigkeit** (in der vorderen Augenkammer zwischen Hornhaut und Iris); 2. die hinter der Iris liegende

¹⁾ Zuerst bemerkt von MARIOTTE (1668); nachzuweisen durch mannigfaltige Versuche, z. B.: Schliesse das linke Auge, fixiere mit dem rechten eine Münze und lege 1 dm rechts von dieser eine zweite vor dich hin; letztere wird dir bei richtiger Entfernung des Kopfes (etwa 3 dm) unsichtbar. — „Einem den Kopf wegschauen.“ — Auf der Breite des blinden Fleckes haben 11 Vollmondbilder nebeneinander Platz.

3 (Fig. 392 a. v. S.) und hinter dieser 3. der aus gallertartige bestehende **Glaskörper**, welcher die Hauptmasse des Augapfels ausstellt.

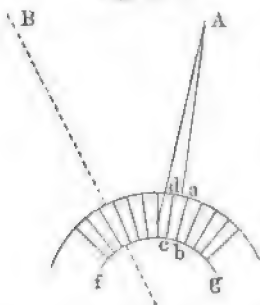
Die von dem Hornhautscheitel durch die Mitten der Pupille, der Linse und den gelben Fleck gehende Gerade heisst die **Augenachse**.

Der **Augapfel** ist in der mit weichem Zellgewebe ausgekleideten **Augenhöhle** eingebettet; er kann durch sechs **Muskeln** bewegt und vorn durch die **Augenlider** bedeckt werden. — Die Teile des Augapfels, welche man bei einem „offenen Auge“ zwischen den Augenlidern sieht, sind: Ein Teil der Sehnethaut („das Weiße des Auges“) und die Hornhaut, sowie die Regenbogenhaut mit der Pupille. —

Erst **KEPLER** hat bestimmt erkannt, dass der optische Vorgang im Auge der einer **Brennpunkt** sei (früher hatte man gemeint, dass sich die äußeren Gegenstände in einem Punkte vor dem Auge eine Art unsichtbarer **Teufelskugel** bilden, gleichsam vorgebildet, vergl. § 99). Sowohl das menschliche Auge, als auch das Auge der Tiere, unterliegt den allgemeinen Gesetzen der Optik, wie direkt empirisch festgestellt ist. **KEPLER** hat die optische Leistung des Auges festgestellt, indem er das Auge als ein System von drei Linien betrachtete, die mit einem Schirm (der Netzhaut) zum Auffangen der Lichtstrahlen verbunden ist. —

II. Linsenfall verbunden ist. — Die Bedingung zum scharfen Sehen eines Gegenstandes ist, dass alle Strahlen, die von je einem Punkte des sichtbaren Gegenstandes durch die Pupille gehen, sich in einem Punkte der Netzhaut sammeln.

Fig. 393.



Während diese Forderung im „dioptrischen“ Auge des Menschen, der Säugetiere, Vögel, Reptilien, Amphibien und Fische durch die brechenden Häute und Medien verwirklicht ist, geschieht die Sonderung des von den Gegenständen ausgehenden Lichtes bei Insekten durch den ganz andersartigen optischen Apparat der **Facettenaugen** (manche auch mit je einer Linse vor jeder Facette); auch hier sind dann die lichtempfindlichen Teile auf dem Grunde je einer Facette den einzelnen Flächenteilen des Gegenstandes zugeordnet (Fig. 393).

Im dioptrischen Auge erfährt das eindringende Licht Brechungen beim Übergang aus der Luft in die Hornhaut, aus dieser in die wässrige Feuchtigkeit,

aus dieser in die Linse (ja sogar hier noch in deren verschiedenen Schichten von etwas verschiedenen Brechungsquotienten), endlich beim Übergang von der Linse in den Glaskörper. Für dieses wirkliche Auge des Menschen lässt sich nach **LISTING** eine einzige sphärische brechende Fläche von gleicher Gesamtwirkung fingieren, deren Krümmungsmittelpunkt den **Kreuzungspunkt des „reduzierten Auges“** darstellt; im wirklichen Auge kommt er innerhalb der Linse nahe deren hinterer Fläche, etwa 15 mm vor der Netzhaut zu liegen. In diesem Punkte kreuzen sich die den verschiedenen Punkten eines äußeren Gegenstandes

sprechenden Hauptstrahlen; man beachte aber, daß nicht etwa nur diese, sondern das ganze von je einem Gegenstandspunkte kommende Lichtbündel, soweit die Pupille Eintritt gewährt, zur Reizung eines Punktes auf der Netzhaut trage, der erst hierdurch Bildpunkt wird.

Für alle beschriebenen optischen Vorgänge kommt vom Standpunkte der Optik nicht in Betracht, daß das Auge mehr als eine leblose Dunkelkammer mit Linse, sondern daß es ein lebendiges Organ ist. Letztere Tatsache ist Gegenstand der physiologischen und der psychologischen Optik (psychol. Anh., Nr. 44). Einiges über die chemischen Vorgänge der Netzhaut vergl. § 120. Anh. 44. Noch wesentlich in die geometrische Optik fällt dagegen die Fähigkeit des Auges, sich verschiedenen Gegenstandsweiten anzupassen, kurz „zu akkommodieren“, durch welche Fähigkeit allein schon freilich wieder der lebendige Augapfel der leblosen Dunkelkammer unvergleichlich überlegen ist (zumal dieses Akkommodieren meistens ganz unwillkürlich geschieht; psychol. Anh., Nr. 44). Anh. 44.

§ 109. Akkommodation.

Wäre das Auge eine starre Verbindung der zusammen als Sammellinse wirkenden brechenden Stoffe und der den Schirm darstellenden Netzhaut, so würden die von einem Gegenstande ausgehenden Strahlen nur bei einer einzigen Gegenstandsweite ein scharfes Bild auf der Netzhaut geben. Bei kleineren Gegenstandsweiten wäre der Ort des Bildes hinter, bei größeren vor der Netzhaut; in diesen beiden Fällen würden die von je einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen nicht wieder in einem Punkte gesammelt, sondern sie würden auf der Netzhaut einen „Zerstreuungskreis“ beleuchten (wobei die Kreisform der Pupille entspricht). Tatsächlich nun vermögen wir aber bei sehr verschiedenen Gegenstandsweiten scharf zu sehen; ihnen muß sich also das lebendige Auge anpassen können, und es entsteht hiermit die Frage nach dem Mechanismus der Akkommodation. Von vornherein wären folgende drei Möglichkeiten denkbar: 1. Beim Heranrücken des Gegenstandes an das Auge rücke die Netzhaut vom Kreuzungspunkte weg (wie bei der photographischen Dunkelkammer nahe Gegenstände die Platte nach rückwärts, d. i. vom Objektiv weg, gehoben wird); dies ist aber schon dadurch ausgeschlossen, daß die Augenhöhle kein Zurückweichen der Hinterwand des Augapfels nicht Raum gewährt. Es könnten sich bei unveränderter Stellung der Netzhaut die brechenden Medien nach vorn, d. i. zum Gegenstande hin, bewegen (wie bei der Dunkelkammer die Feineinstellung meist durch ein Verschieben nicht der Platte, sondern des Objektivs geschieht); aber auch dieser Vorgang findet tatsächlich nicht statt, sondern 3. verschiedenen Gegenstandsweiten entsprechen verschiedene Krümmungen der Linse, wie CRAMER und HELMHOLTZ durch Messung der Spiegelreflexen, die sich durch Reflexion an der Krystalllinse erzeugen, direkt nachgewiesen haben. — Gemäß den Gesetzen über die Abhängigkeit der Bildweite von Gegenstandsweite und Brennweite gelten folgende Begriffe und Gesetze:

Ein normalsichtiges Auge ist, wenn die Akkommodationsmuskeln ganz ruhen, auf unendlich große Gegenstandsweite eingestellt. Auch bei Annäherungen auf einige Meter gibt sich die Muskeltätigkeit noch nicht in merklichen Empfindungen und noch weniger in Ermüdungsfühlen kund. Wir pflegen die Gegenstände womöglich (z. B. das Buch beim Lesen) bis auf die „deutliche Sehweite“ von 30 bis 20 cm dem Auge

zu nähern. Bei fortgesetzter Annäherung empfinden wir immer größere Akkommodationsanstrengung und bei Gegenstandsweiten von etwa 10 cm abwärts wird das deutliche Sehen mit freiem Auge unmöglich.

Ein der Akkommodation nach normales Auge wird strenger als „emmetropisch“ bezeichnet, da es in anderen Hinsichten immer noch abnorm sein kann.

Weitsichtige Augen sehen in die Ferne scharf, vermögen aber schon auf die deutliche Sehweite normaler Augen nicht mehr zu akkommodieren.

Da dies namentlich in höherem Alter eintritt (infolge geringerer Biegsamkeit der Gewebe), so heißen solche weitsichtige Augen auch presbyopisch. — In einem weitsichtigen Auge schneiden sich die Strahlen von entfernteren Gegenständen auf der Netzhaut, somit würden sich die von näheren hinter der Netzhaut schneiden. Da somit für diese kleinen Gegenstandsweiten die Linse zu schwach gekrümmt ist, wird für Weitsichtige die Sammellinse über gewordene Krystalllinse extirpiert, eine sehr stark konvexe „Starbrille“.

Kurzsichtige Augen sind nur für Gegenstandsweiten, die kleiner sind als die Sehweite normaler Augen.

Dieser Mangel ist man durch eine zu starke Krümmung der brechenden Medien (Hornhaut, Linse) oder durch einen zu großen Abstand der Netzhaut von der Linse. Dieser Mangel kann angeboren sein und in späteren Jahren sich mindern oder verschärfen. Die Kurzsichtigkeit kann aber auch erworben sein, z. B. als Folge der schlechten Gewohnheit, in die Dämmerung zu lesen, wobei unwillkürlich, um größere Lichtstärke zu erzielen, das Auge der Schrift zu nahe gebracht und daher die Akkommodationsmuskulatur an eine zu kleine Gegenstandsweite gewöhnt wird. Kurzsichtige Augen heißen auch myopisch (*μῦω*, ich blinze). — Als Brille für Kurzsichtige dient die Zerstreuungslinse; warum? Wird bei hochgradiger Kurzsichtigkeit der Gebrauch der Brille verabsäumt, so können infolge instinktiver Annäherung des Augenhintergrundes an die Linse Erkrankungen, sogar Netzhautablösungen eintreten.

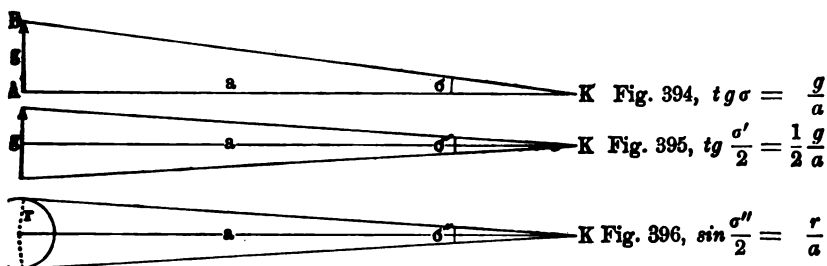
§ 110. Schwinkel. Gemeinschaftlicher Zweck der Mikroskope und Fernrohre.

Nach alltäglichen Erfahrungen sind für das freie Auge Gegenstände nicht mehr deutlich erkennbar, wenn sie a) zu klein, b) zu entfernt sind. Beides hat den gemeinschaftlichen Grund, daß die verschiedenen Punkte des Gegenstandes dann nicht mehr auf hinreichend verschiedenen Punkten der Netzhaut ihre Bilder haben. Feine physiologische Messungen haben gezeigt, daß in der Tat die Grenze der Unterscheidbarkeit je zweier Außenpunkte dann erreicht ist, wenn ihre Bilder nicht mehr auf verschiedene „raumempfindende Elementarorgane“ der Netzhaut (wahrscheinlich die Stäbchen), sondern nur mehr auf verschiedene Punkte desselben Organes fallen.

Die Beziehungen zwischen Größe, Abstand und deutlicher Sichtbarkeit eines Gegenstandes erfordern die Einführung des Begriffes „Schwinkel“.

Schwinkel (Gesichtswinkel), unter dem eine Strecke $AB = g$ cm erscheint, heißt der Winkel $AKB = \sigma^\circ$, den die vom Kreuzungspunkt

das Auge zu den Punkten A und B gezogenen Geraden einschließen. Ist der senkrechte Abstand der Strecke vom Auge a cm, so ergeben sich die Beziehungen nach Figg. 394 und 395; ähnlich Fig. 396.



Diskussion dieser Gleichungen in Bezug auf jede der drei Größen σ , a und g (denen je eine konstant, eine unabhängig, die dritte abhängig veränderlich bleibt). — Speziell wird σ sehr klein, wenn bei konstantem a das g sehr klein, oder wenn bei konstantem g das a sehr groß ist. **Mikroskope und Fernrohre** haben den gemeinschaftlichen Zweck, daß sie den Gegenstand unter einem größeren Sehwinkel σ zeigen. — Man beachte hier sogleich das Ungenauere in der Ausdrucksweise: „Die Gegenstände werden durch das Mikroskop vergrößert, durch das Fernrohr näher gebracht“; es muß natürlich heißen: **Mikroskop und Fernrohr** zeigen hinreichend große und hinreichend nahe Bilder.

Im folgenden sollen nur die einfachsten Schemata der Wirkungsweise von Mikroskopen und Fernrohren gegeben werden; namentlich sei bemerkt, daß für diese hier als einfache Linsen angenommenen Objektive und Okulare in Wirklichkeit fast ausnahmslos Linsenkombinationen (teils zur möglichsten Vermeidung der chromatischen, viel mehr aber noch der chromatischen Abweichung) eintreten. Allgemein gelten die Bezeichnungen:

Bei allen Mikroskopen (das einfache ausgenommen) und Fernrohren heißt die dem Gegenstande zugekehrte Linse (Linsenkombination) das **Objektiv**, die dem Auge zugekehrte das **Okular**.

§ 111. Mikroskope.

I. Will der Nichtphysiker mittels einer „Lupe“ z. B. die Fäden eines feinen Gewebes betrachten, so pflegt er das Glas meistens nahe an diesen Gegenstand zu halten. Der richtige Gebrauch der Lupe und gleich die Einsicht in ihre Wirkungsweise entspricht dagegen folgendem

Versuch: Bringe den kleinen Gegenstand immer näher an dein Auge; er erscheint dann unter immer größerem Sehwinkel, also vergrößert — aber auch verschwommen, da das Auge mit seiner Akkommodation nicht mehr zu folgen vermag. Schiebt man dann den Gegenstand und Auge eine als **einfaches Mikroskop (Lupe)** wirkende Sammellinse, so daß das Auge der Linse möglichst nahe und der Gegenstand innerhalb der einfachen Brennweite der Linse ist, so sieht das Auge gemäß dem VI. Linsenfalle ein geo-

metrisches, aufrechtes, vergrößertes Bild (Fig. 381, S. 343); und zwar deutlich, wenn die **Bildweite gleich ist der deutlichen Schweite**.

Fig. 397.

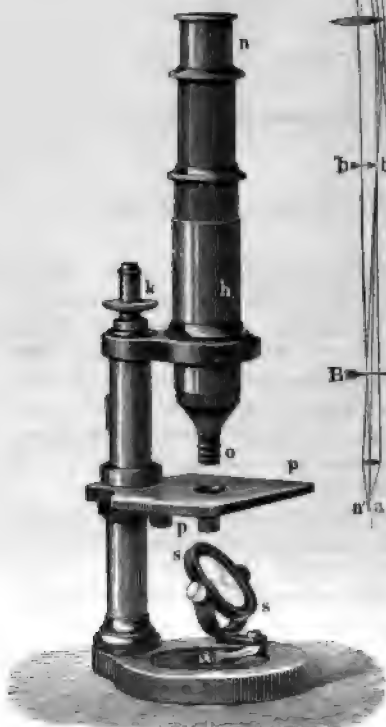


Fig. 398.



Schon ein Wassertropfen, den man über ein mit einer Nadel in ein Stanniolblatt gestochenes Loch bringt, wirkt in dieser Weise stark vergrößernd. Dergleichen die Glasstiftchen, die am einen Ende kugelig, am anderen (der zu jener einfach brechenden Fläche gehörigen Brennebene) eben geschliffen sind und hier Mikrophographien tragen. Auch wo mehrere Sammellinsen so nahe hintereinander angebracht sind, daß jede folgende die Konvergenz des in die vorderste eingetretenen Strahlenbündels noch steigert, wirken diese zusammen als **einfaches Mikroskop**. Doch läßt sich die Wirkung eines solchen nicht so steigern wie bei dem von JANSEN 1590 erfundenen zusammengesetzten Mikroskop.

II. Beim **zusammengesetzten Mikroskop** ist das Objektiv eine Sammellinse von kleiner Brennweite. Es erzeugt von dem etwas außerhalb dieser Brennweite befindlichen Gegenstande aa' das vergrößerte physische Bild bb' (nach dem IV. Linsenfalle); dieses Bild wird durch das als **einfache**

Mikroskop wirkende Okular betrachtet und erscheint als **nochmals vergrößert** in BB' .

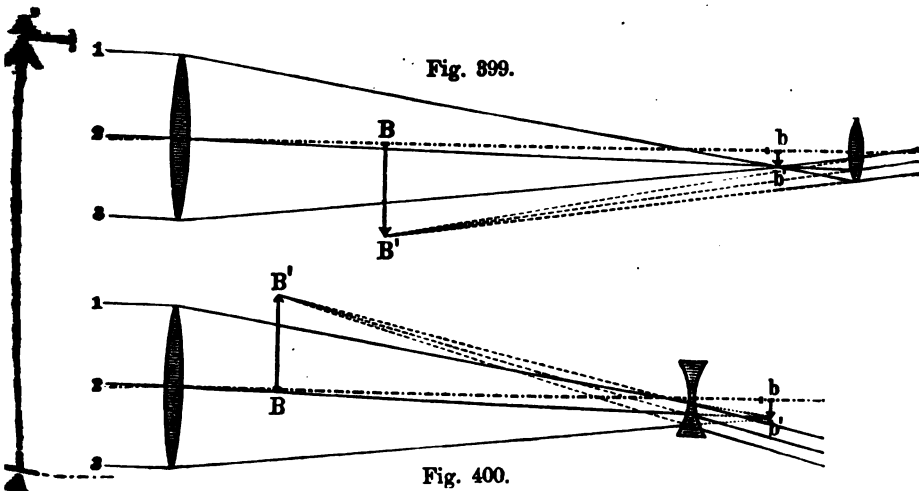
§ 112. Fernrohre.

I. Beim **Keplerschen Fernrohr** ist das Objektiv eine Sammellinse von großer Brennweite; es erzeugt von dem sehr weit entfernten (und hinreichend großen) Gegenstande AA' (bei astronomischen Objekten entsprechend dem I., bei irdischen dem II. Linsenfalle) ein physisches, verkleinertes Bild bb' in, bzw. wenig außerhalb der Brennweite des Objektivs. — Das Okular ist wie beim zusammengesetzten Mikroskop eine Sammellinse von kleiner Brennweite; durch diese wird bb' betrachtet und erscheint als BB' (Fig. 399).

Vom zusammengesetzten Mikroskop unterscheidet sich also das **Keplersche Fernrohr** nur dadurch, daß für das Objektiv dort der IV., hier der II. Linsenfall in Anwendung kommt. — Da das Bild bb' annähernd sowohl in der **Brennweite**

des Objektivs wie des Okulars zu liegen kommt, so ist annähernd die Länge des **Keplerschen** Fernrohres gleich der **Summe** der Brennweiten vom Objektiv und Okular.

II. Das Galileische Fernrohr unterscheidet sich vom **Keplerschen** wesentlich dadurch, daß als Okular statt einer Sammellinse eine **Zerstreuungslinse** dient, die annähernd um ihre Brennweite näher dem Objektiv ist als das Bild bb' , welches durch das Objekt allein



entworfen würde. Dieses konkave Okular entwirft von bb' ein umgekehrtes, also von dem Gegenstande ein aufrechtes Bild (Fig. 400).

Die Wirkungsweise des Okulars entspricht dabei dem in Fig. 389, S. 346 dargestellten Falle, d. h. bb' muß etwas außerhalb der (imaginären) Brennweite des konkaven Okulars zu liegen kommen. Somit ist annähernd die Länge des Galileischen Fernrohres gleich der **Differenz** der Brennweiten von Objektiv und Okular.

Aufrechte Bilder wie das Galileische Fernrohr zeigt auch ein Keplersches, dem man hinter der bei ihm als Okular dienenden Sammellinse noch eine Sammellinse so hinzugefügt hat, daß diese das umgekehrte Bild nochmals umkehrt. Ein solches Fernrohr heißt vorzugsweise ein **terrestrisches**, wogegen das Keplersche ein **astronomisches** heißt, weil namentlich bei astronomischen (aber auch bei geodätischen) Beobachtungen das umgekehrte Bild nicht stört. (Eigentlich wäre hiernach auch das Galileische Fernrohr zu den „terrestrischen“ zu zählen.) — Da das Galileische Okular die vom Objektiv kommenden Strahlen noch weiter von der Achse ablenkt, hat es ein kleineres Gesichtsfeld und geringere Lichtstärke als das astronomische. Das Galileische Fernrohr wird daher nur mehr bei Opernguckern (und Feldstechern) praktisch verwendet, für die es sich durch seine Kürze empfiehlt.

Spiegelfernrohre. Als Objektiv läßt sich statt der Sammellinse auch ein Sammelspiegel anwenden, dessen Bilder dann wieder durch die gleichen Linsenokulare wie bei den Linsenfernrohren betrachtet werden.

Eine Unbequemlichkeit ist aber die, daß der Hohlspiegel die Strahlen in der Richtung zum Gegenstande zurückwirft, so daß der Beschauer dem Gegenstande selbst den Rücken zuwenden und überdies etwas seitwärts von den einfallenden Strahlen stehen müßte, damit er diese nicht abhält. Bei manchen Spiegelfernrohren sind diese Umstände durch Anbringung eines zweiten Spiegels vermieden worden, so beim

Fig. 401.



Newtonschen Teleskop (Fig. 401) mittels eines Planspiegels, der direkt physische Bilder gibt (warum? — vergl. § 102); dagegen bei Fritsch' Brachyteleskop (Modell!) durch einen kleinen

Konvexspiegel, vermöge dessen das Fern kann. — Der wesentlichste Vorzug des chromatischen Abweichungen (§ 116)

kurz und kompensiös gebaut werden Spiegelfernrohre ist das Entfallen aller Objektiva.

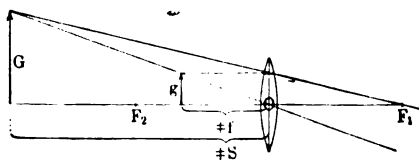
§ 113. Vergrößerung, Schärfe von Mikroskopen

lichtstärke und Gesichtsfeld und Fernrohren.

Im folgenden ist unter **Vergrößerung** immer die lineare verstanden, deren zweite Potenz dann das Maß der Flächenvergrößerung bildet. Erscheint z. B. bei einem Sonnen- (Zirkonlicht-) Mikroskop das Bild eines Flohes von 1 mm Länge 2 m lang, so ist die lineare Vergrößerung 2000, die Flächenvergrößerung 4000000. — Bei den meisten optischen Instrumenten ergibt sich die Vergrößerung nicht so direkt wie bei den genannten Projektionsapparaten, wo das physische Bild auf einem Schirme aufgefangen und hier ebenso direkt gemessen werden kann wie der Gegenstand selbst. Experimentell wird z. B. beim Fernrohr die Vergrößerung bestimmt, indem man es etwa auf ein Ziegeldach richtet und mit beiden Augen schauend abzählt, wieviel der wirklichen Ziegel das Gesichtsfeld verdeckt und wieviel der vergrößerten in das Gesichtsfeld gehen. — Einige der einfachsten annähernden Berechnungen von Vergrößerungszahlen v sind folgende:

Ist beim **einfachen Mikroskop** die Länge des Gegenstandes g cm, die des Bildes G cm, so ist $v = G:g$. Denken wir uns das Auge nicht nur nahe an der Linse, sondern in ihrem **Mittelpunkte** O (Fig. 402) und den Gegenstand nicht etwas innerhalb, sondern in der Brennweite, so wird die **lineare Vergrößerung** $v = S:f$; in Worten!

Fig. 402.



Man kann also einer gegebenen Linse (Lupe) nicht für sich eine bestimmte Vergrößerung zuschreiben, sondern nur in Bezug auf ein Auge mit bestimmter Sehweite; d. h. ein Kurzsichtiger muß von dem Gegenstande ein weniger entferntes, also auch weniger vergrößertes Bild entstehen lassen (indem

er die Linse mit dem Auge näher an den Gegenstand hält). — Gleiches gilt auch für die Okulare der zusammengesetzten Mikroskope und der astronomischen Fernrohre, da diese Okulare eben als Lupen wirken.

Beim **zusammengesetzten Mikroskop** ist die Vergrößerung V definiert als das Produkt der Vergrößerungen v_1 , die das Objektiv (als Projektionslinse), und v_2 , die das Okular (als Lupe) liefert.

Beim **astronomischen Fernrohr** ist die Vergrößerung V zunächst definiert durch das Verhältnis der Sehwinkel $\Sigma : \sigma$, unter denen ein Objekt durch, bzw. ohne das Fernrohr erscheint. Infolge der verschwindenden Kleinheit der Fernrohrlänge gegenüber dem Abstände der Objekte ist es dann zulässig, dem Sehwinkel σ als Scheitel die Mitte des Objektivs, dem Winkel Σ die Mitte des Okulars zu erteilen. Ist γ die lineare GröÙe des durch das Objektiv entworfenen physischen

Bildes, so ist $v = \frac{\Sigma}{\sigma} \neq \frac{tg \Sigma}{tg \sigma} = \frac{\gamma : f}{\gamma : F} = \frac{F}{f}$; in Worten! (LA 172.) LA 172.

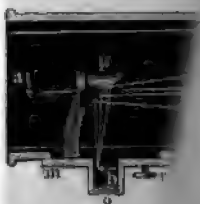
Der Begriff der „Vergrößerung eines astronomischen Fernrohres“ darf nicht dahin mißverstanden werden, als sei das durch das Okular schließlicg gesehene Bild wirklich größer als der Gegenstand; schon wenn ich einen Kirchturm, geschweige den Mond ansehe, ist ja jenes Bild immer noch unvergleichlich kleiner (daß namentlich bei bekannten Gegenständen, Menschen, Gebäuden, das Fernrohr überhaupt diese Dinge nicht größer, sondern näher erscheinen läßt, erklärt sich aus der Psychologie der „Tiefenwahrnehmung“; psychol. Anhang, Nr. 44). Da das Objektiv für sich gemäß dem I. höchstens II. Linsenfall wirkt, so ist im Vergleich zum Gegenstande das Bild immer verkleinert. — Gleichwohl trägt auch das Objektiv zur Vergrößerung insofern bei, als es, je größer die Brennweite des Objektivs ist, die physischen Bilder bei unverändertem Sehwinkel immer größer entwirft: dies der eine Grund für die Anfertigung sehr langer astronomischer Fernrohre. Ist z. B. die Brennweite des Objektivs $F = 5$ m, so ist der Durchmesser des Bildes vom Vollmond (Sehwinkel $\frac{1}{2}^\circ$) $d = 4,6$ cm; ist dagegen $F' = 20$ m, so ist $d' = 18$ cm (LA 172). In eben diesen GröÙen entsteht dann z. B. das Mondbild auf der photographischen Platte, wenn diese statt des Okulars mit dem Objektiv verbunden wird. Anh. 44. LA 172.

Bei gegebener Fernrohrlänge ist sodann die Vergrößerung ausschließlicg vom Okular abhängig. Dabei wird nun aber keineswegs (wie der Unkundige meinen möchte) der Beobachter immer ein möglichst stark vergrößerndes Okular wählen. Denn namentlich bei trüber und infolge ungleicher Erwärmung von Schlieren durchzogener Luft erscheint bei starker Vergrößerung das Bild so undeutlich und unruhig, daß häufig erst bei viel schwächerer Vergrößerung am besten zu beobachten ist. — Insbesondere aber ist ja die stärkere Vergrößerung im allgemeinen erkaufte durch eine geringere

Lichtstärke. Wird eine beleuchtete Fläche von φ mm² durch ein einfaches oder zusammengesetztes Mikroskop gesehen, so daß das Bild Φ mm² Fläche hat, so ist die vom Gegenstande ausgehende Lichtmenge über eine $(\Phi : \varphi)$ mal so große Fläche verbreitet und diese somit im Verhältnis $(G : g)^2 = v^2$ mal so schwach beleuchtet.

Hierbei ist vorausgesetzt, daß alles Licht, welches von φ ausgegangen war, auch von Φ her durch die Pupille auf die Netzhaut gelangt (wobei, wie auch im

Eine Unbequem-
der Richtung zum G-
stande selbst den l-
fallenden Strahlen
Spiegelfernrohren z-



Konvexspieg-
kann. — Der
chromatische

§ 113. Ve

Im f-
zweite Po-
bei einem
2 m lang
— Bei
so direk-
einem S-
der Ge-
größert
beiden
verdeck-
einfach

die



Ve-
be-
we-

an den Gläsern u.
führt die Lichtstärke, di-
war, durch das Oku-
Fernrohren nun kann der Gege-
undurchsichtige Objekte von
von unten her mittels Hohlspi-
Fernrohren; sondern bei die-
sehr große Objektive. Dieses
riesigen Fernrohren mit sehr
Öffnung, deren Fläche z. B. 10^4
dem lichtschwachen Fixsterne komm-
einen die Pupille gerade anfüll-
läßt, wird dann ein Punkt der Ne-
beim Eindringen jener Strahlen in da-
schwache Fixsterne, welche wegen
auch bei stärkster Vergrößerung
Punkte (und zwar bei guten Fernrohren
einer als mit freiem Auge) erscheinen
sind. Dagegen erscheinen Planeten
zwar um so lichtschwächer, je stärk-
durch ein lichtstarkes Fernrohr (ähnlich
Tageslicht die Fixsterne erblicken kann, wi-
der hell beleuchteten Luft nicht sieht, e-
lichtete Luft sozusagen vergrößert, also viel
der Stern.

Wie a Fig. 399 der Winkel zwischen dem H-
seiner Achse größer angenommen wo-
welcher sich in b' gesammelt hatte
hin weitergeht, nicht mehr in diese-
des Randes vorbeigehen. Mit einem O
ist also nur ein Gesichtsfeld von bestin-
die Vergrößerung des Okulars verkehrt
also auch annähernd seinem Krümm-
kleiner Krümmungshalbmesser auch
Linse verlangt (zumal wenn diese wegen
nicht zu dick genommen werden soll), so
Vergrößerung ein kleines Gesichtsfeld

Größen: Vergrößerung, Schärfe, Lichtstärke und Ge-
Art Antagonismus steht, z. B. die Vergrößerun-
erkaufen ist u. a. f., so kann auch keine von ihne
Wirkung eines Mikroskops oder Fernrohres ins
Mikroskope können aus theoretischen Gri-
nie kleinere Objekte als etwa 0,00016 mm
theoretische Grenze ist (durch neueste „Immersionen“
Riesenfernrohre bringen noch immer Erweiteru-
Objektivlinsen bis 40 Zoll \neq 1 m Durchmesser).

3. Leuchtende, wärmende, chemische und andere Strahlen.

den der Stoffe beim Aussenden, Auffallen und Durchgehen
in Strahlen (Emission, Absorption; Diffusion, Dispersion).

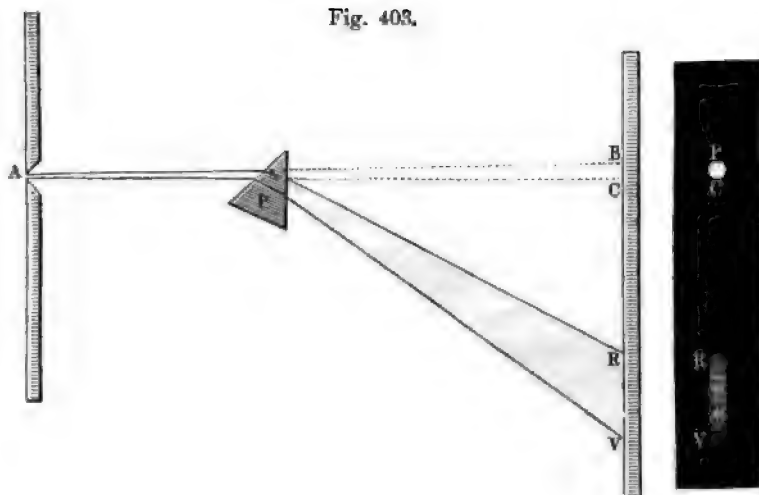
114. Physikalisch einfache und zusammengesetzte Strahlung. — Farbenstrahlen.

In dem vorausgehenden Abschnitte A, „Geometrische Optik“, wurden nur zwei
Eigenschaften eines Lichtstrahles, seine Geradlinigkeit und seine Richtung, in
Betracht gezogen. Ausser diesen räumlichen Merkmalen schreiben wir aber
jedem Lichtstrahle auch ein qualitatives Merkmal zu, nämlich eine bestimmte
Farbe, und sprechen so von roten, gelben, violetten . . . Strahlen. Allerdings
leckt sich diese Ausdrucksweise schon nicht mehr ganz mit der auferwissen-
schaftlichen Auffassung, welche nicht von „roten Strahlen“ spricht, sondern nur
von „roten Körpern“ (Ziegelsteinen, Rosen . . .), speziell auch von „roten
Flammen“ (z. B. bengalischem Feuer mit Strontiumsalzen), „roten Gläsern“
undurchsichtigen, bezw. durchscheinenden, z. B. mit Kupferoxyd gefärbten, welche
beim Durchsehen eine ganze Landschaft nur in Abstufungen zwischen Rot und
Schwarz zeigt) u. dergl. Dafs wir aber streng genommen weder den Körpern
selbst, noch den Strahlen die Farbe in derselben Weise als Eigenschaft zu-
schreiben dürfen, wie es die naive Auffassung von den Körpern denkt, zeigen folgende

Vorversuche. 1. Wenn durch eine Öffnung im Fensterladen ein Band von
Sonnenlicht, ein „Sonnenstrahl“ im vorwissenschaftlichen Sinne (§ 95), einfällt und
wir halten ihm ein Blatt Zeichenpapier entgegen, so erscheinen die von dem Licht
getroffenen Teile des Papiers weifs (und die Umgebung grau). Wiewohl nun derselbe
„Strahl“ einen Ziegelstein, eine Rose, eine Kornblume . . . rot, blau . . . zeigt,
kennen wir nicht den Strahl bald weifs, bald rot, bald blau, sondern suchen die
Ursache der verschiedenen Färbung in dem Papier, in dem Stein, in der Blume.
Das Papier nennen wir ebenso weifs, wie den Ziegel rot, zählen aber das
Weifs nicht zu den Farben im engeren Sinne. — 2. Bedeckt man die Öffnung
im Fensterladen mit einem sogen. roten Glas, so geht durch dieses ein Lichtband,
in dem nun sowohl das früher weisse Papier, wie der Ziegelstein rot erscheint. —
3. Beleuchten wir Papier, Ziegelstein, Blume mit einer „Natriumflamme“
z. B. einer Weingeistlampe, deren Docht mit Kochsalz eingerieben ist), so
erscheinen im Lichte dieser „gelben Flamme“ das Papier gelb, Ziegel, Blume
graugelb. — Aus solchen Abänderungen der Bedingungen, unter welchen Körper
verschiedene Farben zeigen, folgt, dafs sowohl die Art der Strahlen, wie die
Art der Stoffe, auf welche die Strahlen treffen und von ihnen zurückgeworfen
werden, für die Qualität des Lichteindruckes, den wir beim Beschauen der Körper
erhalten, d. i. für die Farbe, bestimmend sind. Überdies lehren aber Physio-
logie und Psychologie, dafs auch der Zustand der Netzhaut, welche durch
die von den Körpern ausgehenden oder zurückgeworfenen Strahlen gereizt wird
(sowie der Zustand des Sehnerven und seiner „zentralen“, d. i. im Gehirn liegenden
Fortsetzungen und Endigungen), für diese Qualität der Lichtempfindung ganz
wesentlich mitbestimmend ist. — Über die Beziehungen (zum Teil sogar
Gegensätze) zwischen physikalischer, physiologischer und psychologischer Farben-
lehre vergl. Anhang, Nr. 44.

lau (Indigo) unterschied. In Wahrheit besteht das Spektrum aus unendlich vielen allmählich übereinander gelagerten Lichtflecken (Sonnenbildern wie in der unkelkammer ohne Linse), welche in unmerklichem Übergange eine Anzahl von

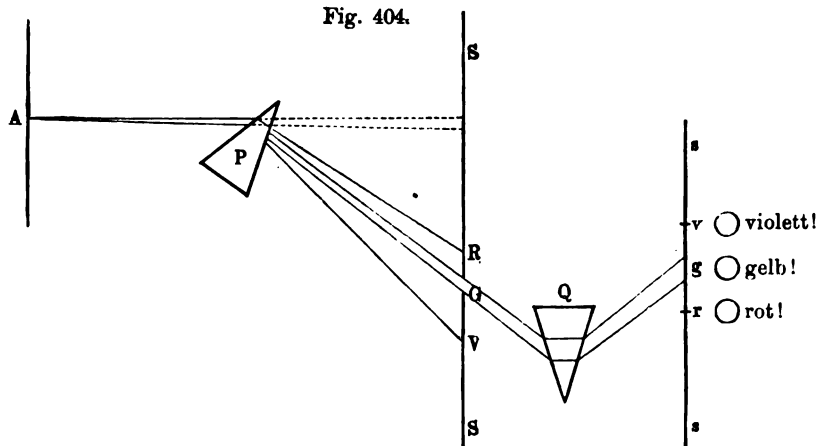
Fig. 403.



arbenabstufungen zeigen, die jedenfalls größer als sechs oder sieben, aber (wegen unserer begrenzten Unterscheidungsfähigkeit für Farben, psych. Anhang, Nr. 44) Anh. 44. kleiner als unendlich ist.

Versuch 2 (NEWTONS *experimentum crucis*, log. Anhang, Nr. 33): Der das Anh. 33. spektrum auffangende Schirm besitzt eine Öffnung, durch die ein einzelner der arbenstrahlen hindurchgeht und auf ein ein zweites Prisma fällt, dessen brechende ante der des ersten parallel ist. Durch Drehung des ersten Prismas um seine chse werden nacheinander die verschiedenen Farbenstrahlen in derselben Richtung zum zweiten Prisma hin- und durch dieses abgelenkt. Es zeigt sich, daß das veite Prisma die durchgehenden Strahlen a) in demselben Maße verschieden ark ablenkt wie das erste, aber b) sie nicht noch einmal weiter zerlegt (Fig. 404).

Fig. 404.



Die Spektralfarben sind also nicht weiter durch Brechung zerlegbar und also in diesem Sinne physikalisch „einfach“ (monochromatisch).

Ebendies zeigte NEWTON noch durch verschiedene Abänderungen der Versuche; z. B. indem er den Farbenhäuser des ersten Prismas auf ein zweites mit gekreuzter (zu der des ersteren normalstehender) brechender Kante fallen ließ; es zeigte sich ein Spektrum in Diagonalstellung, aber von gleicher Ausdehnung parallel den beiden Kanten wie nach Durchgang durch eines der Prismen; warum?

II. Versuch 3. Werden sämtliche der aus dem „weißen“ Sonnenlicht durch ein Prisma ausgeschiedenen Strahlen mittels Prismen oder Sammellinsen so abgelenkt, daß sie sich auf einem Schirm wieder vereinigen, so geben sie hier wieder **Weiß**. — Überdies gibt es zu je einer Spektralfarbe eine zweite, ihr **komplementäre**, die ebenfalls mit ihr zusammen Weiß gibt. Komplementär sind unter anderen: Rot und Blaugrün, Orange und Blau, Gelb und Violett. Ebendeshalb lassen sich auch alle Farben des Spektrums wieder zu weiß vereinigen (Fig. 405). — Versuche mit dem „Farbenkreisel“ — Vergl. Tafel VI, Figg. 1 u. 2

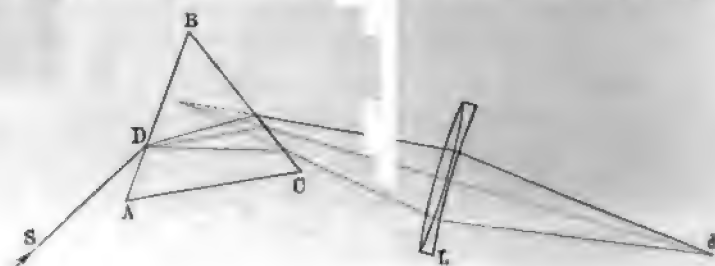


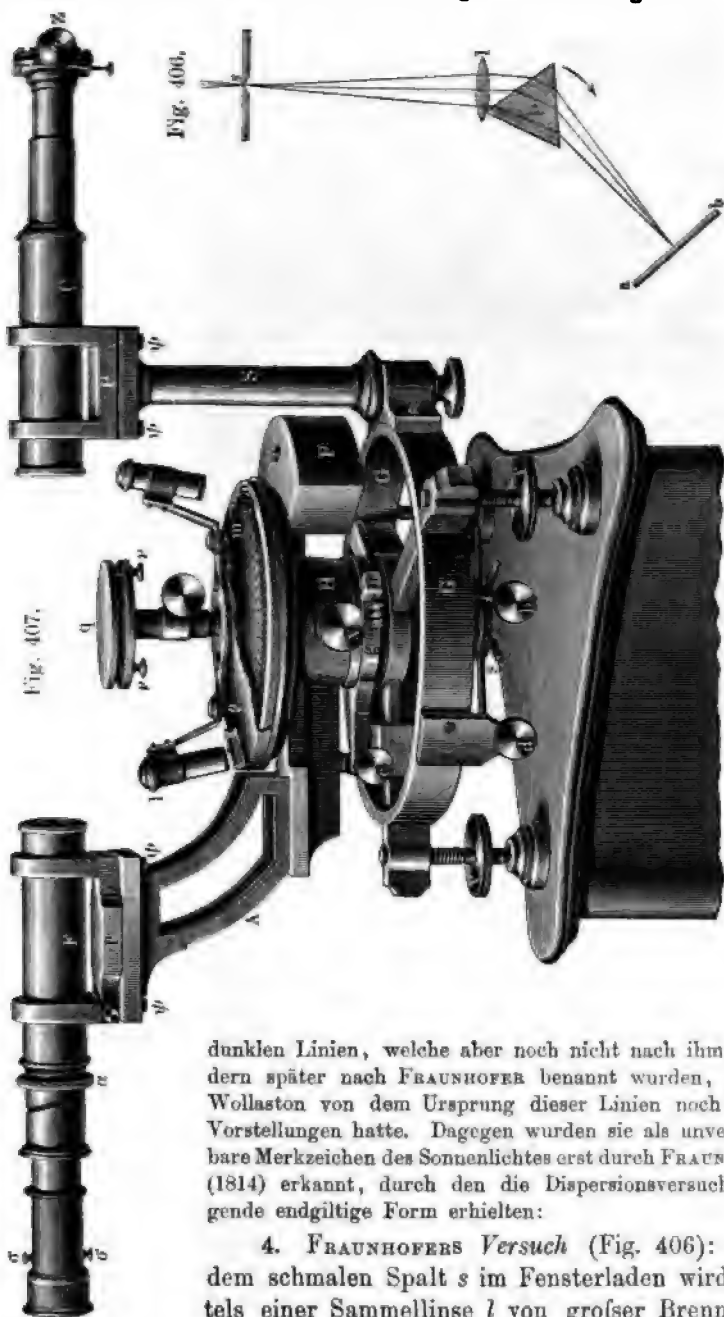
Fig. 406. Die Prismenfläche AB bis auf einen schmalen Streifen bei D abgeblendet. — L achromatische Linse.

Jene Farbenpaare stehen auch in mannigfaltigen anderen physiologischen und psychologischen Beziehungen, um derentwillen sie auch als **Kontrastfarben** und als **Gegenfarben** bezeichnet werden. (Psychol. Anhang, Nr. 44.)

Bei der Vereinigung nicht komplementärer Farbenpaare treten **Mischfarben** auf, die sich von den durch die Mischung von Malerpigmenten zu gewinnenden mehrfach unterscheiden. So gibt spektrales Gelb und Blau eine weißliche Mischfarbe, wogegen bekanntlich die Maler aus Gelb und Blau **Grün** herstellen. Diese Nichtübereinstimmung erklärt sich erst aus einem näheren Einblick in die Abhängigkeit der Körperfarben von der Absorption (§ 116). —

Den meisten Versuchen NEWTONS haftete die Unvollkommenheit an, daß er sich kreisrunder Öffnungen bediente, die dann nicht zu klein genommen werden durften, um die Lichtstärke nicht zu sehr zu beeinträchtigen. Der Lichtstreifen aber, der durch solche breite Öffnungen geht, kann kein reines Spektrum, d. h. keine Sonderung der Strahlen verschiedener Brechbarkeit erzeugen, indem sich die einzelnen Farbenflecken großenteils dachziegelartig überdecken. Schon NEWTON hat vorübergehend statt der kreisrunden Öffnungen schmale Spalten verwendet; doch nicht mit wesentlichem Erfolg, da auch sie von der runden Sonnenscheibe noch immer Bildchen mit der Winkelbreite $0^{\circ} 31'$ entwerfen. WOLLASTON (1802) ließ das durch die schmale Spalte im Fensterladen gegangene Licht noch durch eine zweite parallele schmale Spalte gehen und sah nun schon einige derjenigen

Spektrometer nach Victor v. Lang. — C Spaltrohr, F Fernrohr, q Tischchen für das Prisma.



dunklen Linien, welche aber noch nicht nach ihm, sondern später nach **FRAUNHOFER** benannt wurden, indem **Wollaston** von dem Ursprung dieser Linien noch irrige Vorstellungen hatte. Dagegen wurden sie als unverrückbare Merkzeichen des Sonnenlichtes erst durch **FRAUNHOFER** (1814) erkannt, durch den die Dispersionsversuche folgende endgiltige Form erhielten:

4. **FRAUNHOFER'S Versuch** (Fig. 406): Von dem schmalen Spalt s im Fensterladen wird mittels einer Sammellinse l von großer Brennweite auf einem Schirm ab ein physisches Bild entworfen (und zwar meist ein gleich großes, entsprechend dem III. Linsenfall, wobei Spalt und Schirm

beiderseits in den doppelten Brennweiten angebracht sind). Wird dann dem Lichtband unmittelbar vor dem Eintritt in die Linse oder nach dem Austritt aus ihr ein Prisma P in der Minimumstellung (§ 106) und dem austretenden Farbenfächer wieder der Schirm ab in annähernd dem früheren Abstände, aber normal zur mittleren neuen Strahlenrichtung entgegengestellt, so sind alle farbigen Spaltenbilder nebeneinander gesetzt und geben zusammen ein reines Spektrum; nämlich vom Sonnenlicht ein **reines Sonnenspektrum**, sonst das Spektrum des jeweiligen durch Spalte, Linse und Prisma gegangenen Lichtes.

Die Wirkung der vor oder hinter das Prisma gesetzten Linse wird noch vollkommener durch das Objektiv eines astronomischen Fernrohres erreicht, welches alle oder einen Teil des aus dem Prisma tretenden Strahlen auffängt. Der schmale Spalt wird hier gegenübergestellten Prinzip konstruierte er selbst gegen 600 Lage bestimmte, Non Linien, nämlich A i

Die A
ihre viele
Sinn veru
beobachtung
1860); zweiten
der Spektral
fach hinausgewachsen; z. B. für die r

LA 157. Gestirnen längs der Sehlinie nach Doppel

le eines dem Fernrohre entsprechend rohrs) angebracht. Nach diesem irate (Fig. 407 a. v. S.), mittels deren im beobachtete und ihre gegenseitige ine Bezeichnungen der auffallendsten im Grünlichblau u. s. f. gebräuchlich. omnung der Spektralapparate gab lyse. Dieses Wort kann in zweierlei ische Analyse durch Spektral- andlungen von Kirchhoff und Bunsen bat. In der Tat sind die Leistungen hode der analytischen Chemie viel- llung der Geschwindigkeiten von Prinzip (vergl. § 188, LA 157).

§ 115. Einteilungen der Spektren. — Spektralanalyse.

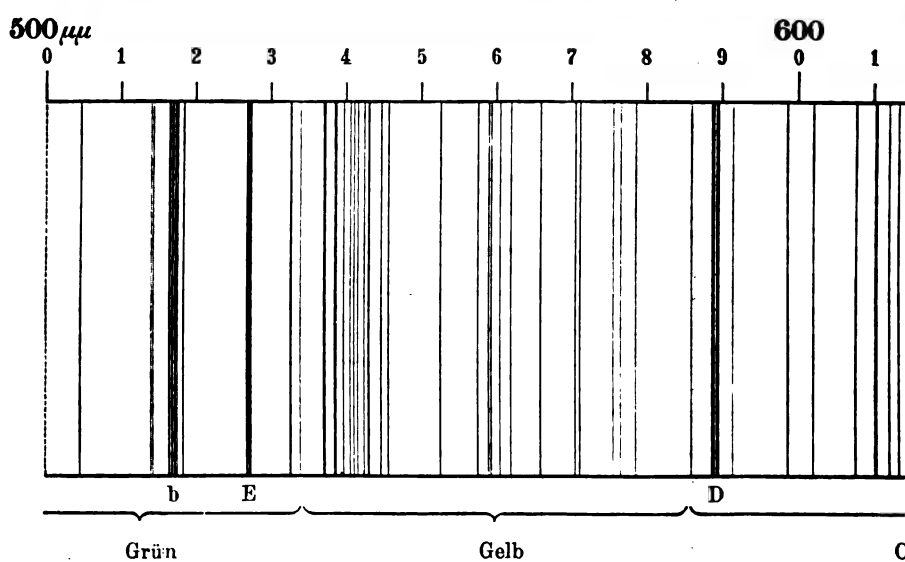
Untersuchen wir mittels der Fraunhoferschen Kombination von Prisma und Linse (in objektiver Darstellung) oder mittels eines Spektralapparates außer dem Sonnenlicht auch das Licht von Kerzenflammen, elektrischen Glüh- und Bogenlampen, von lichtschwachen Weingeist- und Gasflammen (letztere im Bunsenbrenner, § 224), in welchen entweder reines Natrium-, Kalium-, Lithium-...-Metall oder die Salze dieser und anderer Metalle verdampfen, ferner das Licht aller dieser Lichtquellen, nachdem es durch farbige Gläser, Blut, Karmin, durch Untersalpetersäuregas u. s. f. gegangen ist, u. s. f., so erhalten wir überaus mannigfaltige Arten von Spektren. Wir können sie zunächst ihrem unmittelbaren Aussehen nach rein beschreibend (1—5), und sodann nach der Art ihrer Entstehung (in Emissions- und Absorptionsspektren, Tafel III u. IV) folgendermaßen einteilen:

1. **Kontinuierliche Spektren** (alle Farben von Rot bis Violett ohne dunkle oder vergleichsweise hellere Linien); so von der Kerzenflamme, der elektrischen Glüh- und Bogenlampe, allgemein: von weißglühenden festen und flüssigen Stoffen (Platin-, Eisendraht, geschmolzenen Metallen).

2. **Überwiegend helle Spektren mit vielen einzelnen dunklen Linien**; so das Sonnenspektrum.

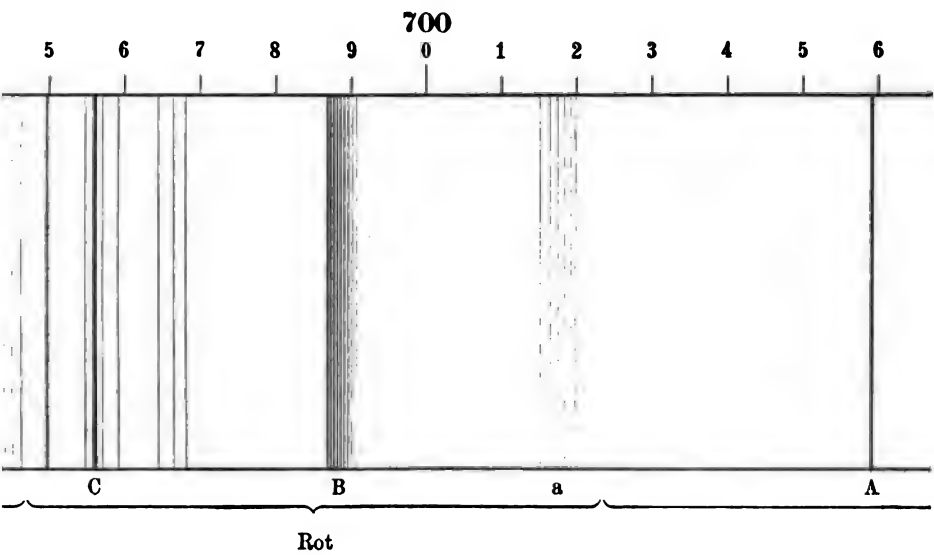
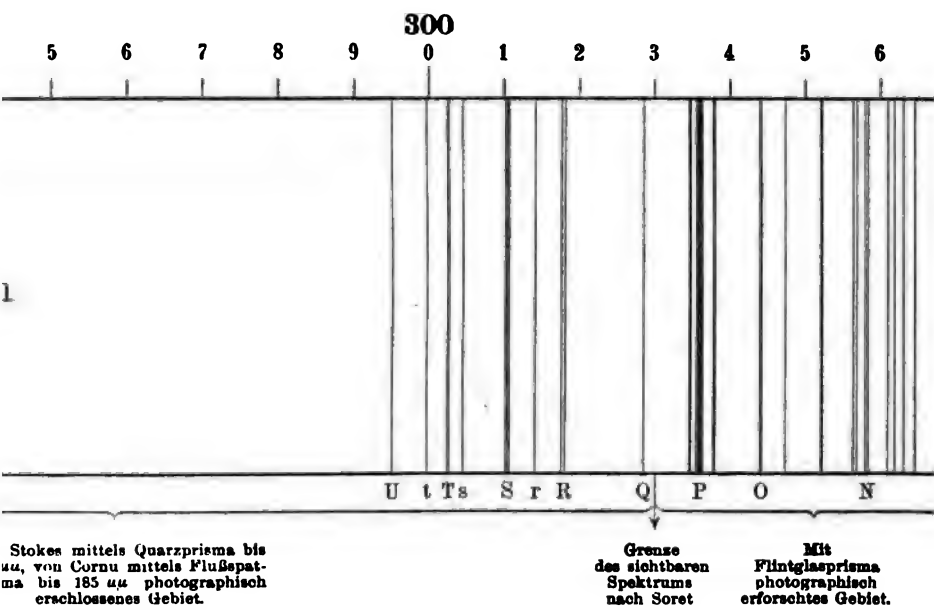
Absorptions-Spektren.

Sonne und Fixsterne II. Typus		1
Fixsterne I. Typus (α Lyrae)		2
Fixsterne III. Typus (α Orionis)		3
Salpetrige Säure		4
Jod		5
Saures chromsaures Kali		6
Chlorkupfer		7
Übermangan- saures Kali		8
Salpetersaures Didym		9
Indigo		10
Chlorophyll		11
Kobaltglas		12
Kupferglas		13
Auf rotem Papier aufge- fangenes Son- nenspektrum		14

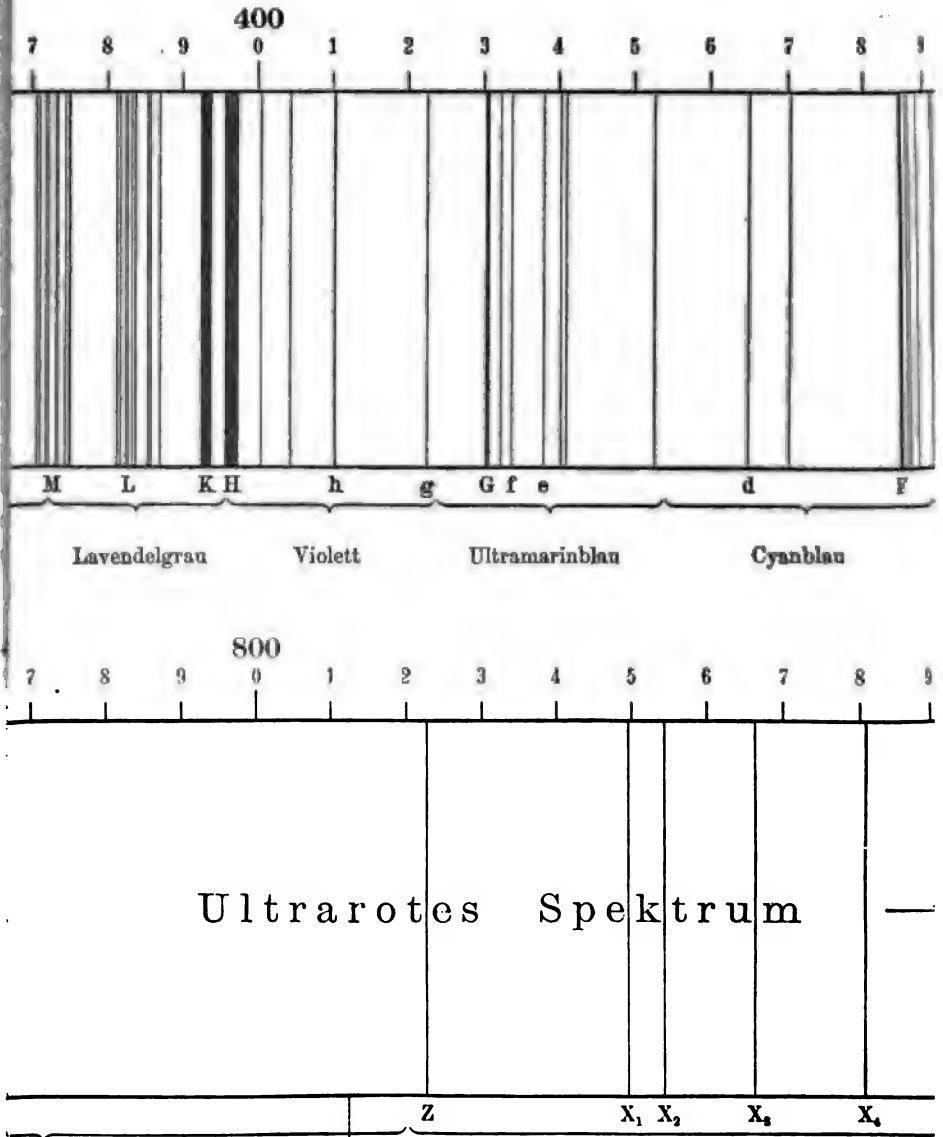


ollständiges Sonnenspektrum

iedener Prismen, bezogen auf gleichmäßig fortschreitende Wellenlängen. —



$$1 \mu\mu = \frac{1}{1000} \text{ Mikron} = 10^{-6} \text{ mm}.$$



Braun

Grenze
des sichtbaren
Spektrums nach
v. Helmholtz.

Wärmespektrum von J. Müller bis 4800 $\mu\mu$, von L.
mittels Bolometers bis 5300 $\mu\mu$, von Rubens u. Snow
nachgewiesen. Die gemessenen Linien nach Abney,
noch ψ_1 1200, ψ_2 1240, ψ_1 ψ_2 2700 $\mu\mu$.

3. **Bandspektren:** Einzelne breite farbige Felder durch mehr oder minder lichtschwache oder dunkle Felder getrennt; so nach dem Durchgang von Bogenlicht durch Blut, farbige Gläser u. s. w., aber auch bei manchen selbstleuchtenden Stoffen.

4. **Linienpektren:** Einzelne oder viele helle farbige Linien auf übrigens dunklem Grunde: so von glühenden Gasen.

Eine Zwischenform der Band- und Linienpektren sind die

5. **Säulenspektren:** z. B. von Stickstoff in Geißlerschen Röhren, nämlich die nahe Linien, die das Spektrum im ganzen ähnlich den Lichtern und Schatten einer kannelierten Säule (daher auch „kannelierte Spektren“) erscheinen lassen.

Von diesen Spektren sind 1, 4 (zum Teil auch 3) **Emissionsspektre**; und zwar zeigt das kontinuierliche Spektrum z. B. eines weißglühenden Platindrahtes, daß dieses Weiß aus Strahlen von allen Brechbarkeiten der Brechbarkeit zusammengesetzt ist. — Dagegen zeigt das Linienpektrum z. B. des gelb leuchtenden Natriumdampfes, daß dieser nur Licht von einerlei Brechbarkeit (genauer: wie einer wirkenden Spektralapparate zeigen, zweierlei Strahlen von sehr wenig verschiedener Brechbarkeit) aussendet. Ebenso sendet Lithium eine Art roter und eine Art gelber Strahlen aus u. s. f. Ebenso entspricht jedem Grundstoffe nur einerlei Spektrum, und es sind daher umgekehrt an den Spektren die Stoffe wieder zu erkennen (vgl. die „Spektraltafeln“). Dies ist um so wertvoller, als (von wissen, übrigens selbst wohl untersuchten Ausnahmen hier abgesehen) die **Emissionsspektre** superponieren, ohne einander zu stören.

Geschichtliches. Als ein Vorgänger der gegenwärtigen Spektralanalyse ist von Hüttenleuten und Mineralogen von altersher verwendete Lötrohrprobe zusehen. Bei ihr wird, wenn die Lötrohrflamme eine grüne Farbe annimmt, auf Kupfer, bei roter auf Strontium u. s. w. geschlossen. Ein Mangel dieser Methode ist es, daß, wenn man in die Lötrohrflamme nacheinander ein Strontium-, Lithium-, Rubidiumsalm bringt, das Rot der Flamme für das unbewaffnete Auge keinen deutlichen Unterschied aufweist. Mittels des Spektralapparates betrachtet, lassen sich jedoch die drei Emissionsspektren unverkennbar verschieden. — Überlassen sich durch die gegenwärtigen vollkommenen Spektralapparate erstaunlich kleine Mengen der Stoffe noch nachweisen, z. B. $\frac{1}{100000000}$ mg Natrium, $\frac{1}{100000000}$ mg Lithium. Die gelbe Natriumlinie pflegt deshalb in Flammenspektren fast nie zu fehlen, da schon das in der Luft verstäubte Kochsalz hierfür genügt.

An jene Methoden der Lötrohrprobe anknüpfend, hatte BUNSEN (nach seinem eigenen Bericht) schon einige Zeit die Flammenfärbungen durch verschiedene Stoffe zu analytischen Zwecken untersucht. Um gleich gefärbte Flammen voneinander zu unterscheiden, hatte er sich farbiger Gläser und Lösungen bedient. ROCHONOT machte ihn aufmerksam, daß man den angestrebten Zweck viel vollkommener erreichen könne, wenn man das Licht der farbigen Flamme durch Prismen vollständig in seine Bestandteile sondert, und er war Bunsen bei der Ausführung dieses Gedankens behülflich. Den eigentlichen Anstoß zu allen weiteren Entdeckungen aber gab eine von Kirchhoff gelegentlich dieser Arbeiten häufig beobachtete Erscheinung: Es war nämlich die in so vielen Flammen auf-

tretende gelbe Linie schon vor Bunsen als dem Natrium zugehörig erkannt worden, und es war auch schon bekannt, daß diese helle gelbe Linie mit der dunklen *D*-Linie des Sonnenspektrums gleiche Lage hat. Als nun Kirchhoff zufällig eine mit Natrium gefärbte Alkoholflamme vor den Spalt des Spektralapparates brachte, so daß in dieses Sonnenlicht durch die Natriumflamme hindurch einfiel, erschien die *D*-Linie auffallend dunkel und stark, während doch eher eine helle gelbe Linie an derselben Stelle zu erwarten gewesen wäre. Kirchhoff vermochte im Augenblick keine Erklärung zu geben, aber schon nach 24 Stunden hatte er denjenigen

Fig. 408.

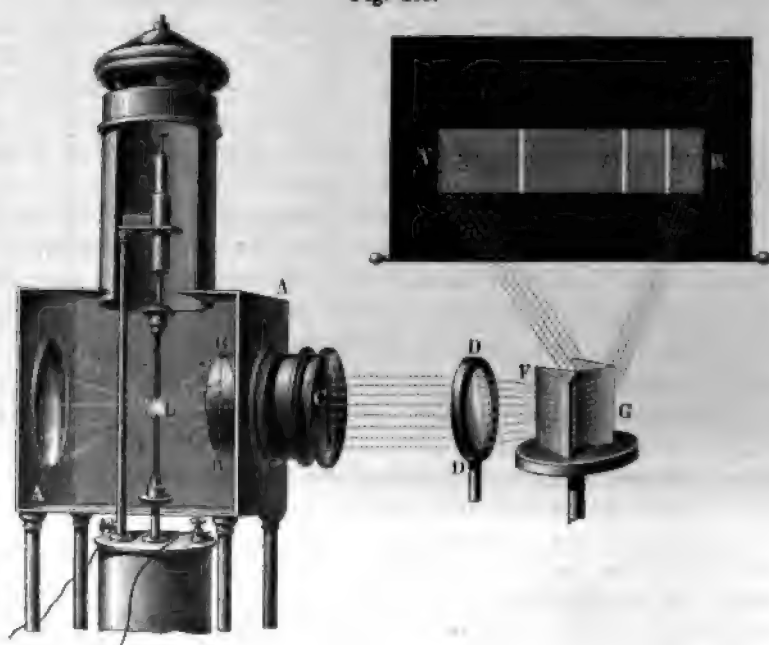


Fig. 409 a.

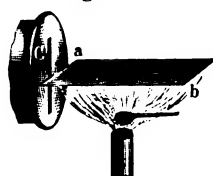
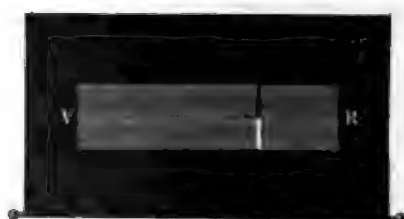


Fig. 409 b.



sehr allgemeinen Satz über das Verhältnis von Emission und Absorption gefunden, der seither als Kirchhoffs Prinzip bezeichnet wird. Seine allgemeine Formulierung vergl. § 117. Für jetzt genügt folgender spezielle Fall:

Ein glühendes Gas absorbiert aus dem weißen Licht einer Lichtquelle von höherer Temperatur ebensolche Strahlen, wie sie das selbstleuchtende Gas aussendet.

Hiernach ist das Sonnenspektrum zu erklären als **Absorptionspektrum**, nämlich: Das Sonnenlicht wird von einem weißglühenden festen oder flüssigen Kern emittiert, und aus diesem weißen Licht werden alle diejenigen Strahlenarten in der Atmosphäre der Sonne absorbiert, die von den diese Hülle zusammensetzenden glühenden Gasen (bei einer niedrigeren Temperatur als der des Kernes) emittiert werden. Dabei entspricht die *D*-Linie dem Natrium, die auffallende *F*-Linie im Grünblau dem Wasserstoff, etwa 2000 Linien in allen Teilen des Spektrums dem Eisen u. s. w. Über die chemische Zusammensetzung des Kernes dagegen gibt das Spektrum keinen Aufschluss.

So war nicht nur eine chemische Analyse der Gestirne möglich geworden (die noch wenige Jahrzehnte vorher ALEXANDER v. HUMBOLDT als für immer unmöglich erklärt hatte), sondern auch über Aggregats- und Druckverhältnisse, Temperaturen u. s. w., desgleichen über die Bewegungen der Gestirne zu der Erde hin und von ihr weg u. s. w. gibt die Spektralanalyse reichlich Aufschlüsse; einiges über diese astronomischen Anwendungen im § 188.

Zur Bestätigung jener Schlüsse über das Vorkommen von Natrium in der Sonnenatmosphäre läßt sich KIRCHHOFFS zufällige Beobachtung abändern in folgenden Versuchen: 1. Beim Fraunhoferschen Dispersionsversuch (siehe oben, S. 361) wird knapp vor das untere Ende der Spalte im Fensterladen in einem Platinschälchen ein Stück Natrium durch eine untergestellte Bunsenflamme zum Verdampfen gebracht. Sind die glühenden Dämpfe nicht sehr heiß, so zeigt sich die dunkle *D*-Linie im Sonnenspektrum sehr verstärkt. Flammt aber das Natrium stark auf, so zeigt sich im Spektrum ein heller gelber Streifen, entsprechend der Breite der gelben Flamme. — 2. Die Spalte wird vor das Skioptikon gesetzt und von ihr aus das Spektrum des elektrischen Bogenlichtes entworfen. Es ist kontinuierlich ohne helle oder dunkle Linien. Wird dann zwischen die Kohlenspitzen Kochsalz gebracht, so zeigt sich zuerst die helle gelbe Linie (Fig. 403); wird die Entwicklung der Natriumdämpfe eine reichliche, so daß sie aus dem Lichtbogen herausgedrängt werden und sich abkühlen, so tritt die dunkle *D*-Linie auf. (Bringt man ein Glasstäbchen zwischen die Kohlenspitzen, so erhält man das prachtvolle Calciumspektrum.) — 3. Wird in halbe Höhe des Spaltes des Skioptikons ein wagrechtes Blech gehalten (Fig. 409 a, b), so zeigt sich die helle und die dunkle Linie. — 4. Für subjektive Beobachtung: Ein horizontal in eine Bunsenflamme gehaltener Platindraht erscheint, durch ein Prisma mit horizontaler Kante gesehen, als kontinuierliches Spektrum. Eine Natriumflamme (an dem mit Kochsalz eingeriebenen Docht einer Weingeistlampe) erscheint, durch dasselbe Prisma betrachtet, nur ihrem Orte nach verschoben, der Gestalt nach aber nicht verändert, weil ihr Licht einfarbig ist. Werden nun Draht und Natriumflamme so gegen das Prisma und das Auge gestellt, daß das Flammengelb ins Gelb des Drahtspektrums zu liegen kommt, so erscheint dieses wieder von der dunklen Linie durchzogen.

Behufs Beobachtung der Spektra anderer Grundstoffe wird in Lösungen ihrer (Chlor-) Salze eine Platinöse getaucht und dann in eine Weingeist- oder Bunsenflamme gehalten, die sich vor dem Spalt eines Spektralapparates befindet. Es zeigen sich in dem lichtschwachen Spektrum, das der Helligkeit der lichtschwachen Flamme entspricht, die hellen Linien jener Metalle.

Durch hohe Vervollkommenung der Spektralapparate (Reihen von Prismen, Spektroskope mit gerader Durchsicht, folg. §, Beugungsgitter, § 124) und durch Heran-

ziehen der Wellentheorie des Lichtes hat sich die Zahl der theoretischen und praktischen Anwendungen der Spektralanalyse fast bis ins Unabsehbare vergrößert. Hier nur wenige Beispiele: 1. Es wurden die früher unbekannten Stoffe Thallium (an einer schönen grünen Linie, durch Crookes 1861), Rubidium, Cäsium, Indium, Gallium entdeckt. Einige Fraunhofersche Linien hatten nur nach einem auf der Erde nicht bekannten Grundstoff gedeutet werden können, der deshalb Helium genannt wurde und erst vor wenigen Jahren (zusammen mit dem Argon, § 220) auch als ein Bestandteil der irdischen Atmosphäre nachgewiesen wurde. — 2. Praktische Anwendungen: Der Gussstahlfabrikant erkennt an den hellen Linien des glühenden Metalls den Augenblick, in dem der Bessemerprozeß zu beendigen ist (jahrelang Geübte hatten es an dem Licht auch mit freiem Auge erkannt). — An Absorptionsspektren wird Blut selbst in den geringsten Mengen erkannt; ebenso werden Verfälschungen von Nahrungsmitteln und Drogen festgestellt.

§ 116. Dispersion Körpe

Die Leistungen des Prism darauf, daß im allgemeinen St gehabt hatten, beim Über tungen annehmen. (I durch die verschieden baren Strahlen in demsel Wellentheorie gelten fol

Dispersion nennt man die Ablenkung von Lichtstrahlen bei der Brechung. — Speziell angewandt auf Lichtstrahlen heißt die Dispersion auch **Farbenzerstreuung**.

Über Dispersion von nichtleuchtenden (Wärme- und anderen) Strahlen vergl. § 118. — Zunächst seien vollkommen durchsichtige, farblose (wogen wasserhelle) Medien vorausgesetzt, welche alle zusammen eindringenden Lichtstrahlen, wenn auch unter verschiedenen Brechungswinkeln, hindurchlassen.

Erst durch die scharfe Charakterisierung der einzelnen Strahlenarten nach den Fraunhoferschen Linien, nächst welchen je eine bestimmte Farbe zu liegen kommt, wird die Angabe der **Brechungsquotienten** für bestimmte Strahlen und Stoffe möglich. — Dabei bildet der Spektralapparat das bequemste und zugleich genaueste Mittel sowohl zur Beobachtung des Minimums der Ablenkung D für je eine Fraunhofersche Linie, wie auch zur Messung des brechenden Winkels γ (wobei nämlich der Apparat als Reflexionsgoniometer dient); aus diesen Größen wird dann n nach der im § 106 entwickelten Gl. (1) berechnet. Im folgenden einige Brechungsquotienten: Für die Linie

	B (rot)	D (gelb)	H (violett)
Wasser	1,330 935	1,333 577	1,344 177
Crownglas (Nr. 9)	1,525 839	1,529 587	1,546 566
Flintglas (Nr. 13)	1,627 749	1,635 036	1,671 062

Auf Grund solcher genauen Messungen nun stellt sich heraus, daß verschiedene Medien die Strahlen verschiedener Brechungsexponenten keineswegs in gleichem Verhältnis ablenken; mit anderen Worten: **Die durch verschiedene Stoffe entworfenen Dispersionsspektren sind einander nicht geometrisch ähnlich** (über das Beugungsspektrum als Normalspektrum vergl. § 124).

nasie. — Absorption. Diffusion.

von Strahlungsgemischen gründen sich einem Medium die gleiche Richtung des Medium verschiedene Richt- Tatsache gibt erst die Wellentheorie Windigkeit dieser verschiedenen brech- § 129.) Noch unabhängig von der d Tatsachen:

legung von Strahlungsgemischen

Auf dieses ungleichmäßige Verhalten verschiedener Stoffe bei der Dispersion gründet sich unter anderem die

Achromasie. Seit Erfindung der Linsenfernrohre war es als deren stärkster Mangel bedauert worden, daß die Richtungsänderung des Lichtes von Farbenzerstreuung begleitet ist (Fig. 410). Noch NEWTON hielt den Mangel für unvermeidlich; DOLLOND (1758) aber, durch EULER (1747) darauf aufmerksam gemacht, daß ja unser Auge ein achromatischer Apparat sei, fand die Konstruktion von wenigstens annähernd achromatischen Prismen und Linsen auf Grund folgender Tatsache:

Es gibt Stoffe, die bei gleicher durchschnittlicher Richtungsänderung ungleiche Farbenzerstreuung liefern und umgekehrt. — So gibt ein Crownglasprisma von großem und ein Flintglasprisma von kleinerem Brechungswinkel mit entgegengesetzt gerichteten brechenden Kanten noch Ablenkung, aber nicht Farbenzerstreuung des durchgehenden Lichtes (*Versuch*). — Ebenso wirkt eine Sammellinse aus Crownglas und eine schwächere Zerstreuungslinse aus Flintglas noch als Sammellinse. Ähnlich bei Zerstreuungslinsen (*Versuche* mit den nichtachromatischen Teilen der Doppellinsen; Farbensäume auf

Fig. 410.

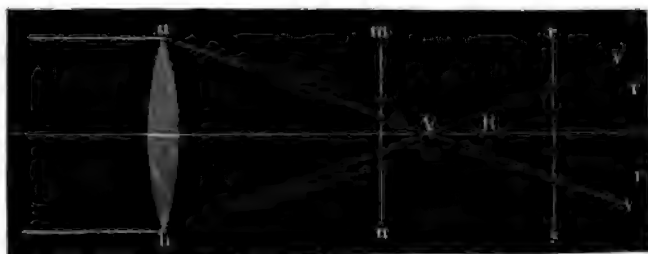


Fig. 411.

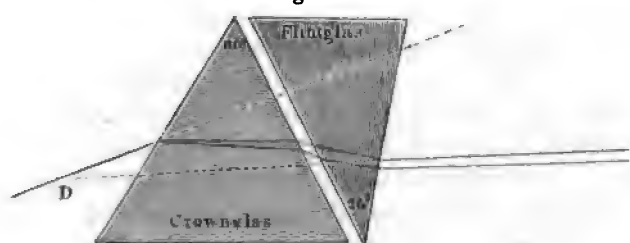


Fig. 412.



einem Schirm etwas vor und hinter der durchschnittlichen Brennweite der Sammellinse u. dergl. mehr, Fig. 410). Man nennt solche Doppelgläser **achromatische Prismen** (Fig. 411), bzw. **Linsen** (Fig. 412).

Letztere werden verwendet als Objektive und Okulare aller besseren optischen Instrumente. Wie die feinere Theorie der Achromasie zeigt, ist diese nie eine vollständige; auch die besten Achromate zeigen noch „sekundäre Spektra“ (z. B. gute Feldstecher noch grüne und violette Säume; sie lassen sich bei richtiger Durchsicht für einzelne Teile des Gesichtsfeldes unmerklich machen).

Die entgegengesetzte Anwendung wie bei Achromaten finden die geschilderten Beziehungen beim **Spektroskop mit gerader Durchsicht** (Fig. 413); hier haben

Fig. 413.



das Crown- und Flintglasprisma solche brechende Winkel, daß sich zwar die Ablenkung, nicht aber die Farbenzerstreuung aufhebt. —

Körperfarben. Im Gegensatz zu den farblosen (wasserhellen) Stoffen nennen wir **farbig** einerseits durchsichtige und durchscheinende Stoffe, wie rotes, gelbes ... Glas, Kupfervitriollösung, Chlor. Joddampf, anderseits undurchsichtige Stoffe, wie Zinnober, Gold ...

Dabei nennen wir z. B. in durch das Glas hindurch und tief gefärbtes Glas) in d. rothes Licht in das Auge dr. erscheinen uns, vom Sonnenl. fallenden Strahlen nur die (rot erregen) zurückgewor.

Wie nun ...
und von Blut
zwei rote Glä
hervorrufen, d.
auslöschen könn.
rote Strahlen hindurch.
grünen (nämlich der zu rot „Kon.
kann man sich denken, daß sich alle Paar. komplementärer Farben (zu Weiß) aufheben und nur die den Eindruck des Rots erregenden Strahlen nicht aufgehoben werden. Zwischen beiden Grenzfällen die Fälle γ), wo z. B. Rot, Orange und Blau hindurchgehen, wobei wieder Orange und Blau als komplementär sich aufheben und nur Rot übrig bleibt. Ebenso für andere Farben als Rot. — Allgemein:

Läßt ein Stoff von eindringendem weißen Lichte, das aus Strahlen von allen Graden der Brechbarkeit gemischt ist, entweder nur einfache Strahlen s_1 oder nur Strahlengemische s_1, s_2, s_3, \dots hindurch und absorbiert alle übrigen, so erscheint, durch einen solchen Stoff hindurch gesehen, ein weißer Körper in der jenem einfachen oder zusammengesetzten Strahl entsprechenden Farbe.

Auch die sogenannten **Körperfarben** im engeren Sinne, nämlich die Färbungen, welche die Körper im auffallenden Licht zeigen, werden durch Absorption erklärt, und zwar nach folgendem Schema: Denken wir uns einen mit Amalgam belegten Spiegel statt aus farblosem aus rotem Glase (nach obigem Grenzfall α). Hierbei wird Sonnenlicht, schon während es durch das Glas bis zum Amalgam kommt, und dann wieder, wenn es, vom Amalgam reflektiert, den Weg durch das Glas zurücknimmt, aller Strahlen mit Ausnahme der roten beraubt. Wir sehen also das Amalgam nicht silberweiß, sondern rot. Ebenso dringt z. B. in ein rotes Blumenblatt das Sonnenlicht nur bis zu geringer Tiefe ein, wird an den tiefer liegenden Schichten reflektiert und bei der Rückkehr durch die oberen

gefärbtes Glas rot, weil, wenn wir Papier oder (durch hinreichend dickes, von diesen „weißen“ Körpern nur bemaltes Papier, Mohnblumen ... rot, indem von den auf diese Körper, welche zusammen die Empfindung ins Auge gelangen.

Bei Untersuchung von Karminlösung entstehen, so zeigt sich, daß auch den gleichen Eindruck des Rot als Strahlenfächers durchlassen, bew. hierbei folgende: α) Es werden nur alle Strahlen mit Ausnahme der (s. § 114) durchgelassen. Im Falle β)

komplementärer Farben (zu Weiß) aufheben und nur die den Eindruck des Rots erregenden Strahlen nicht aufgehoben werden. Zwischen beiden Grenzfällen die Fälle γ), wo z. B. Rot, Orange und Blau hindurchgehen, wobei wieder Orange und Blau als komplementär sich aufheben und nur Rot übrig bleibt. Ebenso für andere Farben als Rot. — Allgemein:

Schichten nochmals aller übrigen Strahlen (nach den Fällen α , β , γ) beraubt, so daß nur rotes Licht von der Blume in unser Auge fällt. Dieses Schema ist in verschiedenen Stoffen nach den mannigfaltigsten Abstufungen verwirklicht.

Das Grün, das eine Mischung von gelbem und blauem Pigment zeigt, ist eine Subtraktionsfarbe: Von den sämtlichen Strahlen des weißen Lichtes absorbiert nämlich das gelbe Pigment die roten, blauen, violetten; das blaue Pigment absorbiert die roten, gelben, violetten; so daß nur die grünen Strahlen von beiden Pigmenten durchgelassen werden. — Dagegen ist die Additionsfarbe (eigentliche physikalische Mischfarbe) von Gelb und Blau nicht Grün, sondern Weiß (§ 114).

Auch wenn Körper in auffallendem Sonnenlichte rein weiß erscheinen, wie z. B. Schnee, ist außer der Reflexion auch Brechung beteiligt. Nur werden hier die in den Eiskrystallen gebrochenen und in ihre Farbenbestandteile aufgelösten Strahlen infolge Reflexion der verschiedenfarbigen Strahlen nach allen Richtungen sich wieder zu Weiß ergänzen. — Auch die totale Reflexion trägt zum Weiß- und Weißlicherscheinen vieler Stoffe bei; z. B. bei den in Luft eingebetteten Schneekrystallen. Daher erscheint z. B. weißlicher Straßenstaub nach der Benetzung grau und braun, indem hier die Luft durch das eingedrungene Wasser verdrängt wird. — Ähnlich die Erklärung, warum ein Fettfleck auf weißem Papier im auffallenden Lichte dunkel, im durchgehenden hell erscheint (Anwendung bei Bunsens Photometer, folg. §).

Die Beispiele zeigen, daß die Vorgänge beim Zustandekommen der Körperfarben, sowohl der durchscheinenden wie der undurchsichtigen Stoffe (entsprechend in der Malerei: Lasur-, Deckfarben), sehr mannigfach und verwickelt sind. Wir sind noch weit davon entfernt, erschöpfend angeben zu können, warum Zinnober rot, Indigo blau ist u. s. w. Seiner Lösung kommt dieses uralte Problem der Körperfarben am nächsten bei der Emission des Lichtes, wie in den Linienspektren und dementsprechend bei kannellierten Absorptionsspektren, wo die hellen, bezw. dunklen Linien auf gesetzmäßige Beziehungen zwischen der chemischen Beschaffenheit des Stoffes, seiner Temperatur und dem emittierten, daher auch gemäß Kirchhoffs Satz absorbierten Licht hinweisen. Am verwickeltesten dagegen sind diese Vorgänge jedenfalls bei der vermeintlich nächstliegenden Erscheinung, den farbigen Oberflächen undurchsichtiger Körper; doch sind als grundlegend außer Zweifel die folgenden Bestimmungen:

Die Oberflächen undurchsichtiger Körper werden sichtbar infolge nicht vollkommener Glätte (die ja die Körper zu Spiegeln machen würde). An den kleinen Rauheiten wird das Licht nach den verschiedensten Seiten reflektiert; indem es aber auch bis zu gewisser Tiefe eindringt und erst an tieferen Schichten reflektiert wird, nimmt es durch Absorption in den Oberflächenschichten verschiedene Färbungen an. Dieser zusammengesetzte Vorgang heißt Diffusion des Lichtes.

Wasserhelle Stoffe müßten in nur auffallendem Licht völlig unsichtbar sein (einen völlig ruhigen Seespiegel erblicken wir nachts nicht, sondern nur die Spiegelbilder der über ihm stehenden Sterne). Wenn wir gleichwohl farbloses Glas, Wasser u. dergl. zu erblicken glauben, so sind es eigentlich die hinter ihnen liegenden Körper, welche das Dasein jener Stoffe verraten, indem sie das von den Körpern durch sie hindurchgehende Licht brechen und von den Körpern mehr

oder wenig verzerrte Bilder geben. Ein Stückchen Glas, umgeben von wasserheller Flüssigkeit des gleichen Brechungsquotienten bleibt auch wirklich in der völlig ununterscheidbar. Unsichtbar werden der Trennungsfläche von Flüssigkeit und Gas bei der kritischen Temperatur, § 77.

Besondere Erklärungen (aus „anomaler Dispersion“, bei der durch gewisse farbige Strahlen Rot sogar mehr abgelenkt wird als Blau) erheischt der metallische Glanz an geackneten Anilinfarben („Metalltinte“); ferner Fluoreszenz und Phosphoreszenz (§ 121). —

Die im bisherigen beschriebenen Grundtatsachen über Emission und Absorption des Lichtes gestatten nunmehr, die im § 97 vorläufig als ein bloß geometrisches Gesetz aufgestellte Abnahme der Lichtstärke mit dem Quadrate der Entfernung im folgenden § teils physikalisch zu bestätigen, teils in einigen Beziehungen einzuschränken.

§ 117. Messung

Indem wir eine als einer Stearinkerze diffundierende Fläche, Lichtquellen beleuchtet knüpft sich dann die also eine größere Was nun dieses „au. Undulationstheorie im folgenden Abschnitt); getenden Körpern auf die neue Sprache ausgedrückt —: eine energiereich sein. — Unabhängig von diesen Theorien hat sich seit Mitte des XVIII. Jahrhunderts (LAMBERT) die Photometrie entwickelt; dies zum Teil in rein wissenschaftlicher Absicht (z. B. Vergleichung von „Sterngrößen“, d. h. der Lichtstärke der Sterne), vorwiegend aber nach den Bedürfnissen der rasch fortschreitenden Beleuchtungstechnik. — Bei den Bezeichnungen „Lichtstärke“, „Lichtintensität“ sind vor allem zu unterscheiden:

1. Die Intensität des Beleuchtetwerdens einer dunklen (nicht schwarzen) Fläche oder kürzer die **Beleuchtungsstärke**;
2. die Intensität des Leuchtens eines selbstleuchtenden Körpers oder kürzer seine **Leuchtkraft**.

Zur Messung dieser beiden Lichtstärke-Größen führt folgender Gedankengang:

Zu 1. Denken wir uns als Lichtquelle einen Punkt A (vergl. Fig. 343, S. 323) als Mittelpunkt einer Kugel einmal von 1 cm, ein andermal von r cm Halbmesser; beide Kugeln seien an der Innenseite mit dem gleichen Stoffe, z. B. weißem Papier, belegt. Die von A ausgehende gesamte Lichtmenge verbreitet sich dann einmal über $f = 4\pi \cdot 1^2$ cm² Oberfläche, das andere Mal über $F = 4\pi r^2$ cm². Kommt dann auf 1 cm² der Kugelfläche vom Radius 1 cm die Lichtmenge J_1 , so kommt

LA 178 bei der zweiten Kugel auf 1 cm² die Lichtmenge $J_r = \frac{J_1}{r^2}$ (Abstandsformel; LA 173).

Bei dieser Betrachtung sind Kugelflächen vorausgesetzt worden, damit von allen Lichtstrahlen normal getroffen werden. — Denken wir uns nun weiter ein parallelstrahliges Lichtbündel von q cm² Querschnitt, dem ein Schirm so entgegengestellt ist, daß einmal der Einfallswinkel $\varepsilon = 0^\circ$ (normaler Einfall)

§ 118. Licht und Beleuchtungsstärke.

pe „mehr Leuchtkraft“ zuschreiben gleiche Ausdruck, daß dieselbe Licht aus gleicher Entfernung seitens beider hell erscheint. An diese Tatsache Bogenlicht im ganzen „mehr Licht“ derselben Zeit) aussende als die Kern ich sei, versuchen die Emissions- und er Weise zu beantworten (vergl. das über dennoch, daß das von den leuchtübertragene Etwas — in moderner

ein andermal $\varepsilon = 60^\circ$ ist, so wird im zweiten Falle durch dieselbe Lichtmenge eine Fläche von $Q = 2 q \text{ cm}^2$ getroffen; auf je $q \text{ cm}^2$ entfällt also jetzt nur die Hälfte der Lichtmenge des Bündels, und die Beleuchtungsintensität ist jetzt nur $J_{60} = \frac{1}{2} J_{90}$. —

Allgemeiner: Wenn die Beleuchtungsstärke bei normalem Einfall J ist, so ist sie bei einem Einfallswinkel von ε nur $J_\varepsilon = J \cos \varepsilon$ (Einfallswinkelformel). —

Diese Formel vereinigt mit der Abstandsformel gibt allgemein die

$$\text{Beleuchtungsstärke } i = \frac{\cos \varepsilon}{r^2} \cdot J_1.$$

Indem hier J_1 eine „Lichtmenge“ bedeutet, welche auf 1 cm^2 verteilt ist, bedarf es der Feststellung einer Lichtmengeneinheit oder kurz **Lichteinheit** als Grundlage der ganzen Photometrie. Die Feststellung einer solchen Einheit bereitet aber viel größere Schwierigkeiten als die Feststellung der Einheiten in den meisten anderen Teilen der messenden Physik. Eine theoretische Einheit wäre die, daß je 1 cm^2 von einer Lichtenergie 1 Erg per sec getroffen werde. Diese Einheit ist aber praktisch keineswegs unmittelbar zu brauchen, schon weil von der Energie der Strahlung nur ein Teil Lichtenergie, ein anderer (meistens beträchtlicher) Teil Energie strahlender Wärme, chemischer Strahlen u. s. f. (folgender Paragraph) darstellt und das Verhältnis dieser verschiedenen Strahlungen von Lichtquelle zu Lichtquelle veränderlich ist. Es wird daher ausgegangen von einer willkürlichen Einheit und zwar:

Eine ältere Einheit der Lichtstärke war die einer **Normalkerze** (1 NK) aus Paraffin von 2 cm Durchmesser bei einer Flammenhöhe von 50 mm. — Jetzt ist angenommen die **Hefnerkerze** (HK = 1,2 NK), d. i. die Stärke einer 4 cm hohen Amylacetatlampe-Flamme.

Als exaktere Einheit wurde auf dem Elektrikerkongress 1884 die Lichtstärke von 1 cm^2 weißglühendem Platin bei der Erstarrungstemperatur festgesetzt. Hier bürgt die Konstanz der Erstarrungstemperatur und die chemisch einfache Beschaffenheit des Platins, das sich nicht mit Oxydhäutchen und dergleichen bedeckt, für die Konstanz der ausgesendeten Lichtmenge. Soweit bei den praktisch leichter zu handhabenden Normalkerzen (die nur eine auf etwa 10 Proz. genaue Einheit bilden) und der Amylacetatlampe solche Konstanz nicht verbürgt ist, bleiben auch alle photometrischen Messungen unsicher. Diese sind aber überdies auch durchaus abhängig von der Unterschiedsempfindlichkeit des Auges (psychol. Anhang, Nr. 40, 44), wie der Gebrauch der folgenden einfachsten **Photometer** zeigt: Anh. 40, 44.

1. **Rumfords Photometer.** Vor einem weißen Schirm CD (Fig. 415 a. f. S.) stehen ein Stab s und die beiden Lichtquellen L, l , die auf den Schirm die Schlagschatten a, b werfen. In einem übrigens völlig lichtlosen Raum wären die Schatten von je einer Lichtquelle, gleichviel ob die Umgebung stark oder schwach beleuchtet ist, völlig schwarz, d. h. lichtlos; daher empfängt bei zwei Lichtquellen der Schatten a nur Licht von L , der Schatten b nur Licht von l . Werden daher die Lichtquellen in solche Abstände r_1 und r_2 vom Schirm gerückt, daß dem die Lichtstärken vergleichenden Auge beide Schatten gleich hell erscheinen, so gilt für die Leuchtkräfte $J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2$. — Noch einfacher und zugleich exakter ist

Fig. 414.



2. 1. **Webbers Photometer.** Es besteht in einfachster Form und Verwendung in einem Papierschirm mit einem Fettfleck. Hinter dem Schirm ist eine beliebige Lichtquelle; vor dem Schirm wird zuerst

Fig. 415.



längs eines Maßstabes
fleck weder heller noch
wird die Normal
quelle (Öl-, Glühl
verschoben. War z. B.
1 m, der der Lichtquelle

ze so verschoben, daß der Fett-
fleck so hell wie seine Umgebung. Dann
ist die mit ihr zu vergleichende Licht-
stärke bis zum Verschwinden des Fleckes
vom Schirm für die Normalkern-
leuchtkraft $r^2 N K$.

Die beiden zu vergleichenden Lichtquellen zu beiden Seiten des Schirmes aufzustellen, ist minder einwurfsfrei, da hierbei außer der Reflexion (Diffusion) an der einen Seite des Schirmes auch die Absorption im befetteten und unbefetteten Papier in Betracht käme. — Die verlangte Vergleichung der Helligkeit des Fleckes und seiner Umgebung gestaltet sich fast immer schwierig infolge der verschiedenen Färbung verschiedener Lichtquellen. Da z. B. eine Kerzenflamme verhältnismäßig mehr rote Strahlen aussendet als elektrisches Bogenlicht, so wird, wenn man beide Lichtquellen ihr Licht einmal durch rotes, einmal durch grünes Glas auf den Schirm entsenden läßt, sich die Lichtstärke der Bogenlampe für Rot kleiner ergeben als für Grün. Die Stärke verschiedenfarbiger Lichter läßt sich hiernach ermitteln, indem man aus den für Rot und Grün gefundenen Zahlen das arithmetische Mittel nimmt. — **WEBBERS, KAVERS Photometer.**

Auf Grund der Messung von Leuchtstärken ergibt sich nun schließlich auch

Die Einheit der Beleuchtungsstärke ist 1 Lux (Lx), d. i. die Beleuchtung einer möglichst weissen (das auffallende Licht vollkommen diffundierenden) Fläche, wenn sie aus 1 m Abstand normal getroffen wird von den Strahlen einer Hefnerkerze (1 HK).

Diese Beleuchtungsstärke ist es, welche in der Praxis schließlich wieder allein in Betracht kommt, indem z. B. in einem Konzertsaal möglichst annähernd an allen Stellen die Beleuchtungsstärke die gleiche sein soll. Für die Lichtquelle ist praktisch ausschlaggebend, daß die Kosten für gleiche Beleuchtungsstärken binnen gegebener Beleuchtungsdauer sich möglichst gering stellen. Nebenbedingungen aber hierfür sind, daß neben der erwünschten Lichtstrahlung nicht eine

große unerwünschte Wärmestrahlung eintrete; ferner wird dem elektrischen Licht trotz seiner großen Lichtstärke und der brillanten Weiße für andere Zwecke doch wieder elektrisches Glühlicht, ja Kerzenlicht vorgezogen.

Von den theoretischen Grundlagen aller Beleuchtungstechnik, auf die auch noch § 121 zurückzukommen ist, seien schon hier folgende zwei Gesetze angeführt:

1. Das Kosinusetz der Lichtemission: Von einer leuchtenden (selbstleuchtenden, ähnlich auch von einer beleuchteten) Fläche gehen unter den kleinsten (von der Flächennormale [dem Einfallslot] aus gezählten) Ausstrahlungswinkeln die stärksten Strahlen weg; ihre Intensität nimmt ab mit dem Kosinus des Ausstrahlungswinkels.

Eine gleichmäßig glühende Kugel (annähernd auch: eine hinreichend dicke Kugelmassenkugel aus Milchglas, die beleuchtete Mondscheibe . . .) erscheint aus größerer Entfernung als eine gleichmäßig helle Scheibe. Ginge nun nach allen Richtungen von der Kugel gleich viel Licht weg, so müßten die Ränder heller erscheinen, weil sich dort die lichtaussendenden Flächenteile dem Auge in kürzerer Projektion darstellen. Daher folgt umgekehrt aus der gleichmäßigen Helligkeit, daß die unter größerem Winkel gegen die Flächennormale (das Einfallslot) austretenden Strahlen in dem angegebenen Maße minder hell sein müssen.

2. Kirchhoffs Satz: Das Verhältnis $E:A$ von Emission und Absorption ist für je eine bestimmte Strahlungsgattung bei gleicher Temperatur für alle Körper gleich, unabhängig von deren chemischer Beschaffenheit, dem Aggregatzustand, Druck u. s. f.

Von diesem Satz war der im § 115 angeführte Satz über die Absorption in leuchtenden Gasen nur ein sehr spezieller Fall; die folgenden Beispiele sollen den allgemeineren Satz in solchen Anwendungen erläutern, die die verschiedenen Leuchtkräfte verschiedener Stoffe begreiflich machen:

Versuche: 1. Wir halten in eine schwach leuchtende Weingeist- oder Bunsenflamme zwei gleich große Körperchen eines undurchsichtigen und eines durchsichtigen Stoffes, z. B. Platin und Glas. Da nun (zunächst bei Zimmertemperatur) dem Platin große, dem Glas kleine Absorption zukommt und in der gemeinsamen Flamme beide Körper auch gleiche hohe Temperatur erlangen, so erlangt Kirchhoffs Satz, daß das Platin stark, das Glas schwach selbstleuchtend werde (emittiere); der Anblick beider glühender Körper bestätigt das. — 2. Schwarzgebeiztes Platinblech sendet bei gleicher Temperatur viel mehr Licht aus, als blankes. — 3. Da über dem Zylinder einer Petroleumlampe ein feiner Draht deutlich glüht, so müssen auch die aufsteigenden Gase hier die Glühtemperatur haben. Daß man sie gleichwohl nicht selbstleuchten sieht, d. h. ihre Emission sehr gering ist, fällt wieder unter Kirchhoffs Satz, indem sie ja auch (bei niederen wie hohen Temperaturen) viel geringere Absorption haben.

Die Versuche 1. und 3. sind vorbildlich für den Unterschied des Schwach-, bzw. Stärkerleuchtens einer Bunsenflamme und einer gewöhnlichen Gasflamme, und der feste Kohlentelchen glühen; im Auerbrenner werden die ein noch höheres Emissionsvermögen aufweisenden „seltenen Erden“ ins Glühen versetzt.

In Bezug auf das Beleuchtetwerden weisen die verschiedenen Stoffe sehr verschiedene „Weisse“ (*albedo*) auf, was auf ihr Diffusionsvermögen zurückführt. Hierin ein Teil der Erklärung der Flecken am Mond (§ 187).

§ 18. Unsichtbare Strahlen (Vorbegriffe).

Die im Abschnitt A, Geometrische Optik, und in den bisherigen Paragraphen des Abschnittes B behandelten Strahlen waren durchwegs sichtbar, d. h. sie sind im stande, nach dem Gang durch die lichtbrechenden Medien des Auges die Netzhaut zu Lichtempfindungen zu erregen. Wir wissen aber heute, daß es noch sehr mannigfache Arten von Strahlen gibt, die ihr Dasein nicht durch Lichtempfindungen, sondern durch Wärmeerscheinungen an den von ihnen getroffenen Körpern, durch chemische, elektrische Wirkungen verraten, und phosphoreszierende und fluoreszierende Stoffe auch selbst wieder zur Aussendung von Licht, aber eines anderen als des eingestrahnten, anregen. Man spricht insofern auch kurz von **Wärmestrahlen, chemischen Strahlen u. a. w.**

Für die Sonderung dieser verschiedenen Gattungen von Strahlen ist, wie für die verschiedenen Arten des sichtbaren Lichts, wieder das bequemste Mittel das Prisma. Sowie aber z. B. das sichtbare Spektrum aus dem roten und violetten Ende entworfen wird, so ist das unsichtbare Spektrum aus dem im folgenden Paragraphen näher zu entwickelnden Gransteinprisma entworfen. Sowie aber z. B. das sichtbare Spektrum aus dem roten und violetten Ende entworfen wird, so ist das unsichtbare Spektrum aus dem im folgenden Paragraphen näher zu entwickelnden Gransteinprisma entworfen.

Indem nun an dem d. h. an dem unsichtbaren Spektrum die Wirkungen auch im siebenten und achten Raum —, entsteht die Frage, ob es verschiedene Farbenstrahlen und „Wärmestrahlen“ vorhanden seien, oder ob es derselbe Strahl sei, der in der Netzhaut Lichtempfindung, in der Leibeshaut Wärmeempfindung erregt.

Anh. 39, 44. Die Frage wurde nach langen Streitigkeiten (psychol. Anh., Nr. 39, 44) durch das im letzteren Sinne entschieden.

Ähnlich treten chemische Wirkungen, z. B. die Schwärzung photographischen Papiers, sowohl im sichtbaren Spektrum wie in dem über das violette Ende hinausliegenden Raum auf, und zwar hier sogar stärker als dort. Gegen das rote Ende des Spektrums werden diese chemischen Wirkungen schwächer, erstrecken sich aber sogar noch über das rote Ende hinaus, so daß also auch die unsichtbaren Wärmestrahlen noch chemische Wirkungen haben. (ABNEY ist es gelungen, im Finstern einen durch siedendes Wasser erhitzten, also weder beleuchteten noch selbstleuchtenden Topf zu photographieren.) — Die hier in einem Vorblick geschilderten Tatsachen liegen den folgenden Begriffen zu Grunde:

Strahlen, die noch geringere, bzw. größere Brechbarkeit haben als die roten und violetten, heißen **ultrarote, bzw. ultraviolette Strahlen**. — Derselbe Strahl kann je nach dem Stoffe, den er trifft, mehrerlei Wirkungen haben; und zwar haben die kräftigsten Wärmewirkungen die ultraroten, unter den Lichtstrahlen die kräftigsten Lichtwirkungen die gelben, die kräftigsten chemischen Wirkungen die ultraviolettten Strahlen. — Hierzu die Tafel V.

Wenden wir auf alle diese Arten von Strahlen die Energiebegriffe an, so stellt sich auch hier wieder die Wärme als das „schließliche Grab aller Energieformen“ (§ 84) heraus. Indem nämlich z. B. irgend ein Lichtstrahl von irgend

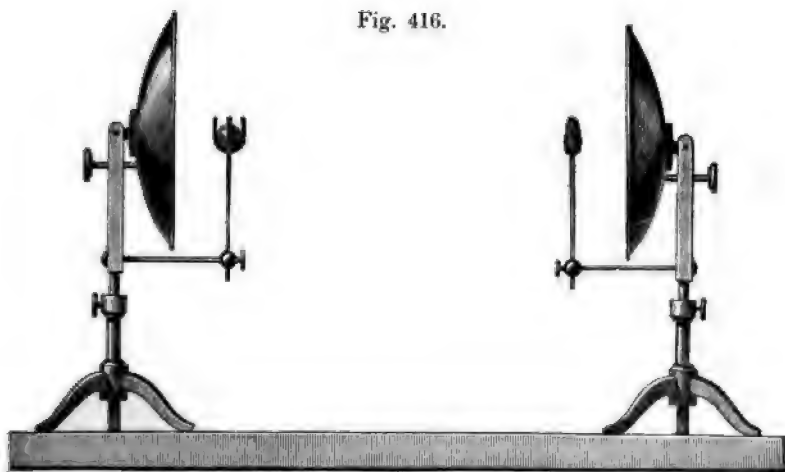
einem Stoffe absorbiert wird, er also als Lichtstrahl zu existieren aufhört, muß eine andere Form der Energie an seiner Stelle aufgetreten sein: dies ist zunächst bei einem schwarzen undurchsichtigen Körper sogleich die Wärme. Indem dagegen ein ultravioletter Strahl photographisches Papier schwärzt oder Petroleum zum Aussenden bläulichen (Fluoreszenz-) Lichtes anregt, hat die Energie der Strahlung, bevor schliesslich auch sie sich in Wärme umsetzt, die Form chemischer Energie oder andersartiger Lichtenergie angenommen. Dabei kann die entstandene chemische Energie eine potentielle sein, so im grössten Masse bei den chemischen Wirkungen des Sonnenlichtes, denen wir die in den Kohlenlagern aufgespeicherte Energie verdanken (§ 225); dagegen ist sie eine aktuelle, wenn die chemische Wirkung des Lichtstrahles z. B. sich in der Explosion von Chlorknallgas (§ 216) kundgibt. — Eine Erweiterung dieser Betrachtung auf alle elektrische Strahlung vergl. im § 157.

In den drei folgenden §§ werden die besonderen Gesetze einiger solcher Arten von Strahlung, sowie der allgemeinste Begriff der „Ätherstrahlung“, etwas eingehender besprochen.

§ 119. Wärmestrahlung.

Für die Wärmestrahlen, gleichviel ob sie zugleich sichtbar sind oder nicht, gelten alle Gesetze der Lichtstrahlen, das Reflexions-, das Brechungsgesetz u. s. w. Dies zeigen im folgenden je einige Versuche, sowie Erscheinungen, in denen sich namentlich die dunklen Wärmestrahlen schon für die gewöhnliche Erfahrung kundgeben, indem sie vielfach auch im Haushalte der Natur eine wichtige Rolle spielen.

Fig. 416.



1. Reflexion. Versuch: Zwei grofse Hohlspiegel werden einander zugekehrt und in dem Brennpunkt des einen zunächst ein leuchtender Körper aufgestellt, von dem sich dann im Brennpunkt des anderen ein Bild zeigt (zugleich das beste Mittel, die richtige Aufstellung der Spiegel zu prüfen). Wird dann der leuchtende Körper

durch einen heißen nichtleuchtenden (z. B. eine in siedendem Wasser erhitzte Metallkugel) ersetzt, so zeigt ein berufenes Thermometer (oder die Entzündung von Phosphor . . .) hier kräftige Warmwirkungen auch dann noch, wenn der Abstand der Spiegel mehrere Meter beträgt und wenn eine direkte Zustrahlung vom heißen Körper durch einen kleinen Schirm abgehalten wird.

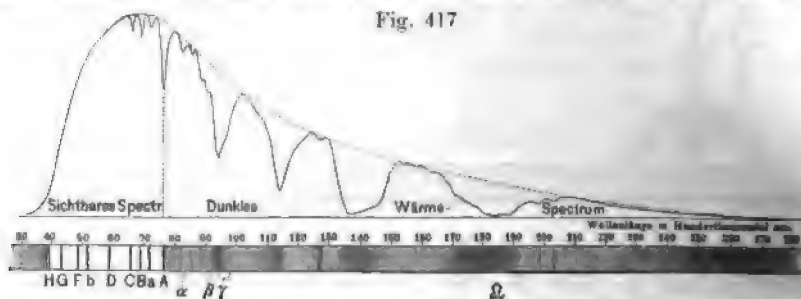
Versuch (nach MACH): In eine Blechkapsel, wie sie zum Flaschenverschluss dienen, hält man den Finger so, daß er das Metall nirgends berührt. Die überraschend starke Wärme rührt vom Finger selbst her, indem sie von ihm gegen das Metall aus- und von diesem auf ihn zurückgestrahlt wird. Hält man den nackten Arm in den Cylinder einer Gasmaschine, so wird die Wärme noch auffälliger; in beiden Versuchen kann das Metall selbst kühl sein. — Noch einfacher zeigen Ähnliches die einander (oder der Wange) auf etwa 1 cm genäherten Handflächen. — Die Versuche sind vorbildlich für die von der Erde ausgestrahlte und von einer Wolkendecke zurückgestrahlte Wärme; die meteorologische Wichtigkeit dieser Erscheinung, namentlich z. B. für die Taubildung, vergl. § 194.

2. Brechung. Versuch mit dem Steinsalzprisma (vergl. vorigen §) — Als „Brennglas“ wirkt auch eine Linse aus schwarzem undurchsichtigen Glas, da dieses zwar nicht die sichtbaren Lichtstrahlen, wohl aber dunkle Wärmestrahlen hindurchläßt.

Dem Begriffe der Durchsichtigkeit (Diaphanie) ist nachgebildet der der **Diathermanität**, d. i. der Durchlässigkeit für Wärmestrahlen; den undurchsichtigen (adiaphanen) Stoffen entsprechen die **athermanen** (= **adiathermanen**). So ist das schwarze Glas **adiaphan**, aber **diatherman**; dagegen eine **Alsunlösung** (die man deshalb vor wärmeempfindliche Objekte im Skioptikon und Sonnenmikroskop bringt) ist **diaphan**, aber **annähernd atherman**. — Auch eine **Eislinse** wirkt als Brennglas, da sie Licht- und Wärmestrahlen ziemlich vollständig durchläßt. — Wie nun die Energie der nicht durchgelassenen Lichtstrahlen sich im undurchsichtigen Körper in Wärme umsetzt, die sich durch Steigerung seines Wärmegrades kundgibt, so auch die nicht durchgelassenen dunklen Wärmestrahlen. Man sagt auch von ihnen, sie seien **absorbiert** (siehe unten).

Wie verschiedene Lichtstrahlen nicht nur verschieden stark gebrochen, also **dispargiert** werden, sondern beim Durchgang durch nicht wasserhelle Stoffe eine

Fig. 417



teilweise (auswählende, selektive) Absorption stattfindet, worin die Ursache der Farbigkeit der Stoffe liegt, so gibt es auch eine **Dispersion der Wärmestrahlen** und **Thermochrose** („Wärmefärbung“). So haben sich auch im ultraroten

Teil des Spektrums Fraunhofersche Linien nachweisen lassen (durch schmalkantige Thermosäulen, noch schärfer mittels „Bolometerdrähten“, die parallel zur Richtung dieser Linien dem Spektrum entlang geführt werden). Ähnlich entstehen breite wärmelose Bänder im ultraroten Teil des Spektrums nach dem Durchgang durch Prismen aus verschiedenen Stoffen, auch schon durch Absorption in der Atmosphäre (Fig. 417). — Diese Absorption wird für die Erwärmung der Erde durch die Sonne überaus wichtig, indem die Atmosphäre zwar die leuchtenden Sonnenstrahlen einläßt, nicht mehr aber die vom erwärmten Erdboden zurückgestrahlten dunklen Strahlen ebenso vollständig durchgehen läßt; Näheres vergl. Meteorologie § 196. — Allgemein stehen auch für Wärmestrahlen im nahen Zusammenhang miteinander

3. Emission und Absorption. Alle Körper senden schon weit unter der Glühtemperatur (die nach DRAPER für alle Stoffe bei etwa 535°C liegt) Wärme, also dunkle Wärmestrahlen aus. Für je eine Temperatur gilt auch hier Kirchhoffs Satz, daß der Körper diejenigen Strahlenarten am stärksten aussendet, die er am stärksten absorbiert.

In der Nähe eines tönernen, eines eisernen Ofens kann es unerträglich heiß werden, auch schon ehe er glüht. Ein zwischengestellter Schirm hält die Wärmestrahlen dann und nur dann ab, wenn er atherman ist, sowie wir auch als Lichtschirm nicht etwa eine Glastafel benutzen.

Zu Drapers Satz sei bemerkt, daß nach neueren Beobachtungen ein dunkeladaptiertes Auge (d. h. nach mehrstündigem Verweilen in lichtlosem Raum) Körper auch schon unter 535°C schwach selbstleuchten sieht, und zwar im graulichen Licht (was seine Erklärung in dem feineren Bau der lichtempfindenden Elemente der Netzhaut findet). Gleichwohl bleibt es eine merkwürdige Tatsache,

Fig. 418.



dafs bei allen festen und flüssigen Stoffen das intensivere Glühen mit dem Aussenden roter Strahlen beginnt, dem sich bei höherer Temperatur die gelben und bei noch höherer Temperatur die aller Strahlen zugesellt, so dafs Weissglühen für ein Zeichen höherer Temperatur genommen wird als Gelb- oder Rotglühen.

Versuche über die einzelnen Gesetze der Wärmestrahlung mittels MAXWELL Apparat (Fig. 418 a. v. S.). —

Viele Erscheinungen, die den bisher beschriebenen ganz analog sind, scheinen es nahezuzulegen, ausser einer Wärme- auch eine „Kältestrahlung“ anzunehmen; z. B. beim obigen Versuch mit den zwei Hohlspiegeln bringt ein Stück Eis im Brennpunkt des einen Abkühlung im Brennpunkt des anderen hervor. Gleichwohl genügt es hierbei, sich vorzustellen, dafs das wärmere Thermometer dem kälteren Eis mehr Wärme zustrahlt, als es von ihm empfängt. Sogar von zwei gleich warmen Körpern, die einander keine Wärme zustrahlen scheinen, nahm FARVOR (1809) an, dafs nur jeder dem anderen so viel Wärme zustrahlt, als er von ihm empfängt (bewegliches Gleichgewicht der Wärme; einfachstes Beispiel: die einander zugekehrten gleichwarmen Hände). Nach KIRCHHOFF mufs dieses bewegliche Gleichgewicht dann für jede besondere Strahlenart einzeln gelten, und in dem Unverändertbleiben der Temperatur beider Körper liegt umgekehrt ein Beweis für KIRCHHOFFS Satz.

§ 120. Chemische Strahlung. Photographie.

Auch für die chemischen Strahlen gibt es eine auswählende Absorption, indem z. B. Quarz noch stärker gebrochene ultraviolette Strahlen durchläfst als das Glas. Soll daher ein möglichst vollständiges Dispersionspektrum photographiert werden, so mufs es durch ein Quarz-, nicht durch ein Glasprisma entworfen sein. Eine solche Photographie zeigt unmittelbar zugleich zahlreiche Fraunhofer'sche Linien im Sonnenlicht und helle Linien für verschiedene Grundstoffe. — Aus dem Hinzukommen der chemischen Strahlen zu den Lichtstrahlen erklärt es sich auch warum z. B. Himmelsphotographien von Nebelflecken, Kometen und dergleichen vielfach von den besten Zeichnungen abweichen.

Die „chemischen Wirkungen des Lichtes“ sind sehr mannigfaltig. Auf Chlorknallgas (§ 216) wirkt das Licht zur Verbindung anregend; Chlorsilber wird dagegen durch das Licht dissoziiert und schwärzt sich infolge des ausgeschiedenen fein verteilten Silbers.

Im Bromsilber ruft das Licht zwar auch chemische Veränderung, aber nicht sogleich Schwärzung hervor, sondern diese tritt erst nach der chemischen Einwirkung anderer Stoffe auf. Von diesen Tatsachen macht Gebrauch die

Photographie: 1. Die photographische Kammer ist eine Dunkelkammer mit Objektiven (auch die Lochkamera ohne Linse wird manchmal verwendet), die das physische Bild eines Menschen, einer Landschaft... auf einer meist mit Bromsilber präparierten Glasplatte entwirft (Exposition der Platte). 2. Die von den chemisch wirksamsten Strahlen getroffenen Stellen werden nach Behandlung im Entwicklungsbade (bei rotem oder gelbem Licht) am dunkelsten und stellen so ein negatives Bild dar. 3. Die noch unzersetzten Teile des Silbersalzes werden im Fixierbad entfernt, um die Platte gegen weitere Lichteinwirkung unempfindlich zu machen. 4. Die Platte mit dem negativen Bild dient als Matrize, indem man sie im Kopierrahmen mit der Bildseite auf gleichfalls (meist mit Chlorsilber) präpariertes Papier legt und dieses dem Tageslicht aussetzt. Das Papier wird

in ein Bad gebracht, das das positive Bild fixiert und ihm den gewünschten Benton gibt. — Warum sehen auf Photographieen violette Kleider heller, rote Kleider, blonde Haare dunkler aus als in Wirklichkeit?

Die ersten Lichtbilder erzeugte DAGUERRE (1830); gegenwärtig bringt noch jedes Jahr neue wichtige Verbesserungen der Photographie.

§ 121. Fluoreszenz, Phosphoreszenz. — Lumineszenz, Kaloreszenz. — Ätherstrahlung.

Nach dem im Dunkeln ohne Glühen und Brennen leuchtenden Phosphor sind die Erscheinungen der Phosphoreszenz, nach solchen am Flußspat (Fluorcium) die der Fluoreszenz benannt:

I. Fluoreszenz. Versuch: Einige Spänchen von Rostkastanien erteilen reinem Wasser (in einer Glaswanne) sehr bald in seiner ganzen Masse gelbliche Färbung; nahe der Oberfläche des Wassers aber zeigt sich in dem sich lösenden Äskulin ein zart blauer Himmel. Wird mittels einer Sammellinse durch die freie Oberfläche der Lösung ein Lichtkegel geleitet, so wird die blaue Färbung sehr intensiv, besonders bei elektrischem Bogenlicht.

Wird ein Wännchen (Küvette) mit solcher Äskulinlösung durch die verschiedenen Teile eines Spektrums geschoben, so tritt das blaue „Fluoreszenzlicht“ am stärksten im ultravioletten Teile auf. Wird dieses blaue Licht selbst mittels des Prismas analysiert, so erweist es sich als aus blauen, grünen, gelben, roten Strahlen zusammengesetzt. Der fluoreszierende Stoff ist also durch gebrochenen sichtbaren und durch die unsichtbaren ultravioletten Strahlen selbstleuchten, und zwar zum Aussenden von sichtbaren, minder brechbaren Strahlen angeregt worden.

Gleiches Verhalten zeigen sehr viele andere Stoffe; z. B. wenig gereinigtes Selen, das bei durchgängig gelblicher Färbung ebenfalls oft sehr stark blau fluoresziert; Chlorophylllösung (am besten gewonnen durch Auslaugen von grünem Pfefferminzkraut in Äther), die bei intensiv grüner Färbung an der Oberfläche rot fluoresziert; Uranglas; Baryumplatincyankür (besonders stark durch Röntgenstrahlen zur Fluoreszenz erregbar). — Seltener sind Körper, bei denen das Fluoreszenzlicht stärker brechbar ist als das erregende. Immer aber findet Fluoreszenz während der Beleuchtung statt. — Dagegen:

II. Phosphoreszenz ist das seit langem bekannte Nachleuchten des Bologneser Leuchtsteines, der aus Schwefelspat gewonnen wird, durch chemische Verbindungen wie CaS , SrS , BaS ; Balmain's Leuchtfarben, angewendet in den selbstleuchtenden Feuerzeugen, Uhrzifferblättern u. s. f. — Verschiedenartige Stoffe leuchten nach Beleuchtung durch gleiches Licht in verschiedenfarbigem Lichte.

Fluoreszenz und Phosphoreszenz werden zusammengefaßt unter dem Namen Photolumineszenz, weil sich die Energie des eingestrahnten Lichtes umsetzt, bzw. fortsetzt als Energie ausgestrahlten Lichtes. — „Chemilumineszenz“ ist diejenige weit unter der sonstigen Glühtemperatur eintretenden Lichterscheinungen, bei denen sich ein Teil der bei chemischen Vorgängen (wie bei Verbrennis von Holz und tierischen Stoffen, beim langsamen Oxydieren des Phosphors,

dessen Leucht also nicht mehr unter den obigen Begriff von Phosphoreszenz fällt, ohne man darum auf diesen Namen verzichtet hätte) auftretenden aktuellen Erscheinungen als Lichtenergie zeigt. — Sehr verbreitet und mannigfaltig sind die Erscheinungen der „Elektrolumineszenz“ (§ 156).

Ein Gegenstück zu allen diesen Formen der Lumineszenz stellt die Kaloreszenz dar, bei der durch unsichtbare Wärmestrahlen ein Körper ins Glühen, also Leuchten versetzt werden kann; somit ein Vorgang analog dem der Fluoreszenz, wenn minder brechbare Strahlen die Aussendung von stärker brechbaren verursachen lassen.

Dieses Ineinandergreifen verschiedener Strahlenarten ist von technischer Bedeutung bei der Frage nach der besten Verwendung verfügbarer Energie zu Beleuchtungszwecken (§ 117). Denn da z. B. verbrennendes Leuchtgas die aus der potentiellen chemischen Energie sich entwickelnde aktuelle bis zu etwa 92%, so gleich in Form von Wärme als Lichtstrahlung liefert, so ist (Auerbrenner und dergleichen) weit mehr ein Heiz- als ein Leuchtgas. Die vollkommensten Beleuchtungstechniker haben sich insofern bewiesen, indem sie sich auf die von ihnen ausgestrahlte Lichtenergie (im Gegensatz zum Chemismus ihres Lebensprozesses) kein meßbarer Anteil an der Wärmeleistung (als Lichtstrahlung hat nachweisen lassen. —

Theoretisch führen die verschiedenen, chemischen, elektrischen, mechanischen, thermischen, etc. Umwandlungen zu allen diesen „Strahlen“ von der Wärme- bis zur Lichtstrahlung. In diesem Abschnitt wird gezeigt werden, daß diese Strahlen Wellenstrahlungen sind, die unabhängig von der Wellentheorie als Tatsache festgehalten werden können. Diese Strahlungen von der wärmebaren Materie mehr oder minder unabhängig sich zeigen, wie man vor allem an der Lichtstrahlung durch den sogen. „leeren Weltraum“ hindurch auffällt. Auch einen Rezipienten können wir durch noch so weit gehendes Auspumpen der Luft nicht undurchsichtig oder auch nur irgendwie minder durchsichtig machen (— im Gegensatz zum Versuche über Schallleitung § 92). — Da man sich aber andererseits eine Übertragung von Energie unabhängig von irgendwelcher Materie nicht vorzustellen getraut, so denken wir uns auch jenen leeren Weltraum erfüllt von einem zunächst ganz hypothetischen Stoff, Lichtäther genannt. Gleichwohl hat zunächst die Wellenlehre des Lichtes und haben neuerdings die elektrischen Erscheinungen dazu geführt, unsere Annahmen über die dem Lichtäther beizulegenden Eigenschaften schon sehr bis ins einzelne auszugestalten. Unter Heranziehung dieses Begriffes bietet sich denn als zusammenfassender Name für alle in diesem Abschnitt betrachteten (und im § 156 noch zu vervollständigenden) besonderen Arten von Strahlen als allgemeinsten Name der einer Ätherstrahlung dar.

C. Erklärung der einfachsten Lichterscheinungen aus der Wellenlehre.

Vorbemerkung: Im I. Abschnitte „Geometrische Optik“ wurden an den „Strahlen“ nur geometrische Eigenschaften der Richtung, nämlich Geradlinigkeit, bezw. Ablenkung nach dem Reflexionsgesetze $\varphi = \varepsilon$ und dem Brechungs-

gesetze $\sin \beta = \frac{1}{n} \sin s$ betrachtet. Auch im II. Abschnitte wurden die sonstigen physikalischen Verschiedenheiten der Strahlen ausschliesslich „zurückgeführt“ auf das (ebenfalls geometrische) Merkmal der verschiedenen Brechbarkeit, nach der es sich dann richtet, ob durch je eine Strahlenart das Auge zu verschiedenen Farbenempfindungen, die Haut zu Wärmeempfindungen, bezw. die Thermosäule zu Thermoströmen, die photographische Platte zu chemischen Vorgängen, Äskulin zu Fluoreszenz u. s. f. erregt wird. — Es drängt sich die weitere Frage auf: Durch welche physikalischen Eigenschaften unterscheiden sich die einzelnen Strahlenarten voneinander? Denn ein Strahl, der z. B. wenig brechbar ist und Rotempfindung erregt, muß in sich irgendwie anders beschaffen sein als ein mehr brechbarer, der Violettempfindung erregt. — Die Wellentheorie des Lichtes antwortet: Die Licht-, Wärmestrahlen sind Wellenstrahlen des „Lichtäthers“, und zwar haben die weniger brechbaren (sogen. roten) Strahlen längere Wellen als violette; ähnlich wie tieferen Tönen längere Luftwellen entsprechen als höheren. — Die experimentellen Beweise für die Wellentheorie des Lichtes liegen namentlich a) in der Ausbreitungsgeschwindigkeit verschiedener Lichtarten in verschieden brechenden Lichtmedien, b) in den Erscheinungen der Interferenz des Lichtes, die als Begleiterscheinung zahlreicher optischer Vorgänge (u. a. der Beugung) auftritt.

§ 122. Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes.

Alle kunstlosen Wahrnehmungen und Beobachtungen zeigen, daß die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes, wenn nicht unendlich, so doch sehr groß sein muß. Denn es ist nicht nur die Zeit unmerklich klein z. B. zwischen dem Öffnen eines Fensterladens und der Erhellung des Zimmers, sondern auch die weiteste Ebene scheint ganz plötzlich und überall gleichzeitig durch einen Blitz erhellt zu werden. Den ersten Versuch, um für den Fall, daß die Geschwindigkeit eine endliche sei, ihre Größe zu ermitteln, hat GALILEI vorgeschlagen: Zwei Personen A und B befinden sich in möglichst großem Abstände voneinander. A führt eine Bewegung aus (Abdecken einer Laterne bei Nacht), B ahmt sie nach, sobald er sie sieht, und A beobachtet, um wieviel später ihm diese nachahmende Bewegung sichtbar wird, als er die seinige ausgeführt hat. — Nun hat sich zwar mit so einfachen Mitteln eine endliche Dauer des Hin- und Herganges des Lichtes von A nach B und von da zu A zurück nicht nachweisen lassen; immerhin aber können die terrestrischen Methoden von FIZEAU und FOUCAULT (siehe unten) als Vervollkommnungen dieses Grundgedankens bezeichnet werden. Die Entscheidung der Frage konnte nur entweder durch Zugrundelegung sehr großer Wegstrecken — so in den beiden astronomischen Methoden von OLAF RÖMER und BRADLEY (§ 186) — oder durch Messung sehr kleiner Zeitstrecken gewonnen werden. Letzteres in den beiden terrestrischen Methoden (wobei nur die einfachsten Schemata angegeben werden, wogegen bei der wirklichen Ausführung die Anwendung von Sammellinsen und -spiegeln behufs sorgfältigster Konzentration der zum Teil auf weite Entfernungen sich ausbreitenden Strahlen notwendig war):

FIZEAU (1849) ließ Licht durch die Lücken eines Zahnrades A auf einen im Abstände etwa einer Meile normal gegen die Strahlen gestellten Spiegel B fallen. Bei bestimmter Umdrehungsgeschwindigkeit des Rades trafen dann die durch je eine Lücke ausgehenden Strahlen beim Zurückkehren auf den nächsten Zahn,

und ein durch die Zähne auf den Spiegel blickendes Auge sah also diesen dunkel. Bei doppelter Umdrehungsgeschwindigkeit wurde dann das Gesichtsfeld wieder hell, indem die Strahlen durch die nächste Lücke zurückgingen, bei dreifacher wieder dunkel u. s. f.

FOUCAULT (1854) gelang es, im Zimmer die Lichtgeschwindigkeit zu bestimmen. Durch den Spalt A (Fig. 419) fällt ein Lichtstrahl e auf

Fig. 419.



den Spiegel s und wird reflektiert, der normal zu r steht. Wäre s in Ruhe, so würde er aber s um eine zu A 1 sec (diese Zahl erschloß den Ton). Daher findet

einer etwas anderen Stellung s wird also längs r_1 nach A reflektiert. Aus dem Winkel AOA_1 ergibt sich der Drehungswinkel des Spiegels und hieraus die Zeit, die das Licht zur Strecke oS und zurück brauchte. — Indem Foucault überdies längs oS eine zur Hälfte mit Wasser, zur Hälfte mit Luft gefüllte Röhre anwendete, fand er:

Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ist für Luft rund $C = 300\,000 \text{ km sec}^{-1}$ ($= 40\,000$ Meilen per sec), für Wasser $c = \frac{3}{4} C$.

Die genaueren Werte nach verschiedenen Methoden und zwar teils nach den ursprünglichen, teils nach neueren verfeinerten Wiederholungen sind: BÖHM 315 000 (später 297 100), BRADLEY 298 200 (wegen der höchstens auf $\frac{1}{2}$ Proc. genau bekannten Sonnenparallaxe im gleichen Verhältnis unsicher); FIZEAU 313 274 (später 299 950, 310 300), FOUCAULT 298 000 (später 299 850, 299 860), letzterer Mittelwert ist auf beinahe $\frac{1}{100}$ Proc. genau; da er um $\frac{1}{100}$ größer ist als der auf astronomischem Wege gefundene Mittelwert, wurde er sogar ein Anzeichen, daß den beiden astronomischen Methoden ein zu kleiner Abstand Sonne — Erde zu Grunde gelegt war. — Die terrestrischen Methoden liefern die etwas kleinere Geschwindigkeit des Lichtes in der Luft, die astronomischen (da gegenüber den durchmessenen Wegstrecken die Dicke der Atmosphäre verschwindend ist) im leeren Raume.

§ 123. Emissions- und Undulationstheorie des Lichtes.

Geschichtliches. HUYGENS hat, gleich seinem jüngeren Zeitgenossen NEWTON, durch ebenso grundlegende Entdeckungen wie die Mechanik auch die Optik

sfördert: HUYGENS „Abhandlung über das Licht“ (*Traité de la lumière*, 1690) gibt einerseits bewundernswert exakte Beschreibungen namentlich von den Tatsachen der Doppelbrechung, anderseits bietet sie eine ganz allgemeine Erklärung der Lichterscheinungen aus der Wellenlehre (Undulations-, Vibrationstheorie) des Lichtes.

NEWTON hatte etwas später (Optik, 1704) eine ebenso umfassende Erklärung aller ihm bekannten optischen Erscheinungen aus einer „Korpuskulartheorie“ oder Emissionstheorie des Lichtes versucht. Mehr als ein Jahrhundert lang schien diese Emissionstheorie siegreich; das XIX. Jahrhundert entschied aber endgültig zu Gunsten der Wellentheorie (— vorbehaltlich ihrer näheren Ausgestaltung entweder als Elastizitätstheorie oder als elektromagnetischer Theorie, siehe unten). —

Im folgenden sollen zunächst die drei Erscheinungsgruppen der geometrischen Optik: I. geradlinige Ausbreitung, II. Reflexion, III. Brechung nach jeder der beiden Theorien erklärt und die Gründe der Überlegenheit der Wellenlehre entwickelt werden.

I. Die geradlinige Ausbreitung des Lichtes ist nach der Emissionstheorie eine notwendige Folge des Trägheitsgesetzes, sobald angenommen wird, daß die von dem leuchtenden Körper ausgesandten Lichtteilchen auf ihrem Wege ein Hindernis, wie Reibung oder Widerstand des Mittels, vorfinden. Die Geschwindigkeit, mit welcher die Teilchen sich geradlinig bewegen, wäre die durch die Beobachtungen (zunächst RÖMERS, kurz vor NEWTONS Optik) gefundene von 300 000 (km, sec⁻¹). Diese Geschwindigkeit als „große erster Ordnung“ angenommen, führt freilich auf eine kinetische Energie der Lichtteilchen, welche weil in $\frac{1}{2}mc^2$ das c in zweiter Potenz vorkommt) „große zweiter Ordnung“ ist: außer wenn wir annehmen, daß dafür die Masse der Teilchen außerordentlich klein (zweiter Ordnung) ist. — Ohnedies müßten aber diese Lichtteilchen schon halb als gegen alle meßbaren (wägbaren) Massen verschwindend klein gedacht werden, weil sonst z. B. die in ein Auge eingedrungenen Teilchen sich irgendwann durch eine Anhäufung auf der Netzhaut oder dergl. bemerkbar machen müßten. — Diese Schwierigkeit entfällt für die

Undulationstheorie: Diese nimmt, um die Übertragung eines Lichtvorganges von einer Stelle des Raumes an eine andere begreiflich zu machen, überhaupt gar nicht an, daß sich Massen (wägbare oder unwägbare) von der ersten Stelle zur zweiten begeben; sondern: Um speziell die Geradlinigkeit der Ausbreitung zu erklären, ist nach § 67 die Bedingung notwendig und ausreichend, daß für das Medium, in welchem sich die Wellen ausbreiten, das Verhältnis $e:d$ überall constant ist. Und zwar geschieht die Ausbreitung in einem homogenen, isotropen Medium in Kugelwellen, was selbst wieder entweder durch die „primitive Auffassung“ (§ 68, Vergrößerung des Kugelradius proportional der Zeit) oder nach der Huygensschen Auffassung (sekundäre Wellen von jedem Punkte einer einmal erregten Kugelwelle) vorstellbar ist. — In ebenen Wellen breitet sich Licht aus, das von fernen Lichtquellen kommt.

II. Die Reflexion des Lichtes erklärt sich aus der Emissionstheorie ungeradzungen, wenn wir uns denken, daß die Lichtteilchen von glatten Flächen reflektiert werden, wie elastische Kugeln. Allerdings reicht diese Annahme für

sich nicht zu erklären, warum nicht alles Licht reflektiert wird, sondern warum ein neues Medium eindringt; davon unter III.

Die Undulationstheorie erklärt die Reflexion mittels des Huygensschen Prinzips (§ 69, Fig. 264 für ebene Wellen, Fig. 265 für Kugeln), wobei sie nur anzunehmen hat, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen in den beiden aneinander grenzenden Medien verschieden ist (ob aber z. B. im Wasser kleiner oder größer als in Luft, bleibt für die Erklärung der Reflexion gleichgiltig).

III. Damit die Brechung des Lichtes mit der Emissionstheorie in Einklang sei, müßte für eine Brechung zum Einfallslot angenommen werden, daß die Geschwindigkeit der Lichtteilchen im optisch dichteren Medium größer sei als im dünneren. Zwar ist diese Annahme schon von vornherein unplausibel; nehmen wir aber gleichwohl an, daß die Lichtteilchen nur an der Trennungsoberfläche (etwa infolge stärkerer Anziehung durch den dichteren Stoff) eine Vergrößerung der Geschwindigkeit erfahren, dann unverändert bleiben.

LA 153. LA 133 für Beweg

Es müßte also das

aus Luft in Wasser, wo erf

wo c_1 die Geschwindigkeit i

Die Undulationsthe

Sinusgesetz der Brechung,

Fortpflanzungsgeschwindigkeit der

Medium kleiner sei als im dünneren; und zwar ist z. B. für den

Übergang von Luft in Wasser gefordert $\frac{c_1}{c_w} = \frac{4}{3}$. Da nun dieses

Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes für Luft und Wasser nach Foucaults Versuchen wirklich besteht (nicht das durch die Emissionstheorie geforderte reciproke $\frac{3}{4}$), so ist durch diese Versuche die Undulationstheorie bestätigt (verifiziert), die Emissionstheorie ausgeschlossen (exkludiert). — Log. Anh., Nr. 36.

anh. 36.

Durch diesen endgiltigen Sieg der Wellenlehre des Lichtes, der um die Mitte des XIX. Jahrhunderts erfolgte, ist aber noch nichts darüber entschieden, ob die Lichtwellen mechanische (elastische) Wellen (§ 60) oder ob es elektrische (oder sonst welche) seien. Ersteres hatte die jetzt speziell als „Elastizitätstheorie des Lichtes“ bezeichnete Lehre stillschweigend oder ausdrücklich angenommen; seit einigen Jahrzehnten verliert sie mehr und mehr an Wahrscheinlichkeit gegenüber MAXWELLS elektromagnetischer Theorie des Lichtes; über diese einiges im § 157. — Sowie aber HUYGENS' Satz von den Elementarwellen und die Folgerungen aus ihm für alle Arten von Wellen gelten, bleibt auch jener Sieg der Wellentheorie als solcher unberührt von deren künftigen näheren

anh. 36. Ausgestaltungen (log. Anh., Nr. 36). Diese stehen also nicht auf einer Stufe mit Hypothesen, wie es z. B. die von NEWTON gewesen war, daß die Lichtteilchen an der Trennungsoberfläche der beiden Medien „Anwandlungen“ (accessus) erfahren, vermöge deren einige Teilchen ins alte Medium reflektiert, andere in das

teilchen nur an der Trennungsoberfläche (etwa infolge stärkerer Anziehung durch den dichteren Stoff) eine Vergrößerung der Geschwindigkeit innerhalb des Mediums erfahren, dann unverändert bleiben. — Das Sinusgesetz nach der in Widerständen entwickelten Formel ist z. B. für den Übergang des Lichtes aus Luft in Wasser, wo erf, wo c_1 die Geschwindigkeit in Luft, c_w im Wasser ist. $\frac{c_1}{c_w} = \frac{4}{3}$, das Verhältnis $\frac{c_1}{c_w} = \frac{3}{4}$ gelte, ohne weitere Hypothese das Sinusgesetz angenommen wird, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtquellen im optisch dichteren Medium kleiner sei als im dünneren; und zwar ist z. B. für den Übergang von Luft in Wasser gefordert $\frac{c_1}{c_w} = \frac{4}{3}$. Da nun dieses Verhältnis der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes für Luft und Wasser nach Foucaults Versuchen wirklich besteht (nicht das durch die Emissionstheorie geforderte reciproke $\frac{3}{4}$), so ist durch diese Versuche die Undulationstheorie bestätigt (verifiziert), die Emissionstheorie ausgeschlossen (exkludiert). — Log. Anh., Nr. 36.

neue Medium gebrochen werden. Vielmehr gilt HUYGENS' Konstruktion und Berechnung der reflektierten und gebrochenen Wellen bzw. Strahlen sogar noch dann, wenn wir nicht einmal annehmen, daß diese Wellen periodische seien (§ 63). Es können daher auch die bisherigen Erklärungen der geradlinigen Ausbreitung, Reflexion und Brechung uns noch keine näheren Aufschlüsse darüber geben, ob die durch diese Vorgänge geforderten Lichtwellen periodische oder unperiodische — und falls ersteres, welches die Wellenlängen und die Schwingungszahlen seien. Diese Ausgestaltung empfängt aber die Wellenlehre des Lichtes, wenn wir die von ihr ebenfalls ohne alle weitere Hülfshypothese geforderten Erscheinungen der Beugung mit heranziehen.

124. Beugung des Lichtes. — Wellenlängen und Schwingungszahlen der physikalisch einfachen Lichtstrahlen.

Durch HUYGENS' Theorie der Wellenausbreitung ist gefordert, daß, wenn die allseitige Ausbreitung in bestimmter Weise gestört ist, Beugungserscheinungen (§ 69) auftreten. Daraus, daß man „nicht um die Ecke sehen“ kann, wie man „um die Ecke hört“, folgt schon, daß die Wellenlängen des Lichtes bei weitem kleiner sein müssen als die Längen der Schallwellen (§ 93). Wenn es aber auch in der geometrischen Optik für sehr viele Zwecke zulässig ist, von den Beugungserscheinungen des Lichtes abzusehen, so lassen sich solche doch bei sehr kleinen lichteinlassenden Öffnungen (sehr schmalen Spalten und Spaltensystemen, Gittern) und verhältnismäßig schmalen schattenwerfenden Drähten sehr auffallend machen. — Da nun bei diesen Erscheinungen überdies periodische Wechsel von Hell und Dunkel sich zeigen, so liegt es nahe, diese Erscheinungen als Interferenzen des gebeugten Lichtes zu deuten; und diese Interferenzerscheinungen (sowie zahlreiche andere, vergl. nächsten Abschnitt, § 126, 127 gestatten, die Wellenlängen des Lichtes mit großer Genauigkeit mittelbar zu messen. Aus den Wellenlängen zusammen mit der bekannten Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes ergeben sich schließlich die Schwingungszahlen der Ätherteilchen in den verschiedenen Lichtstrahlen. — Hier nur einige der einfachsten solcher Erscheinungen und ihre Erklärung.

1. Beugung des Lichtes an einem schmalen Spalt. *Versuche:* Vor das Objektiv eines auf Unendlich eingestellten Fernrohres (durch dessen Objektiv also einfallende parallele Strahlen in der Brennebene gesammelt werden) bringt man eine Blechblende mit einem schmalen Spalt und hält diesen parallel zu einem anderen schmalen Spalt (wir werden die durch die Längssymmetralen beider Spalten bestimmte Ebene kurz die Symmetrale der ganzen Erscheinung nennen). — a) Wenn monochromatisches (z. B. Natrium-) Licht einfällt, so sieht man gemäß den Gesetzen der geometrischen Optik in der Richtung beider Spalten den näheren Spalt als einen hellen Streifen (aber nicht mit scharfen Rändern, da eben das Fernrohr nicht auf den endlichen, kleinen Abstand der Spalte eingestellt ist). Parallel zu diesem hellen Streifen sieht man aber überdies auf beiden Seiten noch andere helle Streifen, welche je nach ihrem Abstände von der Mitte immer lichtschwächer sind. Je zwei derselben sind durch einen dunklen

Zwischenraum getrennt (Fig. 420) und zwar so, daß die Übergänge von Hell zu Dunkel und umgekehrt allmählich erfolgen. Wir werden den mittleren hellen Streifen als „Nullmaximum“, den ersten, zweiten ... dunklen Streifen als „erstes, zweites ... Minimum“, die anderen hellen Streifen als „erstes, zweites ... Maximum“ bezeichnen. Während bei einer Natriumflamme der beschriebene Wechsel von Hell und Dunkel ein solcher von Gelb und Schwarz ist, tritt bei einem durch ein rotes Glas bedeckten Spalte des Fensterladens Wechsel von Rot und Schwarz auf. — b) War das einfallende Licht nicht monochromatisch, sondern fiel durch den Spalt z. B. Sonnenlicht ein, so zeigen sich statt der bloßen Intensitätswechsel überdies noch solche von Farben. Und zwar ist der mittlere helle Streifen rötlich eingesäumt, in den äußersten hellen Streifen wechseln rosarote und grüne Farbtöne.

Fig. 421.

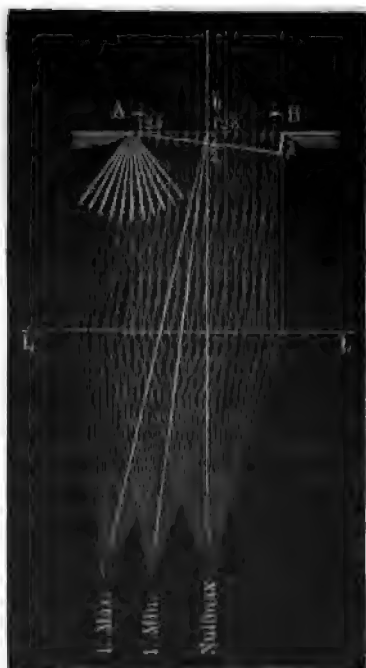


Fig. 422.

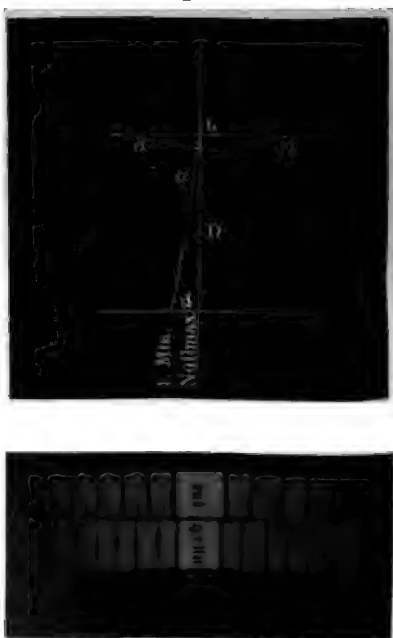


Fig. 420.

Zur Erklärung: Auf einen Spalt AB (Figg. 421, 422) von b mm Breite falle Licht normal zur Ebene des Spaltes, also längs deren Symmetrale. Angenommen (über die Verwirklichung dieser Annahme durch „kohärentes Licht“, § 126), daß alle Punkte in der Ebene des Spaltes Schwingungen der nämlichen Phase ausführen, so wird jeder dieser Punkte, z. B. A , nach Huygens' Auffassung ein sekundäres Erregungszentrum für Wellen, welche von ihm nach allen Richtungen

ehen. Denken wir uns von allen diesen Strahlen diejenigen herausgehoben, die mit der Symmetrale einen solchen Winkel α einschließen, daß $b \sin \alpha = \lambda$, die Wellenlänge dieser Wellen, so lassen sich diese parallelen Strahlenbüschel in zwei gleiche Teile teilen, so daß je ein Strahl 1, 2, 3 . . . der einen Hälfte in einen ihm zugeordneten 1', 2', 3' . . . der zweiten Hälfte um $\frac{\lambda}{2}$ verschoben ist.

Wenn nun dieses Parallelstrahlenbüschel durch eine Linse LL gesammelt, so vereinigen sich in deren Brennebene die sämtlichen Wellen des Büschels durch Interferenz aufheben. Wir werden also das erste Minimum der obigen Erscheinung an jener Stelle erklären, an welcher alles in ihr sich sammelnde Licht der gegenseitigen Wellen durch Interferenz sich auslöscht. Durch Drehung des Rohres (Einstellung des Fadenkreuzes zuerst auf das Nullmaximum, dann auf das erste Minimum) ergibt sich der Winkel α und somit auch λ .

Der beschriebene Versuch für subjektive Beobachtung läßt sich auch in einen objektiven abändern, indem in möglichst großem Abstände vom Spalt parallel zur Ebene ein Schirm aufgestellt wird. Statt des zu erwartenden Dunkelheitsbildes der Sonne (in der Längsrichtung des Spaltes verschwommener als bei direkter Beleuchtung) erhalten wir dann ebenfalls ein Nullmaximum, erstes Minimum, zweites Minimum u. s. f. Denn wegen der großen Entfernung des Schirmes sind die von verschiedenen Punkten des Spaltes zu verschiedenen Punkten des Schirmes nahe der Symmetrale anlangenden Strahlen auch ohne Linsenwirkung schon nahezu parallel. Hier ergibt sich dann der Winkel α aus dem Abstände D mm von Spalt zum Schirm und dem Abstände d mm von Nullmaximum und erstem Minimum;

$\tan \alpha \approx \sin \alpha = \frac{\lambda}{b}$ ist $\lambda = \frac{d}{D} b$ oder $\lambda = \frac{b}{D} d$. — Die exakte Messung der Spaltbreite b geschieht mittels einer Mikrometerschraube (math. Anh., Nr. 3),

die hier kann behufs Messung der Abstände d ein Milchglasstreifen mit einer feinen Skala dienen. Ist z. B. $D = 1\frac{1}{2}$ m = 1500 mm, $b = 0,5$ mm, also

Konstante dieser Versuchsanordnung $\frac{b}{D} = \frac{0,5}{1500} = \frac{1}{3000}$, so ergibt sich

für rotes Licht $d_r = 2$ mm und $\lambda_r = \frac{2}{3000}$ mm = 0,000667 mm

für blaues Licht $d_b = 1,4$ mm und $\lambda_b = \frac{1,4}{3000}$ mm = 0,000466 mm. — Somit:

Verschiedenen Farbentönen entsprechen verschiedene Wellenlängen der Lichtstrahlen; u. zw. unter den Spektralfarben dem am stärksten brechbaren Rot die größten Wellenlängen von rund 0,0007 mm, dem am schwächsten brechbaren Violett von rund 0,0004 mm. (Die genaueren Werte für verschiedene Fraunhofersche Linien gibt die Tafel V an.)

Weil also die Wellenlängen des Lichtes von mäßiger Kleinheit sind, seine Ausbreitungsgeschwindigkeit aber von ungeheurer Größe ist, müssen wir uns ein lichtsendendes Teilchen in jeder Sekunde eine fast unglaublich große Anzahl Schwingungen ausführend denken, damit die Strecke von 300 000 km = $3 \cdot 10^{11}$ mm durch die Wellen zu je 0,0007 mm = $7 \cdot 10^{-4}$ mm ausgefüllt werde, und damit so oft z. B. unsere Netzhaut in periodisch veränderten Zustand versetzt werde. — In der That ergibt sich durch Anwendung der Gleichung $n = c : \lambda$ der allgemeinen Wellenzahl (§ 64, S. 238) z. B. für rotes Licht $n = 3 \cdot 10^{11} : 7 \cdot 10^{-4} \approx 430 \cdot 10^{14}$; Allgemeiner:

Verschiedenen Farbentönen entsprechen verschiedene Schwingungszahlen der das Licht aussendenden und übertragenden Äther-

teilchen; u. zw. dem Rot über 400 Billionen, dem Violett bis gegen 800 Billionen Schwingungen in der Sekunde.

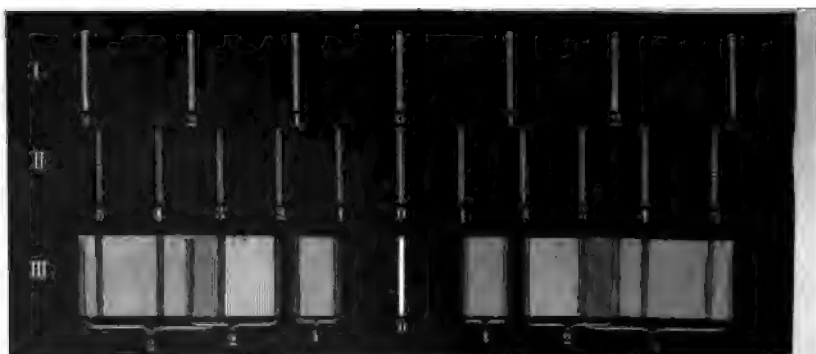
Zum (physiologisch-psychologischen) Merkmal der Farbe steht das (physikalische) Merkmal der Schwingungszahl in noch engerer Beziehung, als das (falls physikalische) Merkmal der Wellenlänge; denn die Wellenlänge z. B. des roten Strahles ist in Wasser nur $\frac{3}{4}$ von der in Luft (wegen $c = \frac{3}{4} c_0$), dagegen

die Schwingungszahl bleibt unverändert (— wie es ja auch die fundamentalste Erfahrungstatsache der Newtonschen Farbenlehre ist, daß der „einfache“ Strahl durch Brechung wohl seine Richtung, nicht aber seine Farbe ändert).

Nachdem durch die Verschiedenheit der Wellenlängen verschiedener Farben erklärt ist, warum z. B. für rotes Licht die Maxima weiter auseinander liegen als für grünes, bzw. für violettes (Fig. 420), erklären sich nun die Farben bei Beugungserscheinungen ganz ebenso aus der Übereinanderlagerung verschiedener Strahlen, wie sie sich bei gebrochenem Licht erklärt hatten. In der Symmetrie der Erscheinung fallen wieder alle Farben übereinander und beleuchten den Schirm weiß. Da ferner nach der Seite hin zuerst Violett wegfällt, so wird dieser weiß Streifen rotgelb eingesäumt sein.

Näheres über die durch die Gesetze der Farbmischung geforderten Färbungen von Interferenzstreifen überhaupt vergl. § 127 nach Fig. 423.

Fig. 423.



Die bisher behandelten Erscheinungen an einem Spalt lassen sich zu bei weitem brillanteren Erscheinungen steigern durch Anwendung von Spaltensystemen oder Beugungsgittern. ROWLAND

Fig. 424.



Gitter besitzen auf die Breite von je 1 mm bis zu 1700 Strichen. Hier erfolgt dann die Nebeneinanderlagerung der einzelnen einfachen Farben (Fig. 423) so vollkommen, daß Beugungsspektren auftreten, in welchen sich

Fraunhoferschen Linien noch deutlicher zeigen als in Dispersionsspektren. Dieses bildet das Beugungsspektrum das natürliche Normalspektrum (Fig. 424), fern in ihnen die gegenseitigen Abstände der Farben den Unterschieden Wellenlängen einfach direkt proportional sind, wogegen bei den Dispersionsspektren je nach der Verschiedenheit der brechenden Stoffe verschiedene Dehnung der einzelnen Farben eintritt, wovon das stärkste Beispiel die anomale Dispersion ist.

2. Beugung an dünnen Stäben. Wird bei obigem Versuch zur objektiven Stellung des an einem Spalt gebeugten Lichtes etwa in halbem Abstände von dem Spalt und Schirm eine Stricknadel (besser ein nicht glänzender, angelassener dünner Eisendraht) gestellt, so zeigt sich 1. der Schatten derselben viel breiter, als nach den Gesetzen der geradlinigen Ausbreitung des Lichtes zu erwarten ist, und 2. zeigen sich wieder sowohl innerhalb wie außerhalb des Schattens Wechsellagen von Hell und Dunkel parallel der Ausdehnung der Nadel, wie des Drahtes, bei Sonnenlicht farbige Säume. Die mathematische Behandlung dieser Erscheinungen gestaltet sich ähnlich wie bei der Spalte (LA 174), wenigstens in ersten Annäherungen.

Auch bei völlig kunstloser Beobachtung treten häufig mehr oder minder auffällige Interferenzerscheinungen gebeugten Lichtes auf. So schon, wenn wir bei geschlossenen Augen zwischen den Wimpern hindurch auf eine entfernte Lichtquelle blicken. Schauen wir durch einen seidnen Regenschirm auf eine entfernte Gasflamme so, daß das Auge nicht für Fäden des Schirmes akkommodiert, sondern auf die Flamme, also annähernd auf Unendlich eingestellt ist, liegen sich parallel den gekreuzten Fäden der Seide lange Lichtstreifen. Schon wenn man ein Haar, das nahe vor dem Auge eine vertikale Stellung hat, und an demselben vorbei wir auf eine uns die schmale Seite zukehrende Gasflamme blicken, sieht man sehr schöne farbige Beugungsstreifen. Ähnliche Erscheinungen an einem Fenster, an betauten Fensterscheiben u. dergl.

§ 125. Erklärung der Emission und Absorption, Phosphoreszenz und Fluoreszenz aus der Wellenlehre.

Nachdem uns die Erscheinungen der Beugung, genauer der Interferenz gebeugten Lichtes, das einfachste Mittel geboten haben, Wellenlängen Schwingungszahlen der sichtbaren Strahlen kennen zu lernen, sollen nun einige der im II. Abschnitt beschriebenen Lichterscheinungen aus der Wellenlehre erklärt werden.

I. Emission des Lichtes. — Wie z. B. die Wand einer Glocke 435 Schwingungen in der Sekunde ausführen muß, damit unser in irgend einer (nicht allzu großen) Entfernung befindliches Trommelfell ebenfalls zu 435 Schwingungen in der Sekunde erregt werde und wir den Ton a^1 hören, schließt man nunmehr auch, daß die zwischen die Atome je eines Moleküls glühenden Natriumdampfes gebetteten Atome 500 Billionen Schwingungen per Sekunde ausführen müsse, damit ein Ohr oder Auge von ebenso vielen Wellen in der Sekunde getroffen werde. Auch schließt man, daß an jedem Punkte zwischen dem glühenden Natriumdampfe und dem Schirme eine ebenso große Zahl periodischer Wechsel stattgefunden haben müsse (wobei wieder zunächst gemäß § 123 unentschieden bleiben kann, ob auch elastische Schwingungen des Äthers oder vielmehr elektromagnetische Ände-

rungen seien; nur der größeren Anschaulichkeit halber werden die nächsten Erklärungen überall in der Sprache der Elastizitätstheorie des Lichtes gegeben).

Im einzelnen erklären sich dann die Verschiedenheiten der Emissionsspektren so: Ein glühendes Gas, dem nur eine helle Linie entspräche, wäre zu vergleichen z. B. mit einer Stimmgabel, die nur einen einfachen Ton von bestimmter Tonhöhe hören läßt, indem die Stimmgabeln nur einfache Sinusschwingungen ausführen. Ein Gas, dessen Emissionsspektrum aus zwei hellen Linien besteht, entspräche einem Klangerreger, der zwei Partialtöne gibt u. s. w. — ein weißglühender fester oder flüssiger Körper dagegen einem Klangerreger, der gleichzeitig Partialtöne aller möglichen Schwingungszahlen aussendet (etwa wie wenn z. B. sämtliche Tasten des Klaviers gleichzeitig angeschlagen würden). — Wir können überdies nunmehr die Tatsache, daß den farbig leuchtenden Gasen nur einzelne, den weißglühenden festen und flüssigen Stoffen alle Farben gleichzeitig entsprechen, uns dadurch verständlich machen, daß in den Gasen die einzelnen Moleküle frei schwingen, in festen und flüssigen Stoffen aber sich gegenseitig behindern und es also nicht zu einfachen Schwingungen bringen. — Daß alle Körper zuerst rotglühend, später gelb- und erst bei den verhältnismäßig höchsten Temperaturen weißglühend werden, wird verständlich, wenn die Moleküle anfangs noch verhältnismäßig langsamere, später neben diesen auch noch schnellere Wärmeschwingungen ausführen (damit zu vergleichen, daß an jenem Klavier nur die Saiten für die tiefsten und dann neben diesen auch immer höhere Töne erregt werden; oder: Eine längere Lippenpfeife gibt bei schwachem Anblasen nur die tiefsten, bei stärkerem immer höhere Partialtöne und zwar zum Teil zugleich mit den tieferen; desgleichen „klirrt“ eine Stimmgabel nur bei reichend starkem Anschlagen).

II. Auch die Tatsachen der Absorption des Lichtes lassen nun Vorteile in mechanischen, speziell akustischen Wellenvorgängen zu: z. B. Wasserwellen, die vom freien Wasserspiegel in Röhricht geraten, werden hier bald gedämpft und verschwinden als Wellen; ähnlich, wenn die Drahtspirale, an der Seilwellen erzeugt werden, auf einem langen, mehr oder minder glatten Tisch liegt: wird das ein Ende durch die hin und her bewegte Hand zu Wellen erregt, so pflanzen sich diese infolge der Reibung des Seiles an der Tischplatte nur auf kurze Strecken fort. So also auch, wenn Lichtwellen in undurchsichtige Stoffe eindringen, wo sie schon in den obersten Schichten aufhören Licht zu sein; in durchscheinenden und durchsichtigen Stoffen findet dieses Aufzehren erst auf längeren Strecken statt. Im allgemeinen wird sich dabei die Energie der Lichtbewegung umsetzen in Wärme, und zwar ohne Zwischenglieder anderer Energieformen. — Ausnahmen hiervon sind dann Phosphoreszenz und Fluoreszenz (siehe unten). Von solchen Ausnahmen einstweilen abgesehen, wird nun Kirchhoffs Satz über das Verhältnis von Absorption und Emission begreiflich; und zwar wieder zunächst derjenige spezielle Fall, welcher für die Spektralanalyse in Betracht kommt: Ein Gas, das nur Wellen von einerlei Schwingungszahl aussendet (als Emissionsspektrum als eine einzige helle Linie hat), ist gleichsam auf eine bestimmte Schwingungszahl abgestimmt wie eine Stimmgabel. Würde nun über diese eine Stimmgabel ein Gemisch von Schallwellen der verschiedensten Wellenlängen und Schwingungszahlen geleitet, so gerät die Gabel nur durch die Wellen gleicher Schwingungszahl ins Mitschwingen; eben diese Wellen geben aber hierdurch ihre Energie an die Gabel ab, d. h. sie werden in ihrer Intensität geschwächt, während alle übrigen Wellen ungehindert passieren. So nun ist auch die Umkehrung der hellen Linie in dunkle allgemein als eine Art Resonanz, nämlich genauer (da hier die Gleich-

ist der Schwingungszahl wesentlich ist, § 94) als Mitschwingen zu deuten. — Und weiter gewinnen wir unter diesem Bilde auch Einsicht in Kirchhoffs Satz von dem konstanten Verhältnis zwischen Emission und Absorption, der zunächst nur für alle Stoffe umfassende Erfahrung aussprach.

Bisher war nur auf die gewöhnlichste Art des Selbstleuchtens, nämlich die der glühenden Körper Rücksicht genommen worden. Bei ihnen steht es im Einklange mit der kinetischen Wärmehypothese, daß die Körpermoleküle beträchtliche kinetische Energie, also bei ihrer gegebenen Masse auch große Geschwindigkeiten haben und infolge dieser die umgebenden Ätherteilchen zu Schwingungen mit erregen. Für die übrigen Erscheinungen der Lumineszenz (121) aber bedarf es anderer Vorstellungen:

III. Bei der **Phosphoreszenz** z. B. eines Leuchtsteines haben wir anzunehmen, daß während der Besonnung die Moleküle in Schwingungen versetzt worden sind, dann von den Molekülen noch fortgesetzt werden, wenn ihnen seitens der Sonnenstrahlung keine Energie mehr zugeführt wird; dies also zu vergleichen mit dem Nachklingen einer Glocke nach dem letzten Anschlagen des Schwengels.

IV. Bei der **Fluoreszenz** werden die von unsichtbaren ultravioletten, also kurzwelligen Strahlen getroffenen Teile z. B. eines Baryumplatincyankaliumes für das Auge sichtbar, müssen also minder kurzwellige Strahlen senden; dies ist damit zu vergleichen, daß eine auf einen tieferen Ton gestimmte Gabel statt durch einen Schlägel in die ihr gemäßen Schwingungen dadurch versetzt wird, daß man sie mit einer auf einen höheren Ton gestimmten und häufig schwingenden Gabel berührt (*Versuch*).

Da also in solchen Fällen die dem phosphoreszierenden, bzw. fluoreszierenden Körper zugeführte Energie nicht unmittelbar in Wärme umgesetzt, nämlich nicht sogleich absorbiert, d. h. als Licht verschwinden gemacht wird, so gilt für solche Körper auch Kirchhoffs Satz nicht. —

Die in vorstehendem III. Abschnitt gegebenen Erklärungen einiger der im I. und II. Abschnitt beschriebenen grundlegenden optischen Erscheinungen sollen die Proben davon geben, in wie mannigfacher Weise sich die Wellentheorie des Lichtes den optischen Tatsachen anzupassen vermag. Im folgenden IV. Abschnitt werden einige minder gewöhnliche optische Erscheinungen zusammen mit ihren Erklärungen aus der Wellenlehre behandelt.

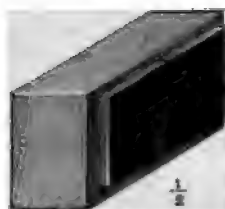
2. Einige weitere Erscheinungen der Interferenz. Polarisation, Doppelbrechung.

§ 126. Interferenzspiegel und -Prisma.

Sobald erkannt ist, daß ein lichtsussendender Punkt Erregungszentrum von Wellenbewegungen ist, so könnte man Interferenzerscheinungen überall dort erwarten, wo ein Schirm von den Wellen zweier gleichartiger Lichtquellen zugleich beleuchtet wird; z. B. von zwei Spalten im Fensterladen oder zwei glühenden Leuchtdrähnen, die untereinander und zum Schirm parallel sind. Es erweist sich aber für das Auftreten von Lichtinterferenz noch die Bedingung als wesentlich, daß die beiden Lichtquellen nicht voneinander unabhängig seien, sondern daß es **sammengehöriges** („kohärentes“) Licht sei, wie es z. B. hergestellt wird durch

Fresnels Interferenzspiegel. Zwei Spiegel aus Metall oder schwarzem Glas stoßen längs einer geraden Kante aneinander und bilden einen sehr stumpfen Winkel (nur wenige Minuten unter 180° , Fig. 425). Dieses Spiegelpaar wird so

Fig. 425.



in das durch eine schmale Spalte im Fensterladen eintretende Sonnenlicht gestellt, daß es beide Spiegelabebnen streift (unter großem Einfallswinkel trifft). Ist die Kante dem Spalt parallel, so erblickt man bei passender Stellung des Auges zwei einander nahe parallele Bilder des Spalts. Wird an Stelle des Auges ein Schirm so gestellt, daß seine Ebene parallel ist der durch beide Spaltbilder gebildeten Ebene, so zeigen sich auf dem Schirm abwechselnd helle und dunkle Linien, ähnlich wie bei der Beugung im

Lichtes an einem schmalen Spalt, und zwar so, daß in der Symmetrieebene der beiden Spaltbilder ein heller Streifen als Nullmaximum zu liegen kommt und dem ersten Minimum ein Unterschied der Abstände von

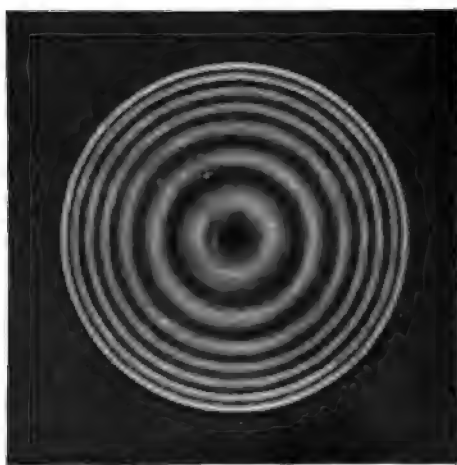
LA 176. den beiden Spaltbildern $D_2 - D_1 = \frac{\lambda}{2}$ entspricht (LA 175). — Dieser Versuch ist viel schwieriger rein durchzuführen als die Beugungsversuche (§ 124); auch ist diese Interferenz durch Spiegelung doch auch wieder von Beugungserscheinungen begleitet, was ihre vollständige Theorie sehr verwickelt macht.

Auch ein Prisma von sehr großem brechenden Winkel, dessen brechende Kante parallel zur lichteinlassenden Spalte gestellt wird, zeigt von dieser ein Doppelbild, und die aus beiden Prismenflächen austretenden kohärenten Lichtmengen gelangen wieder zur Interferenz. Hier ist aber die Erscheinung wieder kompliziert durch die prismatischen Dispersionsfarben.

§ 127. Farben dünner Plättchen.

Die oft brillanten Farben an Seifenblasen sind schon von Newton sorgfältig untersucht und merkwürdigerweise auch quantitativ

Fig. 426.



richtig erklärt worden, wie wohl erstatt der periodischen Zustände der Lichtwellen eben solche periodische Wechsel in den „accessus“ (vergl. § 123) der Lichtteilchen angenommen hatte. Um Luftschichten von leicht indirekt zu messender Dicke (LA 176) zu gewinnen, legte er auf eine ebene Glasplatte eine plankonvexe Linse von großem Krümmungshalbmesser; an einem solchen Newtonschen Farbenscheibchen zeigt sich an der Berührungsstelle von Platte

Linse ein dunkler Fleck, rings um ihn bei monochromatischer Be-
leuchtung ein Wechsel von hellen und dunklen Kreisen (Fig. 426),
bei weißem Licht farbig sind.

Im folgenden die Erklärung nur für den einfachsten Fall planparalleler
Plättchen (z. B. aus Wasser) mit beiderseits gleichem Medium (Luft): Ein Licht-
strahl wird bei A (Fig. 427) gespalten in einen reflektierten und einen ge-
brochenen Teil, der gebrochene bei B wieder so gespalten, daß aus dem Plättchen
ein dem reflektierten paralleler Strahl austritt u. s. f. Von je einer Stelle M
der Grenzfläche des Plättchens gehen also aus: 1. der direkt reflektierte
Strahl und 2. eine Summe von gebrochenen Strahlen, die nach ein-, zwei-,
... maligem Hin- und Hergehen innerhalb des Plättchens bei M austreten.
Ist die Dicke des Plättchens sehr klein, nämlich von derselben Größenordnung
die Wellenlängen des Lichtes, so wird der Strahl 1 und die Strahlensumme
interferieren. War monochromatisches, z. B. (gelbes) Licht
aufgefallen, so werden für einen bestimmten Einfallswinkel die von der Platte
reflektierten Strahlen einander auslöschen und trotz des reflektierten Lichtes
das Plättchen dunkel erscheinen lassen. Für monochromatisches Licht kürzerer
Wellenlänge wird bei steilerer Draufsicht das Plättchen dunkel erscheinen. War
auffallende Licht weiß, so wird das Plättchen in der jeweiligen Komplementär-
farbe des ausgelöschten einfachen Lichtes (also z. B. blau) erscheinen. —

Fig. 428.

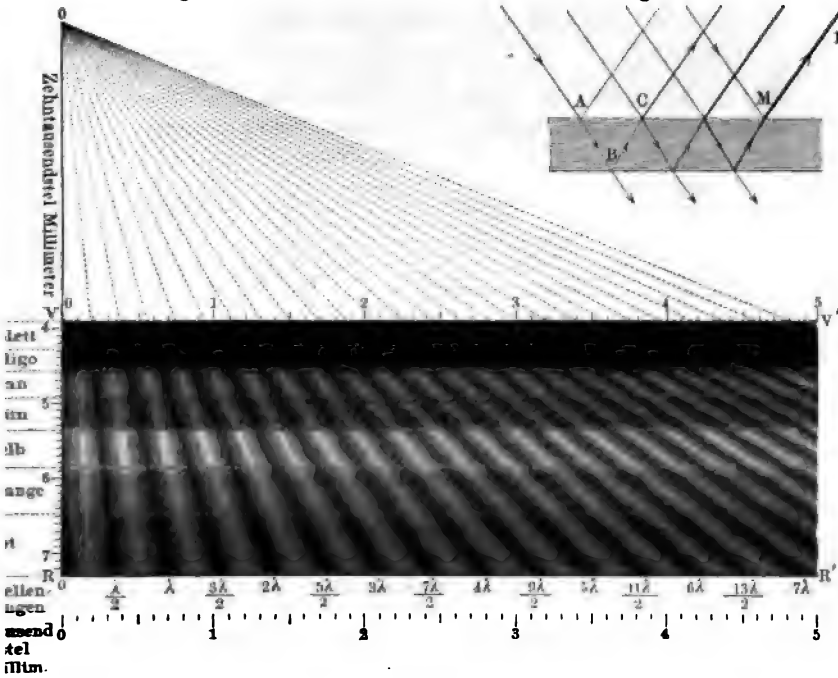
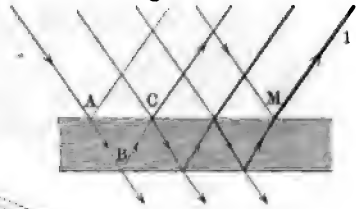


Fig. 427.



Aus Fig. 428 ist abzulesen, welche Mischfarbe irgend einer Plättchendicke
richtig ist: Legen wir nämlich ein Lineal parallel zur Geraden RV z. B. bei 0,2 (der
unteren und oberen Teilung) an, so zeigt sich, daß hier Rot (1. Max.) zur Wir-
kung kommt, Violett aber fehlt (1. Min.); demnach wird bei einer Plättchendicke

von 0,2 Tausendstel Millimeter eine rötliche Mischfarbe zu erwarten sein: [Das Farbenschema ist für Interferenzstreifen aller Art grundlegend.] Die Übereinstimmung der Theorie mit der Beobachtung der auftretenden Farben, speziell bei Reflexion (des auf dünne Plättchen auffallenden Lichtes — die komplementären zeigen sich im durchgehenden Licht) tritt erst ein bei Rücksicht auf folgenden Nebenumstand: Dafs nämlich z. B. an Newtons Farbenglas die mittlere Stelle, wo die Dicke des Lufthäutchens Null ist, nicht hell, sondern dunkel erscheint, erklärte THOMAS YOUNG (1802) richtig, indem er hinwies auf die Umkehrung der Phase der Wellen (§ 66) bei der Reflexion des Lichtes an ein optisch dichteres Medium. — Die durch Messungen an Newtons Farbenglas gemittelten Wellenlängen stimmen genau überein mit den aus allen übrigen Interferenzerscheinungen sich ergebenden.

Dafs Seifenblasen fortwährend ihre Farbe wechseln, erklärt sich aus dem Abdunsten der Wasserschicht (und Sinken von Teilchen infolge der Schwere). Ähnliche Erscheinungen zeigen irisierende und opalisierende Mineralien, die in feinen Rissen und Spalten Luft eingeschlossen ist; ferner Gläser, deren Oberfläche verwittert ist (z. B. Fenster an Ställen), oder künstlich chemisch verändert wurde (bei manchen Ziergläsern); Terpentinhäutchen auf Wasser u. s. f.

§ 128. Polarisirtes und unpolarisirtes Licht.

Auch mit der Feststellung der Wellenlängen (und Schwingungszahlen) der verschiedenen Arten sichtbarer und unsichtbarer Strahlen sind noch nicht alle Eigenschaften erschöpft, welche die Beschreibung eines Lichtstrahles vollständig machen. Namentlich ist durch alle bisher betrachteten, mannigfaltigen Erscheinungen, welche aufser Zweifel setzen, dafs den Lichterscheinungen Wellenvorgänge zu Grunde liegen, noch gar nichts darüber entschieden, ob diese Wellen transversal oder longitudinal seien (— diese Alternative zunächst wieder unter dem Bilde der mechanischen, speziell elastischen Wellen gedacht). Hierüber entscheiden folgende Erwägungen und Versuche:

Falls die Lichtwellen longitudinal wären, dürfte es keinerlei Unterschied machen, wenn der Strahl um seine eigene Längsrichtung um 90° gedreht wird oder wenn wir umgekehrt den Strahl z. B. an einer ihm unter schiefen Einfallswinkeln entgegengestellten Ebene reflektiert oder gebrochen werden lassen und diese Ebene um den Strahl als Achse drehen (vergl. unten Fig. 431). Der als longitudinaler Wellenzug gedachte Strahl wäre dann etwa zu versinnlichen durch eine cylindrische Röhre, zu der wir einen Bogen Papier zusammengerollt haben: diese Röhre zeigt keinerlei Änderungen, wenn wir sie um ihre Längsachse drehen. Streifen wir dagegen diese Röhre zu einem flachen Bande aus und drehen dies um seine Längsachse, so weist es eine bestimmte „Seitlichkeit“ auf. Sind also die Lichtwellen transversal, so ist zu erwarten, dafs sich Erscheinungen werden beobachten lassen, bei welchen jene Drehung von 90° um die Längsrichtung der Strahlen durch verschiedenes Verhalten des Strahles sich kundgibt.

Das Licht der meisten Lichtquellen weist zwar keine „Seitlichkeit“ auf, nimmt aber eine solche an, nachdem es bestimmte Vorgänge der Reflexion, Brechung, Absorption u. s. w. durchgemacht hat. Man nennt es dann **polarisirtes Licht**. Die Körper, die, nachdem unpolarisirtes Licht auf sie gefallen, polarisirtes entsenden, heifsen allgemein

arisierer (Polarisatoren, Polarisatoren); die Körper, die zeigen, daß in welcher „Polarisationsebene“ (siehe unten) das Licht polarisiert heißen Analysierer (Analysatoren, Analyseure).

Ein in Einrichtung und Handhabung besonders einfaches Beispiel eines solchen Polarisationsapparates“ gibt die

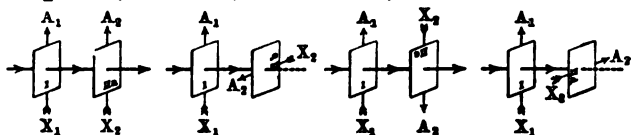
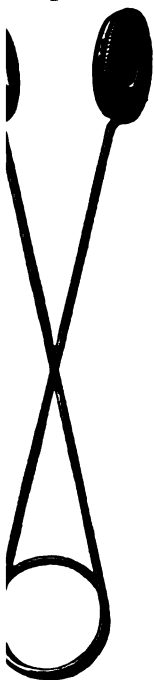
Fig. 429.

Fig. 430 a,

b,

c,

d.



Turmalinlinzange (Fig. 429). Aus je einem Turmalinkristalle sind planparallele viereckige Plättchen (parallel der Hauptachse AX des Kristalles) geschnitten. Eine solche Turmalinplatte läßt grünlichbraunes Licht durch. Die Plättchen sind in Korkscheiben und diese in Drahtklammern befestigt. Stehen beide Kristallachsen A_1X_1 und A_2X_2 (Fig. 430) parallel (a) oder sind sie um 180° verdreht (c), so ist das Gesichtsfeld hell; sind dagegen die Achsen um 90° (b) oder 270° (d) gegeneinander verstellt, so ist das Gesichtsfeld (bei sehr guten Plättchen ganz, bei anderen annähernd) dunkel.

Hierbei müssen wir also zunächst dem Lichte zwischen den Plättchen I und II die oben als „Polarisation“ definierte Eigenschaft zuschreiben. Denn indem die Platte II nur um den Lichtstrahl als Achse gedreht worden ist, und diese für ihn bei bestimmten Stellungen durchlässig ist, bei den um 90° verdrehten Stellungen nicht, so kann dies nur in einer bestimmten Seitlichkeit des Strahles seinen Grund haben, da sich ja an der Platte selbst außer ihrer Stellung im Raume nichts geändert hat. Da ferner einem nicht durch I gegangenen Lichtstrahl gegenüber die Platte II kein solches auswählendes Verhalten zeigt, so schließen wir, daß das Licht vor dem Eintritt in die der Platte II ganz unpolare Platte I unpolarisiert gewesen sei. Es ist also hier I der Polarisierer, der Analysierer. (Versinnlichung: Zwei Roste, deren Spalten einmal parallel, einmal gekreuzt sind und durch die man gefaltete Papierbänder nach obigem Ergebnis zu stecken sucht.)

Polarisation bei Reflexion und einfacher Brechung. Zwei planparallele durchsichtige Glasplatten sind zuerst parallel gestellt nach Fig. 431 (a. f. S.). — Auf I fällt ein Strahl gewöhnlichen (unpolarisierten) Lichtes so, daß der Einfallswinkel $p =$ der Brechungswinkel q entspricht (wo $n = \frac{3}{2}$ der Brechungsquotient

Luft in Glas ist). Um den reflektierten Strahl BC wird dann II in „Azimut“, § 175) um 90° , 180° , 270° , 360° gedreht. Bei den Stellungen a und c wird der Strahl BC ungehindert nach CD , bzw. CD' reflek-

tiert, und d sieht ein in der Richtung des erwarteten reflektierten Strahles gegen II blickendes Auge ein dunkles Gesichtsfeld. Hier war also der Strahl BC polarisiert, I war der Polarisierer, II der Analysierer. — Die bei a und c den beiden Spiegeln gemeinsame Einfallsebene heisst die **Polarisationsebene** des Strahles BC .

Da mit der Reflexion in der Regel auch Brechung verbunden ist (an totale Reflexion hier nicht vorliegt, weil der Winkel p noch unter dem Grenzwinkel liegt), so würde man erwarten, daß beim Durchblicken durch die Platte I längs CB das Gesichtsfeld hell sei. Bei je einer Platte ist dies auch der Fall.

Fig. 431.

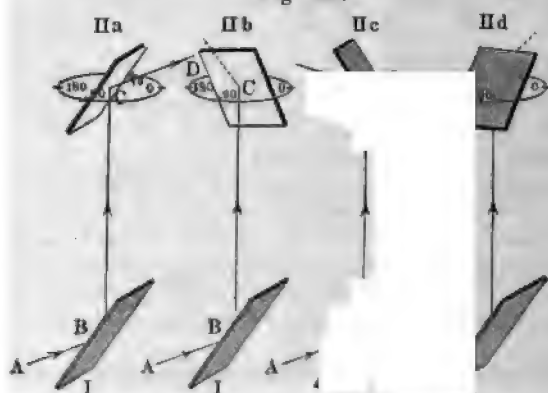
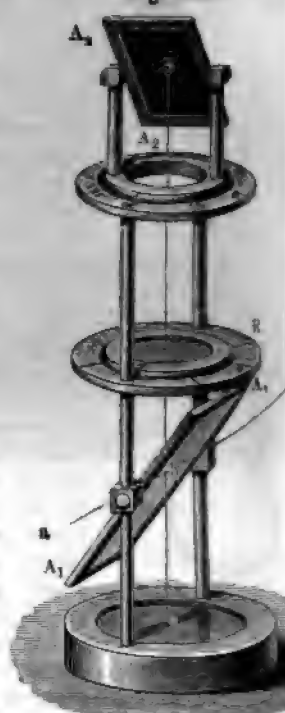


Fig. 432.



sind aber sechs bis acht solche Platten zu einem „Plattensatz“ zusammen geschichtet, so läßt dieser in den Stellungen a und c kein Licht durch, wirkt also als Analysierer. — Ebenso kann man einen Plattensatz auch als Polarisierer verwenden, indem man unpolarisiertes Licht auf ihn unter dem Polarisationswinkel einfallen läßt. Immer zeigt sich, daß die an derselben Trennungsfläche durch Reflexion und durch Brechung polarisierten Strahlen zueinander normale Polarisations-ebenen haben. — Nörrenbergs Polarisationsapparat, Fig. 432. —

Hier also gewinnen wir schon etwas tieferen Einblick in die Art, wie Spiegel I aus unpolarisiertem Licht polarisiertes macht: Das einfallende unpolarisierte Licht empfängt nicht eigentlich erst die Seitlichkeit durch den Vorgang der Reflexion (und Brechung), sondern es wird nur aus dem auffallenden natürlichen Licht, in welchem noch keine Seite ausgezeichnet war, beim Auftreffen solches Licht ausgesondert und bloß solches durchgelassen, das eine bestimmte Lage zur Einfallsebene des Spiegels hat. (Ähnlich bei der Turmalinplatte; ferner beim Nicolschen Prisma, folgender Paragraph.)

Stellt man sich also noch anschaulicher vor, der Zustand des Polarisierten eines Strahles bestehe darin, daß die längs des Lichtstrahles angeordneten Ätherteilchen transversal, d. h. normal zur Reihe der Ätherteilchen, und daß sie alle in derselben Schwingungsebene sich bewegen (Fig. 433), und stell

wir uns den Schwingungszustand in einem unpolarisierten Strahle so vor, daß die Ätherteilchen zwar ebenfalls normal zur Schwingungsrichtung, aber nicht in einer ausgezeichneten Schwingungsebene sich bewegen, so erklärt sich der Vorgang des Polarisierens und Analysierens bei der Reflexion durch folgende

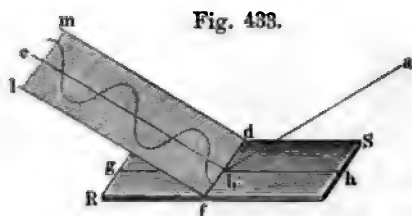


Fig. 433.

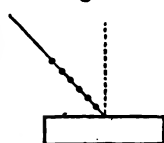


Fig. 434.

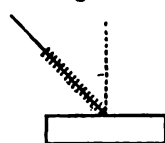


Fig. 435.

weitere Hypothese (von FRESNEL): Ist die Schwingungsebene normal zur Polarisationssebene, d. i. der Einfallsebene, so haben die Teilchen des von *B* aus einfallenden polarisierten Lichtes beim Auftreffen auf die reflektierenden Spiegelebenen *IIa* und *IIc* nur längs dieser hin- und her zu gleiten, werden also in der Bewegung nicht gehindert (Fig. 434). Bei *IIb* und *IId* dagegen hätten die Teilchen in die reflektierenden Ebenen hineinzustofsen (Fig. 435), und es werden also diese Schwingungskomponenten durch den Reflexionsvorgang geschwächt, bew. zerstört. (Die nähere mathematische Ausbildung dieser Theorie hat in der Tat verlangt, daß die Zerstörung eine vollständige nur sei, wenn $\tan \theta = \infty$ ist, wie es die Erfahrung auch zeigt.)

Geschichtliches. Obwohl wir heute gewohnt sind, alle Polarisationserscheinungen sogleich unter dem Gesichtspunkte der Hypothese von den transversalen Lichtwellen aufzufassen, hat doch schon NEWTON, wiewohl er nicht an die Wellenlehre des Lichtes glaubte, die Frage aufgeworfen, „annon lumini sint latera (ob nicht dem Licht Seitlichkeit zukomme)“. HUYGENS dagegen, der seine Wellenlehre des Lichts auf Grund des anschaulichen Vorbildes der Erscheinungen der Schallwellen ausgebildet hatte, dachte sich die Lichtwellen longitudinal, hätte also durch diese besondere Zutat zu seiner Hypothese in der Auffassung der wirklichen Tatsachen von Polarisation nur gehindert, nicht gefördert werden können. Das Auslösen je eines oder zweier aus einem doppeltbrechenden Kristall tretenden Strahlen durch einen zweiten solchen Kristall bei bestimmten Stellungen (folgender Paragraph) blieb ihm also rätselhaft.

MALUS (sprich: Malü) beobachtete 1810 ganz zufällig das von einem Dachfenster reflektierte Licht der untergehenden Sonne durch einen doppeltbrechenden Kalkspat und bemerkte hierbei die verschiedene Lichtintensität der beiden Bilder je nach der Stellung des Kristalls zum Strahl (— den Namen „Polarisation“ wählte Malus auf Grund einer besonderen Ausgestaltung der Korpuskularhypothese). Namentlich auf diese Beobachtungen hin bildete nun FRESNEL die von ihm schon früher durch wichtige Entdeckungen experimenteller und rechnerischer Art mächtig geförderte Wellenlehre dahin aus, daß die Lichtwellen transversal seien. Von da an bildeten sich die Vorstellungen, auf welche mannigfaltige Arten eine Wellenbewegung transversal sein kann (z. B. nicht nur, indem alle Teilchen in derselben Ebene schwingen, sondern auch z. B. in Kreisen, Ellipsen, deren Ebenen normal zur Fortpflanzungsrichtung sind, Fig. 436, I—V), selbst erst noch weiter aus, und diese Vermannigfaltigung und Verfeinerung der mechanischen Vorstellungen bildete den Leitfaden bei der Entdeckung auch immer neuer Tatsachen optischen Inhaltes. Diese Vorstellungen haben sich auch als fähig erwiesen, aus der Sprache der

Elastizitätstheorie des Lichtes in die der elektromagnetischen Theorie übersetzt zu werden: in der gewinnt namentlich die Tatsache der Seitlichkeit (Transversalität) des Lichtes, direkt empirisches Vorbild darin, daß z. B. sogleich

Fig. 436.



bei Ørsted's Versuch (§ 147) die Pole der Nadel normal zur Stromrichtung angetrieben werden. Über die Verbindung solcher Transversalität magnetischer und elektrischer Wellen mit der Periodizität vergl. § 157, namentlich Fig. 377.

§ 129.

Vorversuch: Legt man ein Begrenzungsflächen auf ein bed (Fig. 437); dreht man ihn um ei

Brechung.

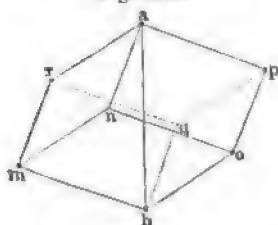
Kristall mit einer der natürlichen t, so zeigt er die Schrift doppelt ebene normale Gerade, so kreist da

Doppel



eine Bild je eines Buchstabens um das andere. Um in diesen Bewegungen eine Gesetzmäßigkeit aufzufinden, hat man sich zuerst aus dem natürlichen Kristall, der meistens die Gestalt ungleichseitiger Parallelepipede zeigt, die rhombo-

Fig. 438.



edrische Grundform herausgehoben zu denken, der eine Hauptachse ab und drei zu ihr normale einander unter je 60° schneidende Nebenachsen zukommen (Fig. 438). An den Enden der Hauptachse liegen die drei stumpfen Winkel von je $105^\circ 8'$ der kongruenten Rhomben. Jede zur kristallographischen Hauptachse parallele Gerade (also die Richtung der Geraden ab , nicht etwa nur diese Gerade selbst) heißt die optische Hauptachse, jede zu ab parallele Ebene ein Hauptschnitt.

Für einen Lichtstrahl, der entweder auf eine der natürlichen Kristallebenen des Kalkspates (oder irgend eines nicht im regulären Systeme kristallisierenden Stoffes) oder auf künstlich angeschliffene Ebenen fällt, gibt es solche Einfallsebenen und Einfallswinkel, wo der gebrochene Strahl die Richtung der „optischen Achse“ annimmt: nur in diesem Falle tritt nicht Doppelbrechung, sondern einfache

echung ein. Bei allen anderen Einfallswinkeln und Einfallsebenenaltet sich der Strahl nach dem Eintritt in einen **ordentlich** und einen **außerordentlich gebrochenen Strahl** (§ 104). Dabei zeigt der außerordentliche Strahl überhaupt nicht mehr einen konstanten Brechungsquotienten, ja er tritt im allgemeinen sogar aus der Einfallsebene heraus (er verbleibt in ihr nur dann, wenn die Einfallsebene ein Hauptchnitt oder eine zur optischen Achse normale Ebene gewesen war).

Alle diese so sehr verwickelten Erscheinungen vermochte HUYGENS einheitlich zu beschreiben, indem er erkannte, daß, wenn wir uns von einem Punkte

Innern des Kristalls Licht ausgehend denken, dieses sich nicht, wie in homogenen isotropen Medien, nur in Kugelwellen ausbreitet, sondern in zwei Wellenflächen, nämlich erstens einer kugeligen Wellenfläche, die dem ordentlichen Strahl entspricht, und zweitens einer ellipsoidischen Wellenfläche, die dem außerordentlichen Strahl entspricht. Dieses Ellipsoid ist beim Kalkspat ein Drehungsellipsoid mit kurzer Hauptachse. Ihm ist die kugelige Wellenfläche der ordentlichen Strahlen so eingeschrieben, daß sich beide Flächen an den Enden

der kurzen Achse berühren. — Denkt man sich dieses Ellipsoid halbiert durch eine Ebene, die weder die Rotationsachse enthält, noch zu ihr normal ist (Fig. 439), und denkt man sich

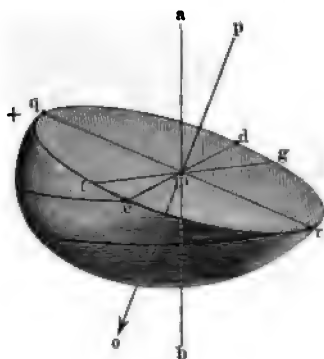
HUYGENS Erklärung der Brechung (Fig. 264, 249) statt der Halbkugel im neuen Medium eine Halbellipsoide konstruiert, so wird ersichtlich, daß die alle diese Wellenflächen tangierende hüllende Ebene keine so einfache Lage mehr bekommen wird, wie die die Kugelflächen tangierende hüllende Ebene; insbesondere wird im allgemeinen ein Heraustreten des auf dieser einfallenden Ebene immer noch normalen Wellenstrahles aus der erweiterten Einfallsebene zu erwarten sein. Mit HUYGENS allseitiger mathematischer Ableitung der möglichen Lagen so konstruierter gebrochener Strahlen

trugen sich seine ebenso sorgfältigen Messungen an den wirklichen Kristallen in völler Übereinstimmung. — Noch kompliziertere geometrische Aufgaben bieten Kristalle, welche nicht, wie die des rhombischen und des hexagonalen Systems eine optische Hauptachse, sondern deren zwei haben (einachsige, zweiachsige Kristalle).

Polarisation bei Doppelbrechung. Untersucht man die Strahlen bei Doppelbrechung austretenden Strahlen, so findet man sie immer in zwei zueinander normalen Ebenen polarisiert.

Auch diesen Umstand erklärt ungezwungen die Theorie der ellipsoidischen Wellenflächen und zwar nach Analogie von Fig. 247 a (S. 232), wo in einem elastischen Stabe von rechteckigem Querschnitte transversale Schwingungen verschiedene Fortpflanzungsgeschwindigkeit haben, je nachdem die Schwingungsebene parallel der kurzen oder längeren Rechtecksseite ist. Denn der Stab zeigt größere Zugelastizität, wenn er parallel der langen, als wenn er parallel der kurzen Seite verbogen wird. — Stellen wir uns daher vor, daß auch der Lichtäther innerhalb eines Kristalles nach verschiedenen Richtungen verschiedene Elastizität habe

Fig. 439.



und zwar die kleinste nach der Richtung der Hauptachse des oben beschriebenen HUYGHENSchen Ellipsoides für Kalkspat), so wird ein ins Innere des Krystals eingeleiteter Schwingungsvorgang sich in zwei zueinander normale Schwingungsspalten, die sich nach verschiedenen Richtungen mit verschiedener Geschwindigkeit als transversale Wellen durch den Kristall fortpflanzen. Dagegen wird eine solche Spaltung unterbleiben, wenn die Richtung des Strahles z. B. die der Rotationsachse des Ellipsoides ist.

Umgekehrt lässt sich die Doppelbrechung auch wieder zum Polarisieren und Analysieren verwenden; so namentlich in Nicols Prisma (Figg. 440, 441). An ein

Fig. 440.



natürliches Kalkspatrhomboeder $AB'DC'$ (Fig. 440) sind statt der natürlichen Flächen AC' und $B'D$ (die mit den Kanten AB' und $C'D$ Winkel von 71° bilden) neue Ebenen AC und DB angeschliffen, die mit jenen Kanten nur Winkel von 68° bilden. Dieses Prisma ist dann längs einer Ebene HH' zerlegt, und die

Fig. 441.

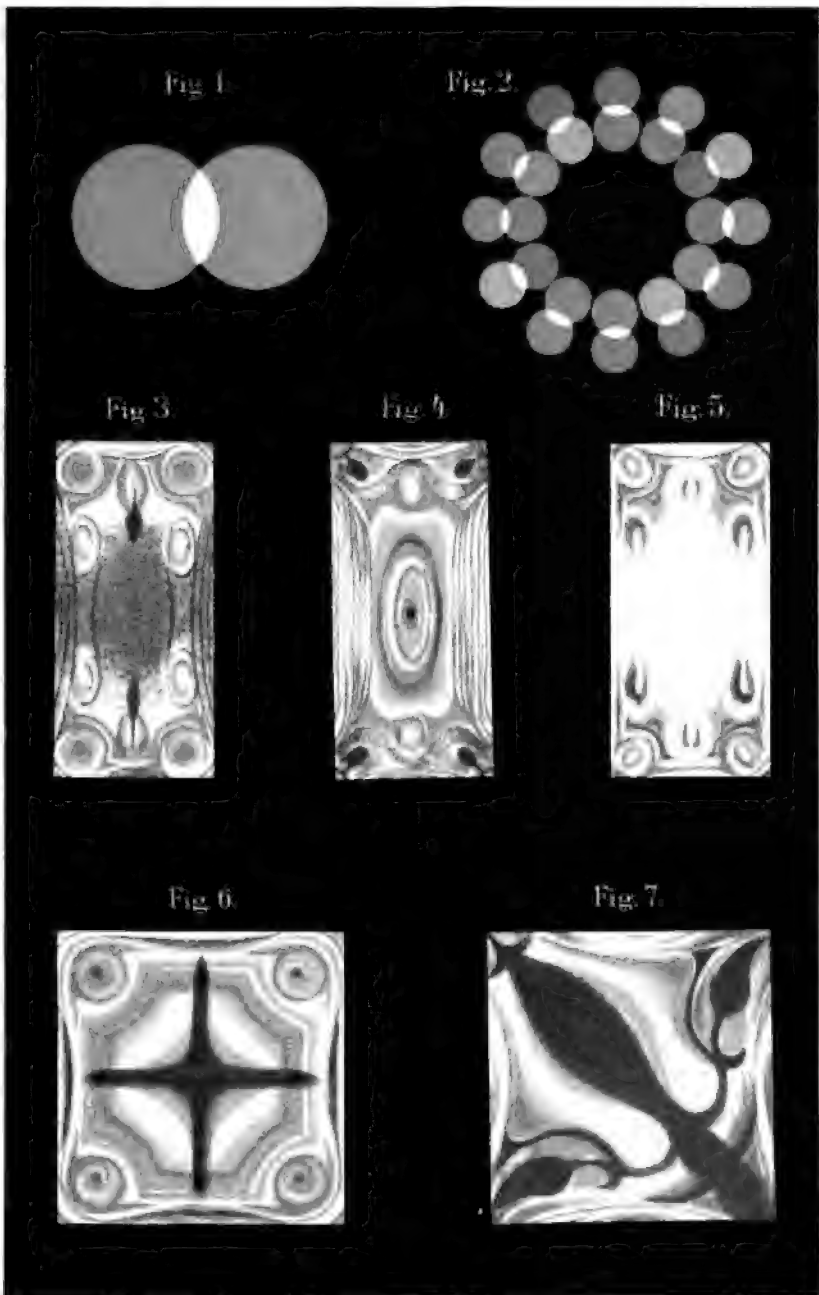


beiden Stücke sind nach dem Polieren mittels Kanadabalsam wieder zusammengekittet. Ein Lichtstrahl ab , der in der Richtung von AB auffällt, wird in zwei polarisierte Strahlen zerlegt, von denen der ordentliche

Strahl bc in der Balsamschicht totale Reflexion nach d erleidet und dort in der undurchsichtigen Fassung des Prismas absorbiert wird. Daher tritt längs $d'd$ nur der außerordentliche Strahl aus. —

Werden Glimmerplättchen (teils nach den natürlichen Spaltungsflächen, teils keilförmig zugeschliffen), ferner Plättchen verschiedener Kristalle nach verschiedenen Lagen in Bezug auf die kristallographischen Achsen, auch rasch gekühlte Gläser, Glaswürfel, die mittels Schrauben an verschiedenen Stellen unter ungleiche mechanische Spannung versetzt sind u. s. f., zwischen einen Analysierer und Polarisierer gebracht, so zeigen sie überaus mannigfaltige Farbenerscheinungen (vergl. Tafel VI), die sich alle aus der Interferenz des polarisierten Lichtes mathematisch vollständig haben erklären lassen, worauf hier nicht eingegangen werden soll. —

In Quarzplatten findet eine **Drehung der Polarisationssebene** statt; d. h. wenn in eine entsprechend geschliffene planparallele Quarzplatte ein polarisierter Strahl eintritt, dessen Polarisationssebene die Vorderfläche der Platte längs einer Geraden AB schneidet, so zeigt der Strahl nach dem Austritt aus der Hinterfläche der Platte eine Polarisationssebene, die mit AB einen bestimmten Winkel bildet; dieser wird um so größer, je dicker die Platte ist. — Auch Zuckerlösungen (Rübensaft . . .) erteilen einem durch sie hindurchgehenden Lichtstrahl eine um so stärkere Drehung der Polarisationssebene, je dicker die durchsetzte Flüssigkeitsschicht und je stärker die Konzentration der Zuckerlösung ist. Daher kann diese Konzentration durch das **Saccharimeter** bestimmt werden, dessen wesentliche Bestandteile ein Polarisierer und ein Analysierer an den Enden einer mit der Zuckerlösung zu füllenden Röhre sind.



Farbenerscheinungen bei der Interferenz polarisierten Lichtes (*chromatische Polarisation*) - Figg. 1 und 2: Polarisiertes Licht wird nach dem Durchgang durch ein Gypsblättchen analysiert durch ein doppelbrechendes Prisma - Figg. 3-7: Doppelbrechung an Glasern bei mechanischer Spannung.



Dritter Teil:

Elektrische und magnetische Erscheinungen.

leitung: Geschichtliches; Grunderscheinungen und vorläufige Hilfsvorstellungen.

10. Elektrische und magnetische Körper. — Gut- und Schlechtleiter. Positive und negative Ladungen.

Die Wörter **elektrisch**, **elektrische Ladung**, **elektrischer Strom** u. s. f. durch die nachgerade zahllos gewordenen elektrotechnischen Anwendungen rufen und kleinen (elektrische Telegraphie und Telephonie, elektrische Eisen-, elektrisches Licht, vergl. V. Abschn. § 160 ff.) auch dem Nichtphysiker völlig fremd geworden. — Im Vergleich zu den künstlich eingeleiteten elektrischen Erscheinungen sind die spontan in der Natur sich abspielenden (Gewitter, Nordlicht, elektrischen Schläge des Zitteraales . . .) in verschwindender Minderzahl; erst durch feine Meßapparate (Galvanometer) zeigt sich z. B. auch jede Muskelkraft von elektrischen Strömen begleitet.

Es pflegt ferner allgemein bekannt zu sein, daß an zahlreichen elektrischen Erscheinungen, z. B. den elektrischen Telegraphen, den elektrischen Klingeln, den Nähmaschinen u. s. f., einen ebenso wesentlichen Bestandteil, wie die elektrischen Drähte, die **Magnete** bilden. Auch für die magnetischen Erscheinungen sind die natürlichen Magnete (Magnetisensteine) und ihre Eigenschaften im Vergleich zu den künstlichen, speziell den **Elektromagneten**, belanglos geworden. Geben wir uns nun Rechenschaft, um welcher sinnlich wahrnehmbaren Erscheinungen willen wir einen bestimmten Eisen- oder Stahlstab magnetisch, einen anderen unmagnetisch, und ebenso eine Siegellackstange zunächst unelektrisch, dem Reiben mit Wolle elektrisch, nach einiger Zeit wieder unelektrisch machen, so haben wir vor allem festzuhalten, daß eine magnetisierte Stricknadel nicht anders als eine unmagnetische, eine elektrische Siegellackstange nicht anders als eine unelektrische aussieht, oder einen anderen Gewichtsdruck auf die Waage ausübt u. dergl. m.; so wenig wie ein Eisenstab von 100° C oder 50° C in diesen Beziehungen von einem von 0° unterscheidet. Während wir aber verschiedene Unterschiede im Wärmegrade eines Körpers unmittelbar durch die verschiedene Neempfindung auffassen, welche die Eisenstange in uns erregt, besitzen wir

keinen dem Wärmesinne (Gehörs-, Gesichtssinn) analogen „Elektrissinn“, bzw. Magnetismussinn“. Wir schliessen vielmehr auf elektrische und magnetische Zustände zunächst nur aus den sogenannten Wirkungen auf andere Körper. Speziell sind wir in den Fällen, wo genaue quantitative Erfahrungen nötig sind (ganz wie bei den Messungen des Wärmegrades oder bei extremen Wärmegraden), auch bei den elektrischen und magnetischen Erscheinungen auf die Anwendung von Instrumenten angewiesen, die auf indirekte Weise über den elektrischen, bzw. magnetischen Zustand des untersuchten Körpers Aufschluss geben; und zwar sind den Thermoskopen und Thermometern hier die Elektroskope, Elektrometer und Galvanometer, bzw. die Magnetnadeln als Magnetoskope und das Magnetometer analog.

Als solche „Wirkungen“ elektrischer und magnetischer Körper treten statische Klassen physikalischer und chemischer Erscheinungen auf. Zu vorläufiger Übersicht seien als Beispiele zu den einzelnen Erscheinungsklassen aufgeführt:

1. **Mechanisch:** Die Anziehung und Abstossung leichter Körper durch elektrische Körper, die Anziehung von Eisenfeilspänen, Nickelmünzen . . . durch Magnete.

2. **Wärme:** Die elektrischen Glüh- und Bogenlampen, stündliche Blitzschläge. Teilweise als Begleiterscheinungen dieser Wärmewirkungen:

3. **Licht:** Vom Fünkchen bis zum Blitz; Geißlerische Röhren.

4. **Schall:** Vom Knistern der Funken bis zum Donner.

5. **Physiologisch:** Die Empfindung und die Muskelzuckung beim elektrischen Schlag einer Leydener Flasche. Elektrotherapie.

6. **Chemisch:** Die Bildung von Ozon in der Nähe einer im Gang befindlichen Elektrisiermaschine; Elektrolyse, Galvanoplastik.

7. **Magnetisch:** Die Bewegung von Magneten und stromdurchflossenen Spulen durch Ströme, die Erregung von Magneten durch Ströme (Elektromagnete). — Schliesslich selbst wieder

8. **Elektrisch:** Erzeugung von Induktionsströmen durch benachbarte bewegte Stromleiter.

Ebenso gross wie die Mannigfaltigkeit a) dieser Wirkungen ist auch die b) der Ursachen („Quellen“), aus welchen sich elektrische und magnetische Erscheinungen ergeben. Wir kennen mechanische Erregung elektrischer Ladungen durch Reibung und solche ohne wesentliche Mitbeteiligung der Reibung beim Betriebe der Influenzmaschinen. Durch passende Erwärmung oder Abkühlung der Lötstellen an einem Thermoelemente (§ 153) entstehen Thermoströme. Chemische Vorgänge bilden die Stromquelle bei den galvanischen Elementen und Akkumulatoren. Während der physiologischen Vorgänge in den Muskeln und Nerven entstehen elektrische Ströme. Durch Bewegung von Drahtspulen im Kraftfelde der Magnete entstehen die Ströme der Gleich- und Wechselstrommaschinen u. s. f.

Zu dieser Mannigfaltigkeit a) der durch die elektrischen Zustände bewirkten, b) der sie verursachenden Vorgänge kommt c) die Mannigfaltigkeit der Körper, welche elektrisch und magnetisch werden können. Wiewohl nämlich die längste Zeit hindurch beide Zustände nur wie Curiosa an geriebenem Bernstein und an einigen Eisenerzen bekannt waren, wissen wir heute, dass alle Stoffe

elektrifizierbar und (bei Einwirkung hinreichend kräftiger magnetischer Apparate auf para- und diamagnetische Stoffe, § 145) auch alle Stoffe magnetisierbar sind, so daß Elektrifizierbarkeit und Magnetisierbarkeit geradezu unter den „allgemeinen Eigenschaften der Körper“ aufgezählt werden könnten. —

Die Mannigfaltigkeit und Gesetzmäßigkeit der elektrischen und magnetischen Erscheinungen haben alsbald auch das Bedürfnis nach theoretischen Ansichten über „das Wesen der Elektrizität und des Magnetismus“ rege gemacht. Es gibt aber bis heute keine einzige Theorie, welche ein alle einzelnen Erscheinungen umfassendes und doch zugleich ein bis in alle Einzelheiten anschauliches Bild der den elektrischen und magnetischen Erscheinungen zu Grunde liegenden Vorgänge zu geben vermöchte, wie ein solches Bild für die Wärmeerscheinungen die kinetische Theorie (§ 83), für die Lichterscheinungen die Wellentheorie (§ 123 ff.) ist. Zwar erweist sich heute noch die Hilfsvorstellung zweier elektrischer Fluida (dualistische Theorie) oder eines Fluidums (unitarische Theorie) als nützlich: aber namentlich seitdem die Stofftheorie der Wärme durch die mechanische Wärmetheorie überwunden ist, sind auch jene elektrischen Fluida nur als bequeme wissenschaftliche Fiktionen anzusehen (log. Anh., Nr. 36).

Anh. 36.

Gleichwohl gibt es einen umfassenden theoretischen Gesichtspunkt, unter den bisher sämtliche elektrischen und magnetischen Erscheinungen sich gefügt haben: den der Energetik. Es entspricht ganz dem durch das Gesetz der Verwandlung und Erhaltung der Energieen hergestellten Zusammenhänge zwischen den verschiedensten physikalischen und chemischen Erscheinungsgebieten, auch die ganze Mannigfaltigkeit der Wirkungen wie der Ursachen elektrischer Zustände als Veränderungen des Energiezustandes der Körper aufzufassen; z. B. das Elektrifizieren durch Reibung als Erteilung potentieller Energie (durch Umlagerungen in den Molekeln des geriebenen Körpers oder dem zwischen ihnen befindlichen Äther), dagegen die an einem solchen Körper auftretenden Funken als Umsatz jener potentiellen in aktuelle Energie (in Form von Wärme und Licht).

Unbeschadet der großartigen Einheitlichkeit, welche in die Elektrizitätslehre durch die Energetik gebracht worden ist, müssen wir uns aber doch gestehen, daß die elektrischen Erscheinungen nicht etwa aus den energetischen Begriffen und Sätzen restlos ableitbar sind (log. Anh., Nr. 37). So ist es z. B. bis zum heutigen Tage nicht erklärt, warum eine Glasstange kräftigere elektrische Wirkungen zeigt, wenn sie mit einem Seidenlappen, als wenn sie mit einem nicht amalgamierten Lederlappen gerieben wird; desgleichen warum Eisen und Nickel, aber bei weitem nicht in demselben Maße die übrigen Stoffe magnetisierbar sind. Es weist uns das darauf hin, daß die besondere Art der Elektrifizierbarkeit und Magnetisierbarkeit eines Körpers aufs innigste mit seiner molekularen Struktur (und wahrscheinlich der von dieser abhängigen Lagerung des intramolekularen Äthers) zusammenhängt; aber eben diese Struktur bietet schon in den viel einfacheren Erscheinungskreisen der Molekularmechanik und um so mehr in der Dispersion, Emission, Absorption des Lichtes u. s. f. noch viel Unerforschtes. Immerhin läßt sich von derjenigen besonderen Form der Energie, welche wir als elektrische bezeichnen, im Vergleich zur Energie der Wärme sagen, daß sie labiler (wandlungsfähiger, gleichsam höher organisiert, LA 75) sein müsse. Denn wie zwar schon mechanische Energie sich ganz in thermische umwandeln läßt, die umgekehrte Wandlung einer bestimmten Wärmemenge aber nur möglich ist, wenn ein Teil dieser Menge vom höheren auf einen niedrigeren Grad sinkt (§ 84), so läßt sich zwar auch elektrische Energie

Anh. 37.

LA 75.

unmittelbar oder nach Durchgang durch mancherlei Zwischenformen (Licht, Schall, Chemismus . . .) schließlich ganz in Wärme verwandeln — aber bei weitem nicht so vollständig Wärme in Elektrizität. —

Blicken wir von der gegenwärtigen Entwicklungsstufe unserer theoretischen Erkenntnis der elektrischen und magnetischen Erscheinungen und der obigen erwähnten Rolle der Elektrotechnik im modernen Leben zurück auf die Anfänge dieser Entwicklung, so ist dankwürdig einerseits der überraschend enge Kreis von Erscheinungen, welche bis vor kaum einem Jahrhundert überhaupt bemerkt worden waren, anderseits die Schwierigkeit, die wirklich beobachteten Tatsachen von mehr oder minder zufälligen hypothetischen Vorstellungen, die nur zu oft mit der reinen Beschreibung der Erscheinungen vermischt wurden, streng gesondert zu erhalten.

Das Folgende gibt zunächst eine wiederholende Übersicht der in der älteren Elektrizitätslehre, teilweise bloß aus historischen Gründen, für grundlegend gehaltenen Erscheinungen und Hilfsvorstellungen; von ihnen im vorliegenden Paragraph noch so viel, als namentlich für den Gebrauch des Elektroskops ausreichend ist. Von § 135 an werden dann zum Teil dieselben Erscheinungen im Sinne der neueren Elektrizitätslehre, namentlich nach ihrer quantitativen Seite hin, exakter dargestellt.

Geschichtliches. Um die Zeit des THALES VON MILET (600 v. Chr.) waren die Anziehungserscheinungen des geriebenen Bernsteins (*Versuch 1*), sowie die des Magneteisensteins bekannt. — Einige Kenntnisse über Magnete hatten die Chinesen schon lange vor Anfang unserer Zeitrechnung und verwendeten schwimmende Magnete zur Orientierung; von europäischen Schiffen wurde der Kompaß um 1200 n. Chr. angewendet. (*Versuch 2*: Eine Magnetsadel, auf einer Uhr- oder Glaslinse liegend, die auf Wasser oder Vaselineöl schwimmt.)

Erst GILBERT (*De magnete* 1600) beobachtete die vom Bernstein (*glaucus*) her bekannten Erscheinungen der Anziehung auch an einigen anderen Stoffen (an Glas, Schwefel, Harzen, Edelsteinen . . .); von ihm rühren die Namen „elektrische Kraft“ (Bernsteinkraft), „elektrische Körper“ u. dergl. her.

OTTO v. GUERICKE (1663) bemerkte, daß der leicht bewegliche Körper nach Berührung mit dem elektrischen abgestoßen werde (*Versuch 3* an einem elektrischen Pendel). Überdies scheint GUERICKE schon bemerkt zu haben, daß der berührte und abgestoßene Körper einen dritten anziehen und von sich abstoßen vermag, also ebenfalls elektrisch geworden ist (*Versuch 4* mit einem zweiten elektrischen Pendel). Man nennt diese Erscheinung bis heute **Elektrisierung durch Mitteilung**, wiewohl die Vorstellung einer Mitteilung (etwa ähnlich der Wärmeleitung) durch Zurückführung auf „Elektrisierung durch Verteilung“ (§ 132) entbehrlich geworden ist. — GUERICKE war auch der erste, der stärkere elektrische Wirkungen erzielte mittels einer **Elektrisiermaschine**, nämlich einer durch eine Kurbel gedrehten Schwefelkugel, die mit der Hand gerieben wurde. Auch die noch überall verbreitete Wintersche Reibungselektrisiermaschine unterscheidet sich von jenen älteren Maschinen wesentlich nur durch Anbringung des Reiber- und Reibzeugkonduktors, sowie durch die Anwendung der Saugwirkung von Spitzen (§ 133); gegenwärtig hat sie aber kaum mehr ein anderes als historisches Interesse, da sie durch die viel handlichere Influenzmaschine (§ 134) mit Recht verdrängt wird.

GRAY (1729) unterschied **Leiter** (Gutleiter, Konduktoren: **Metalle**, feuchte Schnüre, der menschliche Leib . . .), **Halbleiter** (trockene Schnüre, Holz . . .) und **Nichtleiter** (Schlechtleiter, Isolatoren, Dielektrika: die meisten Glassorten, Harz, Fette, Schwefel, Seide; Glimmer, Guttapercha, Hartgummi oder Ebonit; Öle [Paraffin-, Vaselineöl]; neuestens sind die Isolationsmittel Fiber, Stabilit . . . für den Bau elektrischer Maschinen wichtig geworden). — *Versuch 5*: Ein Doppelpendelelektroskop ist durch eine mehrere Meter lange Schnur (oder mittels der in Fig. 472, S. 438 dargestellten Holzstäbe) mit einer auf isolierendem Glasfuß stehenden Sammelkugel verbunden. Je nachdem die Schnur trocken oder feucht oder mit Metallfäden durchzogen ist, zeigt sich nach Elektrisierung der Kugel das Elektroskop teils gar nicht, teils nach längerer Zeit, teils sofort elektrisch. Umgekehrt: Ein geladenes Elektroskop wird entladen durch Berührung mit Gutleitern, nicht durch Berührung mit Schlechtleitern.

Schon GRAY gelang es, durch Metalldrähte und Hanffäden Körper bis auf 200 m Distanz zu elektrisieren (eine Art Vorversuch zur elektrischen Telegraphie). Auch erfand GRAY (1732) den Isolierschemel, auf welchem ein Mensch elektrisch geladen werden konnte; ferner entdeckte er, daß auch ein isoliert gehaltener Metallkörper durch Reiben oder durch Mitteilung elektrisch werden und bleiben kann. — Isoliertische, Entlader u. dergl.

Vergl. schärfere Begriffsbestimmungen für „Gut- und Schlechtleiter“ durch die Messung des „elektrischen Leitungswiderstandes“, § 149 ff.; die Unterscheidung von Leitern erster und zweiter Ordnung, § 153.

DUFAY (1733) bemerkte die Verschiedenheit im Verhalten geriebener Glas- und Harzstäbe, für die er zuerst die Bezeichnung „Glas- und Harzelektrizität“ und für die später FRANKLIN (1747) die Namen **positive** und **negative Elektrizität** einführte. (*Versuch 6*: Ein Pendel wird nach der Elektrisierung mittels eines geriebenen Glasstabes von diesem abgestoßen, von einem geriebenen Harzstabe angezogen; ähnlich nach Elektrisierung durch einen Harzstab. Unmittelbarer zeigt das gegensätzliche Verhalten *Versuch 7*, indem von zwei geriebenen Glas- und Harzstäben A_1A_2 , B_1B_2 , je einer leicht drehbar aufgehängt, der andere ihm mit der Hand genähert wird.)

Durch die bis heute in Gebrauch gebliebenen Namen „**positiv**“, „**negativ elektrisch**“ soll zunächst nur folgenden Tatsachen Ausdruck gegeben werden:

1. Das beschriebene gegensätzliche Verhalten beim Anziehen und Abstoßen.
2. Eine Glasstange vermag ein Doppelpendel zu ebenso großer Divergenz zu bringen wie eine entsprechend genäherte Harzstange; und die beiden hierbei eingetretenen Zustände des Doppelpendels weisen zunächst keine direkt wahrnehmbare Verschiedenheit auf. Es wäre also ganz wohl denkbar, daß beide Stäbe, gleichzeitig dem Doppelpendel genähert, einander in der Wirkung verstärken; tatsächlich aber heben sich diese Wirkungen gegenseitig auf; und es verhalten sich daher die dem Pendel durch beide Stäbe erteilten Zustände bei gleicher Divergenz

wie zwei Größen $+a$ und $-a$, die dem absoluten Werte nach gleich, den Vorzeichen nach entgegengesetzt sind.

Diese Tatsache kleidete FRANKLIN ein in das Bild seiner unitarischen Theorie (1756), SYMMER hingegen in das der dualistischen Theorie (1759). Beide Theorien haben gemeinsam, daß sie den elektrischen Erscheinungen Fluida (Imponderabilien) unterlegen. Ihr Unterschied liegt darin, daß sich die dualistische Theorie in einem als unelektrisch sich darstellenden Körper die beiden Fluida in gleicher (und zwar um der ins Unbegrenzte zu wiederholenden Elektrifizierbarkeit willen in unendlicher) Menge gleichsam vorrätig denkt; positiv geladen erscheint ein Körper, wenn er einen Überschufs des positiven, negativ, wenn er einen Überschufs des negativen Fluidums besitzt. Die unitarische Theorie kommt dagegen gleichsam durch Verlegung des Nullpunktes mit einem Fluidum aus, indem bei einer gewissen Menge des Fluidums der Körper sich unelektrisch zeigt, bei einem Überschufs des Fluidums positiv, bei einem Defizit negativ. — Bei beiden Theorien war es physikalisch ganz wirklich, den elektrischen Zustand des Glases durch die Bezeichnung positiv gleichsam auszuzeichnen vor dem des Harzes. Lange Zeit schienen beiderlei Ladungen überhaupt keinen qualitativen Unterschied aufzuweisen; ein solcher schien dann erst in dem Unterschiede der LICHTENBERG'schen Figuren (Versuch 8) beim Bestreichen einer von einem „positiven“ und einer von einem „negativen“ Funken getroffenen Harzscheibe entdeckt. Doch erklärt sich das strahlige Aussehen der positiven, das manchmal wolkige der negativen Figur selbst wieder daraus, daß die durch

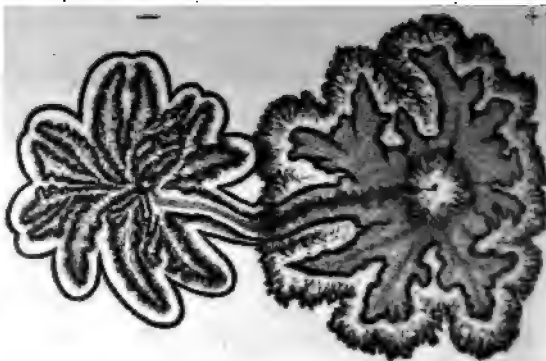


Fig. 442. Positive Lichtenberg'sche Figur.

Fig. 443. Negative und positive Lichtenberg'sche Figur.

Reibung am Staubbeutel selbst geladenen Pulver (Bärlappsaamen, Mennige, Schwefel . . .) gleichnamig, bezw. ungleichnamig sind mit der Ladung der Platte. — Erst die neuesten Erfahrungen z. B. über die mechanische Wirkungsfähigkeit der Kathodenstrahlen haben es wahrscheinlich gemacht, daß vielmehr den sogenannten „negativen“ Ladungen ein sachlicher Vorrang vor den sogenannten positiven ähnlich zukomme wie der verdichteten Luft gegenüber einem Vacuum (§ 44), der Wärme gegenüber der Kälte (§ 72), dem Sauerstoff gegenüber dem Phlogiston (§ 214). Unabhängig von diesen physikalischen Einsichten (und auch von der dualistischen oder unitarischen Hypothese) haben sich aber die Bezeichnungen positive und negative Ladung bis heute auch als die mathematisch handlichsten erhalten. (Dagegen soll das Wort „Elektrizität“ möglichst vermieden werden, namentlich wo der Begriff der „Ladungsmenge“, § 135, eine feste Malsgröße an Stelle der fiktiven Fluida setzt; desgleichen „Magnetismus“.)

§ 131. Elektroskope und Elektrometer.

Vie für die Untersuchung aller Wärmeerscheinungen Thermoskope und Thermometer grundlegend sind, so für die der elektrischen Erscheinungen Elektroskope und Elektrometer. Noch OHM (1827) hat diejenige GröÙe an elektrischen Körpern, welche unmittelbar durch das Elektroskop angegeben wird, als elektroskopischen Zustand dieses Körpers bezeichnet; wir werden vorläufig diese GröÙe als **Ladungsgrad** bezeichnen, insofern schon das einfachste aller Elektroskope, ein **elektrisches Pendel**, den Gedanken nahe legt, daß es, je nach dem mehr oder weniger aus der Lotlage (also der Schwere entgegen) nach Berührung mit dem elektrischen Körper abgelenkt bleibt, hierdurch einen hohen oder niedrigeren Grad seines eigenen elektrischen Zustandes anzeigt, mittelbar auch einen solchen des mit ihm verbundenen elektrischen Körpers; (bei guten Leitern ohne Einschränkung, bei schlechten zunächst nur für die berührte Stelle, analog dem Thermometer bei Berührung mit guten und schlechten Wärmeleitern). — In § 136 wird sich dann die weitgehende — wenn nicht durchgängige — Analogie folgender Begriffe und Termini ergeben:

elektroskopischer Zustand = Ladungsgrad = elektrisches Potential;
 thermoskopischer Zustand = Wärmeegrad = Temperatur. —

Fig. 444.

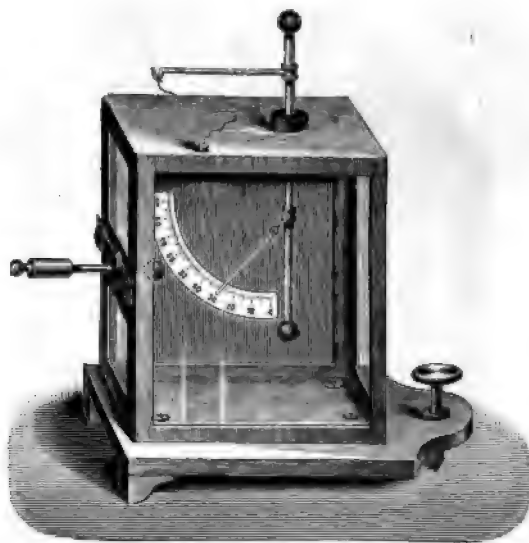


Fig. 445. Kolbes Elektrometer.

In folgenden sollen nur einige der gebräuchlichsten Elektroskope und Thermometer beschrieben und ihre Verwendungsweisen geschildert werden; die allgemeine Theorie aller hierbei ins Spiel kommenden Vorgänge umfaßt selbst schon beträchtlichen Teil der später zu entwickelnden Gesetze elektrischer Erscheinungen (wie die Theorie des Thermometers zahlreiche Gesetze der Wärmeerscheinungen, vergl. § 71). — Dabei stellen a) und b) zwei voneinander im allgemeinen unabhängige Einteilungsgründe dar:

a) Elektroskope (bzw. Elektrometer): Mit nur einem beweglichen Körper und zwar el. Pendel (so in Henleys Elektroskop zur Elektrifizierungsmaschine, Fig. 444 a. v. S.; Gold- oder Aluminiumblättchen in Kolbes

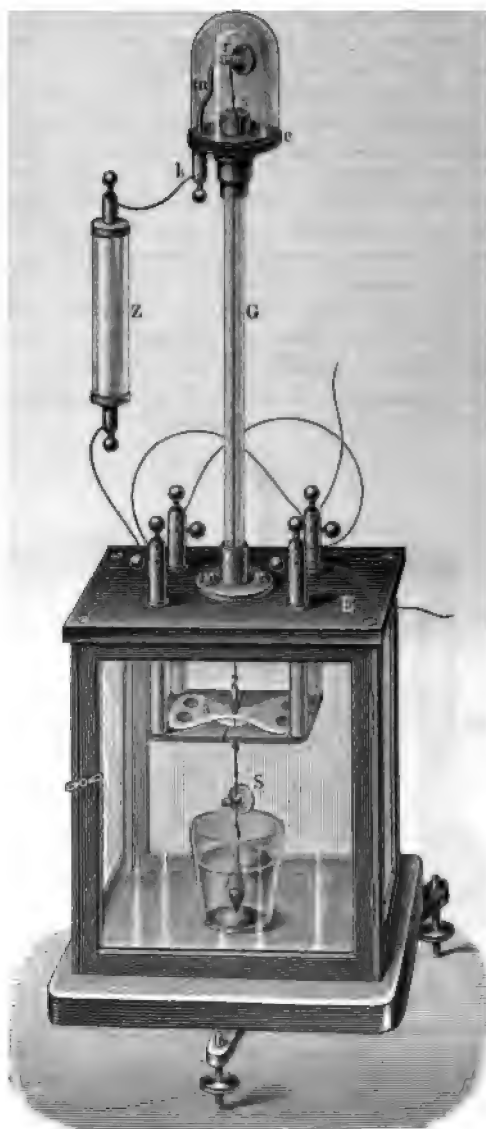


Fig. 446. Thomson's Quadrantenelektrometer nach Victor v. Lang. — a Aluminium-„Biskuit“, drehbar über vier gegeneinander isolierten Messingquadranten, die mit den zu messenden elektrischen Körpern verbunden werden. — S Hohlspiegelchen. — Z Zambonische Säule.



Fig. 447. Brauns Elektrometer.

Elektrometer, Fig. 443 (a. v. S.); el. Föhnchen; Fechners Elektroskop in Verbindung mit Zambonis Säule (§ 155); in waagrechter Ebene drehbar (el. Nadel; Coulombs Drehwage, Thomsons Quadrantenelektrometer, Fig. 446; in lotrechter Ebene als Hebel drehbar (Brauns Elektrometer, Fig. 447, Harrys Wageelektrometer). Mit zwei beweglichen einander abstossenden Körpern (das Doppelpendel-Elektroskop nach Bennet, Beetz u. a.; Exners transportables Elektrometer, Fig. 448, namentlich für die Beobachtung des elektrischen Zustandes der Atmosphäre, § 200).

b) Elektroskope (bezw. Elektrometer) ohne leitende Schutz-
~~hülle~~ oder mit solcher: so ist das Aluminiumblättchen im Kolbeschen
~~Elektrometer~~ in ein Kästchen aus Blech mit zwei parallelen Wänden

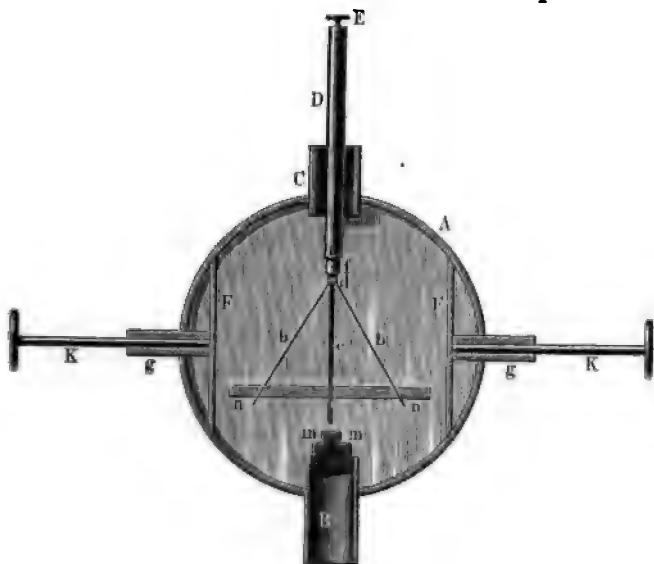


Fig. 448. Exners transportables Elektrometer (namentlich für Luftelektrizität).

aus möglichst gut leitendem Glas (für Projektion) eingeschlossen und gegen diese Leiter durch einen Ebonitpfropf isoliert.

Für die folgenden Versuche 1—4 sei das verbreitete Gold- (oder Aluminium-) blattelektroskop vorausgesetzt, dessen Knopf oder Platte (Fig. 450 a. f. S.) der „Sammler“ heiße.

Verwendungsweisen: 1. Der auf seinen Ladungsgrad zu prüfende Körper *K* wird mit dem Sammler des Elektroskops in Berührung gebracht. Durch „Mitteilung“ ladet sich dann der Sammler und durch Leitung laden sich die Blättchen gleichnamig mit *K*. — 2. Wird *K* dem Sammler des Elektroskops nur genähert, so sind die Blättchen (infolge der Elektrisierung durch „Verteilung“) mit *K* gleichnamig elektrisch, solange *K* in der Nähe ist. — 3. Wird der Sammler, während (wie bei 2) *K* genähert ist, mit dem Finger ableitend berührt, hierauf der Finger und zuletzt *K* entfernt, so bleiben die Blättchen ungleichnamig gegen *K* geladen. — 4. In der Nähe des Sammlers des Elektroskops wird ein geladener Körper bekannten Zeichens (z. B. eine Harzstange in Stativ) fest aufgestellt, so daß die Blättchen (wie bei 2) eine bestimmte Divergenz aufweisen. Macht dann der zu untersuchende Körper bei Annäherung die Divergenz der Blättchen größer, bezw. kleiner, so ist er gleichnamig, bezw. ungleichnamig mit dem fest aufgestellten Körper geladen.

Bei den Verwendungsweisen 2, 3, 4 ruft derselbe Körper *K* verschiedene Divergenz der Blättchen hervor, je nach seinem Abstände vom Sammler; bei Verwendungsweise 1 gibt er nur einen Teil seiner Ladung an das Elektroskop (bei 2, 3, 4 gar nichts).

Um stark geladene Körper zu untersuchen, müssen diese entweder in einem großem Abstände belassen werden, daß die Blättchen nicht allzu sehr divergieren oder gar abreißen; oder der Körper wird mit einem an hinreichend langem isolierenden Stiele sitzenden metallischen **Probekügelchen** (**Probescheibchen** von $\frac{1}{2}$ bis 1 cm Durchmesser) berührt, welches sich hierbei durch Mittelladung ladet und dieser Probekörper *K* nach 1 bis 4 untersucht.

Fig. 449.



5. Becherelektroskop: Steht auf der Platte eines Elektroskops ein metallener Hohlkörper mit Öffnung [Fig. 449, z. B. eine offene leere Kakaobüchse, Faradays Eiseimer (1843), § 132] und wird eine geladene Probekugel an verschiedene Stellen seines Innern gebracht, so zeigen die Blättchen bestimmte Divergenz unabhängig von der Lage der Kugel. — War dabei Berührung der Becherwände mit der Kugel erfolgt, so zeigt sich die Kugel nach Herausnahme ganz unelektrisch, hat also beim Berühren ihre ganze Ladung an das Elektroskop abgegeben, weshalb die Blättchen auch jetzt ihre Divergenz behalten; war keine Berührung erfolgt, so besitzt die Probekugel noch ihre ganze Ladung, die Blättchen fallen nach dem Herausnehmen der Probekugel zusammen.

Fig. 450.



6. Kondensationselektroskop: Auf die Sammel- (Kollektor-)platte *A* (Fig. 450) des Elektroskops paßt eine gleich große (Kondensator-) Platte *B* mit isolierendem Griff; beide Platten sind an den einander zugewendeten Seiten mit einer sehr dünnen glatten Firnisschicht überzogen [oder die Platten sind metallisch blank, aber die eine wird von der anderen isoliert in kleinem Abstände erhalten (Luftkondensator, § 139)]. Hat *A* eine sehr schwache Ladung erhalten (nach 1), während *B* aufgesetzt war und ableitend berührt wurde, so zeigen nach Abheben von *B* die Blättchen viel größere Divergenz.

Zu einem **Elektrometer** wird das Elektroskop durch Verbindung mit einer Skala, ähnlich wie ein Thermoskop zu einem Thermometer. Während aber für die Wärmegrade infolge der Konstanz von Schmelz- und Siedetemperatur je eines bestimmten Stoffes, z. B. des Wassers, sich leicht zwei Fundamentalpunkte und durch die Unterteilung des Fundamentalabstandes noch beliebig viele weitere Punkte gewinnen lassen, gibt es für die Elektrizitätsgrade nur einen natürlichen

ist: den elektrischen Zustand der Erde (der deshalb als „Potential“ angenommen wird, § 136). Über die Eichung der Elektrometer vergl. § 136. Wenn man bei den Thermometern als thermometrische Substanz das Quecksilber vorzuzieht, weil es eine sehr kleine spezifische Wärme und daher das Thermometer als Ganzes nur geringe „Wärmekapazität“ hat, so daß das Thermometer untersuchenden Körper eine nur unbedeutende Wärmemenge entzieht, so soll auch ein Elektroskop, bezw. ein Elektrometer keine zu „Kapazität“ (§ 139) haben; es gibt nämlich z. B. ein Elektroskop mit Sammelmugel bei Berührung mit dem gleichen Körper eine geringere Auslenkung als ein sonst gleiches Elektroskop mit kleinerer Sammelmugel. — Nach der „Kapazität“ sowie nach der Beweglichkeit der Blättchen u. dergl. bestimmt die Empfindlichkeit der Elektroskope und Elektrometer. (NERNST steigerte die Empfindlichkeit des Radantennelektrometers durch die Empfindlichkeit bis 10^{-5} Volt, vergl. § 136. Die gewöhnlichen Elektroskope, wie in Fig. 450 ohne Condensator, etwa 100 bis 200 Volt einen Ausschlag.)

§ 132. Elektrisierung durch Verteilung.

STON (1754) bemerkte, daß die Blättchen eines Elektroskops schon divergieren, wenn ein elektrischer Körper noch in beträchtlichem Abstände von ihm steht, und daß sie aber wieder zusammenfallen, wenn der Körper selbst oder ein anderer (durch Entladen) wieder entfernt wird. (Voriger Paragraph, Verwendungen 2). — WILKE (1757) wußte, daß das Elektroskop geladen bleibt, wenn es dem elektrischen Körper ableitend berührt und dann der ladende Körper (Verwendungsweise 3) entfernt wird. — Die innere Zusammengehörigkeit und zahlreicher äußerlich verschiedener Erscheinungen wurde aber erst FARADAY (1839) erkannt, welcher sagt: „Unter den Wirkungen verschiedener elektrischer Ladungen, welche man die Elektrizität einteilt, gibt es meiner Meinung nach keine, die diejenige übertrifft oder ihr nur vergleichbar wäre, welche wir Induktion nennen. Diese hat den ausgedehntesten Einfluß auf die elektrischen Erscheinungen, da es scheint, daß sie an allem teilnimmt, und sie hat ganz den Charakter eines Grundprinzips.“

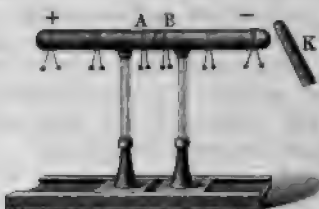
Unter den Elektroskopen eignen sich zur Vorführung dieser Erscheinungen verschiedene Apparate; unter anderen der in Figg. 451–453 dargestellte:

zwei gleiche Metallzylinder *A*, *B* sind auf der einen Seite durch eine Halbkugel, auf der anderen durch eine ebene Platte abgegrenzt und auf isolierenden Glasfüßen aufgestellt; mittels Metallringen lassen sie schwebend an verschiedenen Stellen der Zylinder anbringen. — Die Versuche gliedern sich in drei Hauptgruppen a) b) c):

Versuche a): Die Zylinder werden mit den ebenen Seiten aneinandergestellt. 1. Nähert man dem einen Ende einen positiv geladenen Körper *K*, z. B. einen geriebenen Glasstab (den Deckel des Elektroskops oder die eine Polkugel der Influenzmaschine), so zeigen die Blättchen (genauer: Probescheibchen und Elektroskop) an diesem Ende positive, am anderen positive, in der Mitte keine Ladung an. Bringt man den Stab und Zylinder eine Glas-, Hartgummi- (eine Metall-) Platte an! — 2. Entfernt man den Stab mehr und mehr, ohne die

Zylinder berührt zu haben, so nimmt die Divergenz der Pappeln und hört endlich ganz auf. — Man sagt:

Fig. 451.



I. Ein Gutleiter wird in die Nähe eines (von ihm durch einen Schlechtleiter getrennten) elektrischen Körpers „durch Verteilung (Influenz, elektrostatische Induktion)“ elektrisch, und an der diesem Körper zugewandten Seite ungleichnamig

der abgewendeten Seite gleichnamig. Die „indifferente“ Seite liegt um so näher an *K*, je näher *K* dem Gutleiter ist. Der verteilende Körper (Prüfung am Elektroskop!) verliert nichts von seiner Ladung.

Wiederholung der Versuche mit stärker und schwächer geladenen Glas- oder Harzstäben, Metallkugeln u. s. f. — Auch Schlechtleiter können durch Verteilung schwach elektrisch gemacht werden; sie brauchen hierzu länger, behalten aber die Ladungen auch nach Entfernung des verteilenden Körpers.

Versuch b): Die beiden Zylinder werden, solange der verteilende Körper *K* noch in der Nähe ist, auseinander gerückt (Fig. 452).

Fig. 452.



bleibt dann *A* überall positiv, *B* überall negativ geladen. Dies gilt auch dann noch, wenn der Körper *K* entfernt worden ist.

Werden *A* und *B* einander wieder genähert, so entladen sie sich, und zwar bei hinreichendem Ladungsgrad des verteilenden Körpers unter Bildung eines elektrischen Funkens. —

Versuch c): Wird der Doppelzylinder, solange der verteilende Körper *K* in der Nähe ist, an einer Stelle mit der Hand abgeleitet (Fig. 453), hierauf dann wieder der Körper *K* in die Nähe gebracht und zuletzt der Körper *K* entfernt, so zeigt sich der ganze Zylinder negativ geladen. — Man sagt:

Fig. 453.



II. Die Ladung, welche der verteilende Körper angenommen hat, ist ableitbar („frei“), die ungleichnamig gebundene Ladung ist ableitbar („gebunden“).

Auch von der „gebundenen“ Ladung nächst *K* lassen sich mittels eines Scheibchens wiederholt Teile entnehmen (warum?) und am Elektroskop prüfen.

Diese Bezeichnungen „freie Ladung“, „gebundene Ladung“, wie auch die Haupt „Elektrisierung durch Verteilung“ sind gebildet im Sinne der dualen Hypothese. Da nämlich bei Versuch a) die Elektrisierung von *A* und

Eintritt, während von einer „Mitteilung“ (etwa unter Erscheinung eines „von“ der Glasstange „zu“ den Zylindern „überspringenden“ Funkens) nichts zu bemerken ist, so liegt die Vorstellung nahe, es seien die beiden Fluida vor der Annäherung der Stange gemischt, durch diese Annäherung aber entmischt, „verteilt“ worden. Bei Versuch c) würde dann seitens der Stange nur das eine Fluidum aus dem abgewendeten Ende noch weiter weggedrängt, so daß es durch den berührenden Finger, den Arm u. s. f. bis in die Erde flieht; das andere ungleichnamige Fluidum aber würde in dem dem erregenden Körper K zugewendeten Ende festgehalten, sogar wenn ihm der berührende Finger Gelegenheit gäbe, zu entfliehen. — Gerade hier aber tut es dieser Hypothese schon Eintrag, daß auch, wenn wir das der Stange zugewendete Ende berühren, doch nicht die hier, sondern ebenfalls die am entgegengesetzten Ende sitzende Ladung abgeleitet wird; weshalb wir uns vorstellen müßten, daß sich jene „freie“ Ladung den Weg durch die „gebundene“ bahnt. Diese mehr oder minder plausiblen Ausgestaltungen der Hypothese von den zwei Fluiden wurden erst wieder auf ihren tatsächlichen Kern zurückgeführt durch die festen Größenbestimmungen der Potentiallehre (§ 138). Für jetzt aber noch einige Anwendungen dieser Hilfsvorstellungen:

Nachdem wir die Erscheinungen der Verteilung kennen gelernt haben, werden wir 1. nicht mehr sagen dürfen, daß ein elektrischer Körper einen „unelektrischen“ anziehe: denn letzterer wird ja bei der Annäherung des ersteren doch elektrisch (erkläre Fig. 454). Warum wird ein Schellackkugélchen anfänglich fast gar nicht angezogen? Warum gelingt das elektrische Anziehen leichter Körperchen besser, wenn sie auf einer Metallplatte, als wenn sie auf einer Glasplatte oder einem lackierten Tische liegen? — 2. Die Elektrisierung eines Körpers durch sogenannte „Mitteilung“ (§ 130) läßt sich folgendermaßen auf Verteilung zurückführen: Betragen die Ladungen auf dem Stabe (in einem einstweilen willkürlichen und erst in § 135 festzusetzenden Maße) $+100$ Ladungseinheiten, die durch Verteilung in der Kugel hervorgerufenen Ladungen $+10$ und -10 solche Einheiten, und wird der Stab der Kugel hinreichend (bis zur Berührung oder wenigstens bis zum Überspringen eines Funkens) genähert, so heben sich -10 gegen $+10$ von den $+100$ des Stabes auf. Da also auf dem Stabe nur mehr $+90$, auf der Kugel $+10$ vorhanden sind, so hat es den Anschein, als hätte der Stab von seinen $+100$ diese $+10$ Ladungseinheiten der Kugel „mitgeteilt“. — 3. Beschreibe ausführlich, was geschieht, wenn du α) mittels eines isolierten Leiters, β) mittels eines mit der Erde ableitend verbundenen Leiters (z. B. mit dem Knöchel) „aus einem elektrischen Körper einen Funken ziehst“. Geht nur Ladung aus jenem Körper z. B. in deinen Knöchel; ist also jener Ausdruck ganz richtig? — Im Falle α) zeigt sich der Leiter elektrisch; im Falle β), obgleich der Funke hierbei häufig stärker ist, unelektrisch; warum?

Fig. 454.



4. Erklärung der Erscheinungen am Becherelektroskop (§ 131, 5): Ein geladenes Probekugélchen, isoliert in die Höhlung des Bechers gebracht, zieht die ungleichnamige natürliche Ladung des Bechers gegen die Innenfläche und treibt die gleichnamige in die Außenfläche und die mit ihr leitend verbundenen Elektroskopblättchen. Wird das Kugélchen herausgenommen, nachdem es den Becher nicht berührt hat, so hört gemäß Versuch a, 2) alle Divergenz der Blättchen auf. Hat

dagegen das Kügelchen den Becher an irgend einer Stelle der Innenfläche berührt, so heben die ganze Ladung des Kügelchens mit der entgegengesetzte der Innenfläche einander auf und es wird an der Außenfläche eine der ganzen Ladung des Kügelchens gleiche gleichnamige frei; es ist daher so, wie wenn die ganze Ladung des Kügelchens durch Vermittelung des Bechers dem Elektroskop „mitgeteilt“ worden wäre (während bei Berührung ohne Becher nur ein Teil der Ladung dem Elektroskop mitgeteilt wird; daher ist auch die Bechermethode die vollkommenste zur Eichung von Elektroskopen, § 133).

Warum die hohle Form des Sammlers (des „Bechers“, „Eisens“) den so großen Unterschied für das Abgeben der Ladung bedingt, erklärt sich aus den folgenden Paragraphen, genauer aus §§ 137, 138.

§ 133. Sitz der Ladung und ihre Ausbreitung an der Oberfläche von Leitern.

GRAY und LEMONNIER (1746) bemerkten, daß es keiner großen Ladungsmenge bedürfe, um einen massiven Körper aus leitendem Stoff bis zu bestimmtem Ladungsgrad zu elektrisieren, als eine hohle von gleicher äußerer Gestalt und Größe (*Versuch 1*). Sie schlossen daraus: An einem guten Leiter „sitzt“ die Ladung nur an der Oberfläche.

Eine genauere Fassung dieses Satzes wird sich uns im § 137 ergeben als elektrostatische Grundbedingung. — Zunächst noch einige Versuche über die Tatsächliche der Erscheinungen: 1. FARADAY ließ einen großen mit Stannid überzogenen Kasten anfertigen und an Seilschnüren isoliert aufhängen. Dann begab er sich mit den empfindlichsten Elektroskopen versehen in das Innere des Kastens und ließ nun diesen von außen sehr stark elektrisieren; es zeigte sich dennoch im Innern keine Spur von Ladungen. — Als dagegen FARADAY im Innern elektrische Ladungen hervorrief, zeigten diese ihre Wirkung nicht innen, sondern nur an der Außenfläche, wo sie sich durch elektrische Pendel u. dergl. nachweisen ließen. Ähnliches zeigt im kleinen der *Versuch 2*: Auf einer metallischen Unterlage (dem Elektrophordeckel) stehen kleine Elektroskope (elektrische Fähnchen). Wenn sie kräftig elektrisiert und wird über sie ein Drahtkorb gestülpt, so verlieren sie ihre Divergenz, und diese wird gleichsam übernommen von einem außen am Drahtkorb befestigten Pendelchen. Nach Abheben des Korbes zeigen sich die Elektroskope wieder geladen. Ebenso bei Versuchen nach Fig. 455.

Fig. 455.



orts Halbkugeln. 4. MACHS Elektroskop (bis zur oberen Metallfassung mit einer umgeben, der Knopf mit einem Drahtkörbchen zu bedecken). 5. In den inneren des Becherelektroskops ist an einem isolierenden Seidenfaden ein etwas größerer Becher oder ein eingerollter Streifen unechten Silberpapiers (noch besser eine Metallkette) zu versenken. War dann das Elektroskop bis zu bestimmter Ladung geladen, so wird diese kleiner, wenn durch teilweises Herausheben der leitenden Kör-

per die Oberfläche des inneren vergrößert wird. 6. Ein Säckchen aus metalldurchdrungenem Gewebe (Fig. 456) zeigt Ladungen nur auf der konvexen, nicht auf der konkaven Seite; Sitz der Ladung zeigt sofort beim geringsten Umstülpen des Säckchens als eines isolierenden Fadens. 7. Eine Blase an einem elektrischen Fähnchen versehenen leitenden Röhrechen wird geladen. Je nach dem Durchmesser mehr oder minder vergrößert wird, zeigen die Fähnchen einen oder größeren Ladungsgrad bei unveränderter Ladungsmenge (Fig. 457).

Fig. 456.

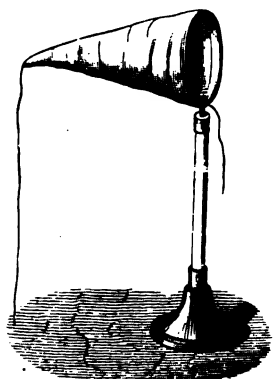
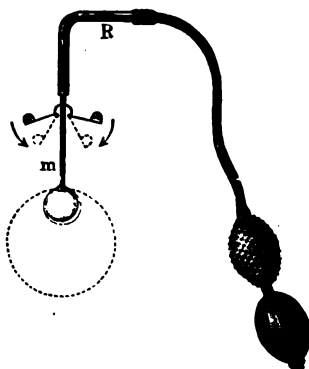


Fig. 457.



Elektrische Spannung. Elektrische Dichte. Versuch: Die Oberfläche einer isolierend aufgestellten Metallkugel wird mit Blatt- oder Bärlappssamen bedeckt. Ist die Kugel hinreichend elektrisch geladen, so fliegen die leichten Körperchen von der Oberfläche weg (elektrische Wirkung der Ladung auf Teile der Oberfläche des Körpers). Sind jene Körperchen (z. B. durch zu starke Adhäsionskräfte) an der Bewegung gehindert, so erfahren sie doch einen vom Inneren gegen das Äußere der Kugel hin gerichteten Druck (elektrische Wirkung): Es herrscht an der Oberfläche jedes geladenen Körpers elektrische Spannung. — LA 182.

LA 182.

Hinsichtlich der Art, wie sich eine gegebene Ladungsmenge über die Oberfläche eines Leiters ausbreitet, werden wir bei der Kugel von vornherein erwarten können es mittels (konkaver) Probescheibchen bestätigen, daß dies gleichmäßig geschehe, d. h. daß auf gleiche Teile der Oberfläche auch gleiche Ladungsmengen entfallen oder kürzer: daß auf einer geladenen Kugel die elektrische Dichte konstant sei (vorausgesetzt, daß nicht nahe Leiter infolge Elektrisierung durch Verteilung ein anderes elektrisches Gleichgewicht herbeiführen). Die elektrische Dichte bei nicht kugeligen Leitern gibt Aufschluß folgender

Versuch: Ein länglicher Leiter (z. B. einer der beiden Zylinder Fig. 451, S. 412) wird geladen und mittels eines kleinen Probescheibchens Ladung von mehr und von weniger gekrümmten Teilen

nacheinander auf dasselbe Elektroskop gebracht. Es zeigt sich: Die elektrische Dichte (gemessen durch die auf gleich große Oberflächen entfallenden Ladungsmengen) ist an den stärksten gekrümmten Teilen eines Leiters am größten.

Wiederholende Versuche an einem hohlen Würfel von etwa 30 cm Seitenlänge, der außen und innen mit unechtem Silberpapier überzogen ist; dasselbe Probekügelchen nimmt an den Ecken der Außenseite die größte, an den Ecken kleinere, in den Mitten der Seitenflächen die kleinste, im Innern (gleichviel ob an Ecken, Kanten oder Seiten) gar keine Ladung an. — Ganz andere Erscheinungen treten ein, wenn statt wiederholten Berührens mit einem Probekügelchen ein Probekügelchen an hinreichend langem isolierendem Stiel, das durch einen etwa 2 m langen Draht mit einem entfernten Elektroskop verbunden ist, an der Außen- und Innenfläche des Würfels entlang geführt wird. Hier zeigt nämlich das Elektroskop für das Innere und Äußere, für die Ebenen, die Kanten und die Ecken des Würfels allenthalben denselben Ladungsgrad an. Hieraus ist ersichtlich, daß die Begriffe Ladungsgrad und Ladungsdichte sorgfältig zu unterscheiden sind; Näheres § 137.

Spitzenwirkung. Setzen wir auf eine isolierte Kugel eine Spitze (einen Reifsnagel u. dergl.), so zeigt sich, daß auch eine kräftige Ladung alsbald „durch die Spitze ausströmt“. Desgleichen scheint die Spitze eines Messers, das wir an der Klinge ableitend mit den Fingern halten, bei Annäherung an die Kugel aus dieser „die Ladung zu saugen“. Auch die Staubteilchen an der Oberfläche eines Leiters, desgl. die Spitze einer ihm (oder auch einem geladenen Nichtleiter) genäherten Kerzenflamme wirken ähnlich entladend.

An Stelle der allzu handgreiflichen Vorstellung, daß elektrisches Fluidum aus der Spitze ströme, haben wir anzunehmen, daß infolge der an der Spitze sehr großen elektrischen Dichte auch die angrenzenden Luftteilchen verhältnismäßig starke Ladungen in sich aufnehmen (ähnlich einem berührenden Probekügelchen) und von der gleichnamigen Ladung des Körpers abgestoßen werden. Daher ist es auch bei den Erscheinungen des „elektrischen Windes“, der sogar eine Kerzenflamme ausblasen kann, nicht etwa ein Elektrizitäts-, sondern der Luftstrom, der diese mechanische Wirkung hat; ähnlich beim „elektrischen Rückstoß“ (am Flugrädchen).

§ 134. Leydener Flasche; Kondensatoren. — Elektrophor; Influenzmaschine.

Geschichtliches. KLEIST zu Cammin in Pommern (1745) wollte einen eisernen Nagel elektrisieren, indem er ihn in ein Glasgefäß steckte und so an den Konduktor der Elektrisiermaschine brachte. Als er den Nagel mit der einen Hand herausziehen wollte, während er das Gefäß mit der anderen Hand hielt, empfand er einen kräftigen elektrischen Schlag. Wenige Monate später (1746) wollte CUNAEUS in Leyden Wasser in einem Gläschen mittels eintauchenden Nagels elektrisieren und machte so, unabhängig von KLEIST, eine ähnliche Beobachtung.

Wesentlich für die Leydener Flasche (Fig. 458), die Franklinsche Tafel (Fig. 459), sowie für die übrigen (Luft-, Glas-, Schwefel-, Paraffin-, Glimmer...)

toren sind zwei leitende Platten zu beiden Seiten einer nicht-
- Die ältere Elektrizitätslehre beachtete dabei vorwiegend die gegen-
kung der leitenden Platten nach den Gesetzen der Elektrisierung
eilung; über die wesentliche Mitwirkung der nichtleitenden
Dielektrikums) vergl. § 139. — Einen ersten Einblick in die
e der Kondensatoren geben die

te mit einer zerlegbaren Franklinschen Tafel (Fig. 460):

te *A* (ohne daß *B*
ist), mehrmals mit
risierenden Körper *K*
immer wieder neu ge-
elektrophordeckel) be-
; sich bald unfähig,
gen zu „fassen“; wenn

A eine so große
ge ist, daß der La-
uf ihr größer wäre
elektrisierenden Kör-
würde ja Ladung
K zurückfließen. —

A und *B* bis an die
geschoben, so kann
nd *B* ableitend be-
; der Platte *A* viel

adungen zuführen. —
nan nun die Platten
inander, so zeigen *A*
tige entgegengesetzte
lie an den genäherten
wach divergierenden,
eringen Ladungsgrad
Pendel zeigen an den
geschobenen Platten
Ladungsgrad an). —

in beide Platten an der Glastafel und berührt sie gleich-
en Händen, so empfindet man einen kräftigen Entladungs-

klärung: Die Ladung in *A* wirkt verteilend auf *B*, die gleich-
g fließt zur Erde ab und die ungleichnamige gebundene wirkt
id zurück, deshalb kann *A* wiederholt neue Ladungen aufnehmen.
er: *A* hat größere „Kapazität“, wenn *B* dem *A* nahe, aber von
Dielektrikum getrennt, als wenn *B* fern ist.

131 beschriebene Einrichtung und Verwendung des Kondensations-
erklärt sich nunmehr nach obigen Versuchen 2 und 4.

sik.

Fig. 459.

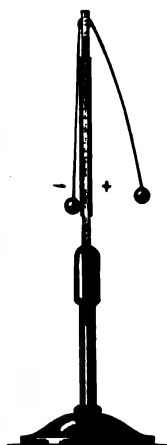
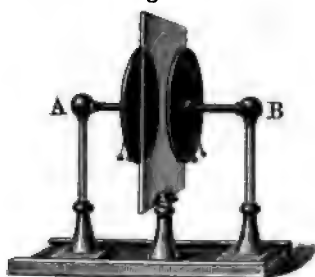


Fig. 458.



Fig. 460.



Elektrische und magnetische Erscheinungen.

Versuche mit einzelnen und mit Batterien von Leydener Flaschen (Schaltung nebeneinander: alle äußeren Belege untereinander leitend verbunden, desgl. inneren; Schaltung hintereinander: der äußere Beleg der ersten dem inneren der zweiten leitend verbunden, der äußere der zweiten dem inneren der dritten u. s. f.). — Wird der äußere Beleg mit dem einen Knopf des Ausladers berührt und der andere Knopf dem mit dem inneren Beleg leitend verbundenen Knopf der Leydener Flasche allmählich genähert, so tritt Entladung einer bestimmten „Schlagweite“ ein. Schon vor anderweitigen Maßbestimmungen wird man geneigt sein, aus größerer Schlagweite auf größere Ladungsmengen (nämlich auf größere Ladungsgrade bei gegebener „Kapazität“ der Flasche, § 139) zu schließen. Hierauf gründet sich Einrichtung und Gebrauch

Fig. 461.



Maßflasche (Fig. 461, nach LAMONT) dem äußeren Belege leitend verbunden

ist, die (mittels eines als Mikrometer wirkenden Gewindes) von der Kugel d des inneren Beleges abweisbare Abstände entfernt werden kann. Dann dem inneren Beleg sei eine leitende Elektrizitätsquelle (z. B. ein allsüg gedrehten Elektrisieren) zugeführt, während der äußere Beleg leitend verbunden ist, so

bei der derselben Zeit desto mehr

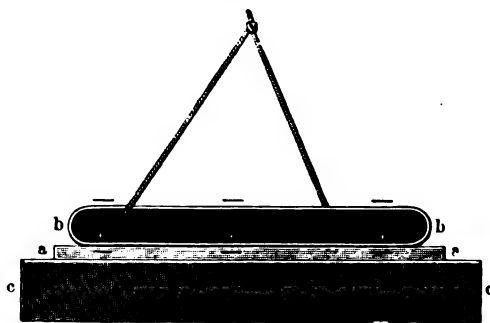
Entladungen der Flasche stattfinden, je mehr Ladung

LA 183. inneren Beleg gebracht wurde. (LA 183.)

Die bisher betrachteten Erscheinungen der elektrischen Kondensation sind auch mitbeteiligt beim

Elektrophor (Fig. 462, erfunden von VOLTA 1775): In seiner einfachsten Form eine nichtleitende Platte aa („Harz“ oder Hartgummi) mit

Fig. 462.



ein aufliegender, nicht aufsetzbarer Metallring, der an Seidenschnüren aufgehängt ist. — **Versuche:** 1. Berührt man den Harz mit Pelzwerk z. B. mit einem Schweineborsten, so zeigt er sich elektrisch. 2. Setzt man den Deckel auf das Harz, so zeigt er sich unelektrisch. 3. Berührt man den Deckel vor dem Abheben ableitend, so zeigt er sich nach dem Abheben positiv

elektrisch. 3. Berührt man den Deckel vor dem Abheben ableitend, so zeigt er sich nach dem Abheben positiv

Der Versuch 3 kann wiederholt angestellt werden, ohne daß man neuerdings zu peitschen braucht.

Erklärung des Versuches 3: Die negative Ladung des Harzes wirkt vertheilend auf den Deckel. Durch die den aufgelegten Deckel berührende Hand wird die negative Ladung des Deckels abgeleitet und die positive Ladung verbreitet sich nach dem Aufheben über den ganzen Deckel. — Man wird erwarten, daß die negative Ladung des Harzes auf den Deckel durch Leitung übergehen müsse, da Kuchen und Deckel in unmittelbarer Berührung stehen. Dies mag auch wirklich mit der Ladung einer obersten Harzschicht geschehen; jedenfalls wirken durch eine Schicht des Isolators, in der die Ladungen schwer beweglich sind, die tieferen negativ geladenen Schichten auf den Deckel ähnlich wie die Kollektorplatte durch die Isolierschicht hindurch auf die Kondensatorplatte.

Meistens befindet sich der Harzkuchen in einer Metallfassung, dem „Teller“ cc (bezw. die Hartgummiplatte trägt an der unteren Seite einen Stanniobleag). Daß dieser Fassung seitens des Kuchens ebenfalls Ladungen erteilt werden, zeigt sich besonders auffällig, wenn man den Daumen an die Fassung legt und, nachdem der Deckel wie bei Versuch 3 gehoben ist, mit einem Finger derselben Hand den Deckel berührt. Man empfindet dann einen viel stärkeren elektrischen Schlag, als wenn man nur aus dem Deckel mit der freien Hand „einen Funken zieht“. — Die Erklärung dieser Mitwirkung der Fassung ist aber nicht mehr ganz einfach; denn da der gehobene Deckel jedenfalls positiv ist, muß zur Erklärung des starken Schlages eine negative Ladung in der Fassung angenommen werden; und diese kann aus der negativen Ladung des Kuchens nur durch weitere Verteilung und Kondensatorwirkungen erklärt werden. Wir beschränken uns daher im weiteren wieder auf die einfachsten Erscheinungen 1 bis 4.

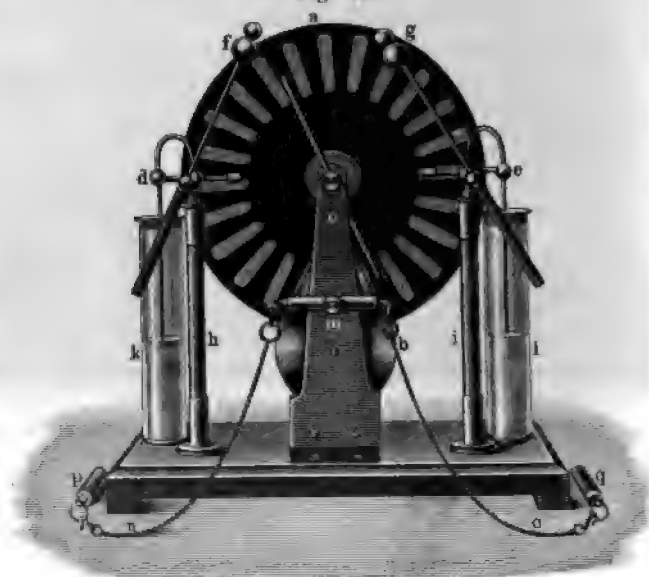
Der Elektrophor scheint eine unerschöpfliche Quelle von Arbeit (ein elektrisches *perpetuum mobile*) zu sein; denn nachdem der Kuchen durch einmaliges Peitschen (Aufwand einer gewissen endlichen Menge mechanischer Arbeit) elektrisch geworden ist, kann man durch wiederholtes Aufheben des Deckels eine unbegrenzte Zahl Funken gewinnen (unendlich viel Arbeit in Form von Wärme und Licht verrichten lassen. — Von der allmählichen Schwächung der Ladung des Kuchens durch Verlust an die Luft ist hier abgesehen). — Diese Fähigkeit des Elektrophors verstößt aber nicht gegen das Gesetz der Erhaltung der Arbeit; denn da die negative Ladung des Kuchens auf die positive des Deckels anziehend wirkt, ist beim Heben des Deckels entgegen dem Widerstand dieser anziehenden Kraft eine mechanische Arbeit seitens der Muskeln der den Deckel hebenden Hand zu verrichten. Im Lichte dieser Betrachtung bildet Versuch 4 am Elektrophor sogar das einfachste, durchsichtigste Beispiel dafür, daß die in zwei räumlich getrennten entgegengesetzten Ladungen liegende potentielle Energie hervorgegangen ist aus derjenigen mechanischen (thermischen, chemischen . . .) Arbeit, die die beiden Ladungen aus ihrer ursprünglichen Vereinigung in jenen räumlichen Abstand gebracht hatte. — Eben diese energetische Betrachtung enthält auch die wesentlichste Aufklärung über die Leistungen der

Influenzmaschinen. Die sehr mannigfachen Formen solcher Elektrisiermaschinen haben gemeinsam, daß zwei (ebene oder zylindrische) Platten aus isolierendem Stoff (Hartgummi, Glas mit Lack überzogen) in relativer Bewegung gegeneinander erhalten werden. Eine einmalige schwache Erregung einzelner Stellen der einen Platte bringt

dann durch Verteilung entgegengesetzte Ladungen auf der 3. Platte und diese bringen auf der ersten Platte verstärkte Ladung hervor, die dann durch Saugkämme den Polkugeln zugeleitet.

Die ersten leistungsfähigen Influenzmaschinen sind von TÖPLER (1865) konstruiert worden (nachdem schon durch BENNETT 1787 das diesen Maschinen liegende Prinzip der „Duplizierung“ angegeben worden war; LA 181. Gegenwärtig haben die meiste Verbreitung die sogenannten WIMSHURST-Maschinen gefunden, von denen eine der einfacheren Formen in Fig. 463 dargestellt ist. An der

Fig. 463.

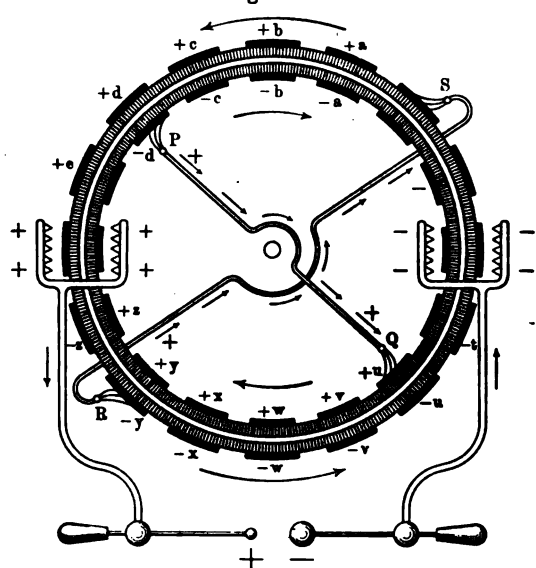


seiten zweier gleicher Scheiben sind radial gestellte Stanniolstreifen wulsten in gleichen Abständen angeordnet. Vor jeder Scheibe steht, 45° gegen die Vertikale nach entgegengesetzten Seiten geneigt, je ein „Durchmesserstab“ (der „diametrale Konduktor“), an den Enden mit Metallfäden, die bei der Drehung der Scheiben unter leichter Reibung Wulsten schleifen. Die Saugkämme sind in der horizontalen Mitte der Maschine auf isolierenden Füßen angebracht; mit ihnen in direkter Verbindung stehen die Polkugeln, die mittels isolierender Handgriffe in verschiedenen Abständen voneinander gebracht werden können. — In Tätigkeit gesetzte Maschine mittels einer Kurbel, von der durch je einen gekreuzten „offenen“ (ungekreuzten) Schnurlauf die beiden Scheiben in entgegengesetzten Drehungen erhalten werden.

Diese Maschine ist eine „selbsterregende“ (wegen den älteren von außen her die ersten Ladungen zugeführt werden mußten, bei dieser selbst wieder durch eine kleine Reibungselektroisiermaschine). Für die Erregung gibt es mehrere Erklärungsgründe (die einander nicht ausschließen). Anh. 36. log. Anh., Nr. 36); nämlich: a) Schon CAVALLO (1787) hatte bemerkt, d

Metallplatten stets „von selbst“ schwache Ladungen besitzen; β) an den verschiedenen Punkten des Experimentierraumes herrschen im allgemeinen nicht gleiche elektrische Zustände [genauer in der Sprache der Potentiallehre: die elektrischen Niveauflächen werden im allgemeinen nicht parallel dem Fußboden und der Decke des Zimmers gehen und daher auch der Maschine asymmetrische elektrische Zustände erteilen; dies mag auch die Erklärung der Beobachtung α) bilden]. Die Pinsel erregen durch Reibung an den auf der isolierenden Scheibe angebrachten Metallwülsten schwache Ladungen. — Behufs Schilderung der weiteren Vorgänge denken wir uns die Scheibenmaschine durch eine Zylindermaschine ersetzt,

Fig. 464.



da sich an dem Querschnitt einer solchen in der Zeichnung (Fig. 464) die einzelnen Belege nicht verdecken. Es hätten z. B. die Belege $+a, +b, +c, +d$ anfänglich schwache positive Ladungen. Dann wirkt der Beleg $+d$ durch die Doppelplatte und die Luftschicht hindurch auf den Leiter PQ verteilend; die bei Q freie positive Ladung wird durch Leitung im Pinsel auf den Beleg $+a$ geleitet, der alsbald in die Lagen $+v, +w, +x, +y, +z$, fortbewegt wird. Nunmehr wirkt $+y$ ebenso auf den Leiter RS verteilend, wobei wieder die freie positive Ladung durch Leitung aus S auf den hier schleifenden Beleg gelangt und von da als verstärkte Ladung in die Stellungen $+a, +b$ u. s. f. weitergeht. (Auch aus dem Pinsel P geht die seitens $+d$ gebundene negative Ladung in den Beleg $-d$; wahrscheinlich teils durch Spitzenwirkung seitens nicht berührender Pinselfäden, teils durch die den Beleg $-d$ berührenden Pinselfäden, ähnlich wie mittels eines Probescheibchens auch ein Teil der gebundenen Ladung von einem Leiter abgenommen werden kann. Diese von $-d$ in die Lagen $-c, -b$ u. s. w. gelangenden negativen Ladungen bringen dann ganz analoge Wirkungen hervor wie die ursprünglichen Ladungen $+a, +b$ u. s. w.) Der Saugkamm $++$ leitet dann sowohl die an ihn im Drehungssinn $+d, +e$, wie die von $+y, +z$ herkommenden Ladungen gegen die Polkugel $+$ ab (und wieder analog der Saugkamm $--$).

Die der Influenzmaschine durch die Kurbeldrehung zugeführte mechanische Arbeit hat zwar auch hier zum Teil Reibungswiderstände zu überwinden; zum größeren Teile aber wird sie verbraucht, um die einander gegenüberstehenden, entgegengesetzt geladenen Belege voneinander zu entfernen. — Daß diese Belege einander wirklich anziehen und dem Weiterdrehen der Scheiben

beständig Widerstand entgegensetzen, zeigt der einfache Versuch, daß wenn man eine Maschine auslaufen läßt, während sie noch Ladungen liefert, die Scheiben viel weniger Umdrehungen infolge der Beharrung bis zum Stillstand ausführen, als wenn die Maschine schon entladen war. — Ähnlich zeigt sich beim Angehen der Maschine, daß sie merklich schwerer zu drehen ist, sobald sich an dem summanden Geräusch das Auftreten von Ladungen zeigt. Dieser Mehraufwand von mechanischer Arbeit ist (von ROSETTI, MACH) gemessen und der gewonnenen elektrischen Energie gleich befunden worden.

Bei den beschriebenen WIMSHURST- und einigen anderen Influenzmaschinen müssen im Anfang die Polkugeln getrennt, bei anderen wieder müssen sie in Berührung sein. — Maschinen mit mehr als einem Plattenpaar. — Häufig sind die Polkugeln Leydener Flaschen verbunden, und es erfolgen dann die Entladungen in kräftigen (klatschenden, knallenden) hellen Funken. Werden die Leydener Flaschen weggenommen, so ist die Funkenstrecke von rasch aufeinander folgend minder hellen Funken erfüllt. Nähere Beschreibung dieser und anderer Erscheinungen bei disruptiven Entladungen durch Dielektrika, § 156. —

Wiederholende Beschreibung und Erklärung der mit Elektrisiermaschinen durchzuführenden einzelnen Versuche. (Mechanische: elektrisches Glockenspiel als typisch für sukzessive Entladungen durch „Konvektion“, Puppentanz, Lichtbergs Figuren u. s. f. Thermische: Entzündung von Knallgas in der elektrischen Pistole, Minenzünder u. dergl.; man beachte hierbei die Art der Leitungen der in ihnen offen gelassenen Funkenstrecken. Ferner Licht-, Schall-, physiologische, chemische, magnetische Wirkungen.)

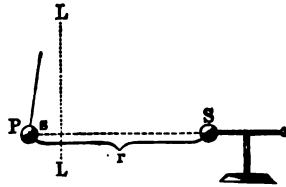
I. Mechanische Erscheinungen an elektrischen Körpern und an elektrisch Ladungen.

§ 135. Coulombs Gesetz für elektrische Kräfte. — 1 der elektrischen Ladungsmenge.

Nach dem Vorbilde des Gravitationsgesetzes von NEWTON (1686, § 21) mutete COULOMB (1785), daß auch zwei Körperchen, welche — in erst noch zustellenden Maßeinheiten — die Ladungsmengen ϵ_1 und ϵ_2 haben, ineinander dem Abstände von r cm mit einer Kraft $f = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{r^2}$ anziehen, bezw. abstoßen.

Er bestätigte diese Vermutung zunächst für die Abstofsung zweier gleicher elektrischer Kügelchen durch mühsame Versuche an der Drehwaage (21, VI), sodann für die Anziehung ungleichnamiger elektrischer Kugeln durch schwierigere Schwingungsversuche. Gute Annäherungen liefert folgender Versuch (nach ODSTRČIL): An eine leichte Pendelkugel P , z. B. eine verbleibende Kugel, werde eine gleiche, isolierte Standkugel S bis zur Berührung angerückt und beide gleichnamig geladen. Durch die Abstofsung wird P um der Lotlage abgelenkt, wobei s um r ist, je kleiner der Abstand r beider Kugeln; und zwar ist $sr^2 = \text{Konst.}$, wobei C ist das Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ (LA 178).

Fig. 465.



LA 178.

Ist man Pendel und Standkugel einige Zeit, so wird die Ablenkung „kleiner“, da sich die Kugeln allmählich an die Umgebung entladen. Also die Kraft f auch von den Ladungsmengen der Kugeln ab. — aber bei der Aufstellung des Massengesetzes (§ 21, II) in NEWTONS Massengesetz die Größe der einander anziehenden „Stoffmengen“ oder schon vor der Messung der anziehenden Kräfte, ja schon vor der Beobachtung es überhaupt eine allgemeine Massenanziehung gebe, definiert waren nach der Größe des Beharrungswiderstandes der Massen gegenwärtigen, nicht bloß Anziehungskräfte), wird der Begriff der „elektrischen Ladungsmenge“ selbst erst auf Grund der Erscheinungen der elektrischen Anziehung und Abstofsung (also tatsächlich: auf Grund der Beschleunigung und mechanischen Spannungen an geladenen Körpern) definiert und folgt:

Definition der elektrischen Ladungsmenge (absolute elektrostatische Ladungseinheit, st. LE) ist diejenige Ladung, welche auf gleiche in 1 cm Abstand mit der Kraft von 1 Dyn abstofsend wirkt. Übt auf einen mit 1 st. LE versehenen Punkt ein anderer Punkt in 1 cm Abstand eine Abstofsung von ϵ_1 Dyn aus, so schreiben wir ihm eine Ladung von ϵ_1 st. LE zu. (LA 177.)

LA 177.

Es bildet es eine grundlegende Erfahrungstatsache, daß sich n Ladungen, die durch die gleiche Abstofsung (oder Anziehung) auf demselben Körper als gleich definiert sind, zu einer n -fachen Ladung superaddieren, falls man die n einfachen Ladungen nacheinander alle auf einen Körper bringt. (Direkt experimentell ist dies nur mittelst des Becherglases zu verwirklichen, wie es im folg. § bei der Eichung des Elektroskops 1, 2, 3 ... n -fache Ladungsgrade oder Potentiale geschieht. Praktisch meistens umgekehrt aus 2, 3 ... n -fachen Ladungsgraden auf die n -fachen Ladungsmengen zurückgeschlossen.)

Bezeichnung „elektrostatisch“ weist auf den Unterschied zwischen elektrostatischem Gleichgewicht (§ 137) stehenden Ladungen gegen die als beweglichen gedachten Ladungen hin; vergl. § 140.

Die st. LE gründet sich das erste von den drei gegenwärtig gebräuchlichsten Systemen der Elektrizitätslehre, nämlich das **elektrostatische**

Mafssystem: **oder das elektromagnetische Mafssystem** vergl. § 148 ff. In elektrischen Mafssystemen ist **1 Coulomb = $3 \cdot 10^9$ st. LE.**

LA 177.

Veranschaulichungen dieser elektrischen Mengeneinheiten vergl. LA 177. Über die praktische Vergleichung mittels der Mafsfasche und die theoretischen Berechnungen mittels der Kondensatoren vergl. § 139.

Ist ein zweiter Punkt mit einer Ladungsmenge ϵ_2 (gemäß obiger Definition von ϵ_1 aus der Abstofsung auf einen Ladungspunkt mit 1 st. LE) versehen, so werden zwei Punkte $+\epsilon_1$ und $+\epsilon_2$ einander mit einer $\epsilon_1 \times \epsilon_2$ mal so großen Kraft abstossen, als zwei Punkte $+1$ und $+1$ bei gleichem Abstände. — Durch Zusammenfassung dieses Mengengesetzes mit obigem Abstandsgesetz ergibt sich somit das vollständige

COULOMBSche Gesetz für elektrische Kräfte: $f = \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{r^2} \text{ Dyn} \dots$ (1)

Die bisherigen Definitionen sowie Gl. 1 nehmen zunächst nur auf die absolute GröÙe der Kräfte und der hier aber in die Gl. 1 auch der Kräfte und der hiernach gesetzzt bezeichneter Ladung (§ 130) gezeigt hat, daß die oder zwei mit derselben Stange Abstofsung hervorrufen, und Faktoren $+\epsilon_1$ und $+\epsilon_2$, bezw. empfiehlt es sich (da der Nenn positive Kräfte (die den Abstandziehungen als negative in die Gravitationslehre, da dort überhaupt Unterscheidung von Vorzeichen der Kraft unnötig ist, die Anziehung nur als absolute (wie eine positive) GröÙe betrachtet worden, vergl. § 24, Bemerkung S. 111.) Auch daÙ, wenn der eine der beiden Faktoren ϵ_1 oder ϵ_2 Null wird, die Kraft $f = 0$ wird, ist in der Gleichung als ein Grenzfall enthalten (welcher sich übrigens nie rein verwirklichen läÙt, da, wenn auch nur der eine Körper geladen ist, der andere eine Ladung durch Verteilung zeigt).

In COULOMBS Gesetz ist nichts vorausgesetzt über die besondere stoffliche Beschaffenheit der geladenen Körper. DaÙ dagegen die Beschaffenheit des zwischen den Körpern befindlichen Stoffes (des „Dielektrikums“) auf die GröÙe der Anziehung und Abstofsung wesentlichen EinfluÙ hat, zeigt sich zwar noch nicht merklich bei den einfachen Versuchen, welche das Coulombsche Gesetz direkt zu bestätigen bestimmt sind (auch wenn bei obigem Versuch die umgebende Luft ausgepumpt würde, ergäbe sich kein merklich anderer Wert für $s \cdot r^2 = \text{Konst.}$), wohl aber um so auffallender bei der Wirkung der Kondensatoren (§ 139). Mit Rücksicht auf das Dielektrikum müÙte aber schon die Definition der elektrostatischen Ladungseinheit vollständig so lauten: **Die Menge $+1$ ist die Menge, die auf eine ihr gleiche im Abstände 1 cm durch den leeren Raum hindurch eine Abstofsung von 1 Dyn ausübt.**

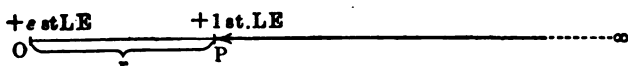
Insofern in dem Coulombschen Gesetze der „Abstand“ r vorkommt, der zwei Endpunkte voraussetzt, ist es (wie das Newtonsche Gesetz, wie das für Lichtintensitäten u. s. f.) ein Elementen-Gesetz, nämlich zunächst nur für je ein Paar „elektrischer Punkte“ oder „Ladungspunkte“ giltig, welche sich als solche nie für sich herstellen und beobachten lassen. Da ferner geladene Körper anein-

schon durch Verteilung Veränderungen in der Ausbreitung der Ladung an ihrer Oberfläche hervorbringen, so lassen sich die Ladungspunkte auch nicht völlig durch direkte Versuche mit zwei gutleitenden Kugeln (wie die obige Pendel- und Abstandskugel) ersetzen. Gleichwohl gibt es eine völlig strenge indirekte Bestätigung des Coulombschen Gesetzes, nämlich auf Grund des Satzes über die gleichmäßige Verbreitung der Ladung an der Oberfläche einer gutleitenden Kugel (§ 133) und über die Resultierende Null im Innern dieses kugelförmigen (wie jedes anders gestalteten) Leiters (§ 137).

§ 136. Arbeit und Potential im elektrischen Felde. — Das Potential als Maß des elektrischen Ladungsgrades.

Aufgabe: Einem mit $+s$ st. LE geladenen Punkte in O (Fig. 466) wird ein mit $+1$ st. LE geladener Punkt aus unendlichem Abstand

Fig. 466.



auf den Abstand $OP = r$ cm genähert. Welche Arbeit V entgegen der Abstofsung der beiden Ladungen muß hierbei geleistet werden? — Antw.: Wie $V = \kappa \frac{M}{r}$ Erg per Gramm das Gravitations-

potential (§ 24) ist, das solche Arbeiten im Gravitationsfelde einer Masse von Mg mißt, so ist das mechanische Maß des Potentials im elektrischen Felde, oder kurz das

$$\text{elektrische Potential } V = \frac{\varepsilon}{r} \text{ Erg per 1 st. LE.} \quad (1)$$

Sitzt in O eine negative Ladung $-s$ st. LE, so herrscht in P auch ein negatives Potential $V = -\frac{\varepsilon}{r}$.

Ist der Punkt O ganz entladen, so daß $s = 0$, so entspricht jedem Punkt um O das Potential $V = 0$. — Diskussion der Gl. (1) für stetig zu- und abnehmende s und r (vergl. § 24).

In der Aufgabe war nichts darüber gesagt, auf welchem Wege (ob in gerader oder in irgend einer krummen Linie) die Ladung 1 an den Punkt P herangebracht werden soll. In der Tat ist auch diese Arbeitsgröße aus den beim Gravitationspotential entwickelten Gründen von der Form der Bahn unabhängig; oder: Auch das im Punkte P herrschende elektrische Potential ist eine richtungslose Größe (keine Vektor-, sondern eine Skalengröße). Daher lassen sich (wie die in den zusammengesetzten Kraftfeldern mehrerer Massenpunkte herrschenden Gravitationspotentiale) auch die von mehreren Ladungspunkten O_1, O_2, \dots, O_n oder von ganzen geladenen Körpern K_1, K_2, \dots herrührenden elektrischen Potentiale an je einem Punkte des zusammengesetzten Kraftfeldes unmittelbar algebraisch addieren oder superponieren; allgemein herrscht im Punkte P des zusammengesetzten elektrischen Kraftfeldes das Potential $V = \frac{\varepsilon_1}{r_1} + \frac{\varepsilon_2}{r_2} + \dots + \frac{\varepsilon_n}{r_n} = \sum \frac{\varepsilon}{r}$.

Die so sich ergebenden Konstruktions- und Rechenaufgaben sind nur insofern noch mannigfaltiger als die für Massenanziehungs-Felder, als darauf Rücksicht zu nehmen ist, daß außer gleichnamigen auch ungleichnamige Potentiale vorkommen können. So stellten die Figg. *a—d*, Tafel I auch das zusammengesetzte Kraftfeld zweier gleich stark gleichnamig geladener Punkte oder Sammellugele, dagegen die Figg. *a—d*, Tafel II das zweier gleich stark ungleichnamig geladener Polkugeln (z. B. einer Influenzmaschine) dar.

Wie schon die Bezeichnung der Ladung z. B. einer geriebenen Glasstange als „positiv“, die der Harzstange als „negativ“ willkürlich war, so auch die der positiven und negativen Potentiale. — Wie ferner die dualistische und unitarische Theorie sich nur durch den angenommenen Nullpunkt der durch sie umfaßten Tatsachen unterscheiden, so ist auch die Wahl des Nullpunktes für die elektrischen Potentiale an sich willkürlich. Wir werden zwar z. B. geneigt sein, der Erde, uns selbst und allen Körpern, welche mit der Erde in leitender Verbindung stehen, das Potential Null zuzuschreiben, da wir aus keinem dieser Körper Funken ziehen können, keiner ohne weiteres leichte Körper anzieht oder abstößt, auf ein Elektrostatenfeld, das auf ein Elektrostatenfeld beweist aber dies nicht, daß es ein solches Elektrostatenfeld gibt, sondern nur, daß sie, einschließlic der Ladungen, ein solches Elektrostatenfeld haben. Die im § 200 besprochene Definition des Potentials, daß es die Arbeit ist, die zum Umgeben des Weltraum von einem Punkte zum umgebenden Weltraum geleistet werden muß, kann namentlich auch schon in der obigen Definition des Potentials als willkürlichen Nullpunkt der Ladungen festgehalten werden, daß die Ladungsmenge $+1$ nicht „unendlich ferne“, sondern von der Erdoberfläche oder einem mit der Erde leitend verbundenen Teil des Experimentiertisches bis an den Punkt *P* herangebracht wird. — Diese Willkürlichkeit des Nullpunktes rechtfertigt sich um so mehr, als fast alle im folgenden zu beschreibenden Erscheinungen bestätigt werden, daß sie nicht vom absoluten Potentialwerte, sondern nur von Potentialdifferenzen abhängen. Daher schließt sich zweckmäßig an obige Definition des Potentials auch sogleich die folgende Feststellung:

Die Einheit der Potentialdifferenz (st. PE) kommt zwei Stellen P_1 und P_2 eines elektrischen Feldes zu, wenn die Verschiebung von 1 st. LE von einem zum anderen eine Arbeit von 1 Erg erfordert. Elektrotechnische Einheit der Potentialdifferenz ist 1 Volt (V).

Da das Potential als Arbeit per Ladungseinheit definiert ist, so ist $1 \text{ Volt} = \frac{1 \text{ Joule}}{1 \text{ Coulomb}} = \frac{10^7 \text{ Erg}}{3 \cdot 10^9 \text{ st. LE}} = \frac{1}{300} \text{ st. PE}$. (Über den Zusammenhang von Coulomb und Volt [mit Farad] vergl. auch § 139. — Über die Zahl $3 \cdot 10^9$ vergl. § 157.)

Zur vorläufigen Veranschaulichung der wichtigen Maßgröße 1 Volt halte man fest, daß an den Polen eines Daniellschen Elementes (§ 155) eine Potentialdifferenz von etwa 1,1 Volt, eines Kupfer-Zink-Elementes mit Kochsalzlösung nahe 1 V, eines Chromsäure-Elementes nahe 2 V besteht. — Über die der populären Auffassung am stärksten sich aufdrängende Beurteilung von Potentialen und Potentialdifferenzen aus den „Schlagweiten“ (Funkenlängen) vergl. § 156. —

Bisher wurden die Begriffe elektrisches Potential und elektrische Potentialdifferenz rein mechanisch, d. h. nach den mechanischen Arbeiten, welche die Überwindung von Abstossungen seitens geladener Körper kostet, definiert. Es war nun der wichtigste Schritt zum theoretischen Verständnisse aller elektrischen Erscheinungen, das, was noch OHM den elektroskopischen Zustand (vergl. § 131) genannt hatte und was wir Ladungs-Grad nannten, gerade in dem elektrischen Potential sein mechanisches Maass besitze (KIRCHHOFF 1846). Dies erhellt aus der folgenden Überlegung:

Ein Elektroskop von bestimmter Grösse und Form (und daher auch bestimmter Kapazität, deren Maasszahl C aber für das folgende noch nicht bekannt zu sein braucht, § 139) werde durch einen elektrischen Körper K_1 bis zu einer Divergenz vom Winkel α_1^0 , durch einen anderen Körper K_2 bis zu α_2^0 geladen (und zwar am einfachsten durch „Mittheilung“ nach Verwendungsweise 1 des Elektroskops, § 131). Ist hier die Divergenz α_2^0 grösser als α_1^0 , so zeigt dies unmittelbar stärkere abstossende Kräfte zwischen den beweglichen, untereinander gleichnamig geladenen Teilen des Elektroskops selbst an — hiermit aber auch grössere Kräfte zwischen dem Elektroskop und geladenen anderen Körpern. Sind nach Berührung mit K_2 in dem das Elektroskop umgebenden Felde an je einem Punkte P diese äusseren Kräfte n mal so gross als nach Berührung mit K_1 (wobei im allgemeinen nicht $\alpha_2^0 = n\alpha_1^0$ sein wird), so ist auch die gesamte Arbeit, welche beim Heranbringen des Körpers K_2 aus unendlichem Abstände an das bis zu einem bestimmten Grade geladene Elektroskop zu leisten wäre und die (per Ladungs-Einheit des Körpers K_2 berechnet) das Potential des geladenen Elektroskops angibt, n mal so gross als die beim Heranbringen von K_1 . — Da nun das Elektroskop beim Berühren mit dem auf seinen Ladungsgrad zu prüfenden Körper K das gleiche Potential wie K annimmt (gemäss der elektrostatischen Grundbedingung, folgender §), so zeigt dasselbe Elektroskop, einmal auf das Potential v , ein andermal auf nv geladen, durch die diesen Potentialen entsprechenden Divergenzen α_1 und α_2 an, dass auch die zu prüfenden Körper K_1 und K_2 Potentiale $V_1 = v$, bzw. $V_2 = nv$ gehabt haben (genauer: sie vom Zeitpunkte der Berührung mit dem Elektroskope haben).

Eichung des Elektroskops. Um nun an einer Skala diejenige Reihe von Divergenzwinkeln $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \dots$ zu verzeichnen, welche bei einem bestimmten Elektroskop der Reihe von Potentialen $v, 2v, 3v, 4v \dots$ entsprechen, gehen wir von der Überlegung aus, dass das Elektroskop (da es eine unveränderliche Kapazität hat) sich auf diese Potentiale laden werde, wenn wir ihm die Ladungsmengen $\epsilon, 2\epsilon, 3\epsilon, 4\epsilon \dots$ zuführen. Um uns solche untereinander gleiche Ladungsmengen zu verschaffen, ist das bequemste Mittel eine möglichst grosse Leydener Flasche, die aber nur so stark geladen ist, dass sie während der Zeit des Versuches keine merklichen Ladungsverluste an die Umgebung erfährt. Hiervon überzeugen wir uns durch einen Vorversuch: Wenn wir durch Berührung mit einem Probe-

kügelchen z. B. 10mal nacheinander der Kugel des inneren Beleges der Leydnerflasche Ladung entnehmen und jedesmal auf das Elektroskop übertragen (vor jeder n. Berührung immer wieder entladend), und es tritt bei der 20. Berührung noch keine merklich kleinere Divergenz als bei der ersten Berührung ein, so zeigt dies, daß die Kapazität der Leydnerflasche sozusagen unendlich groß sei gegen die der Probekugel. Wird dann mittels der Probekugel dem Elektroskop (am vollständigsten durch Aufsetzen des Faradayschen Bechers) die Ladungsmenge z zugeführt und die Divergenz α , an der Skala angemerkt, sodann noch einmal z im ganzen also $2z$ zugeführt und wieder die Divergenz α , angemerkt, desgleichen für $3z$ die Divergenz α , u. s. f., so ist das Elektroskop für die Reihe der Mengen $z, 2z, 3z \dots$ und somit auch für die Reihe der Ladungsgrade oder Potentiale $v, 2v, 3v \dots$ geeicht. — Damit diese Skala überdies speziell die Reihe 1, 2, 3 ... Volt anzeige (vorausgesetzt, daß es hierfür empfindlich genug ist — sonst kann es z. B. auf die Reihe 10, 20, 30 ... Volt oder 100, 200, 300 Volt ... vergl. Fig. 447, S. 409, geeicht werden), genügt es, den Wert in Volt durch Berührung oder praktische Methode nach dem Wert in der Skala zu dividieren. — gehen dann die Maße der angefertigten Skalenbezeichnungen an, wenn verlangt ist, genügt es, n unter Zwischenschaltung eines F. hintereinander geschaltet 2, 3, und destilliertem Wasser (8 ...

Die Arbeitsvorgänge im beim Laden des Elektroskops,

genügt es, für einen jener Skalenteile nach dem durch anderweitige theoretische oder praktische geprüften Körper zu bestimmen; es nach der provisorischen Einheit 1 ... mal. — Wo nicht hohe Genauigkeit („offenen“) Batterie aus Kupfer, Zink ... äußerst empfindliche Elektroskope zu bedienen und dabei zuerst 1, dann an das Elektroskop anzuschließen. — geladenen Körpers, ähnlich dann ein untersucht in folgender

Aufgabe: Eine wie große Arbeit kostet es, einen Leiter K mittels der Ladungsmenge E auf das Potential V zu laden? — Antw.: Ist K anfangs ungeladen und wird ihm aus unendlichem Abstand (oder von sonst einer Stelle mit dem Potential Null) ein sehr kleiner Teil ε jener Menge E zugeführt, so daß K sich auf das kleine Potential v ladet, so kostet das Heranbringen eines nächsten gleichen Ladungsteiles ε schon Arbeit entgegen der Abstossung; das Heranbringen eines weiteren Teiles noch größere Arbeit u. s. f. Die Summe aller solchen Arbeiten ist das arithmetische Mittel (Anh., Nr. 10) aus der anfänglichen Arbeit 0 und der schließlichen Arbeit VE , somit im ganzen $A = \frac{1}{2} VE$ Erg.

Durch die bei diesem Laden aufgewendete Arbeit A hat der Körper K eine potentielle Energie von ebenfalls $A = \frac{1}{2} VE$ Erg erhalten, vermöge derer er nun wieder ebenso große mechanische Arbeiten (in Form von Anziehung und Abstossung entgegen der Schwere oder anderen mechanischen Kräften u. dergl.) oder beim Entladen äquivalente thermische, optische Arbeiten (in Form von Funken u. dergl.) leisten kann. — Vergleich zwischen dem elektrischen und dem Gravitationspotential in ihrer Beziehung zur potentiellen Energie; daraus Deutung des gemeinschaftlichen Namens Potential. — Nähere Prüfung der in § 131 angedeuteten Analogie zwischen den Begriffen

thermoskopischer Zustand — Wärmegrad — Temperatur,
elektroskopischer Zustand — Ladungsgrad — elektrisches Potential:

licher Unterschied zwischen Temperatur und elektrischem Potential, daß nicht schon das Heranbringen eines Körpers von bestimmter an einen von gleicher oder verschiedener Temperatur Arbeit es nach obiger Aufgabe bei der Annäherung zweier gleichnamig gleicher der Fall ist. — Warum es nicht ein dem „mechanischen Wärme-analoges „mechanisches Elektrizitätsäquivalent“ gibt, vergl. LA 179. — LA 179. lungenfreien Stellen in Kraftfeldern zwar ein Potential, aber kein rad zukommt, vgl. S. 431.

undlegende Wichtigkeit des Begriffes Potential für alle elektrischen mmungen soll in den folgenden vier §§ durch schärfere quantitative der in den §§ 130—134 geschilderten Erscheinungen ersichtlich werden.

Potential und elektrostatische Grundbedingung.

Ohl wir niemals elektrische Ladungen für sich, sondern immer nur geladene Körper wahrnehmen und speziell auch die mechanischen gen der „Bewegung“ und „Spannung“ nur an geladenen Körpermassen nied von ungeladenen beobachten können, so verlangen doch zahlreiche gen, daß wir die elektrischen Ladungen von den mechanischen Massen unterscheiden und uns die elektrischen Ladungen in und an den beweglich denken (vergl. im § 60 die Gegenüberstellung von Massen- und Wellenbewegungen). Solche Erscheinungen sind zunächst die ng durch Mitteilung, bei welcher wir uns (vor der Zurückführung ng) vorstellen, daß z. B. von der Ladung $+s$ eines elektrischen Pendels erührung mit einem zweiten gleichen von dem einen $\frac{1}{2}s$ auf das andere en sei. Namentlich aber bei der Elektrisierung durch Verteilung uns die ursprünglich gemischten ungleichnamigen Ladungen durch enden Körper im Leiter nach entgegengesetzten Seiten getrieben. — sus heißen die in solchem Sinne angenommenen Verschiebungen von lektromotorische, wenn der geladene Körper hierbei in Ruhe bleibt, nderomotorische, wenn er selbst hierbei in Bewegung kommt (wobei er im Sinne nicht von „Gewicht“, sondern von wägbarer Masse ge- , § 16, S. 59, im Gegensatz zur unwägbaren elektrischen Ladung). is Bildliche, das in dieser Vorstellung verschiebbarer Ladungen liegt, i elektrischen Körpern wahrnehmbaren Tatsachen zu sondern, stellen lde der zwei entgegengesetzten „Fluida“ noch andere Bilder (und zwar : wieder hypothetischer Art, sondern) aus bestimmten physikalischen ykreisen an die Seite:

dromechanisches Bild: Die Schenkel eines Kommunikationsrohres mit derselben Flüssigkeit gefüllt gewesen, und diese habe unter dem · Schwerkraft in beiden Schenkeln gleich hoch gestanden. Wird dann n Schenkel ein Kolben gedrückt (ähnlich: Hineinblasen oder Ansaugen), ie Flüssigkeit infolge der Leichtverschiebbarkeit ihrer Teilchen sogleich steigt in dem anderen Schenkel um ebenso viel. Verschwände nun r Kolben und der auf ihn lastende Druck, so bestände an den Wasser- beiden Schenkeln infolge der verschiedenen Höhenlage ihrer Ober- Unterschied ihrer potentiellen Energien in Bezug auf die die säulen anziehende Schwerkraft, und dieser Unterschied würde sich folge der Leichtverschiebbarkeit schließlich ausgleichen, wobei die aus ellen Energie sich ergebende kinetische Energie mancherlei Arbeiten

Übergang zum andern gleichem Temperaturzustand, von diesem Wärmezustande. Ist aber der Körper auf der einen Seite er
anderen abgekühlt worden, so herrscht in dem Körper kein thermi-
gewicht; vielmehr sucht sich dieses, nämlich jener Anfangszustand
konstanter Temperatur, „von selbst“ herzustellen (wobei dieses „von
der kinetischen Wärmetheorie die im § 83 gegebene weitere Erklärung

Heben wir nun aus den beiden Bildern I und II das *tertium*
mit der Störung und Wiederherstellung eines elektrischen Gleichgewichts
heraus, so bleibt nur das folgende übrig: Wie in einem Kommu-
nur dann kein Flüssigkeitsstrom, in einem Wärmeleiter nur dann
strom stattfindet, wenn keine Niveau-, bezw. Temperaturdiffe-
renzen sind, so gilt auch für alle elektrischen Leiter die folgende

Elektrostatische Grundbedingung: An einem Leiter erfahren elektrische Ladungen nur dann keine Wirkung, wenn das Potential an allen Stellen der Oberfläche und in der Mitte die gleiche Grösse hat. — Hierbei besagt speziell die Konstanz des Potentials im Innern des Leiters (gleichviel ob er massiv oder hohl ist), dass auf eine beliebige (wirkliche oder gedachte) Ladung die an derselben befindlichen Ladungen mit Null wirken (genauer: mit Kräften von solchen Resultierenden, dass ihre Resultierende für jeden inneren Punkt Null ist).

Diese elektrostatische Grundbedingung ist selbst nur ein anderer Ausdruck der Erscheinungstatsache, dass sich im Innern guter Leiter, und massiver, keine Ladungen zeigen. Zur weiteren Erklärung dieser Erscheinung kann man sich darauf berufen, dass, wenn gleichnamige, also einander abstoßende Ladungen an einem inneren Leiterteile vorhanden wären und die anziehenden Kräfte nicht Null zur Resultierenden gäben, sie gegen die Mitte hin getrieben würden.

he, und nur eine solche, auf einen Massenpunkt an was immer für
 er Stelle des Innern mit Kräften wirkt, deren Resultierende Null
 (§ 21, III), so müssen auch die gleichmäßig dichten elektrischen
 Ladungen an einer Leiterkugel einen irgendwo im Innern der Kugel
 denkenden gleich- oder ungleichnamigen Ladungspunkt nach dem
 Gesetz $\frac{C}{r^2}$ abstossen, bezw. anziehen. Denn bei jedem anderen Ab-
 stossesetze wäre die elektrische Kraft im Innern der Kugel nicht
 Null, und es müßten also neue Ladungen im Innern durch Verteilung
 entwickelt und an die Oberfläche getrieben werden.

Auch die ungleichmäßige Dichte auf allen nichtkugeligen Leiterober-
 flächen erfährt nun daraus ihre Erklärung, daß an stärker gekrümmten, also im
 gemeinen auch mehr von der Hauptmasse des Körpers wegragenden Teilen
 größere Ladungsmengen auf gleiche Flächen seitens der übrigen Ladung gedrängt
 werden müssen, wenn diese entfernteren Ladungsmengen auf irgend einen
 Punkt im Innern mit gleich starken Kräften wirken sollen, wie die Mengen
 in näheren Oberflächenpunkten. — Genauere quantitative Bestimmungen über
 elektrische Dichten vergl. LA 182.

LA 182

Oberflächenpotentiale. Hat sich an einem Gutleiter die
 gesamte Ladung an der Oberfläche gemäß der elektrostatischen Grund-
 bedingung ins Gleichgewicht gesetzt, so stellt diese **Oberfläche selbst**
 eine Fläche gleichen Potentials oder eine **Niveaufläche** dar.

Diese Niveaufläche wird außerhalb des Körpers von Niveauflächen niedrigeren
 Potentials umschlossen, deren Gestalten, je näher sie dem Körper liegen, sich auch
 um so mehr der Gestalt der Oberfläche annähern werden. Da das Heranbringen
 eines gleichnamigen Ladungspunktes aus unendlicher Entfernung oder von einer
 Stelle des Experimentiertisches, die das Potential 0 hat, immer größeren abstossenden
 Kräften entgegenzuarbeiten hat, ins Innere des Körpers eingedrungen aber keine
 weitere Arbeit erfordert (vergl. § 24, S. 108 das Erklimmen eines Berges und das
 Weiterschreiten auf dem Plateau), so stellt das an der Oberfläche und im Innern
 des Körpers herrschende Potential den größten in seinem Kraftfelde überhaupt
 erreichenden Potentialwert dar. Dieses **Oberflächenpotential** also ist es auch,
 das meistens kurz als das **Potential des Körpers selbst** bezeichnet wird — im
 Gegensatz zu den verschiedenen, an mehr oder minder weit vom Körper abstehen-
 den Stellen seines äußeren Kraftfeldes herrschenden Potentialen. Indem
 man sogar den ladungsfreien Stellen in der Umgebung eines geladenen Körpers
 ein Potential zuschreibt, ist festzuhalten, daß solche Stellen zwar ein Potential
 haben, bezug auf den geladenen Körper, aber (für sich) keinen Ladungsgrad
 haben.

Bisher war nur auf das Kraftfeld je eines in sich zusammenhängenden
 Leiters (und zwar entweder eines massiven oder höchstens eines teilweise, bezw.
 ausgehöhlten, wie Faradays Becher, oder wie hohle Sammelnugeln) Rücksicht
 genommen worden. — Sobald einander zwei oder mehrere Gutleiter gegenüber
 stehen, treten die Erscheinungen der Verteilung ein.

§ 138. Potential und Elektrisierung durch Verteilung.

Aufgaben: In das elektrische Feld a) eines Ladungspunktes (Figg. 467, 468) von der Menge ε st. LE (z. B. $\varepsilon = +6$), b) eines leitenden

Fig. 467.

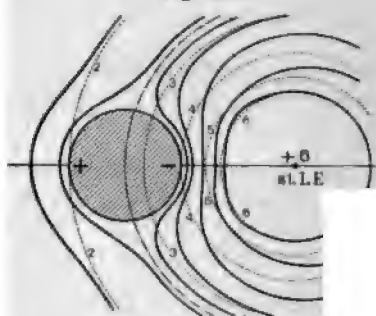
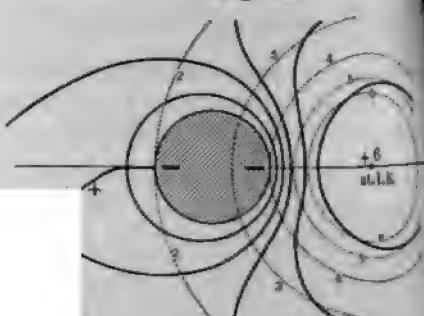


Fig. 468.



den Körpers, wird ein Leiter durch einen dünnen Draht (z. B. mit isolierten Enden u. dergl.) angebracht und wie müssen damit auf den Leitern elektrisch

neutraler einfacher Gestalt (Kugel, Kugelpaar, Zylinder mit halbkugelförmigen Enden) Ladungen müssen diese Leiter umformen des Feldes umformen, Gleichgewicht herrsche, wenn sie

LA 180. α) isoliert (Fig. 467), β) zur Erde abgeleitet (Fig. 468) sind? (LA 180.)

Zu a). Wird in die kugelförmigen Niveauflächen der punktuellen Ladung $+\varepsilon$ der Leiter L gebracht, so kommen seine dem Ladungspunkte zugewendeten Teile an Stellen höheren, die abgewendeten Teile an Stellen niedrigeren Potentials zu liegen: es ist also der elektrostatischen Grundbedingung zunächst nicht entsprochen. Erst wenn das zugewendete Ende eine negative und wenn, falls α) der ganze Leiter isoliert ist, das abgewendete Ende eine positive Ladung angenommen hat, tritt wieder Gleichgewicht auf diesem Leiter ein, dessen Bedingung sich aus folgender Konstruktion ergibt: Den induzierten Ladungen entsprechen selbst wieder Potentiale und Niveauflächen; indem für jeden Punkt des zusammengesetzten Kraftfeldes die Potentiale für den influenzierenden Punkt und für die beiden induzierten Ladungen algebraisch addiert werden, müssen sich diese induzierten Ladungen so lange verschieben, bis die Oberfläche des Leiters wieder eine Fläche konstanten Potentials (Niveaufläche des zusammengesetzten Feldes) wird. — Wird β) der Leiter mit der Erde ableitend verbunden, so hat dies die aus Fig. 468 ersichtliche Umformung der Niveaufläche zur Folge.

Inwiefern unbeschadet dieser Zurückführung der Verteilung auf die elektrostatische Grundbedingung FARADAYS Wort (§ 132, S. 411), der Verteilung komme der „Charakter eines Grundprinzips“ zu, in Kraft bleibt, vergl. log. Anh., Nr. 37.

Anh. 37.

Zu b). War die influenzierende Ladung selbst z. B. auf einer gut leitenden Kugel ausgebreitet, so waren die Niveauflächen ebenfalls [wie beim Punkt in a)] kugelförmig. Durch Heranbringen des Gutleiters L aber wird dann nicht nur dieser beeinflusst, sondern er wirkt auch auf die Kugel influenzierend zurück.

Verfolgen wir in diesem Falle (und allgemeiner in allen Fällen, wo beliebig kontaktete und beliebig geladene gute Leiter einander gegenüber stehen und durch Verschieben diese Ladungen so lange verstärken, schwächen und verschieben, bis elektrisches Gleichgewicht eingetreten ist) nebst den bisher betrachteten Niveau-Verläufen auch den Verlauf der Kraftlinien, so gilt die Beziehung, daß je ein von einem geschlossenen Oberflächenstückchen des einen Leiters zum anderen Leiter hinüber gehendes System von Kraftlinien („Krafttröhre“) auf dem anderen Leiter ein Flächenstückchen herauschneidet, das eine gleich große, aber entgegengesetzte Ladung wie das andere enthält.

§ 139. Potential und Kapazität. — Elektrische Kondensatoren.

Auch die schon im § 134 angeregte Vorstellung, daß eine kleine Sammelkugel weniger Ladung „fasse“ als eine große Kugel, und wieder die zwei voneinander weit abstehenden Platten einer zerlegbaren Franklinschen Tafel viel weniger „fassen“, als wenn sie einander genähert sind, gewinnt quantitative Bestimmtheit erst durch die Feststellung, daß von elektrischer Kapazität eines Leiters die Rede sein soll nur mit Beziehung auf das Potential, das er bei Zuführung einer bestimmten Ladungsmenge annimmt. — Dabei ist der Begriff der „Kapazität“ von viel allgemeineren Vorstellungen entnommen, daß z. B. ein großer Saal mehr Menschen „faßt“ als ein kleiner; wobei hinzugedacht ist, daß beide Säle schließlich gleich „dicht“ besetzt sein sollen. (Ähnlich: Die Wärmekapazität eines Körpers, § 73, die ihn gleichsam erfüllende Wärmemenge und die so an ihm erzielte Temperatur.) Dieser Vorstellung entsprechen auch die Beziehungen zwischen dem Volumen (das wir hier, um Verwechslungen mit dem für das Potential vorbehaltenen Buchstaben V zu vermeiden, als Rauminhalt R bezeichnen), in dem eine Masse M mit der Dichte D untergebracht ist (§ 41, Ende). Es entsprechen dann einander die Beziehungen für

$$\text{Rauminhalt (Volumen) } R = \frac{M}{D}, \text{ daher } M = RD, D = \frac{M}{R},$$

$$\text{elektrische Kapazität } C = \frac{E}{V}, \text{ daher } E = CV, V = \frac{E}{C}.$$

Einheit der elektrischen Kapazität (elektrostatische Kapazitätseinheit, 1 st. CE) ist hierbei die Kapazität eines Leiters, der durch Zuführung von 1 st. LE (statische Ladungseinheit, § 135) eine Steigerung seines Potentials um 1 st. PE (statische Potentialeinheit § 136) erfährt.

Im elektrotechnischen Maßsystem ist Kapazitätseinheit 1 Farad, d. i. die Kapazität eines Leiters, der durch die Ladungsmenge 1 Coulomb eine Steigerung seines Potentials um 1 Volt erfährt, wobei 1 Farad = 10^9 Mikrofarad = $9 \cdot 10^{11}$ st. CE.

Wie ein Rauminhalt für sich allein noch nichts darüber vorschreibt, eine wie große Masse in ihm unterzubringen ist, indem der Stoff ja bis zu geringerer oder größerer Dichte hineingepreßt werden kann (wobei dann für die uns bekannten Stoffe allerdings eine Grenze dadurch gegeben ist, daß Gase sich kondensieren und unter den Flüssigkeiten und festen Stoffen relative Dichten, bezw. spezifische Gewichte über 22 nicht vorkommen), so können auch in einer Sammelkugel unbeschadet ihrer durch ihre Gestalt und Größe allein schon gegebenen Kapazität

sehr verschieden große Ladungsmengen untergebracht werden (was wieder durch seine Grenze findet, daß bei zu hohen Potentialen Selbstentladung an umgebende Luft oder an sonstige, wenn auch noch so gute Isolatoren eintritt).

Ganz allgemein wird erst durch den Zusammenhang der drei Größen Ladungsmenge, Potential und Kapazität die Lösung der meisten elektrostatischen Aufgaben in nicht bloß relativen Mäßen möglich; hier nur einige der einfachsten:

Potential und Kapazität einer Leiterkugel. a) Es sei eine Ladung von E st. LE über die Oberfläche der Kugel von r cm Halbmesser gleichförmig ausgebreitet, so daß auf gleiche Oberfläche



Fig. 469.

stückchen der Kugel je ε LE, auf alle zusammen $E = \varepsilon + \dots + \varepsilon$ zu liegen kommen. Jedes Ladungsteilchen wirkt dann zunächst auf den Mittelpunkt der Kugel mit solchen Kräften, daß hier

Potential $V = \frac{\varepsilon}{r} + \dots + \frac{\varepsilon}{r} = \frac{E}{r}$ herrscht. Da

bei der angenommenen gleichförmigen Ausbreitung der Ladung auf der Kugel zunächst jedenfalls für die Oberfläche

die elektrostatische Grundbedingung erfüllt ist und nach dieser das Potential im Innern und auf der Oberfläche jedes Leiters für alle Punkte konstant ist, so gilt, wie für den Mittelpunkt, auch für alle Punkte der Kugeloberfläche das kurz sogenannte

Potential einer Kugel $V = \frac{E}{r}$ (vergl. $V = \frac{\varepsilon}{r}$ für den Punkt, der

b) Wird nunmehr die Kapazität dieser Kugel gemäß der allgemeinen Gleichung $C = E:V$ berechnet, so ergibt sich

$$\text{Kapazität einer Kugel } C = E:\frac{E}{r} = r.$$

Es hat also die Kapazität einer Kugel — und, da alle Kapazitäten benannt sind, auch jede elektrostatische Kapazität überhaupt die Dimension einer Länge; natürlich ist sie darum aber nicht eine

Anh. 7. (mathem. Anh., Nr. 7). — Eine Kugel von 1, 2, 3 ... r cm Halbmesser hat also 1, 2, 3 ... r CE (nicht 1, 4, 9 ... r^2 CE, proportional den Kugeloberflächen). Man beachte auch die verschiedenen Ladungsdichten verschieden großer Kugeln bei gleichem Potential, LA 182).

LA 182. Eine Kugel vom Radius 1 cm und somit von 1 CE nimmt bei Ladung

$$1 \text{ st. LE ein Potential } \frac{1 \text{ st. LE}}{1 \text{ st. CE}} = 1 \text{ st. PE,}$$

$$1 \text{ Coulomb ein Potential } \frac{1 \text{ Coulomb}}{1 \text{ Farad}} = \frac{3 \cdot 10^9 \text{ st. LE}}{9 \cdot 10^{11} \text{ st. CE}} = \frac{1}{300} \text{ st. PE} = 1 \text{ Volt}$$

Daß wirklich die Kapazität, zunächst einer Kugel, nur von ihrer Größe, dagegen gar nicht von ihrem Stoffe und auch nicht da, hängt ist, ob sie massiv oder hohl sei (gemäß Lemonniers erste Beobachtung, § 133, S. 414), wird mit großer Schärfe bestätigt durch folgende

Versuch: Auf drei kleinen Ständern aus Hartgummi liegen Kugeln je 1 cm Radius, aus Eisen massiv, Kupfer massiv, Kupfer hohl. Sie we-

großen, schwach geladenen Leydener Flasche (vergl. § 136) auf das Potential geladen und dann in den Becher auf dem Elektroskop geworfen, so gibt die ganze Ladung abgeben; das Elektroskop als Körper von selbst gleicher zeigt für alle drei Kugeln den gleichen Ausschlag. — Ähnlich für gleiche dergl.

1 die Kapazität des Elektroskops, bezw. Elektrometers (vergl. § 136) kann nunmehr numerisch ausgedrückt werden, wenn beobachtet wird, welchen Ausschlag an der vorhin in willkürlichen geeichten Skala ein Körper von vorher bestimmter Kapazität und Menge hervorbringt (ähnlich wie man ein für allemal den Wasserwert eines Thermometers bestimmt).

Setzt man in die Gleichung $A = \frac{1}{2} EV$ (§ 136) die Kapazität gemäß den Gleichungen $E = CV$ und $V = E:C$ ein, so ergeben sich weiter die Formeln $A = \frac{1}{2} \frac{E^2}{C}$ und $A = \frac{1}{2} CV^2$ für die Arbeiten, die beim Laden,

entladen eines beliebig gestalteten Körpers von der Kapazität C mit der Ladung E und dem Potential V verbraucht, bezw. gewonnen werden. Speziell für einen Kugelkondensator ergibt sich so $A = \frac{1}{2} \frac{E^2}{r} = \frac{1}{2} V^2 \cdot r$ (numerische Beispiele LA 182). — LA 182.

Um sich in den Grund der um so viel höheren Kapazität der Kondensatoren zu versetzen, die sich zu den bisher vorausgesetzten einfachen Leitern gibt folgende Aufgabe: Zwei konzentrische Kugeln von den Halbmessern R und r seien durch eine Luftschicht von der Dicke $R - r = \delta$ cm getrennt. Der inneren Kugel sei eine Ladung E (mittels einer kleinen Öffnung der äußeren Kugel hindurch oder eines dünnen Drahtes) zugeführt. Zu zeigen, daß dieser inneren Kugel zufolge der durch die äußere, abgeleitete Kugel ausgeübten Einwirkung, die Kapazität $C = \frac{R}{\delta} r$ cm (oder $C = \frac{R}{\delta} \cdot c$) gleich der Kapazität c der nicht umschlossenen Kugel zukommt.

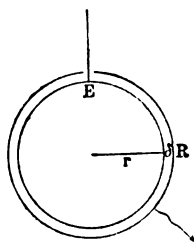
Man nehme an: Wäre die äußere Kugel nicht vorhanden, so wäre das Potential im Inneren der Kugel und also auch in jedem anderen inneren Punkte der inneren Kugel gleich ihrer Oberfläche $V = \frac{E}{r}$. Durch die La-

Fig. 470.

adung der inneren Kugel nimmt aber infolge Influenz auch die äußere Kugel eine Ladung E' an, so daß das Potential im ganzen Inneren der inneren Kugel und somit auch an der Oberfläche der inneren Kugel um $\frac{E'}{R}$ vermehrt wird; also daselbst

$V = \frac{E}{r} + \frac{E'}{R}$. Hierbei gilt für E' überdies noch die Bedingung

daß $E' = 0$, wenn die äußere Kugel nicht zur Erde abgeleitet wäre, denn es werden im ganzen durch die gleich große positive und negative Ladungen ausgeglichen. Wäre dagegen der äußeren Kugel, solange sie noch nicht zur Erde abgeleitet ist, unabhängig von der inneren eine Ladung E' erteilt, so wäre das Potential der äußeren Kugel $\frac{E + E'}{R}$ (nämlich zunächst für die innere Kugel



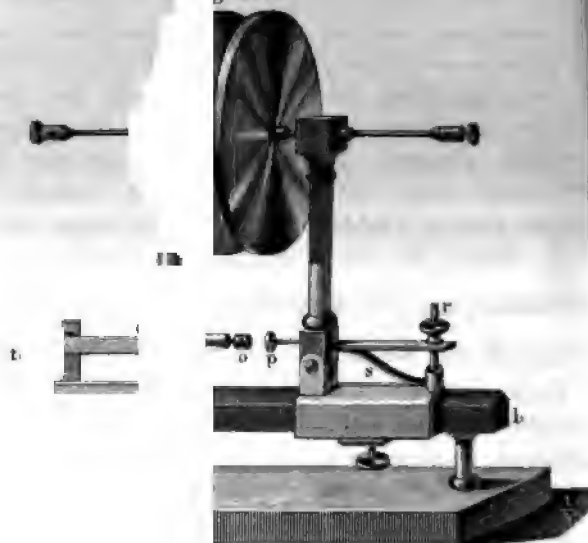
durch Superposition von $\frac{E}{R}$ und $\frac{E'}{R}$, weshalb nach der elektrostatischen Grenzbedingung auch für die ganze äußere Kugel das gleiche Potential gilt). Solange daher die äußere Kugel zur Erde abgeleitet und also $V' = 0$ ist, wird $E' = -E$. Dann ist für die innere Kugel

das Potential $V = \frac{E}{r} - \frac{E}{R} = E \frac{R-r}{Rr} = E \frac{d}{Rr}$, die Kapazität $C = \frac{E}{V} = \frac{Rr}{d}$.

Bei gegebenem r nimmt also die Kapazität rasch ab mit wachsendem d (Zahlenbeispiele I.A. 182). Immerhin aber hat z. B. der Konduktor einer Elektrisiermaschine in einem Zimmer noch etwas größere Kapazität als im Freien, indem Wände, Boden und Decke wie eine äußere Belegung, die trockene Luft des Zimmers als isolierende Schicht wirkt.

Der in der Aufgabe vorausgesetzte Luft-Kugelkondensator ist der einfachste Typus einer Leydener Flasche. Die Rechnung ist schwieriger, die direkte Messung bei veränderlicher Isolationsstärke d aber leichter an einem Plattenkondensator (ähnlich der in Fig. 469 dargestellten zerlegbaren Franklin'schen Tafel, in vollkommener Ausführung KOHLRAUSCH'S Kondensator, Fig. 471). Wird

Fig. 471.



hier die eine Platte leitend verbunden mit einem Elektroskop und samt die auf ein bestimmtes Potential geladen, während die andere Platte entfernt ist, wird der Ausschlag am Elektroskop sofort kleiner, wenn die andere Platte während sie ableitend berührt ist, der ersteren Platte näher gebracht wird (lange nicht zwischen beiden Platten ein Funke überspringt).

Dielektrika. Waren beim Luftkondensator die Platten bis einen gewissen Abstand genähert, und zeigte das Elektroskop einen bestimmten, ziemlich großen Ausschlag, so wird dieser sofort beträchtlich kleiner, wenn man zwischen die Platten eine Glas-, Hartgummi-

Schwefelplatte einschiebt. Es hat also das bloße Ersetzen der Schicht trockener Luft durch die genannten Nichtleiter die Kapazität des Plattenkondensators vergrößert. Daher gilt auch obige Formel für die Kapazität C des Kugulkondensators nur, wenn die Zwischenschicht Luft ist.

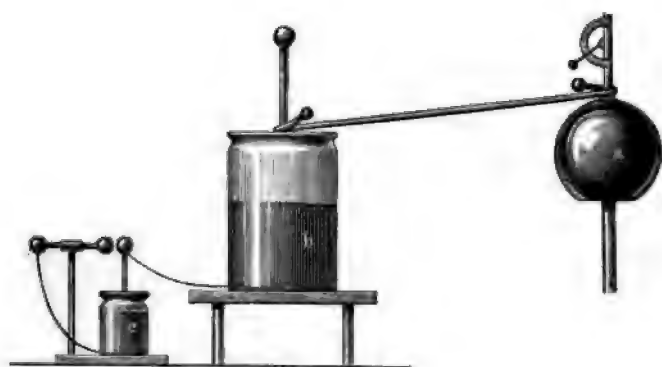
Dagegen würde $C_G = 3 C$ bis $3\frac{1}{4} C$, wenn statt Luft Glas verschiedener Sorten, ferner $C_H = 3,15 C$, wenn statt Luft Hartgummi, und $C_S = 2,08$ bis $2,94 C$, wenn Schwefel den ebenso großen Raum zwischen beiden Platten ausfüllt. Man sagt, die Dielektrizitätskonstante des Glases ist $D = 3$ bis $3\frac{1}{4}$, des Schwefels 3,84, des Hartgummis 3,15, des Kohlendioxyds 1,000856, der Luft 1, des Vakuums 0,99941 (— diese Abweichung zwischen den D für trockene Luft und dem Vakuum ist so gering, daß sie in der Technik außer acht bleibt), des Wasserstoffs 0,999674. Somit müßte es auch für eine gläserne Leydener Flasche der Form und Belegung des oben betrachteten Kugulkondensators heißen

$$C_G = 3 \cdot \frac{R}{d} r.$$

Ist so für einen Kondensator von bestimmter Größe, Gestalt und bestimmtem Dielektrikum die Kapazität C durch Rechnung ermittelt, und wird von ihm die Ladung des äußeren Beleges statt in die Erde in eine Maßflasche abgeleitet, so läßt sich aus

der Zeitdauer zwischen je zwei Selbstentladungen aus auf die von irgend einer Elektrizitätsquelle binnen gewisser Zeit gelieferte Zahl von Coulomb ein Schluß ziehen (LA 183) und somit auch die Maßflasche eichen (Fig. 472). Durch

Fig. 472.



LA 188.

Rechnungen und Versuche ergibt sich z. B., daß eine zylindrische Leydener Flasche von $r = 5$ cm Basisradius, $h = 20$ cm hohen Belegen, 0,3 cm Glasdicke eine Kapazität von 600 (cm) besitzt; also eine ebenso große, wie eine freie Kugel von 6 m Radius.

Zwischen den Dielektrizitätskonstanten D und den Brechungsquotienten n verschiedener Stoffe besteht die von MAXWELL vorausgesehene, von BOLZMANN durch Versuche gefundene Beziehung $D = n^2$ (z. B. gegossener Schwefel $D = 3,84$, $n = 2,040$, $n^2 = 4,162$; Kolophonium $D = 2,55$, $n = 1,543$, $n^2 = 2,382$; Paraffin $D = 2,32$, $n = 1,536$, $n^2 = 2,259$); diese Beziehung ist für die elektromagnetische Lichttheorie von größter Bedeutung geworden; einiges hierüber § 157.

Jüngst (1903) haben RUBENS und HAGEN das elektrische Leitvermögen von Metallen in absolutem Maß aus ausschließlich optischen Konstanten (Reflektionsvermögen des Metalls, Lichtgeschwindigkeit und Wellenlänge) berechnet und mit den experimentell ermittelten Werten übereinstimmend gefunden.

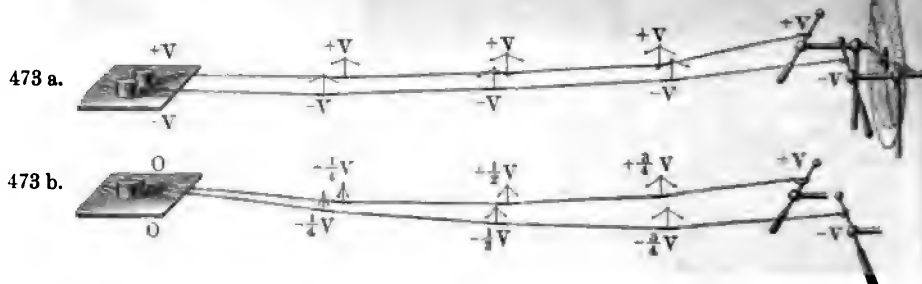
§ 140. Potential und elektrischer Strom.

In § 137 wurde die Grundbedingung für das elektrische Gleichgewicht aufgestellt, und auch die §§ 138, 139 setzten im allgemeinen solches voraus. Was dagegen geschieht, wenn solches Gleichgewicht nicht besteht, zeigt zunächst

Versuch a): Mit den Polen (Sammelkugeln) einer Influenzmaschine stehen in leitender Verbindung halbleitende Holzstäbchen (deren mehrere durch Metallhülsen zu je einem 2 bis 4 m langen Stab verbunden sind). In gleichen Abständen befinden sich an den Stäben kleine Elektroskope (Doppelpendel aus Korkkugeln und Zwirn, unmittelbar über das Holz zu legen, oder elektrische Fähnchen); bei genauerer Messung kann von diesen Stellen eine leitende Verbindung zu einem Elektrometer her-

Stäbe sind in leitender Verbindung. Die zweiten Enden der Stäbe sind in leitender Verbindung mit einem isolierten Metallkörper (Gewichtsstücke auf Ebonit). Wird die Maschine in Gang gesetzt, so sind die Stäbe isoliert (Fig. 473 a), so sind die gleichen Potentiale, so sind die gleichen positive Potentiale, so überall gleiches negatives Potential zwischen der einen und der leitenden Verbindung stehende

den. Die zweiten Enden der Stäbe sind in leitender Verbindung mit je einem isolierten Metallkörper (Gewichtsstücke auf Ebonit) und bleibt 1. jeder der beiden Elektroskope an allen Stellen der einen Stab das der einen $+V$, der andere Stab ein $-V$ an. Die Potentialdifferenz Polkugel und allen mit ihr in Verbindung ist also gegen die andere



$V - (-V) = 2V$. (Infolge von Ladungsverlusten an die Umgebung divergieren die von den Polkugeln entfernteren Pendel meist etwas schwächer.) — 2. Wird einer der Stäbe bei einem der Elektroskope oder speziell an seinem Ende ableitend berührt (mit der Erde leitend verbunden), so wird hier das Potential Null, und an den Elektroskopen erkennen wir einen **Potentialabfall**, nämlich von der positiven Polkugel bis zu dieser Stelle von $+V$ bis Null (bzw. von der negativen Kugel bis zu jener Stelle ein Ansteigen von $-V$ bis Null). — 3. Ein ebensolcher Potentialabfall von $+V$ bis $-V$ tritt

wenn die beiden Metallkörper miteinander in leitende Verbindung gesetzt werden (Fig. 473 b).

Es gut gelingt der Versuch, wenn statt der Holzstäbe halbleitende oder sehr dünne Metalldrähte genommen werden. Warum bei dicken, nicht leitenden Drähten die Polkugeln überhaupt keine merkliche Potentialdifferenz anzeigen, vergl. LA 202.

LA 202.

Das unmittelbare Versuchsergebnis, nämlich den durch die Elektroden gezeigten Potentialabfall, hinausgehend denken wir uns diesen auch noch einem Durchfließen positiver Ladung von der positiven Polkugel und nennen diese sich bewegenden Ladungen einen **Strom**.

Womit man sich auch eine negative Ladungsmenge von der Polkugel zur positiven hin, oder auch beide Ladungen in entgegengesetzten Richtungen (durcheinander hindurch) fließend denken. Doch ist es besser vom positiven Strome als dem „Strome“ kurzweg zu sprechen. — Das Wesentliche des sehr allgemeinen Begriffes „elektrischer Strom“ von den Bedingungen des Versuches a) zu scheiden, stellen wir ihm an die Stelle ihm in der äußeren Anordnung gänzlich abweichenden

b): Je ein Zink- und ein Kupfer- (oder Kohlen-) Stäbchen, welche, um sie zu berühren, in ein Probiergläschen mit destilliertem Wasser oder

Wasser (mit Kochsalzlösung oder Mischung von Schwefelsäure und Kaliumdichromat) tauchen,

ein kleines „galvanisches

Element“ bilden, die aus der Flüssigkeit

hervorragen die Pole des Ele-

mentes. (Alles Nähere über gal-

vanische Elemente und Batterien

findet man in der größeren Anzahl (etwa

10) solcher Elemente sind

einander geschaltet“,

z. B. des ersten Elementes

hervorragt die Verbindung zum Kupfer

(Cu_2), ebenso eine von

u. s. w. führt. Die aus-

stehenden Enden von

100 bilden dann die Pole

des Elementes. Von diesen Polen

gehen zu zwei einander nahe

stehenden Scheibchen,

aus denen ein Gold- oder Alu-

minblech herabhängt (Fig. 474). Dieses Blättchen zeigt keine Ladung

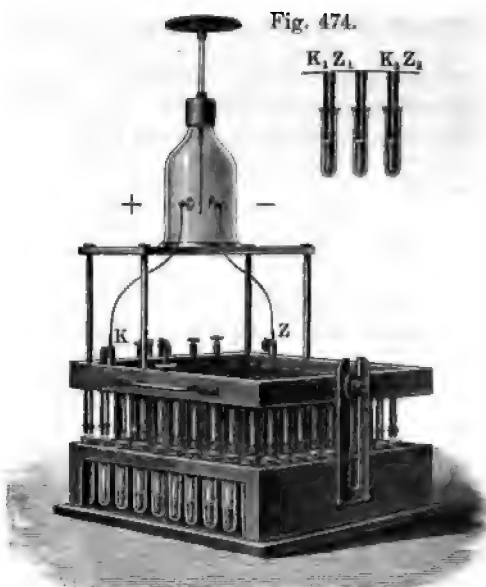
an, wenn die Zink- und Kupferstäbchen nicht in die Salzlösung tauchen; sogleich

bei Eintauchen aber zeigt das Blättchen an dem Kupferpole positive,

an dem Zinkpole negative Ladung an (wird nämlich in die Nähe der

Platte eine geriebene Harzstange gehalten, so wird das durch Ver-

stärkung der Stange negativ geladene Blättchen von dem Kupferpole



angezogen, vom Zinkpole abgestoßen). Zwischen den beiden Scheiben aufgehängt, pendelt das Blättchen hin und her, wie der Klöppel beim elektrischen Glockenspiel.

An einer solchen „offenen“ galvanischen Batterie sind also die Polenscheiben ebenso in entgegengesetzten elektrischen Zuständen, oder sie weisen ebenso eine **Potentialdifferenz** auf, wie die Polkugeln der im Betrieb stehenden Influenzmaschine, solange zwischen diesen keine leitende Verbindung hergestellt ist (Versuch a 1.). — Wird dann die Batterie „geschlossen“, d. h. werden die aus der Flüssigkeit ragenden Enden von Cu, und Zn, miteinander leitend verbunden (wie die Polkugeln bei Versuch a 3.), so werden wir auch in diesem Leiter einen **elektrischen Strom** erwarten. Um diese Erwartung zu bestätigen, muß (durch Annäherung des geladenen Blättchens) noch gezeigt werden, daß an den Polen der Batterie, auch wenn sie leitend verbunden sind, eine **konstante Potentialdifferenz erhalten** bleibt, d. h. die Ladungen derselben sich immer erneuern. (Versuch a 2.) — Verbindung jedes der beiden Pole mit einem hinreichend empfindlichen Elektrometer.) — Wie also auch durch die Stäbe geht, als durch fortwährend immer wieder entladenden Polkugeln an sich auch an den Batteriepolen durch das „Schließen“ der Batterie ableitende Berührung der Pole (Wegen der Inkonstanz einer solchen Potentialdifferenz der beiden Pole allmählich abnimmt)maschine die Erneuerung der Ladungen durch Überwindung der gegenseitigen mechanischen Arbeit, so erfolgt bei der Batterie diese Erneuerung der Ladungen auf Kosten der chemischen Arbeit, welche namentlich im Angegriffenwerden des Zinks durch die Flüssigkeit sich kundgibt.

Als wesentlich für den Begriff des elektrischen Stromes (und zwar zunächst für den des stationären Gleichstromes) lassen sich also zunächst aus den beiden Beispielen die folgenden Erfordernisse herausheben:

1. Es werden zwei Stellen P_1 und P_2 eines elektrischen Feldes auf konstanter Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ erhalten. 2. Zwischen P_1 und P_2 besteht leitende Verbindung. 3. Für diesen Leiter ist also die elektrostatische Grundbedingung, daß an allen Stellen seiner Oberfläche und seines Innern das gleiche Potential herrschen müsse, nicht erfüllt; vielmehr findet ein **Potentialabfall** von der Stelle höheren Potentials P_1 gegen die niedrigeren Potentials P_2 statt. — Indem nun der Zustand dieses Leiters kein elektrostatischer ist, stellen wir ihn uns als einen elektrokinetischen vor und nennen das **Abfließen positiver Ladungen von den Stellen höheren zu Stellen niedrigeren Potentials einen elektrischen Strom**.

Die im Wort „Strom“ festgehaltene Vorstellung des „Abfließens“ von Ladungen ist aber schon wieder bildlich und entspricht der Wirklichkeit nur insoweit, als die im § 137 entwickelte Vorstellung „**elektromotorischer Verschiebungen**“ (im Gegensatz zu ponderomotorischen) begründet ist. Ist aber einmal zugegeben, daß und inwiefern sich an einem ruhenden Körper (dessen

kleinste Teilchen mit den zwischen sie gebetteten Atherteilchen hierbei noch immer eine gegenseitiger Bewegung sein können) eine Ladungsmenge $+s$ als solche verschieben“ könne, so ist es durch die Tatsache der Abstossung gleichnamiger und Anziehung ungleichnamiger Ladungen geradezu gefordert, also auch das ihr zu erklären, daß z. B. von der positiven Polkugel Teile der positiven Ladung seitens der auf ihr noch vorhandenen positiven Ladung abgestoßen und ungleich seitens der negativen Polkugel angezogen werden; d. h. es müssen dann wirklich Ladungsmengen von den Stellen höheren zu Stellen niederen Potentials sich bewegen, „fließen, strömen“. — Allerdings brauchte das nicht in dem Leiter, durch seinen ganzen Querschnitt hindurch, sondern es könnte an der Oberfläche des Leiters im angrenzenden Dielektrikum stattfinden; direkte Erfahrungen zu gunsten dieser neueren Vorstellungen in §§ 156, 157.

Gleichviel, ob dieses oder jenes anschauliche Bild mit den tatsächlichen Vorgängen in und um einen stromdurchflossenen Leiter verbunden wird, treten die Tatsachen der Elektrizitätsleitung in so weitgehende Analogie zu denen der Wärmeleitung, daß sogar die dort von FOURIER (1826) begründeten Begriffs- und Mafsbestimmungen bald darauf von OHM (1827) auf die Elektrizitätsleitung übertragen werden konnten. So entspricht dem im § 79 aufgestellten Ausdruck für die Stärke des Wärmestromes, oder wie wir der Analogie wegen vorübergehend wieder sagen wollen, für die kalorische Stromstärke $i = k \cdot \frac{q}{l} (v' - v) \dots (1)$,

Ohms Gesetz für die elektrische Stromstärke $i = k \cdot \frac{q}{l} (V' - V) \dots (2)$,

wobei k das spezifische elektrische Leitungsvermögen des leitenden Stoffes, q der (als überall konstant vorausgesetzte) Querschnitt des Leiters, l seine Länge, $V' - V$ die Differenz der an den Enden des Leiters herrschenden Potentiale V' und V bedeutet.

Die hier auf den Begriff der Potentialdifferenz gegründete Fassung des Begriffes „elektrischer Strom“ ist noch nicht allgemein genug, um alle in den Wirkungen nach außen hin ähnlichen Zustände an elektrischen Leitern zu umfassen. Denn zwar häufig, aber nicht immer (z. B. nicht bei den Induktionsströmen, § 150) sind es Potentialdifferenzen, die ein Strömen von Ladungen veranlassen. Durch Ersetzung des Begriffes Potentialdifferenz durch den umfassenden Begriff „elektromotorische Kraft“ (die MAXWELL so definiert: „Alles, was eine Fortführung der Elektrizität verursacht oder zu verursachen strebt, nennt man elektromotorische Kraft“) — anderseits durch Ersetzung des Begriffes „Leitungsvermögen“ durch dessen reciproken Wert „Leitungswiderstand“, gelangen wir zu folgendem symbolischen Ausdruck für

Ohms Gesetz: Elektrische Stromstärke = $\frac{\text{Elektromotorische Kraft}}{\text{Widerstand}} \dots (3)$

Dabei werden wir uns durch Einführung des elektromagnetischen Maßsystems auch unabhängig machen von der bisher dem Begriffe des elektrischen Stromes zu Grunde liegenden Vorstellung „fließender Ladungsmengen“ [sowie auch der Begriff des Wärmestromes unabhängig ist von der Vorstellung eines fließenden Wärmestoffes; denn gegenüber dieser hypothetischen Vorstellung stellt obige Gleichung (1) eine Tatsache dar]. Auch werden wir auf Ohms Gesetz in allen weiteren Teilen der Lehre von den mannigfaltigen „Wirkungen des elektrischen Stromes“ zurückzukommen haben (namentlich in §§ 150, 155).

Von allen diesen „Wirkungen der Ströme“ sei noch im vorliegenden Abschnitte I, der nur die mechanischen Erscheinungen an elektrischen Körpern behandelt, nur eine ebenfalls rein mechanische vorläufig angeführt, nämlich die gegenseitige Anziehung und Abstossung elektrischer Ströme (gestromdurchflossener Leiter).

§ 141. Anziehung und Abstossung zwischen stromdurchflossenen Leitern. — Übergang von den elektrischen zu magnetischen Erscheinungen.

Vorversuche: Ein Schraubendraht (Fig. 475) aus leichtem, aber dünnem Drahte ist geschaltet an je eine zylindrische Platte aus dünnem Zink oder Kupfer, die durch eine Korkplatte auf verdünnter Schwefelsäure schwimmbar gehalten werden. Die in dem so hergestellten Zink-Kupfer-Element an

Fig. 475.

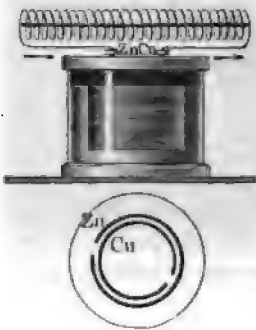
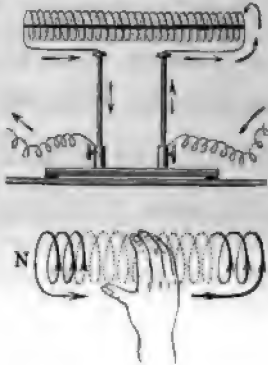


Fig. 476.



den Ströme gehen den Schraubendraht nennt solche stromdurchflossenen Schrauben („Spulen“) Solenoid (Bei DE LA RIVE, nennend „Strom“ statt der zylindrischen Platten ebens, vielen Schrauben nur eine oder zwei dungen angewendet, den die Enden des Solenoides durch einen anderen Solenoid durch das vo

Batterie ein Strom fließt (Fig. 476), genähert, so üben sie aufeinander eine Anziehung, teils Abstossung aus, ähnlich wie je zwei ungleichnamig geladene elektrische Pendel. — Dabei wirkt ein Solenoid genäherte Magnetnadel selbst wie ein Magnet; und ebenso werden die Solenoids durch die Pole eines genäherten Magnetstabes angezogen und abgestoßen.

Solche mechanischen Wirkungen von Strömen auf Ströme heißen **dynamische** Erscheinungen; die entsprechenden Wirkungen zwischen Solenoiden und Magneten **elektromagnetische** Erscheinungen. Sie bilden das natürliche Bindeglied zwischen den elektrischen und magnetischen Erscheinungen. Änderungen dieser Versuche, sowie Mafsbestimmungen über die elektrodynamischen und elektromagnetischen Erscheinungen zu Beginn des zweitnächsten Abschnittes (§ 147 ff.).

2. Mechanische Erscheinungen an magnetischen Körpern.

§ 142. Magnetpole. Vorläufiges über das magnetische Kraftfeld der Erde.

Vorversuche: 1. Ein Magnetstab hält nahe seinen Enden grössere Eisenstücke (Nägel) der Schwere entgegen fest als näher der Mitte. — An die Enden einer Magnetnadel hängen sich Büschel von Eisenspänen, die sich nach allen Richtungen von den Spitzen der Nadel sträuben; schon in geringem Abstände von den Spitzen haften sie auf oder keine Späne. — Bei solchen zugespitzten schmalen Stäben (magnetisierten Stricknadeln, Kompassnadeln) trifft also mit ziemlicher Annäherung die Fiktion zu, als ob alle magnetischen Kräfte in zwei thematischen Punkten, nämlich den Spitzen, ihren „Sitz“ hätten. Diese beiden Punkte wären dann die Pole. Bei nicht zugespitzten Stäben wären die Pole (richtiger: die Polarregionen) zu definieren als Stellen der stärksten magnetischen Wirkungsfähigkeit. — Jeder Pole hat ein Magnet in der Regel zwei. Doch zeigt dichtere

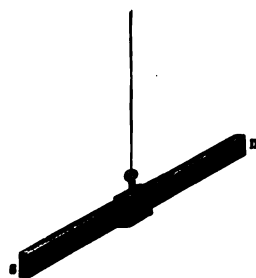
Fig. 477.



Veranlassung der Spänchen manchmal auch drei (Fig. 477) und mehrere an; im weiteren soll von solchen „Folgeeffekten“ abgesehen werden.

Eine entsprechend frei bewegliche Magnetnadel (Fig. 478 und Fig. 481) weist mit einem Ende, dem Nordpole, in die Nordgegend, mit dem Südpole in die Südgegend. — *Versuche 3:* Die beim Annähern der Pole n_1, n_2, s_1, s_2 zweier Nadeln eintretenden magnetischen und statischen Erscheinungen (Beschleunigungen, Schwingungen, veränderte Lenkung, Aneinanderhaften) lehren: Gleichnamige Pole stoßen einander ab, ungleichnamige ziehen einander an.

Fig. 478.



Die strenge Definition des Begriffes „Magnetpol“ eines magnetischen Körpers muß darauf Rücksicht nehmen, daß sich die magnetischen Wirkungen

des Körpers aus den magnetischen Wirkungen aller oder doch der meisten Theile des Magneten zusammensetzen. (Es ist also der Magnetpol ebenso wie der ausschließliche „Sitz“ der magnetischen Kräfte als der Erdmittelpunkt der „Sitz“ der Schwerkraft ist, wie man vor der Entdeckung der allgemeinen Gravitation geglaubt hatte; vielmehr.) Wie alle Massentheile der Erde durch ihre Anziehungen auf äußere Körper zu den Erscheinungen der Schwere beitragen, und wie auch der „Schwerpunkt“ eines Körpers der Angriffspunkt der Resultierenden aller auf ihn wirkenden Schwerkräfte (genauer der Mittelpunkt der parallelen Schwerkräfte, § 122) ist, so wird sich ein Magnetpol als ein solcher Mittelpunkt paralleler magnetischer Kräfte erweisen. Da aber eine solche Definition schon wieder voraussetzt, daß die von der Erde auf die verschiedenen gleichnamigen Elemente eines magnetischen Körpers einwirkenden Kräfte einander parallel sind, so verschaffen wir uns, zunächst noch unabhängig von dem Begriffe des „Poles“, ein anschauliches Bild vom wirklichen magnetischen Zustande eines gegebenen Magneten einerseits, und andererseits, durch folgenden

Versuch 4: Unter einen wagnen, mit Eisenfeilicht oder Eisenpulver bestreuten Karton w

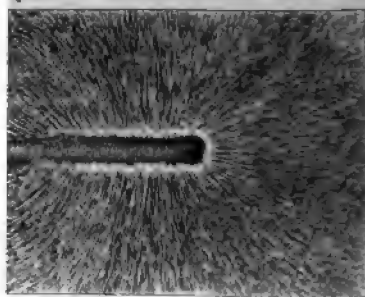
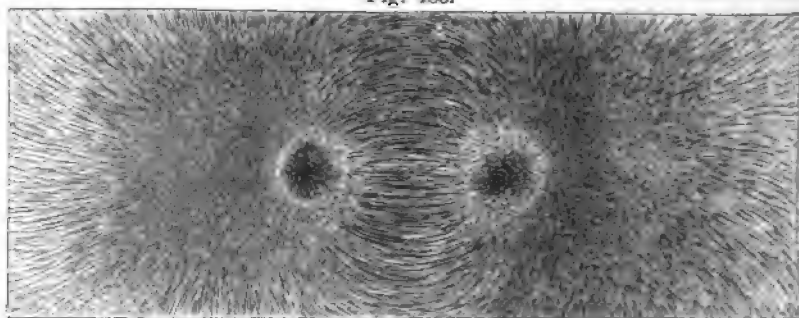


Fig. 480.



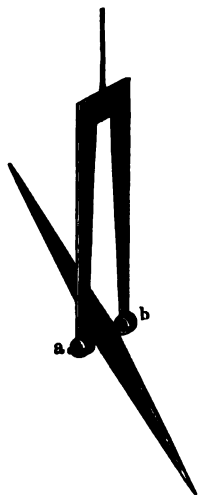
Hufeisenmagnets gehalten. Die Eisenteilchen ordnen sich dann zu Ketten und Schnüren an, deren Verlauf **Kraftlinien des magnetischen Feldes** des Hufeisenmagnets direkt sichtbar macht. Hierbei stellt die Ebene des Kartons je einen Schnitt durch das Kraftfeld dar; bringt man also den Magnet in verschiedene Lagen zum

rechten Karton (z. B. dessen einen Schenkel unter, den anderen unter den Karton u. s. f.), so ergibt sich aus sämtlichen Gestalten der Linien nicht nur ein zwei-, sondern ein dreidimensionales Bild des Feldes. (Fig. 479 zeigt die Kraftlinien in der Ebene der Enden eines Hufeisenmagnetes mit flachen, Fig. 480 die eines mit runder Schenkeln.)

Die Einstellung der einzelnen Spänchen erfolgt zunächst ähnlich wie die der Blöcke (vergl. Fig. 76, S. 104) im einfachen oder zusammengesetzten Kraftfelde stützendes Massen; zur Anziehung und Abstoßung aber, welche jedes Teilchen eines Spänchens durch jedes magnetische Teilchen des auf sein Kraftfeld zu untersuchenden Magnets erfährt, kommt noch die Magnetisierung durch Verteilung der einzelnen Nachbarteilchen untereinander. Versuch über die magnetischen Ketten nach §. 490, § 145.

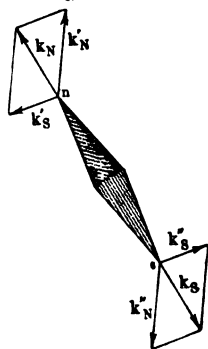
Um eine Magnetnadel möglichst frei beweglich zu machen, bringen wir eine durch ihren Schwerpunkt gehende horizontale Achse an und lassen die sie tragende Schere einen vertikalen Faden von möglichst geringer Torsion drehen (Fig. 481). (Über die Ausgestaltung dieser einfachen, aber wenig empfindlichen und verlässlichen Vorrichtung zum Inklinatorium vergl. § 146.) — Denken wir uns sehr viele solcher Nadeln an die verschiedensten Stellen in die Nähe der Erde gebracht, so geben uns die Richtungen der Nadeln selbst wieder die Kraftlinien des magnetischen Feldes der Erde an. Bringen wir die Nadel an die verschiedenen Punkte eines eisenfreien Zimmers, so ist alle Richtungen, die die Nadel annimmt, zueinander parallel; was wir schon aus den im Vergleiche zu den Dimensionen des Zimmers riesigen Dimensionen des Erdkörpers klarlich finden. Diese Vorstellung, daß die von seiten der Erde auf je eine Nadel ausgeübten Kräfte zueinander parallel seien, wird bestätigt durch

Fig. 481.



Versuch 5: Ein Magnet beliebiger Form wird mittels einer Korkleibe (eines Uhrglases) auf Wasser oder Vaselineöl schwimmend erhalten; er nimmt dann durch bestimmte Drehung wagrechter Ebene eine bestimmte Stellung zur Erde annähernd in der Richtung Nord-Süd an, empfängt aber hierbei keine fortschreitende Bewegung (etwa gegen Norden oder gegen Süden). Es kann also an dem Magnet nur ein Polpaar, nicht eine translatorisch wirkende Resultierende angegriffen haben.

Fig. 482.



Das an dem drehbaren Magnete angreifende Kräftepaar können wir uns dann so zu stande gekommen denken (Fig. 482): In n , bzw. s greift die Resultierende k von der Erde ausgehenden nord-, bzw. südmagheti-

sehen Kräfte an, und die beiden Kräftepaare ($k'_N k'_S$) und ($k'_N k'_S$) setzen sich in einem resultierenden Paare ($k_N k_S$) zusammen. — Erst auf jene Erscheinung und diese Erklärung gründet sich also die strenge Definition:

Pol eines Magnets heisst der Mittelpunkt der Resultierenden aller auf den Magnet gleichsinnig parallel wirkenden magnetischen Kräfte eines homogenen magnetischen Kraftfeldes.

Die durch die beiden Pole begrenzte Strecke heisst die **magnetische Achse** des Körpers.

Diese Strecke fällt der Länge und der Richtung nach bei Magnetnadeln mehr oder minder annähernd zusammen mit dem Abstände der beiden Spitzen voneinander. Bei einem cylindrischen Magnetstabe von regelmässiger Magnetisierung liegen die Pole nicht in den Mittelpunkten der Stirnflächen, sondern etwa um $\frac{1}{12}$ der Stablänge tiefer (sie fallen auch nicht zusammen, wie bei anders gestalteten Magneten, im allgemeinen nicht ganz zusammen mit den Maximis der magnetischen Wirkung an der Oberfläche, wie sie sich in der stärksten Tragkraft und dem Verlauf der Kraftlinien im äusseren Felde kund gibt). — Wir werden im folgenden einen Magnet mit den Polen n, s und n', s' bezeichnen.

Über die Mafsgröfsen Polstärke und magnetisches Moment vergl. § 146.

Fig. 483.



magnetisches Moment = Polstärke \times Abstand der Pole. Für das Nächstfolgende genügt die Festsetzung der Polstärke, ob an zwei oder mehreren Stellen der Magnet vorhanden bleibt. Es zeigt sich dann, dass die Polstärke je eines Magnets immer gleich bleibt; der strengere Beweis hierfür liegt weiter unten in dem Ausbleiben translatorischer Bewegungen beim obigen Versuch 5. —

Zwei nach Fig. 483 miteinander verbundene Magnetnadeln bilden ein (ganz oder annähernd) astatisches Nadelpaar, auf das die Erde kein (oder ein beliebig kleines) Drehmoment ausübt. —

Dass es nicht möglich ist, die nordmagnetischen Teile eines Magnets von den süd magnetischen in ähnlicher Weise zu trennen, wie etwa in Versuch 4, § 132 die positiv elektrische Hälfte des Metallzylinders von der negativen, zeigt

Versuch 6: Eine Stricknadel, die sich bei Bestreuung mit Eisenpulver an beiden Enden gleich stark magnetisch, in der Mitte unmagnetisch zeigte, wird daselbst zerbrochen; die früheren Pole bleiben, an der Bruchstelle aber zeigen sich jetzt zwei neue Pole, so dass jede der beiden Nadelhälften wieder ein vollständiger Magnet ist. Ebenso bei weiterer Zwei-, Vier- . . . teilung.

Es ist hierbei nicht nötig, anzunehmen, dass beim Zerbrechen die zwei neuen Pole erst entstanden seien, sondern, wenn sie in gleicher Stärke schon vorhanden gewesen waren, mussten sie sich in ihrer Wirkung nach aufheben. — Prüft man bei einer in 2, 4, 8 . . . Teile zerteilten Stricknadel die einzelnen Bruchstücke auf die verhältnismässige Stärke der Pole, so erweisen sie durch hinreichend feine messende Versuche die mittleren Stücke sogar als die stärkeren, und das Auftreten stärkerer Kräfte gegen die Enden des Stabes im ganzen stellt sich hierbei als gröfserer relativer Unterschied der an sie

inneren Kräfte heraus (LA 184). Ähnlicher Versuch mit Zusammenbacken von LA 184. Ampulver zu einem Stäbchen im Kraftfelde eines starken Magnets.

Solche Versuche über das Zerteilen von Magneten und Wiederaussetzen Lörer aus kleineren führte zur Hypothese von den Elementarmagneten, auf die Hypothese zurückzukommen ist bei AMPÈRES Theorie der elektrischen Ströme, § 147. — Unabhängig von allen Hypothesen und Theorien über „Konstitution der Magnete“ sind die folgenden Mafsbestimmungen magnetischer Kräfte und magnetischer Potentiale.

143. Coulombs Gesetz für magnetische Kräfte. Mafs der magnetischen Menge (Polstärke).

Schon ganz rohe Versuche zeigen, dafs der Pol eines Magnets auf den einer Magnetnadel um so kräftiger wirkt, je kleiner der Abstand der Pole voneinander ist und je kräftiger (d. h. zunächst je tragfähiger) dieser Magnet selbst — Ganz analog dem Gesetze für elektrische Kräfte gilt denn auch

Coulombs Gesetz für magnetische Kräfte: $f = \frac{\mu_1 \mu_2}{r^2} \text{ Dyn} \dots (1)$

Einheit der magnetischen Menge oder Einheit der Polstärke (PstE) ist hierbei die Stärke eines Pols, der auf einen ihm gleichen Pol im Abstand mit einer Kraft von 1 Dyn abstoßend wirkt.

Übt auf einen mit 1 PstE versehenen Punkt ein anderer Punkt mit 1 cm Abstand eine Abstofsung von μ_1 Dyn aus, so schreiben wir diesem eine Polstärke von μ_1 PstE zu. Nordmagnetische Mengen werden als $+\mu$, süd magnetische als $-\mu$ bezeichnet.

Da es bei den meisten magnetischen Erscheinungen nur auf das Drehungsstreben eines Magnets, also nicht auf die an seinen Polen angreifenden Kräfte, sondern auf die an ihm angreifenden Kräftepaare ankommt, so ist für jeden Magnet als Mafsgröfse noch besonders die folgende wichtig:

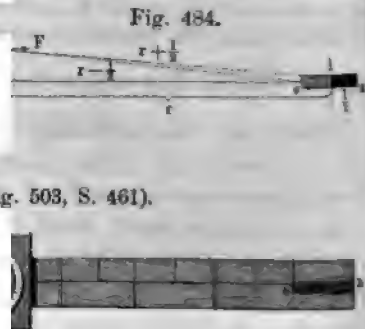
Das magnetische Moment eines Magnets wird gemessen durch das Produkt aus der Polstärke μ und dem Abstände der Pole l ; $M = \mu l$ (Dyn, cm).

Auch Coulombs Gesetz für Magnete ist ein Elementengesetz, indem von dem „Abstände“ r nur für je zwei magnetische Punkte die Rede sein kann; ist also wieder nicht unmittelbar, ja sogar nur mittels noch gröfserer Umwege darweisbar als das für elektrische Ladungspunkte. Denn während wir zwei gleichen wenigstens mit nur je einer Art Ladung versehen können, mufs man die unendlich vielen magnetischen Punkte je eines Magnets zu mindestens zwei Punkten zusammengefafst denken. Wenn also z. B. ein Magnet mit den Polen N, S auf einen mit den Polen n, s wirkt, so setzen sich mindestens die vier Wirkungen von N auf n, S auf n, N auf s und S auf s zu einer Gesamtwirkung zusammen, die wir nun erst wirklich beobachten können. — Die ersten Versuche werden also diejenigen sein, bei welchen zwei so lange Stäbe wählt und so gegeneinander gestellt werden, dafs gegenüber der Wirkung z. B. N auf n die drei übrigen Wirkungen sehr klein werden. Ist dann z. B. ein magnetisierter Stricknadel (n, s) an einem Kokonfaden in wagrechter Ebene aufhängbar und wird dem Pole n der Pol N eines langen Magnetstabes

genähert, so erweist sich bei 2, 3, 4 . . . mal so großem Abstände r die Kraft als annähernd 4, 9, 16 . . . mal so klein, wie man entweder aus den statischen Wirkungen (dem Ablenkungswinkel der Nadel bei gegebenem Torsionsmoment des Fadens) oder aus kinetischen Wirkungen (Anzahl der Schwingungen, die sie, aus der jeweiligen Gleichgewichtslage ein wenig verschoben, unter dem Einfluß von N ausführt) erschließen kann. Genauer als diese direkte induktive Methode ist folgende „umgekehrte induktive Methode“ (log. Anh., Nr. 36):

Anh. 36. Aufgabe: Einer Magnetnadel ($\nu\sigma; \lambda$) vom magnetischen Moment $\mu\lambda = M_1$ stehe ein Magnetstab ($n, s; l$) vom magnetischen Moment $ml = M$ so gegenüber, daß die magnetische Achse ns senkrecht zur magnetischen Achse $\nu\sigma$ ist („erste Hauptlage“; vergl. **LA 185**). Rechnung für die „zweite Hauptlage“ **LA 185**). Es sei λ klein gegen l und l sei klein gegen den Abstand r . In der Mittelpunkte beider Magnete. Mit welcher Kraft F wirkt der ganze Magnetstab auf je einen Pol der Nadel; und welchem Kräftepaar λ der ganze Magnetstab M die ganze Magnetnadel?

Fig. 485 (vergl. Fig. 503, S. 461).



Wir setzen in ersten Annäherungen: Abstand $\nu s \approx r - \frac{l}{2}$, $\nu n \approx r + \frac{l}{2}$

LA 186. Auf den Pol ν wirkt dann die resultierende Kraft (**LA 186**).

$$F' = \frac{\mu m}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{\mu m}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \mu m \frac{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{l}{2}\right)^2}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} \approx \mu m \frac{2lr}{r^4} = 2\mu \frac{ml}{r^3} = 2\mu \frac{M_1}{r^3} \quad (2)$$

Da an jeden der beiden Pole der Nadel der ganze Magnetstab mit gleichem aber entgegengesetzten (annähernd antiparallelen) Kräften F wirkt, deren Angriffslinien den Abstand λ haben, so ist das Moment dieses Kräftepaares

$$F \cdot \lambda = 2\mu \frac{M}{r^3} \cdot \lambda = 2 \frac{\mu \lambda \cdot M}{r^3} = 2 \frac{M_1 \cdot M}{r^3} \quad \dots \quad (3)$$

Die Gl. (2) besagt also: Wenn für die magnetischen Kräfte je zwei magnetischer Punkte das Gesetz der verkehrten zweiten Potenz des Abstandes gilt, so muß für die gesamte Wirkung eines Magnetstabes auf einen magnetischen Punkt das Gesetz der dritten Potenz des Abstandes gelten. Die Gl. (3) besagt, daß, wenn wir der Magnetnadel ($\nu\sigma; \lambda$) denselben Magnetstab in der ersten Hauptlage auf die Abstände $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \dots$ nähern, die Nadel ein Drehbestreben von den verhältnismäßigen Größen 8, 27, 64 . . . zeigen wird. — Umgekehrt schließen wir dann: Da sich durch Versuche zeigen läßt, daß eine solche Zunahme des Drehbestrebens der ganzen Magnetnadel nach der verkehrten dritten Potenz eintritt, so ist hiermit, und erst hiermit, bewiesen, daß

je eines magnetischen Punktes μ auf einen magnetischen Punkt m ... mal so groß gewesen ist.

Ohne solche mittelbaren Bestätigungen des Coulombschen Gesetzes erfordern auch die Berücksichtigung des weiteren Umstandes, daß wir alle magnetischen Versuche nur im magnetischen Felde der Erde vornehmen können wie die aeromechanischen Versuche nur auf dem Grunde des Luftmeeres vorgenommen werden können, § 43). Bei der wirklichen Durchführung jener Versuche, die GAUSS vorgenommen und durch die er das Gesetz der Induktion und somit auch das der zweiten Potenz bestätigt gefunden hat, bildet sich die magnetische Richtkraft der Erde (genauer die „Horizontalkomponente des Erdmagnetismus“) diejenige Maßgröße, an der wir das Drehbestreben der Magnetnadel zu messen haben. Wir kommen daher zu messenden Versuche über die magnetischen Kräfte zwischen zwei Magnetpolen § 146 zurück.

Potential und Kraftlinien im magnetischen Felde.

Nach dem Coulombs Gesetz für magnetische Kräfte von dem für elektrische Kräfte nur durch die Art der Mengen μ und ϵ unterscheidet, so ist auch die Berechnung für das elektrische Potential $V = \frac{\epsilon}{r}$ Erg per 1 st. LE sofort übertragbar auf das

magnetische Potential $V = \frac{\mu}{r}$ Erg per 1 PstE.

Wegen der Ähnlichkeit der geometrischen Tafeln II a—d (bei S. 109) mit dem magnetischen Bilde der Ketten und Schnüre zwischen den Polen eines Magneten ist es nicht verwunderlich, daß diese physikalischen Kraftlinien an Magneten zunächst nichts anderes sind als die Aufeinanderfolgen von Normalen gegen die magnetischen Äquipotential- oder Niveauflächen. — Es hat aber FARADAY seinen magnetischen Kraftlinien eine fruchtbare physikalische Hypothese angedeutet, nach welcher wir uns den Zustand (des Aethers?) um jeden solchen Körper herum ähnlich dem Zustand gespannter elastischer Fäden vorstellen könnten. In dem Medium, das einen magnetischen Körper umgibt, herrschen hiernach längs der Kraftlinien **Zugspannungen** (vermöge der Kraftlinien sich zu verkürzen streben). Der einfachste unter diesen Vorgängen ist der, daß wir zwei einander anziehende Pole vor uns zu ziehen suchen; wären hier die beiden Pole durch ein System von elastischen Schnüren von der Gestalt der zwischen ihnen verlaufenden Kraftlinien verbunden, so würde das Auseinanderziehen der Pole in den Schnüren Widerstände bewirken und infolge der elastischen Gegenwirkung würden die Pole einander zu nähern suchen. — Überdies nahm FARADAY an, daß senkrecht zu den Kraftlinien normalen Richtungen (also nach allen Richtungen längs der Niveauflächen) **Druckspannungen** herrschen. — Jene Zugspannungen erklärte noch weiter eindringend MAXWELL als Folgen von Wirbelbewegungen des Aethers; einiges hierüber in dem folgenden § 157. Bis dahin wollen wir, wo von den magnetischen Kraftlinien die Rede gemacht wird (ohne die in der Tat heutzutage z. B. kein Konstrukteur von Dampfmaschinen auskommt), die Darstellung vollständig unabhängig halten von allen besonderen physikalischen Hypothesen FARADAYS und MAXWELLS. Vielmehr sollen die magnetischen Kraftlinien, ebenso wie die elektrischen (§ 136 ff.)

und die Kraftlinien der Schwere (§§ 20, 24) nur über die Richtungen und Gröfsen der magnetischen Kräfte des Kraftfeldes und über die entgegen diesen Feldkräften zu leistenden Arbeiten Aufschluss geben.

Das einfachste Beispiel hierfür bietet ein (isoliert gedachter) Magnetpol. Indem von ihm Kraftlinien nach allen Richtungen des Raumes in Gestalt gerader Halbstrahlen weggehen, so wird COULOMBS empirisches Gesetz der Abnahme der magnetischen Kraft mit dem Quadrate des Abstandes in der Sprache der Kraftlinien-Vorstellung sich so erklären: Denken wir uns um den Pol als Mittelpunkt zwei Kugeln von den Radien r cm und R cm herumgelegt, so werden diese Kugelflächen im Verhältnisse $\frac{1}{r^2} : \frac{1}{R^2}$ dichter, bzw. weniger dicht von den magnetischen Kraftlinien durchsetzt. Also ganz dieselbe Erklärung, wie die für das Abstandsgesetz der Lichtintensität (§ 117). — Wie aber die Lichtstrahlen nicht als physikalisch isolierte Gerade, sondern als blofs gedachte Gerade innerhalb stetiger Lichtbüschel zu denken sind, so sind auch die magnetischen Kraftlinien (Die Ketten und Schnüre von Eisen, die die Kraftlinien bilden, sind allerdings je zweier benachbarter Ketten vorur eine an sich willkürliche, aber sehr FARADAY die Kraftlinien in bestimmter schon früher feststehenden Maße der magnetischen Kräfte angegebene Beziehung zwischen der Kraftstärke an irgend einer Stelle eines magnetischen Kraftfeldes wird dargestellt durch die Anzahl der daselbst durch 1 cm² Kraftlinien (LA 68). — In einem homogenen magnetischen Kraftfeld sind die Kraftlinien einander parallel und überall gleich dicht geschart.

Die Feldstärke an irgend einer Stelle eines magnetischen Kraftfeldes wird dargestellt durch die Anzahl der daselbst durch 1 cm² Kraftlinien (LA 68). — In einem homogenen magnetischen Kraftfeld sind die Kraftlinien einander parallel und überall gleich dicht geschart.

LA 68.

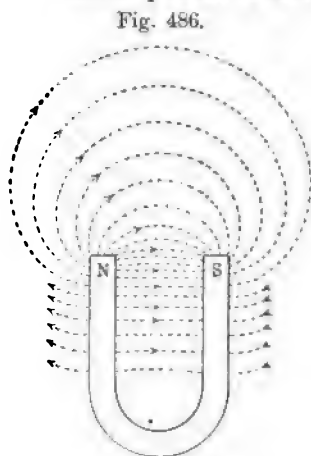


Fig. 486.

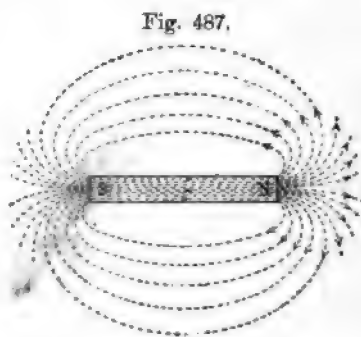


Fig. 487.



Fig. 488.

Den Kraftlinien wird auch eine bestimmte Richtung zugeschrieben, nämlich die, nach der der Nordpol einer in das magnetische Feld gebrachten (und das Feld nur unmerklich störenden) Nadel weist (vergl. Figg. 486, 487 und 488).

icht im Hinblick auf diese Festsetzung auch von einem „Verlauf der Kraftlinien“, ja sogar von einem „magnetischen Strome“, analog den Stromen, als dessen Richtung die des positiven Stromes festgesetzt werden kann, dessen man positive Ladung von Stellen höherer zu Stellen niedriger Ladung denkt. Aber weder mit dem Ausdruck „magnetischer Strom“ noch mit dem der „Richtung“ der Kraftlinien wird etwa die Vorstellung eines magnetischen Fluidums verbunden. Dieser Unterschied der Hypothese ist in der Erfahrungstatsache begründet, daß man die Nord- und Südpole nicht voneinander trennen kann und ihnen insofern auch keine relative Beweglichkeit beizulegen braucht, wie den elektrischen Fluidis.

Magnetisieren durch Verteilung. Arbeitsleistungen beim Magnetisieren und Entmagnetisieren. Paramagnetische und diamagnetische Stoffe.

1. Ein Nagel aus weichem Eisen (ein festgeklebter Magnetpol) sei dadurch als unmagnetisch erwiesen, daß ein Eisenstück nicht haften bleiben. Sie haften aber sogleich z. B. an der Spitze, wenn an den Nagelkopf ein kräftiger Magnetpol angebracht wird. Größeren Abständen entspricht schwächeres Anziehen, wie sich schon aus den Mengen der haftenden Eisenstücke deutlicher daraus zeigt, daß eine in gleichbleibendem Abstand von der Nagelspitze gebrachte Magnetnadel immer lang- und kurz bleibt. Daß nicht etwa die Schwingungen nur durch den Abstand des Nadelpols vom Pol des Magnets ohne wesentliche Mitwirkung des Eisens verursacht sind, zeigt an die Nadel bei unveränderter Entfernung vom Pol einmal mit, einmal ohne Zwischenschaltung des Eisens läßt. — Kettchen nach Fig. 490.

Fig. 490.

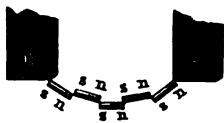


Fig. 489.



Magnetisieren durch Verteilung: Unmagnetisches weiches Eisen wird im magnetischen Kraftfelde selbst ein Magnet, und es tritt an der dem Pole zugewendeten Seite den ungleichnamigen Pol an, an der abgewendeten Seite den gleichnamigen Pol an.

Die genauere quantitative Beschreibung ergibt sich mit Hilfe der Zusammenhänge zwischen den Potentialen des durch Verteilung magnetisierenden und magnetisierten Eisens. Weiches Eisen gleicht im raschen Annehmen der Verteilung einem Leiter bei der elektrostatischen Influenz; doch gilt hier nicht eine so einfache Bedingung wie die elektrostatische Grundbedingung nach § 137, daß die magnetischen Potentiale im Innern des weichen Eisens und an dessen Oberfläche konstant sein müssen. Für das Verhalten des weichen Eisens in irgend einem magnetischen Kraftfelde ist übersichtlich durch die Beachtung der Gestaltsveränderungen, die die Kraftlinien des Feldes erfahren, wenn Körper aus weichem Eisen bestimmter Form hineingebracht werden. Schon bei obigem Gegenversuche läßt sich der Einfluß des zwischen den Polen des Magnets eingeschalteten Eisens so beschreiben, daß durch den

Nagel mehr Kraftlinien des Poles gegen die Nadel hin gelenkt sind. Ein dieses Verhalten noch näher erläuterndes Bild ist das: Die mp, no (Fig. 491) stellen den Verlauf von Kraftlinien in einem homogenen dar. Durch das Prisma $abcd$ aus weichem Eisen werden sie gegen diesen hin abgelenkt. Wäre nun mp, no ein Wasserlauf, überall gleich dicht mit

Fig. 491.

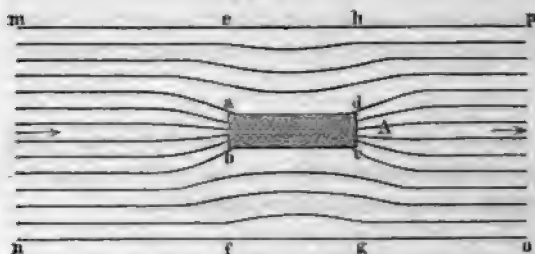


Fig. 492.

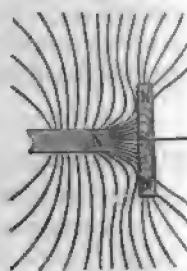
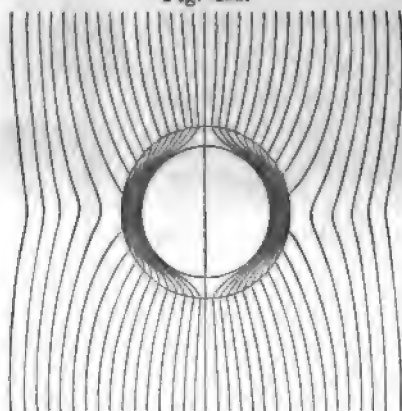


Fig. 493.



bewachsen, und nur die St vom Schiffe gereinigt, so w infolge des geringeren Wb eine größere Stromgeschwind treten, was verlangt, daß fäden gegen ab hin zusammen werden. Ähnlich zeigt Fig. 4 eine Platte (ähnlich Fig. 493) cylindrische Röhre) aus weiche eine „Schirmwirkung“ ausü Tat gibt es zwar gegen m Kräfte nicht ebenso „Isolat gegen elektrische; aber ein aus weichem Eisen schützt Galvanometernadel annäher die Wirkungen äußerer Ei und Magnete.

Auch **Stahl** wird durch Verteilung magnetisiert und in der nämlichen Lage der Pole wie weiches Eisen. Während Eisen schnell magnetisch und nach Entfernung des vert Magnets wieder schnell unmagnetisch (genauer: viel magnetisch, siehe unten) wird, wird Stahl langsam, aber d magnetisch. — Dauernde **künstliche Magnete** lassen sich a aus weichem Eisen, sondern nur aus gutem Stahl herstellen.

Das Magnetischwerden von Stahl durch Verteilung geschieht rasch der Stahl in der Nähe des magnetisierenden Poles erschüttert raschesten, wenn der Stahlstab der Länge nach mit dem Pole „gestrich Das Stabende, wo der Pol abgehoben wird, zeigt sich diesem ungleich Prüft man eine Stricknadel nach 2-, 5-, 10-, 20maligem Streichen, so f daß allmählich ein Zustand „magnetischer Sättigung“ erreicht wi Sättigungspunkt kann in einem sehr kräftigen magnetischen Felde, z

neten, vorübergehend überschritten werden, nach Aufhören der magnetischen Kraft geht aber dann die Magnetisierung des Stahles zu jenem Punkte zurück). Prüft man beim Magnetisieren durch Streichen einen Strichen jedesmal auch den Streichmagnet, so zeigt sich keine Abnahme (ja öfters sogar eine kleine Verstärkung; letztere rührt her von der Induktion, die der durch Streichen magnetisch gewordene Körper auf den Streichmagnet ausübt), falls dieser noch nicht bis zur Sättigung magnetisiert gewesen war, für haben also keinen Grund, eine „Magnetisierung durch Mitteilung“ anzunehmen, sondern wir werden die Hypothesen zur Erklärung des Magnetischseins so einzurichten haben, daß z. B. der Stahl durch Streichen magnetische Eigenschaften gehabt habe, sie aber nach aufhören der Streichung wieder verloren geben konnte. Nach der besonderen Hypothese der „Elementarmagnete“ (s. die Ausgestaltung durch Ampères Hypothese der Elementar-Kreisströme, § 147), hat die Magnetisierung durch Verteilen mit der durch Streichen gemeinsam, daß die schon vorhandenen Elementarmagnete durch den Streichenden Körper nicht erst erzeugt, sondern nur gerichtet, d. i. so angeordnet werden, daß ihre Nordpole nach der einen, die Südpole nach der anderen Seite (und zwar alle oder nur ein Teil der Pole, je nachdem die Sättigung erreicht oder nicht).

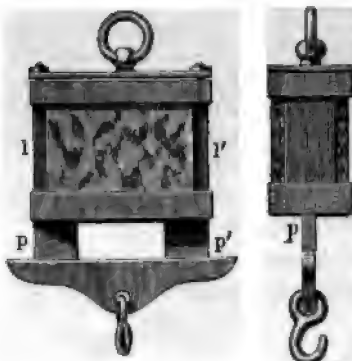
Da als noch natürliche Magnete eine Rolle spielten, suchte man ihre Kraft zu verstärken durch die Anbringung von „Armaturen“, bestehend aus einem **Anker**, beides aus Eisen (Fig. 494). — Daß man natürlichen Magneten außer der Form von geraden Stäben auch die am häufigsten verwendete der Hufeisen zugeteilt hat, hat darin seinen Zweck, indem man an die beiden Pole geraden Magneten seitens beider Pole entgegengegesetzte Magnetismen induziert werden, die Pole verstärkend zurückziehen wird durch die gegenseitige Anziehung der Polpaare die Tragkraft (— auch schützt jeder Magnet vor allfälliger Schwächung durch Verteilungswirkung seitens des Induktors).

Die Tragkraft der Magnete wächst zwar mit deren Größe, aber ihr nicht einfach proportional nach HÄCKEL nur etwa mit der Potenz $\frac{2}{3}$.

Methoden zur Herstellung künstlicher permanenter Magnete haben an Wichtigkeit verloren, seitdem mit der Leichtigkeit, mächtige elektrische Ströme zu erzeugen, fast überall Elektromagnete angewendet werden, wo es auf magnetische Wirkungen ankommt. — Daher im folgenden nur noch einige Bemerkungen über Elektromagnete gemeinsam und von allen Hypothesen über das Magnetismus unabhängig Bestimmungen über

Leistungen beim Magnetisieren und Entmagnetisieren. — War z. B. ein Stahlstab zuerst unmagnetisch und erhält durch Streichen mit einem Nordpol N an dem Ende, von dem N weggezogen wird, einen Südpol s , so kostet das Wegziehen des Poles N

Fig. 494.



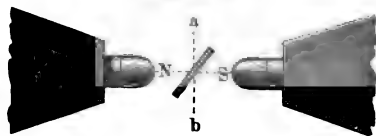
von s mehr mechanische Arbeit, als wenn dieses Ende des Stahlstabes noch unmagnetisch gewesen wäre. — Ähnlich nun, wie wir uns vorstellen, daß die sich immer erneuernde Ladung des Elektrophordeckels durch die bei seinem Abheben entgegen der Anziehung seitens des Harzkuchens geleistete Arbeit hervorgebracht sei, haben wir uns auch die Magnetisierung eines Stahlstabes durch die beim Streichen geleistete Arbeit bewirkt zu denken.

Ein magnetischer Körper, an dessen magnetischem Zustande sich nichts ändert, leistet weder Arbeit, noch verbraucht er solche. Auch der mächtigste Magnet, dessen Tragkraft wir anstaunen, ist hierin nur zu vergleichen etwa der Erde, welche die mächtigsten Gesteinsblöcke und Meere an ihrer Oberfläche durch ihre Anziehung festhält: Arbeit aber wird hierbei noch nicht geleistet. — Dabei ist auf ein magnetisches *perpetuum mobile* ebenso wenig zu hoffen wie auf ein mechanisches, bei dem die Schwere alle Arbeit leistet; denn im konstanten Zustande würde bei der Rückkehr der Maschine keine Arbeit verbraucht.

Aber auch wenn man z. B. den Eisenstab durch Heranziehen von Eisen Arbeit verrichten ließe und ihn dann durch Erhitzen bis zur Glühtemperatur entmagnetisierte, so daß man ihn dann entfernen könnte, ist nicht auf eine Umgehung des Gesetzes von der Erhaltung der Energie zu hoffen. Es wurde nämlich umgekehrt auf Grund dieses Gesetzes vorausgesehen, daß es mehr Arbeit kosten werde, einen magnetisierten Stahlkörper auf die ihm den Magnetismus nehmende Glühtemperatur zu bringen, als einen unmagnetisierten auf die gleiche Temperatur; und Versuche haben diese Erwartung bestätigt. — In viel auffallender Weise noch bestätigen sich die wichtigen Beziehungen für die beim Magnetisieren und Entmagnetisieren zu verrichtende Arbeit, wenn diese Arbeit nicht die Form von Wärme, sondern die von elektrischen Strömen hat: so namentlich bei den Elektromotoren und bei der Magnetoinduktion; vergl. III. und V. Abschnitt.

Paramagnetische und diamagnetische Stoffe. — Versuche mit Stäbchen aus Eisen, reinem Nickel . . . stellen sich zwischen den Polen

Fig. 495.



eines Magnets „axial“ (z. B. *a*) oder der „äquatorialen“ Lage *ab* in die Richtung *NS*, Fig. 495), entsprechend dem Verlaufe der Kraftlinien vom Süd- zum Nordpol des Magneten. Das gleiche Verhalten zeigen zwischen

den Polen sehr starker Magnete (Elektromagnete) auch Stäbchen aus Platin, Aluminium, Kalium, Natrium, Silicium . . ., die **paramagnetisch** Stoffe heißen (— dies also nur ein anderer Name für die im gewöhnlichen Sinne „magnetisierbaren“ Stoffe).

Im Sinne der Kraftlinientheorie heißen die paramagnetischen Stoffe auch „magnetisch permeabel“, d. h. für die Kraftlinien durchlässig und zwar in dem oben durch Fig. 491 dargestellten Weise. Aus dieser Vorstellung ergibt sich auch ein Maß für die Magnetisierbarkeit verschiedener Stoffe. Gesetzt nämlich innerhalb eines homogenen Kraftfeldes (z. B. dem der Erde oder zwischen den

hen einer Dynamomaschine) sei H die Feldstärke, wenn sich daselbst m^2 befindet (fast ebenso bei Luft), und es gingen also durch eine normal stellung der Kraftlinien gelegte Ebene von 1 cm^2 daselbst H Kraftlinien. Dann der bestmagnetisierbare Stoff, nämlich weiches Eisen, an diese Stelle it, so gehen durch 1 cm^2 2000 bis 3000 mal so viele Kraftlinien als durch der benachbarten Stellen des Vakuums (der Luft); bei Nickel bis 300 mal, bei bis 170 mal so viel. — Über die Mithberücksichtigung der erdmagnetischen und die Methoden zu ihrer Ermittlung vergl. die erst im folgenden § zu rden Berechnungen (von M und H).

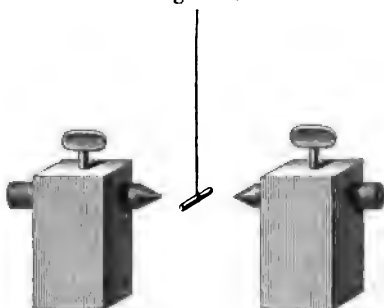
werden statt Hufeisenmagnet und Anker die beiden Hälften eines ringförmigen aus weichem Eisen, die möglichst stark elektromagnetisch erregt sind, auf genseitige Anziehung ihrer Stirnflächen geprüft, so ergibt sich diese als dem Gewichte von etwa $12\frac{1}{2}$ bis $18\frac{1}{2}$ kg per cm^2 . — Das Maximum der isierbarkeit für harten Stahl ist etwa 37 Proz. geringer als für weiches Eisen.

Remanenter Magnetismus. Hysteresis. — Beim Versuch nach 89 bleibt das weiche Eisen meistens noch merklich magnetisch, der erregende Magnet schon wieder entfernt ist. Auch ein aus weichem Eisen, der durch einen Strom elektromagnetisch war, hält den ihn unmittelbar berührenden Anker noch fest, em der Strom schon aufgehört hat; wird aber der Anker nun rissen oder weggeschoben, so haftet er nicht mehr am Kern. daher, wie z. B. bei Telegraphenapparaten, der Anker rasch ab elnd sich dem Kerne nähern und wieder von ihm entfernen, so s zwischen ihnen nicht zur Berührung kommen.)

Diese Erscheinungen des „**remanenten Magnetismus**“ bilden nur einen Teil igen Tatsachen, die man als **Hysteresis** bezeichnet: Genaue Messung der jeweiligen Feldstärke entsprechenden Magnetisierung durch Verteilung in unen weichem Eisen zeigt nämlich, daß, wenn die Feldstärke von Null an nt, die Magnetisierung (wie zu erwarten) immer stärker wird, aber nicht h proportional; nimmt dann die Feldstärke wieder bis Null ab, so wird en nicht ebenfalls ganz unmagnetisch, sondern dies erst in einem entgegen: magnetischen Felde (es fallen also die „Magnetisierungskurven“ für zu- nehmende Magnetisierung nicht zusammen). — Diese Tatsachen sind prak- zu berücksichtigen, wenn, wie in Wechselstrommaschinen, Eisen in rascher mit entgegengesetztem Vorzeichen magnetisiert werden muß.

Diamagnetische Stoffe sind ut, Antimon, Zink, Zinn, Queck-, Blei, Silber, Kupfer, Gold; fel, Phosphor; eisenfreies Glas, ristall. Sie zeigen ein den para- stischen gegensätzliches Ver-, indem sich z. B. ein Wis- ibchen, zwischen die Pole rkräftigen Elektromagneten auf- gt, „äquatorial“ stellt

Fig. 496.



(Fig. 496, a. v. S.), d. h. so, daß die Achse des Stäbchens normal steht gegen die Kraftlinien des Feldes.

Man hat sich hier vorzustellen, daß die Kraftlinien den diamagnetischen Stoffen ausweichen, also z. B. durch 1 cm³ des Wismuts nur 0,9998 mal so viele Kraftlinien gehen als durch 1 cm³ der benachbarten Stellen des Vakuums (der Luft).

Da bei Anwendung hinreichender Feldstärken jeder Stoff entweder paramagnetisch oder diamagnetisch reagiert, so müßte man die Magnetisierbarkeit zu den „gemeinen Eigenschaften“ der Körper zählen, trotzdem man sie lange Zeit für eine noch speziellere als die Elektrisierbarkeit, nämlich auf eisenhaltige Stoffe beschränkt gehalten hatte.

§ 146. Das magnetische Kraftfeld der Erde (Erdmagnetismus). — Absolute Maße für irdische Magnete.

Wenn einmal durch die Beobachtung, welche sich innerhalb eines Zirkels, in welchen sich innerhalb eines Zirkels eine Magnetnadel (Fig. 481, S. 455) einstellt, die Erde als ein großer Magnet vorstellt, die Frage nahe, wo die magnetischen Pole der Erde liegen, wie groß ihre Polstärke und sein magnetisches Feld sei. Da aber auf die Erde als auf eine Kugel die Erfahrungen über die Erdmagnetik ohne weiteres übertragbar sind, nehmen, daß diese Pole überhaup-

(es wäre ja eine Anordnung der Pole, die eine Zahl von Folgepunkten oder dergl. annehmen, daß diese Pole überhaupt). — In der Tat schlugen auch die Bemühungen fehl, das magnetische Verhalten der Erde daraus zu „erklären“, daß man sich einen kräftigen, dünnen Magnetstab von annähernd der Länge und Richtung eines Erddurchmessers dachte, dessen zu berechnende magnetische Wirkung dann den an den verschiedensten Orten der Erde zu beobachtenden Resultaten hätten entsprechen müssen. Etwas befriedigender war die noch ältere Fiktion (aus dem XVIII. Jhdt.), nahe dem Erdmittelpunkte einen kurzen sehr kräftigen Magnet anzunehmen. Diese bessere Übereinstimmung wird begreiflich, wenn wir uns in erster Annäherung die ganze Erde als homogen mit positiv-magnetischen Mengen versehen denken, welche dann nach dem Gesetz über die Wirkung von Kugelmagneten nach außen hin so wirken müßten, als wäre nahe ihrem Mittelpunkte ein Sitz positiver magnetischer Kräfte; und ihm nahe läge auch der negative Pol, als wäre zugleich die ganze Erde homogen mit negativ-magnetischen Mengen versehen.

Um sich aber von allen solchen Hypothesen und Fiktionen unabhängig zu machen und einen den tatsächlichen erdmagnetischen Zustand wiedergebenden mathematischen Ausdruck für sämtliche Punkte der Erdoberfläche zu erhalten, forderte GAUSS, daß an möglichst vielen über die ganze Erde verbreiteten Beobachtungsorten besondere Messungen über die Richtung und über die Stärke der jeweiligen erdmagnetischen Kräfte angestellt würden. Denkt man sich dann einerseits jeden Punkt an, über und unter der Erdoberfläche durch seine geographische Breite φ , seine geographische Länge λ und seinen Abstand r vom Erdmittelpunkte (wo $r \approx R$, der Erdradius) geometrisch bestimmt, andererseits das magnetische Potential V des magnetischen Kraftfeldes der Erde daselbst durch einen algebraischen Ausdruck beschrieben, in welchem außer φ , λ , r noch 24 vorläufig unbestimmte Koeffizienten vorkommen, so lassen sich durch Einsetzung der aus jenen speziellen Beobachtungen gefundenen Werte der Richtung

Die Stärke der erdmagnetischen Kräfte (und hiermit auch die an jenen Beobachtungsorten herrschenden Potentiale) jene 24 Koeffizienten berechnen. Werden auf diese Koeffizienten wieder in die allgemeine Gleichung für V eingesetzt, lassen sich nun auch für solche Orte in der Nähe der Erdoberfläche, für die keine direkten Beobachtungen vorliegen, Richtung und GröÙe der daselbst herrschenden magnetischen Kräfte vorausberechnen. Insoweit auch diese Rechnungen dann durch wirkliche Beobachtungen ihre Bestätigung erlangen, kann der mathematische Ausdruck für V als die vollständige und allgemeine Beschreibung des magnetischen Zustandes der Erde gelten.

In der Tat sind nach dem Plane von Gauss von 1834 an seitens aller Kulturstaaten „Beobachtungsstationen für Erdmagnetismus“ errichtet worden, und es jetzt 34 (davon 20 in Europa) gibt. — Die theoretische Aufgabe dieser Stationen ist, die nötigen Beiträge zu der soeben erörterten vollständigen Beschreibung des erdmagnetischen Zustandes durch eine täglich zu bestimmten Stunden anzustellende Beobachtung der erdmagnetischen Elemente, nämlich Deklination, Inklination und Horizontalintensität zu sammeln. Erst hiermit ist die Grundlage für eine künftige Erklärung des Auftretens der erdmagnetischen Kräfte gegeben (eine Hypothese hierüber vergl. § 147).

Die praktische Bedeutung aller dieser im folgenden noch näher zu schildernden erdmagnetischen Untersuchungen liegt namentlich in der Anwendung der Kenntnisse über das Verhalten der Magnetnadeln zur Orientierung im Seewesen, im Bergwesen, in der Feldmesskunst u. s. f. Ist es z. B. dem Seefahrer, welcher bis dahin unbesuchte Teile der Erdoberfläche (z. B. bei Südpolar-Expeditionen) vordringen will, von besonderer Wichtigkeit, auch für diese Zwecke die jeweilige Deklination auszuweisen; dies gelingt durch Vergleich des den wirklichen Beobachtungen entnommenen Verlaufes der „Isogonen“, Isoklinen und Isohypsen mit um so brauchbareren Annäherungen, je dichter das Beobachtungsnetz über die ganze Erde verbreitet ist.

Mehr im einzelnen sind die bei der Erforschung des erdmagnetischen Zustandes — hiermit aber überhaupt auch erst die bei den meisten Messungen magnetischer Kräfte was immer für paramagnetischer und diamagnetischer Körper im absoluten (nicht bloß relativen) Maße — in Betracht kommenden Griffe, Methoden und Ergebnisse die folgenden:

1. **Deklinationsnadel** nennen wir eine Magnetnadel, die um eine vertikale Achse in horizontaler Ebene drehbar ist: Magnetnadel auf Korkscheibe auf Wasser schwimmend (ähnlich wie beim ältesten chinesischen Kompaß); Nadel mit Achathütchen auf einer vertikalen Achse (Fig. 497; die Nadel ist umlegbar, um Abweichungen der

Fig. 497.

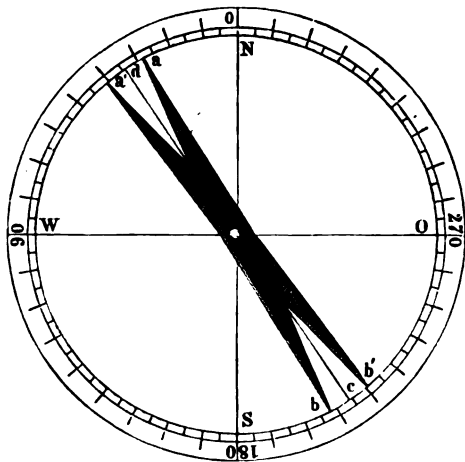


Fig. 498.

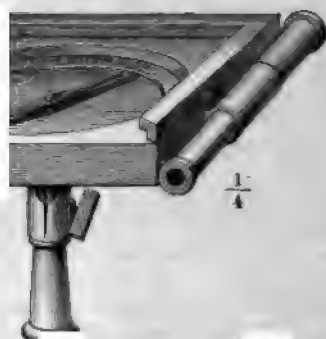


Fig. 499.



magnetischen Achse cd von der Bindungslinie ab der Spitzergieren); Magnetstab an I hängend; Deklinatorium und Magnetometer mit Spiegellesung (Fig. 499). — Kompaß-Bussole (wie „orientiert“ sich der Seemann mittels dieser?).

Deklinationwinkel oder kurz **magnetische Deklination** (in der Seemannssprache „Mißweisung“) nennt man den Winkel, den die magnetische Achse der ruhenden Deklinationsnadel mit dem astronomischen Meridian (der SN-Richtung) einschließt.

Sowie unter geographischem oder astronomischem Meridian in genauer wissenschaftlicher Fassung nicht die in der NS-Richtung verlaufende Linie verstanden wird, sondern die durch diese Gerade gelegte vertikale Ebene (§ 176), so wird auch unter dem magnetischen Meridian diejenige vertikale Ebene verstanden, welche durch die magnetische Achse der ruhenden Deklinationsnadel gelegt gedacht wird. Die Deklination läßt sich also auch definieren als der (Flächen-) Winkel zwischen der Ebene des astronomischen und der Ebene des magnetischen Meridians.

Die Deklination ist im allgemeinen für verschiedene Orte der Erdoberfläche verschieden, wie zuerst COLUMBUS (1492) gelegentlich seiner ersten Fahrt über den Atlantischen Ozean bemerkt hat; siehe unten.

Die Deklination ist aber auch an denselben Orte veränderlich mit der Zeit, indem sie beträchtliche säkulare Variationen im Verlaufe von Jahrzehnten und Jahrhunderten, ferner kleinere regelmäßige Veränderungen mit jährlicher und täglicher Periode, endlich unregelmäßige Störungen zeigt. — Es sei sogleich hier bemerkt, daß ähnliche Veränderlichkeiten auch die beiden anderen der erdmagnetischen Elemente, Inklination und Horizontalintensität, aufweisen.

Für einen bestimmten Zeitpunkt bieten eine zusammenfassende Darstellung die Isogonenkarten (Fig. 504), auf welchen die Orte gleicher mittlerer Deklination

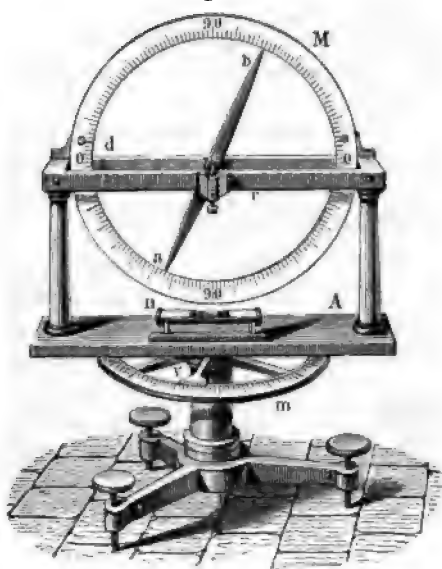
und durch Linienzüge, **Isogonen**, verbunden sind; die Linie der Deklination 0° heißt **Agone**. — Über dreierlei Bedeutungen des Wortes „magnetischer Nordpol“ vgl. unten bei den „Ergebnissen“.

2. Die **Inklinationsnadel** ist um eine durch ihren Schwerpunkt gehende horizontale Achse in vertikaler Ebene drehbar.

Inklinationswinkel oder kurz **magnetische Inklination** heißt der Winkel, den die magnetische Achse der Nadel mit der Horizontalen einschließt, sobald

die Drehungsebene der Nadel zusammenfällt mit dem magnetischen Meridian. — Das **Inklinatorium** (Fig. 500) besteht deshalb im wesentlichen aus einem vertikalen Teilkreis (Inklinationskreis), in dem sich die Inklinationsnadel dreht, und an dem die Inklinationswinkel von einem wagrechten Durchmesser aus abgelesen werden, und einem horizontalen Teilkreis (Deklinationskreis), um dem der vertikale Teilkreis samt der Nadel sich in Azimut“ (§ 175) drehen kann.

Fig. 500.



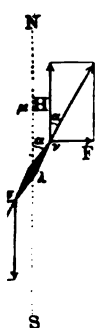
Dafs und warum für die Bestimmung der Inklination die Einstellung des Inklinationskreises in dem magnetischen Meridian wesentlich ist, zeigt folgender

Versuch: Drehen wir langsam den Inklinationskreis des Inklinatoriums (oder auch die Nadel in Fig. 481, indem wir die Schere mit den Fingern fassen und sie um die Vertikale drehen), so zeigt sich, dafs die Nadel um einen Winkel i (für unsere Gegenden rund $i = 65^\circ$) sich senkt, wenn sie sich in der Ebene des Meridians drehen konnte; dafs dagegen die Senkung bis 90° zunimmt, wenn sie sich in der Ebene normal zu der des magnetischen Meridians drehen mußte. — Die Erklärung dieses auf den ersten Anblick überraschenden Verhaltens der Inklinationsnadel liegt darin, dafs von der Gesamtintensität der magnetischen Kraft der Erde, welche in die Richtung der frei beweglichen Magnetnadel fällt, die in die Ebene des magnetischen Meridians fallende „Horizontalintensität“ unwirksam gemacht ist, eben weil die Drehungsachse der Nadel nun nicht mehr frei ist.

Aus den Angaben der geschilderten Apparate gestaltet sich nun die Ermittlung der Richtung und Intensität der magnetischen Erdkräfte wie folgt:

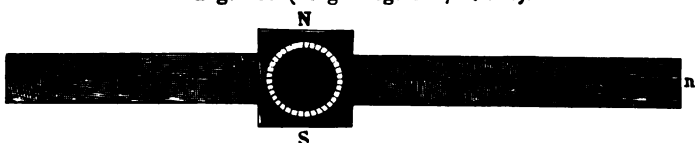
1. Es wird mittels des Deklinatoriums oder Magnetometers die jeweilige Gröfse des **Deklinationswinkels** δ und hiermit die Lage des magnetischen Meridians bestimmt.

Fig. 502.



Da auf dieselbe Nadel (ν , σ ; λ) die Horizontalintensität mit einer Kraft μH längs des magnetischen Meridians wirkt, so nimmt die Nadel ihre Zwischenstellung nach dem Kräfterechteck (Fig. 502) aus μH und der in § 143, Gl. (2) bestimmten Kraft F so ein,

Fig. 503 (vergl. Fig. 485, S. 448).



$$\text{dafs } \operatorname{tg} \alpha = \frac{F}{\mu H} = \frac{2 \mu \frac{M}{r^3}}{\mu H} \text{ wird, woraus } \frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg} \alpha = B.$$

bei erklärt sich das Ausfallen des Faktors μ hier aus der Erwägung, dafs bei ebenen magnetischen Kräften des Stabes und der Erde sie auf Magnetnadeln beliebig schwächerer oder stärkerer Magnetisierung zwar mit kleineren oder grösseren Kräften, aber im selben Verhältnis einwirken werden.) — LA 186. LA 186.

Aus den beiden Gleichungen $MH = A$ und $M:H = B$ ergibt sich schliesslich $M = \sqrt{AB}$ und $H = \sqrt{A:B}$.

Bei den streng wissenschaftlichen Durchführungen der zwei Hauptoperationen, die Aufgabe der mit viel künstlicheren experimentellen Hilfsmitteln ausgestatteten magnetischen Observatorien sind, müssen auch an Stelle der hier nur schematisch und in erster Annäherung durchgeführten Berechnungen viel verwickeltere treten. Sie liefern dann folgende

Ergebnisse hinsichtlich der magnetischen Kraft der Erde: Sollen durch gleichzeitige Beobachtung in einem sehr dicht und gleichmässig über sehr viele Orte der Erde ausgebreiteten Beobachtungsnetz allenthalben die erdmagnetischen Elemente, δ , i , H , bestimmt, liessen sich hieraus auch die Linien gleichen magnetischen Potentials an der Erdoberfläche (magnetische Äquipotentiallinien, Niveaulinien) berechnen und konstruieren. So wurde z. B. die Karte Fig. 505 für das Jahr 1835 (auf Grund eines damals freilich noch sehr mangelhaften Beobachtungsmaterials) gewonnen. — In bezug auf diese Niveaulinien stellen dann die jeweiligen Richtungen der Deklinationsnadel (die nicht zusammenfallen mit den Isogonen oder Deklinationslinien, Fig. 504, aber aus ihnen zu entnehmen sind, siehe unten über „magnetische Meridianlinien“) die Kraftlinien dar, indem sich beide Richtungen überall unter rechten Winkeln schneiden (Anh., Nr. 28). Anh. 28. An jeder Stelle der Erdoberfläche herrscht eine um so grössere Horizontalintensität, je näher einander daselbst die Niveaulinien sind.

Die Niveaulinien sind in Fig. 505 so gezeichnet, dafs die beigeetzten Werte 100, 600, 850, 890 mit dem Faktor 0,00034941 multipliziert werden müssen,

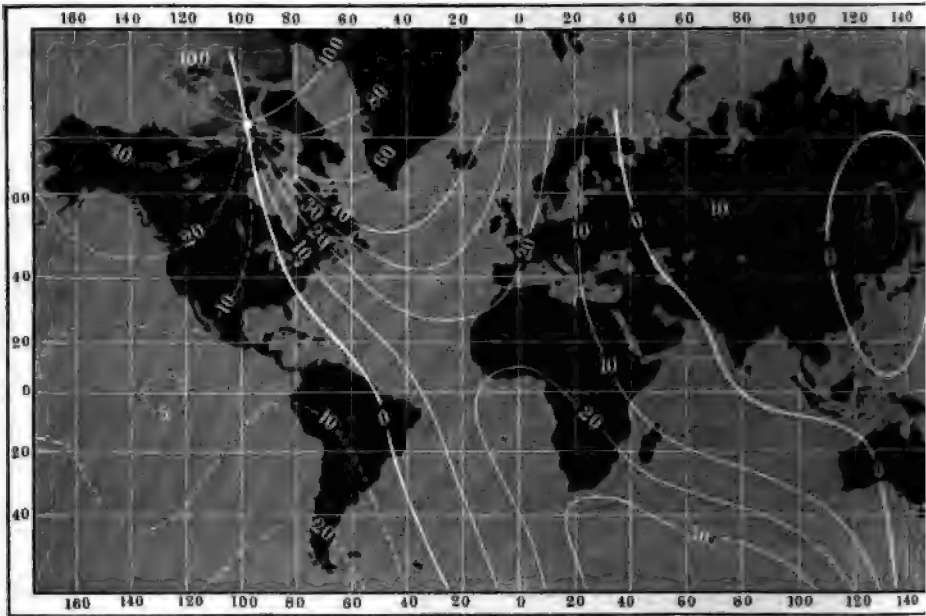


Fig. 504. Magnetische Deklinationslinien (Isogonen) (für 1835 berechnet nach Gauss' Theorie).
 — westliche Deklination, östliche Deklination.

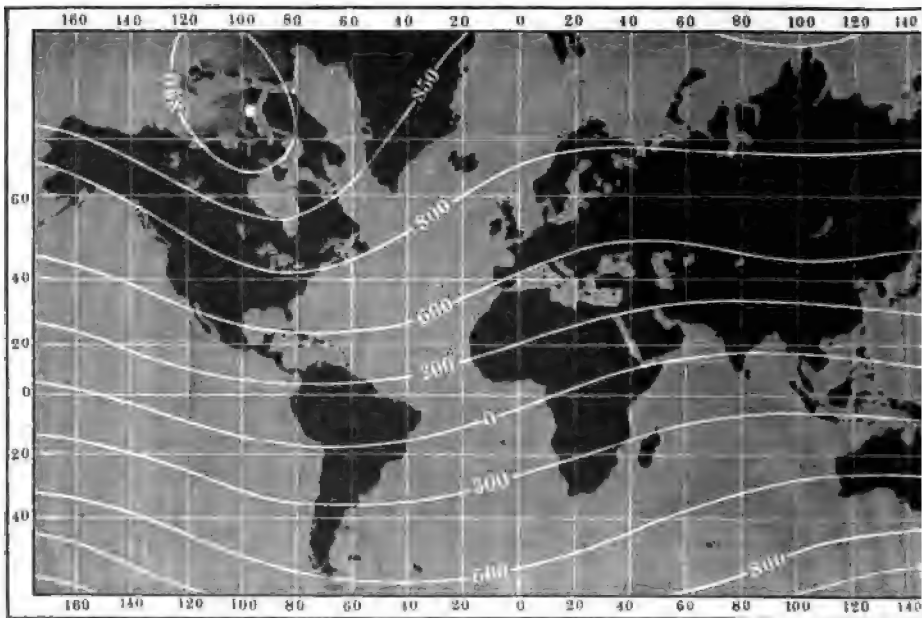


Fig. 505. Magnetische Niveaulinien (für 1835 berechnet nach Gauss' Theorie).

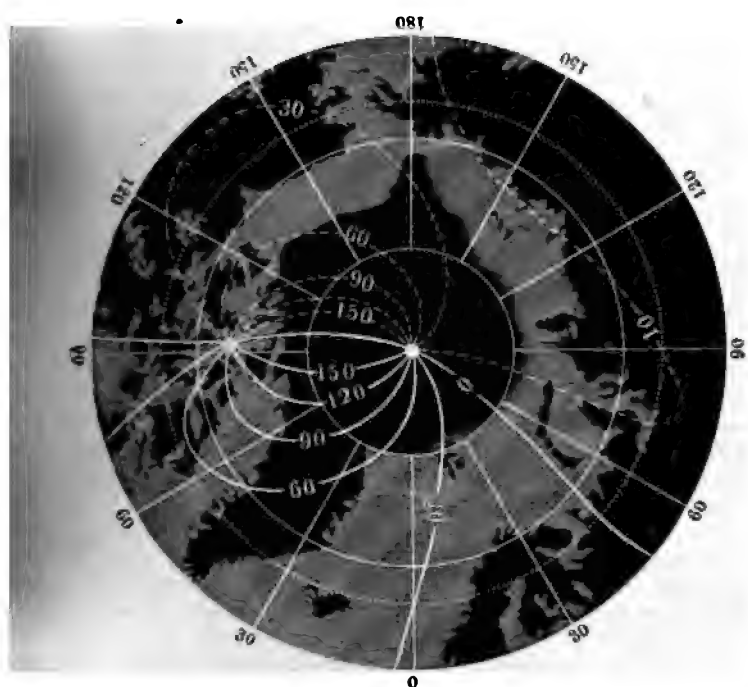


Fig. 506. Geographischer und magnetischer Nordpol (für 1835 berechnet aus Gauss' Theorie).

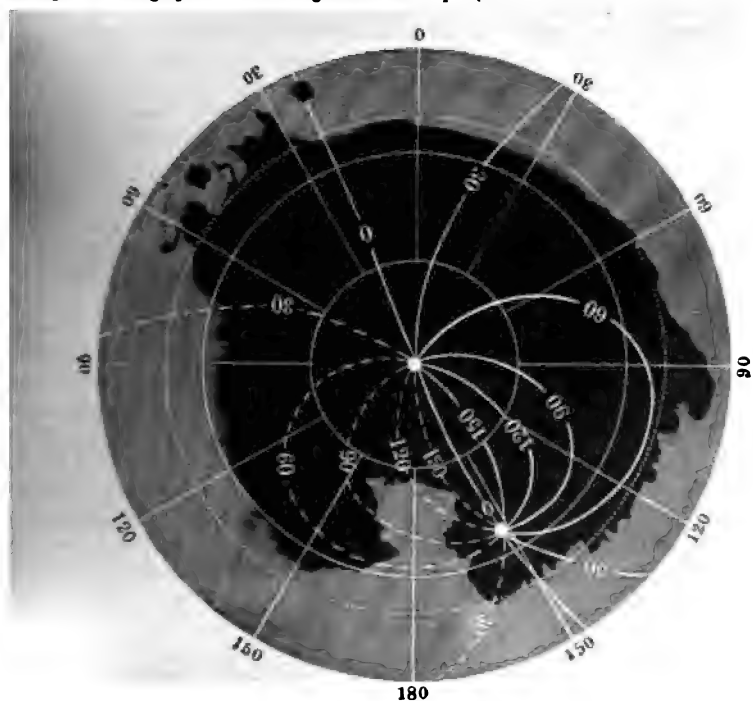


Fig. 507. Geographischer und magnetischer Südpol (für 1835 berechnet aus Gauss' Theorie).

damit sie das dort herrschende magnetische Potential in den absoluten Potential-einheiten des C-S-G-Systems (Erg per 1 Pst E) darstellen. — Denken wir uns für alle Punkte unter, an und über der Erdoberfläche die magnetischen Niveaulinien gezogen, so schneiden sich diese mit der Erdoberfläche in jenen Niveaulinien.

Das Wort **magnetischer Nordpol der Erde** kann in dreierlei Sinn gebraucht werden: Indem Kapitän Ross 1831 bei den Melvilleinseln ($70^{\circ} 5,3'$ nördl. Breite und $96^{\circ} 45,3'$ westl. von Greenwich) „den magnetischen Nordpol“ entdeckte, verstand er hi unter denjenigen Punkt, an welchem die Deklinationsnadel keine feste Stellung mehr einnahm, dagegen die Inklinationsnadel sich mit dem Nordpol vertikal abwärts stellte, wie immer man sie auch im Azimut drehte. — Beide Erscheinungen hätten in gleicher Weise eintreten müssen, wenn der magnetische Zustand der Erde der einer Nadel wäre, deren Spitzen wir uns als den ausschließlichen „Sitz“ einer nord- und einer süd magnetischen Menge denken, und zwar hätte dabei ein Nordpol der Erde in diesem Sinne sowohl in jenem Punkte der Erde

liegen können. —

sich der mag

Nadel verglei

gewöhnlichsten

pol der Erde

des Mittelpunk

dafs wir die Lage

direkte Versuche ermi

ein homogenes magnetisch

nur dies auch für die ganze

„Nordpol“. — Eine dritte Bedeutung (3) des Wortes „magnetischer Nordpol der Erde“ wäre endlich die, dafs man hierunter die Stelle höchster nord magnetischer Intensität (unter oder an der Erdoberfläche) versteht, die dann wieder keineswegs mit den beiden anderen definierten Stellen zusammenfällt. — Dem magnetischen Südpol (im ersten Sinne) kam BOUCHORDVINK 1900 nahe; er verlegt seine jetzige Lage auf $73^{\circ} 20'$ südl. Br., 146° östl. Länge (nahe der Stelle, die nach den bisher ausführlichsten magnetischen Karten von NEUMAYER vorausgesehen war).

Zum Begriffe der Isogonen oder Deklinationslinien ist noch zu bemerken: Da an dem Begriffe der magnetischen Deklination zwei Richtungen, die des magnetischen und die des astronomischen Meridians, beteiligt sind, so müssen die Isogonen nicht nur am **magnetischen Nordpol** (im 1. Sinne), sondern sie müssen auch im geographischen Nordpol zusammenlaufen (Fig. 506, a. v. S.). Da dieser Umstand unmittelbar nichts mit dem magnetischen Zustande der Erde zu tun hat, so hat DUPERRÉ **magnetische Meridiane** (d. h. Meridianlinien) so konstruiert, wie sie sich ergeben würden, wenn man von je einem Orte der Erde ausgehend in der Richtung der Deklinationsnadel fortginge. Diese magnetischen Meridianlinien schneiden die Deklinationslinien (Isogonen) unter dem jeweiligen Deklinationwinkel und geben also indirekt die Deklination in jedem ihrer Punkte an; auch sie laufen im magnetischen Nordpol (im 1. Sinne) zusammen. **Magnetische Parallele** heißen dann diejenigen Kurven, die das System der magnetischen Meridianlinien an allen Stellen rechtwinklig schneiden (Anh., Nr. 28): diese sind also identisch mit den magnetischen Äquipotentiallinien oder Niveaulinien.

Erdmagnetische Elemente in Mitteleuropa (für die Epoche 1902,0).

Br.	0°			5°			10°			15°			20°		
	δ	i	H	δ	i	H	δ	i	H	δ	i	H	δ	i	H
Br.	17,2°	69,3°	0,171	14,3°	68,9°	0,175	11,4°	68,5°	0,177	8,6°	68,1°	0,179	5,8°	67,8°	0,181
Br.	16,0°	66,0°	0,191	13,6°	65,5°	0,194	11,1°	64,9°	0,197	8,8°	64,5°	0,200	6,4°	64,1°	0,203
Br.	15,0°	62,2°	0,213	13,0°	61,6°	0,216	10,8°	61,0°	0,219	8,8°	60,5°	0,223	6,8°	59,8°	0,226

Hier bedeutet z. B. die Zahl $H = 0,200 = \frac{1}{5}$ (für 50° n. Br., 15° ö. L.), daß den Einheitspol der Deklinationsnadel ein Horizontalkomponente von der Stärke Dyn einwirkt.

Die mittleren jährlichen Änderungen betragen für dieses Gebiet (erossen aus den nächst vorausgehenden für die nächst folgenden Jahre):

für die Deklination δ im Mittel $-0,09^\circ$

für die Inklination i im Mittel $-0,03^\circ$

für die Horizontalintensität H $+0,00016$ bis $0,00025$.

Als Beispiel säkularer Variationen folgende Deklinationen für Paris:

re: 1541 1580 1603 1610 1663 1770 1780 1814 1832 1850 1885.
d.: 7° 8 $\frac{1}{2}$ ° 8° 45' 8° östl. 0° west. 8° 10' 19° 55' 22° 34' 22° 3' 20° 36' 16° 15'.

Mit Rücksicht auf die säkularen, jährlichen und täglichen Variationen sowie die Störungen des erdmagnetischen Zustandes haben wir uns das System erdmagnetischer Kraftlinien und Niveauflächen als fortwährend ein wenig fluktuierend denken. — Die Ursachen dieser Veränderungen sind natürlich noch unbekannt, ja die Ursache des Erdmagnetismus selbst unbekannt ist. Doch hat sich z. B. eigt, daß, als am 18. April 1842, 9^h 10' in Griechenland ein heftiges Erdbeben stand, noch in derselben Minute zu Parma, Prag und München die Deklination e plötzliche starke Veränderung aufwies (allerdings vielleicht nur infolge hanischer Erschütterung). Man bezeichnet starke, weit ausgebreitete Störungen erdmagnetischen Zustandes als magnetische Ungewitter. Zu diesen gehören h die Nordlichter (§ 200).

Ein Bild von der durchschnittlichen Stärke der Magnetisierung, die die le als Ganzes annähernd gleichförmig haben müßte, um das an ihrer Oberfläche beobachtende Potential hervorzubringen, erhalten wir, wenn wir sie als aus ler Kubikzentimetern von homogen magnetisiertem Eisen (Stahl, Nickel . . .) lehend denken, deren magnetisches Moment 0,078 ist. Diese Stärke der Magne- erung entspricht nur etwa 0,01% der Sättigung des stärkst magnetisierten chen Eisens (§ 145). Der Radius einer Kugel aus solchem Eisen müßte $\frac{1}{2}$ Erd- ius sein, damit sie dieselbe magnetische Wirkung im äußeren Kraftfelde hat die wirkliche Erde.

III. Mechanische Kräfte zwischen Strömen und Magneten. Magneto- und Elektro-Induktion.

§. 147. Bewegung und Erregung von Magneten durch Ströme. Übersicht der Wechselwirkungen zwischen Magneten und Strömen. — Äquivalenz von Magnetstäben und Kreisströmen.

Geschichtliches. Blicken wir von den **Entdeckungen elektromagnetischer Vorgänge** (im Sinne der **Elektromotoren** u. s. f.) zurück auf ÖRSTEDS Beobachtung, daß eine **Stromleitung** abgelenkt wurde, als durch eine **Stromleitung** umgeben wurde, stellt es sich als ein seltsamer Umstand dar, daß drei Jahrzehnte seit GALVANIS Entdeckung so große Entdeckungen wie die **Elektrolysen** u. s. f. zu verzeichnen waren, als wenn man hätte warten lassen. Denn längst waren nahe Beziehungen zwischen magnetischen und elektrischen Erscheinungen bekannt (GILBERT 1600 hatte sie sogleich unter dem gemeinsamen Titel „*De magnete*“ behandelt; COULOMB hatte für beiderlei Kräfte das gleiche Wirkungsgesetz gefunden); es war beobachtet, daß durch Blitzschläge Magnetnadeln beeinflusst werden, auch die Entladung von Leydener Flaschen ergab Magnetisierungen, wenn auch keine regelmäßigen. — Zuerst bemerkte ÖRSTED eine Ablenkung durch einen infolge Starkstromes glühenden Kupferdraht und schrieb sie der **Wärmewirkung** zu, beobachtete aber alsbald auch ähnliche Wirkungen infolge schwacher Ströme und variierte nun planmäßig die Erscheinungen, indem er den Stromleiter ober-, unterhalb, neben der Nadel, parallel zu ihr und unter schiefen und rechten Winkeln vorübergehen ließ. Als zusammenfassenden Ausdruck aller so gewonnenen Einzelgesetze gab AMPÈRE (1820) die „**Schwimmerregel**“ an: **Denke** wir uns eine menschliche Figur mit dem (positiven) Strom schwimmend und das Gesicht dem Magneten zuwendend, so wird der Nordpol der Nadel gegen die **Linke** des Schwimmers abgelenkt. — Bequemer ist folgende

„**Handregel**“: **Liegt** an dem Stromleiter die **rechte Hand** so, daß die **Finger** in der **Richtung** des **Stromes** weisen und die **Innenfläche** der **Hand** dem **Magneten** zugewendet ist, so wird der **Nordpol** gegen den **Daumen** abgelenkt.

Anwendung dieser Regel auf jeden der vier Teile des eine Nadel umfließenden Rechteck-Stromes (Fig. 508; vergl. ferner Fig. 523, S. 474); ebenso auf die einzelnen Elemente des **Kreisstromes** (Fig. 509).

Die Größe der Ablenkung zeigt sich schon bei rohen Versuchen abhängig von der „**Stärke**“ des Stromes und von seinem Abstände von der Nadel. Ist

Wenn die Stromstärke klein (vorläufig geschätzt nach den ebenfalls schwachen Wärmewirkungen, chemischen Wirkungen u. s. f.), der Abstand groß, so weicht die Deklinationsnadel nur wenig vom magnetischen Meridiane ab; dagegen stellt sie sich fast normal zum Meridian, wenn ein starker Strom sehr nahe der Nadel in der Meridianrichtung fließt. Eben hieraus erklärt es sich auch, daß bei denjenigen Stellungen, wo der Strom schon normal (horizontal, schief oder vertikal) gegen die Richtung der ruhenden Deklinationsnadel fließt, diese keine Ablenkung zeigt; desgleichen dann, wenn die Deklinationsnadel aus der ihr durch die

Fig. 508.

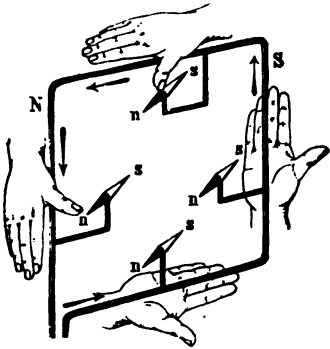
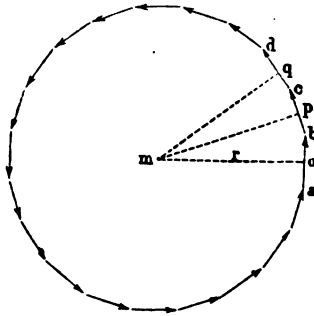


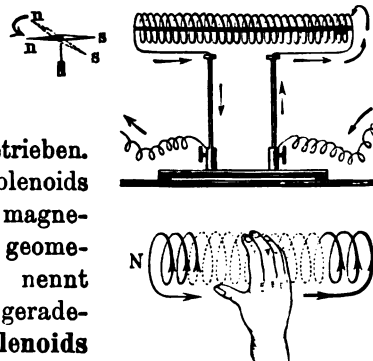
Fig. 509.



vertikale Drehungsachse angewiesenen horizontalen Drehungsebene heraustreten müßte. — Im übrigen geschieht die schiefliche Einstellung der Nadel gemäß dem Zusammenwirken der ablenkenden Kraft des Stromes mit der Richtkraft des Erdmagnetismus. — Alle diese quantitativen Beziehungen sollen erst im folgenden § näher untersucht werden. Vorerst verfolgen wir die Beobachtungen des § 141, nach welchen Magnete und Solenoide — sowie auch schon je einer der Kreisströme, aus denen ein Solenoid zusammengesetzt zu denken ist — in ihren Wirkungen auf Magnete und Ströme äquivalent sind.

Versuch 1: a) Neben den Nordpol n einer ruhenden Deklinationsnadel ns (Fig. 510) wird ein Solenoid so gehalten, daß seine Achse auf der der Nadel normal steht.

Fig. 510.



Nach der auf beliebige Teile des Solenoides anzuwendenden Handregel wird dann bei der aus der Figur ersichtlichen Stromrichtung der Nordpol vom Solenoid weggetrieben. Somit entspricht das Ende N des Solenoids dem Nordpol eines Magnets, dessen magnetische Achse zusammenfällt mit der geometrischen Achse des Solenoids. Man nennt deshalb diese geometrische Achse auch geradezu die **magnetische Achse** des Solenoids (und zwar auch mit Rücksicht auf deren Länge; so daß man ähnlich wie von den Polen und dem „magne-

tischen Moment eines Stabes“, § 143, auch von den Polen und dem „magnetischen Moment eines Solenoids“ spricht). — b) Variation des Versuches für die Pole $n, S; s, N; s, S$. — c) Wirkung eines in der Hand gehaltenen Magnetstabes auf die Pole eines wie in § 141, Fig. 475 schwimmenden (oder mittels eines „Ampèreschen Gestelles“ schwebenden) Solenoids. — d) Anziehungen und Abstofsungen der Pole zweier Solenoide (§ 141, Figg. 475, 476).

Die in obigen Versuchen gebrauchten Solenoide mit weit abstehenden Windungen blanken Drahtes sind in den zahlreichen praktischen Anwendungen ver-

Fig. 511.



treten durch „Drahtspulen“ (Fig. 511), d. h. Holzspulen, auf die ein mit isolierender Seide, Wolle (Guttapercha) umspannener Draht in eng anliegenden Windungen, oft in vielen Lagen übereinander gewickelt ist, dessen Enden meist Klemmschrauben tragen. — Für die theoretische

Behandlung bleibt vor allem zu untersuchen, wie die Wirkung je eines Kreisstromes auf je einen Pol und umgekehrt, wie sie annähernd verwirklicht ist in folgenden

Versuch 2: Ein kreisförmiger stromdurchflossener Draht wird in die Ebene des magnetischen Meridians gebracht und in den Mittelpunkt des Kreises wird a) der Nord- (Süd-) Pol einer langen Deklinationsnadel, b) der Mittelpunkt einer kurzen Nadel gestellt. Auch hier erhalten die Pole Bewegungen normal zur Ebene des Kreisstromes (Vorbild der Tangentenbussole, folg. §).

Versuch 3: Durch einen wagrechten Karton wird ein vertikaler gerader Draht gesteckt, der von einem starken Strom durchflossen ist. Stellt man auf den Karton a) hinreichend nahe dem Draht eine oder mehrere kleine Deklinationsnadeln, so stellen sich ihre Achsen normal zum Draht; wird eine Deklinationsnadel um den Draht längs eines Kreises, durch dessen Mittelpunkt der Draht geht, herumgeführt, so stellt sich ihre magnetische Achse immer längs der Tangente dieses Kreises ein. — b) Ähnlich bilden Eisenspäncchen Ringe (Fig. 512) diese stellen also die **Kraftlinien** des magnetischen Feldes des geraden stromdurchflossenen Leiters dar.

Denken wir uns solcher Ringe beliebig viele in parallelen Ebenen übereinander, so kommen sie in den Mantelflächen von röhrenförmig ineinander liegenden Zylindern zu liegen, deren gemeinschaftliche Achse der stromdurchflossene Draht ist. In diesem Sinne bezeichnete FARADAY den „Strom als Achse der Kraft“ (ein Ausdruck, der nach HELMHOLTZ' eigenem Zeugnis lange Zeit nicht verstanden wurde). — Wenden wir auf die ringförmigen Kraftlinien den in § 144 festgesetzte Begriff der Richtung einer magnetischen Kraftlinie an, wonach hierunter die Richtung verstanden wird, nach der die Nordpole der Nadeln oder der Späncchen

sen, so ergibt sich aus der Schwimmer- oder Handregel MAXWELLS Bohrerregel: Die kreisförmigen Kraftlinien des Stromes verlaufen in demjenigen Richtungssinn, in dem sich die Teilchen eines Bohrers (Korkziehers) drehen, wenn wir in der Richtung des (positiven) Stromes vorwärts schrauben (Fig. 512).

Denken wir uns nun einen solchen geraden von seinen Kraftlinien umgebenen Strom wieder zu einem Kreisstrom (Fig. 513) und dann mehrere solche zu einem

Fig. 512.

Fig. 513.

Fig. 514.

Fig. 515.

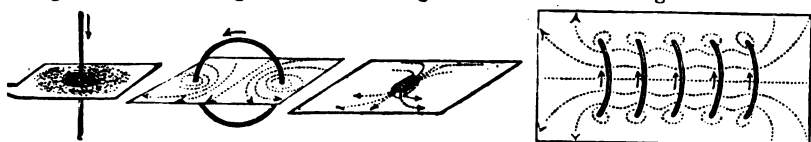
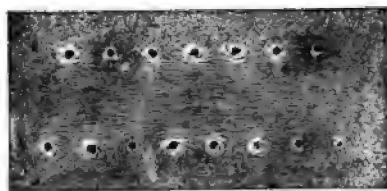
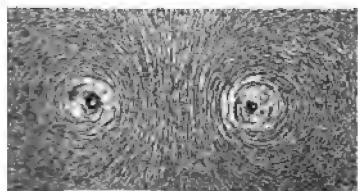


Fig. 516.

Fig. 517.



enoid (Fig. 515) zusammengerollt, so ordnen sich die Kraftlinien, bzw. die Spannen (Fig. 516 bzw. Fig. 517) immer ähnlicher denen eines Magnetstabes (Fig. 514) an. —

Wenn nun Solenoide und Kreisströme nach den „Bewegungen“, genauer: nach den beschleunigenden Kräften, welche sie auf einen Magnetpol ausüben, Magnetstäben äquivalent sind, so ist zu erwarten, daß sie auch Magnete erzeugen, „erregen“ können. — In der Tat fand AMPÈRE im Verfolgen der von ihm entdeckten Bewegung von Magneten durch Ströme alsbald auch die Erregung von Magneten durch Ströme; man bezeichnet diese als

Elektromagnetische Erscheinungen (im engeren Sinne). — Versuch 4: a) Um einen geraden oder hufeisenförmigen Stab aus weichem Eisen wird durch überspannenen Draht ein Strom geleitet. Solange dieser fließt, erweist sich der Eisenkern als kräftiger Magnet (Elektromagnet). — b) Stahl an Stelle von weichem Eisen wird nur langsam magnetisch, bleibt es aber auch nach Aufhören des Stromes.

Die Wirkung des Elektromagnets nach außen ist so kräftig, daß ihr gegenüber die des Solenoids nach außen häufig außer Betracht bleiben kann. Doch üben die Pole des Solenoids und ihres Magnetkernes gleiche Lage, und ihre Wirkungen addieren sich. Wir können uns also auch vorstellen, daß durch das Einführen des Eisenkernes in das Solenoid die Wirkung des Solenoids ähnlich verstärkt worden sei wie durch das Vorlegen des Eisennagels vor einen induzierenden Pol die Wirkung dieses Pols auf einen Nadelpol bei der Magnetisierung nach Verteilung (§ 145); oder: die Kraftlinien des Solenoids ohne und mit Eisenkern unterscheiden sich nur durch die dichtere Schärung.

Versuch 5: Ragt in die Höhlung einer Spule nur ein kleiner Teil eines Stabes aus weichem Eisen, so wird dieser in die Spule hineingezogen, ja der Schwere entgegen schwebend erhalten, solange durch die Spule ein hinreichend starker Strom fließt. Hier treten also Bewegung und Erregung von Magneten durch Ströme nebeneinander auf (Vorbild des Motors von PAGE, vergl. § 163).

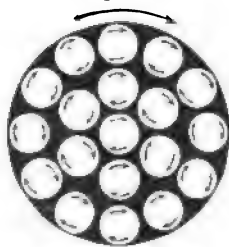
Halten wir die zwei Hauptformen der Wirkung eines Stromes auf einen Magnet unter den Schlagworten „**Bewegung**“ eines Magnets durch einen Strom und „**Erregung**“ eines Magnets durch einen Strom auseinander, so ordnen sich ganz analog auch die Wirkungen zwischen Magneten unter diesen beiden Begriffen, nämlich die **Bewegung** eines Magnetes durch einen Magnet (Anziehung und Abstossung der Pole) und die **Erregung** eines Magnets durch einen Magnet (Magnetisierung durch Verteilung). — Da wir nun aber überdies auch zwei Ströme einander anziehen und abstossen sehen (§ 141), so werden wir ausser dieser **Bewegung** von Strömen durch Ströme auch eine **Erregung** von Strömen durch Ströme analog einer Erregung von Strömen durch Magneten erhalten so überhaupt als Le Magnifaltigkeit aller dieser magnetischen und Induktionswirkungen die folgende Übersicht über die

Wechselwirkungen zwischen Magneten und Strömen:

Bewegung	} von Magneten durch Magnete:	{ Anziehung und Abstossung von Polen,
Erregung		
Bewegung	} von Magneten durch Ströme:	{ Ørsted's Versuche,
Erregung		
Bewegung	} von Strömen durch Magnete:	{ Elektromagnetische Rotationen (LADÉ)
Erregung		
Bewegung	} von Strömen durch Ströme:	{ Elektrodynamik im engeren Sinne,
Erregung		

Wie nun schon die elektromagnetischen Beziehungen zwischen Magneten und Strömen die Äquivalenz von Magneten und Kreisströmen erwiesen haben, so wird dies sich auch in allen folgenden Erscheinungen bestätigen, so daß wir z. B. nach Belieben die Magneto-Induktion auf Elektro-Induktion oder umgekehrt „zurückführen“ können. Eine besondere Anwendung dieser Äquivalenz ist

Fig. 518.



Ampères Theorie des Magnetismus: In § 14 wurden alle magnetischen Erscheinungen zurückgeführt auf die Vorstellung der Elementarmagnete. Statt nun hier bei ein „magnetisches Molekül“ etwa als Kügelchen mit einer nord- und südmagnetischen Hälfte vorzustellen, können wir uns längs seines Äquators einen Kreisstrom denken, also den Elementarmagnet durch einen Elementarstrom ersetzen, wobei die Ströme im Innern des Magneten einander entgegenwirken (Fig. 518). — Eine Anwendung dieser Vorstellung im großen ist die Hypothese zur Erklärung des Erdmagnetismus, daß in der Nähe des Erdäquators ein Strom kreise (etwa ein Thermostrom infolge der ungleichen Erwärmung bei der täglichen Bewegung der Erde in Bezug auf die Sonne). Da magnetische Feld eines solchen Kreisstromes wäre dann dem eines Magnetstabs

gleich, der seine Pole in der Nähe der geographischen Erdpole hat. Insofern aber nach § 146 ein solcher Magnetstab das wirkliche Feld der Erde nur sehr unvollkommen wiedergibt, müßte auch statt des einen Kreisstromes um den Äquator ein mannigfaltigeres System von Kreisströmen angenommen werden.

Statt einer solchen Zurückführung der Magnete auf Ströme hat sich namentlich in der Elektrotechnik die Ersetzung der Kreisströme und Solenoide durch Magnete bewährt, indem z. B. für den Bau von Strommaschinen, Elektromotoren überall die Lage der magnetischen Kraftlinien der Spulen rechnerisch und konstruktiv zu Grunde gelegt wird. — Gleichviel nun, ob die Zurückführung so oder umgekehrt erfolgt, ist zur vollständigen Begründung der tatsächlichen Äquivalenz die quantitative Feststellung der von Magnetpolen und Stromelementen und hiernach der von ganzen Magnetstäben und Kreisströmen ausgeübten Kräfte erforderlich.

§ 148. Kraftgesetze für Pole und Stromelemente. — Elektromagnetisches Maß der Stromstärke.

Wie COULOMB die Elementengesetze für die Wirkungen je zweier Ladungspunkte $f = \frac{\epsilon \epsilon_1}{r^2}$ Dyn, bzw. je zweier Magnetpole $f = \frac{\mu \mu_1}{r^2}$ Dyn aufeinander aus den allein beobachtbaren und meßbaren Wirkungen geladener Körper, bzw. ganzer Magnetstäbe ableitete (§ 143), so ergaben sich mittelbar aus Beobachtungen an geschlossenen Stromkreisen und Magneten:

BOU-SAVARTS Gesetz für Stromelement und Pol:

$$f = \frac{i \lambda \cdot \mu}{r^2} \text{ Dyn} \quad (1)$$

AMPÈRES Gesetz für Stromelement und Stromelement: $f = \frac{i \lambda \cdot i_1 \lambda_1}{r^2} \text{ Dyn} \quad (2)$

welche Gleichungen für die einfachsten Fälle gelten, daß die Stromelemente auf der Verbindungslinie von Element und Pol, bzw. Element und Element normal stehen und daß die Elemente einander parallel sind. — Um einen Schritt gegenüber (2)

verallgemeinert ist $f = \frac{i \lambda \cdot i_1 \lambda_1}{r^2} \cos \vartheta$, wo die

Stromelemente von den Längen λ und λ_1 cm noch in Ebenen liegen, die auf der Verbindungsstrecke der Elemente normal stehen, wo aber die durch die Elemente gehenden Geraden miteinander den Winkel ϑ einschließen (Fig. 519). Die Diskussion in Bezug auf ϑ besagt, daß, wenn für $\vartheta = 0$, wo f positiv ist, dies Anziehung bedeutet, für $\vartheta = 90^\circ$, $f = 0$ wird, und für $\vartheta = 180^\circ$ f negativ ist und Abstossung bedeute. Daß sich gleichsinnig parallele Stromelemente anziehen, antiparallele abstossen, hat AMPÈRE durch Versuche mit geradlinigen Leiterstücken, deren je eines durch entsprechende Aufhängung (an „Ampères Gestell“) beweglich gemacht war, direkt bestätigt. Das Unerwartete, daß hier gleich gerichtete Ströme einander anziehen (während doch gleichnamige Ladungen und Pole einander abstossen) klärt sich auf, wenn wir beachten, daß an zwei mit den Stirnflächen

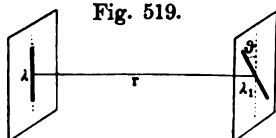
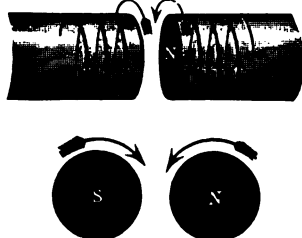


Fig. 520.



aneinander liegenden gleichartigen Solenoiden den gleichsinnigen Stromelementen ungleichnamige Pole entsprechen (Fig. 520 a. v. S.).

Mit der Entwicklung, welche die Elektrizitätslehre durch FARADAY gewonnen hat, es sich als nützlich erwiesen, nicht überall auf BIOT-SAVARTS und AMPÈRE Elementengesetze zurückzugehen, sondern die magnetischen Felder ganzer Magnete und Solenoide in Beziehungen zueinander zu denken. Speziell wird auch bei der folgenden Definition der elektromagnetischen Stromeinheit nicht mehr zurückgegangen auf die Wirkung der einzelnen Stromelemente, sondern auf die des Kreisstromes als solchen; nämlich:

I. Die Einheit der Stromstärke in elektromagnetischem Masse (m. SE) hat ein Strom, der den Bogen von 1 cm Länge eines Kreises von 1 cm Halbmesser durchfließend auf einen Einheitspol im Mittelpunkte des Kreises mit einer Kraft von 1 Dyn wirkt.

Technische elektromagnetische Einheit der Stromstärke ist **1 Ampère (Amp. oder A) = SE.** — Somit 1 m. SE = 10 A.

Die Stärke i m. SE = 10 A hat ein Strom, der jenen Bogen von 1 cm im Einheitskreise durchfließend, auf jenen Einheitspol mit einer Kraft von i Dyn wirkt.

Von einem solchen Strome wirkt dann der ganze Kreisstrom i m. SE auf einen Einheitspol im Mittelpunkte mit $2\pi i$ Dyn, der einen Pol von μ PE mit der Kraft

$$F = \mu \cdot \frac{2\pi r \cdot i}{r^2} = \mu \cdot \frac{2\pi i}{r} \text{ Dyn} \quad (3)$$

Umgekehrt: Wirkt ein Strom unter diesen Bedingungen mit einer Kraft von F Dyn auf einen Pol von μ PE, so ist die

$$\text{Stromstärke } i = F \frac{r}{2\pi \cdot \mu} \text{ m. SE} = 10 \cdot F \frac{r}{2\pi \cdot \mu} \text{ Ampère} \quad (4)$$

Nach diesem Masse erfolgt die Messung von Strömen durch die Tangentenbussolen, die Sinusbussolen und die mannigfaltigen Arten von Galvanometern und Ampèremetern. Überall wird hier die elektromagnetische Stromkraft in Vergleich gesetzt mit der magnetischen Richtkraft der Erde auf die Pole der Nadel, speziell der Horizontalintensität H (§ 146). Theoretisch grundlegend, wenn auch elektrotechnisch nicht mehr verwendet, ist die

Tangentenbussole von WILHELM WEBER: Der Mittelpunkt eines dicken Metallringes (oder mehrerer Windungen überspannener, dicken Drahtes) fällt zusammen mit dem Mittelpunkte einer kurzen Deklinationsnadel, die mittels eines leichten Zeigers auf eine wagerechte Kreisteilung weist und zwar auf 0° , wenn die Ebene des Ringes in den magnetischen Meridian fällt (Fig. 521). Einem Ausschlag der Nadel um α° Grade entspricht die

$$\text{Stromstärke } i_a = R \tan \alpha \text{ m. SE} = 10 R \tan \alpha \text{ Amp.} \quad (5)$$

wo R der Reduktionsfaktor der Bussole, bezogen auf absolutes

heißt und maßzahlengleich ist der in m. SE gemessenen Strom-
desjenigen Stromes, der einen Ausschlag von 45° erzeugt.

eben also z. B. drei Ströme Ausschläge von 40° , 45° , 50° , so verhalten sich
omstärken wie $\operatorname{tg} 40^\circ : \operatorname{tg} 45^\circ : \operatorname{tg} 50^\circ = 0,83910 : 1 : 1,1918$.

bleitung der Gleichung (5): Fingieren wir, die Nadel sei so kurz, daß,
l sie abgelenkt wird, jeder ihrer Pole dem Mittelpunkt des durch den
gehenden Kreisstromes nahe genug bleibe, um von diesem mit der Kraft

$\mu \cdot \frac{2\pi i}{r}$ Dyn normal zur Ebene des magnetischen Meridians angetrieben zu

Da aber gleichzeitig durch die Horizontalkomponente des Erd-
ismus der Pol mit der Kraft $F_m = \mu \cdot H$ Dyn parallel zur Ebene des
ischen Meridians angetrieben wird, so muß nach Fig. 522

Fig. 521.

Fig. 522 a.

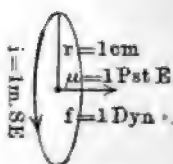


Fig. 522 b.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_s}{F_m} = \frac{\mu \frac{2\pi i}{r}}{\mu H}$$

$$= \frac{2\pi i}{r H} \quad \dots (6)$$

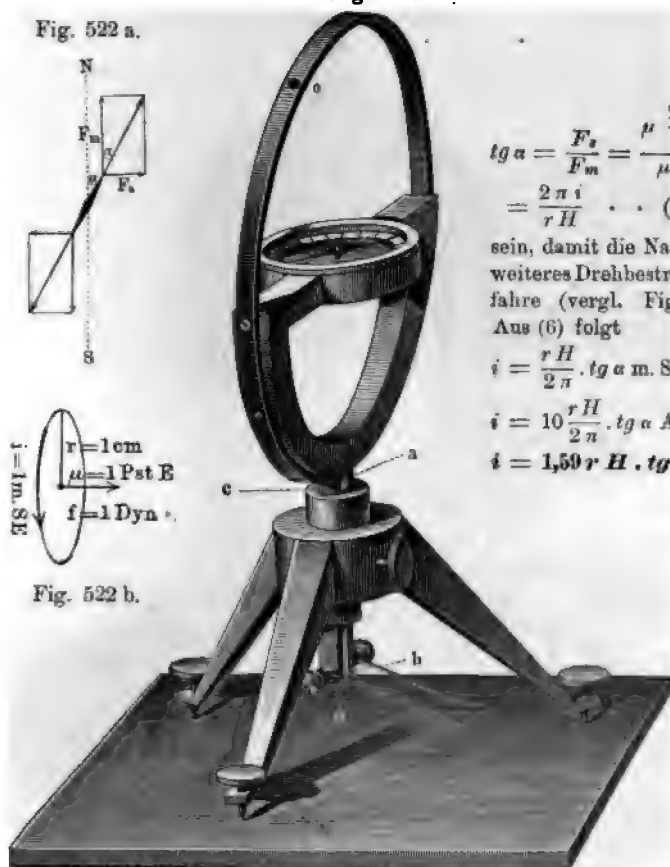
sein, damit die Nadel kein
weiteres Drehbestreben er-
fahre (vergl. Fig. 502).

Aus (6) folgt

$$i = \frac{r H}{2\pi} \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ m. SE,}$$

$$i = 10 \frac{r H}{2\pi} \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ Amp.}$$

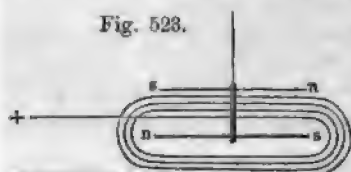
$$i = 1,59 r H \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ Amp.}$$



ist $\frac{rH}{2\pi} = R$ die oben in Gleichung (5) als Reduktionsfaktor be-
ste GröÙe, ausgedrückt durch r und H . — Er ist also wegen des Aus-

fallens des Faktors μ zwar wieder (wie bei der Bestimmung von H selbst unabhängig von dem Magnetisierungszustand der Nadel, wegen H aber unabhängig von dem jeweiligen magnetischen Zustand der Erde. Da diese Größe R wegen der geringen täglichen und jährlichen Variation

Fig. 523.



Stärke des erdmagnetischen Feld eine Konstante des Instruments k werden. Sie wird entweder theoretisch bestimmt durch Messung von r oder empirisch nach elektroschem Maße, § 154, indem man denselben Stromkreis die Tangentenbussole und ein Voltameter hintereinander schaltet.

dem dieses ein spezielles i in Ampère gibt, folgt aus diesem i und k wieder der Reduktionsfaktor. — In KESSELS Bussole ist durch entsprechend

Fig. 524.



des Radius der 10 Stromdrahtwindungen $i_0 = 1$ Amp.; daher zeigt sie un-
 $i_a = tg \alpha$ Amp. (bezw. bei dünneren Windungen $i_a = \frac{1}{100} tg \alpha$ Amp.).

Über die Sinusbusssole vergl. LA 189. — In **Gaugains Busssole** ist die Nadel seitwärts von der Ebene der Kreisströme so angebracht, daß die durch das stehliche Herausstreten der Pole aus der Mittelebene der Tangentenbusssole entstehenden Fehler sehr annähernd kompensiert werden.

Zum Nachweis, bezw. zur Messung schwacher Ströme dienen die **Amperenkoskope** und **Galvanometer** (letzterer Ausdruck im engeren Sinne, denn streng genommen ist auch schon die Tangentenbusssole ein Galvanometer). Bei diesen wird überspannener Draht in vielen Windungen, die sich in ihren Wirkungen gegenseitig unterstützen, um eine Magnetnadel geführt (vergl. Fig. 508); die Empfindlichkeit kann beliebig (bis 10^{-12} Amp.) gesteigert werden, indem statt einer Nadel ein annähernd astatistisches Nadelpaar verwendet wird (Fig. 523); **Seeendorfs Galvanometer**, Fig. 524.

Statt der Nadel sind auch magnetisierte Stahlspiegel (oder Glasspiegelchen auf aufgeklebten Magnetstäbchen) behufs Spiegelablesung, Glockenmagnete u. s. f. im Gebrauch. Wegen der meist von der Anordnung nach Kreisströmen stark weichenden Wicklung der Drähte läßt sich die elektromagnetische Wirkung nicht aus der Gestalt der Drähte und des Magnets berechnen, und es muß daher eine Gradteilung (oder Längenteilung bei Spiegelablesung) die zugehörige Reihe von Stromstärken empirisch bestimmt werden durch Vergleichung mit einer Tangentenbusssole oder mit einem Amperemeter. — **Torsionsgalvanometer** für indirekte Messung starker Ströme. — Das namentlich in physikalischen Anlagen gebräuchliche **Amperemeter** (§ 172) besteht in einem beweglichen Stücke, welches in einem Solenoid und ist nach den Angaben der Tangentenbusssole oder des Voltameters auf Null geeicht. Ähnlich das **Vertikalg galvanometer** für Schulversuche (auch für Projektion, Fig. 525). Vergl. auch Fig. 534, S. 480 das **Eininstrument** für Ampères und Volt (nach Hartmann und Braun).

Fig. 525.



149. Ohms Gesetz. Messung von Widerständen und von elektromotorischen Kräften.

Im § 140 ergab sich Ohms Gesetz $\text{Elektr. Stromstärke} = \frac{\text{Elektromot. Kraft}}{\text{Widerstand}}$

nächst nur theoretisch (nach Analogie des Wärmestromes) aus der Vorstellung fließender Ladungsmengen. Um diese Beziehung nunmehr experimentell zu beweisen, gehen wir nicht auf die in elektrostatischem Maße gemessenen und als „fließend“ gedachten Ladungsmengen zurück, sondern nehmen sogleich

die Stromstärke als im elektromagnetischen Mafse (nach Ampères) d. h. nach den Angaben der Tangentenbussole (oder einem nach ihr geeichten Galvanometer, Ampèremeter u. s. w.) gemessen an. — Von welchen anderen Umständen dann die so gemessene Stromstärke abhängt (bzw. nicht abhängt) ergeben folgende Versuche:

I. Unabhängigkeit der Stromstärke von der Stelle im Leiterkreise

Versuch 1: Als Stromquelle diene z. B. eine galvanische Batterie von drei Elementen (Fig. 526).

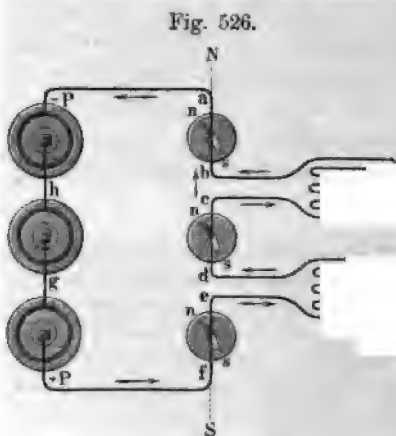


Fig. 526.

Fig. 527.



Die Pole $+P$ und $-P$ sind durch einen möglichst langen Leiterdraht so verbunden, daß die Leiterstücke ab und ef nahe bei den Polen, cd fern von den Polen sind. Werden hier Bussolen eingeschaltet, so zeigen überall die gleiche Stromstärke an, egal auch in den Verbindungsdrähten der einzelnen Elemente gh (Barrow 1825).

Versuch 2 (nach FECHNER 1831): In Brett (Fig. 527) sind Leiter aus verschiedenen Stoffen, von verschiedener Länge und Stärke hintereinander in leitende Verbindung gesetzt. Wird dieser Streifen oder in die Richtung des magnetischen Meridians NS und über ihn an beliebigen Stellen eine Magnetnadel gebracht, so wird sie über allen Stellen von einem durchgehenden Strome gleich stark abgelenkt (vorausgesetzt, daß sie überall gleichen Abstand von ihm hat).

Die hiermit festgestellte Unabhängigkeit ist nicht so zu verstehen, daß die Ablenkung der Nadel auch dann noch dieselbe bliebe, wenn z. B. längere oder dünnere Drähte eingeschaltet würden; sondern dann wird die Ablenkung schwächer (vergl. II), aber wieder an allen Stellen des Stromkreises in gleichem Mafse.

II. Abhängigkeit der Stromstärke vom Widerstande. **Versuch 3:** Geben zwei in Säure getauchte Platten bei bestimmtem Abstände voneinander und bestimmten Zuleitungsdrähten zur Bussole (Fig. 528) einen bestimmten Anschlag

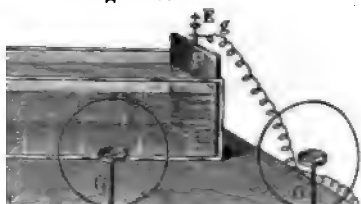
Fig. 528.

- E
+ E
C



Fig. 529.

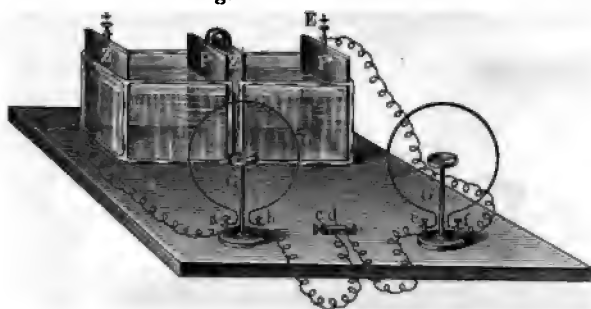
- E



adel, so wird dieser kleiner, wenn der Plattenabstand größer oder wenn die Platten länger, dünner oder z. B. statt aus Kupfer aus Eisen genommen werden. Es zeigt sich, daß, wenn sowohl jener Abstand der Platten 2, 3 . . . n fach als auch die Länge des Drahtes 2, 3 . . . n fach genommen wird (somit auch die Bussolen, Fig. 529), die Bussolen nur $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$. . . $\frac{1}{n}$ der früheren Stromstärke zeigen.

III. Abhängigkeit der Stromstärke von der elektromotorischen Kraft. Versuch 4 (Fig. 530): Werden zwei Elemente hintereinander geschaltet, so daß die Platten derselben die Platten der ersten Elementen bilden, so werden die Platten dieselben Querschnitte und zusammen dieselbe Länge haben.

Fig. 530.



beim Versuch 3, wächst die Stromstärke wieder auf den selben Wert wie bei Versuch 528, somit das Doppelte wie bei Versuch 529.

Aus solchen Versuchen schließen wir: Wenn einerseits der Widerstand zwar sowohl der „innere“ der Stromquelle wie der „äußere“ in den Drähten, Instrumenten u. s. f. 2, 3 . . . n mal so groß, andererseits die elektromotorische Kraft (diese vorläufig — Näheres vergl. § 155 — proportional gesetzt der Zahl der hintereinander geschalteten Elemente) 2, 3 . . . n mal so groß wird, so bleibt die Stromstärke ungeändert; oder: Die Stromstärke ist dem Gesamtwiderstande verkehrt, der elektromotorischen Kraft direkt proportional. —

Da von den drei hier genannten Größen im bisherigen eine Einheit nur für die Stromstärke, nämlich 1 Ampère, festgesetzt wurde, so lassen sich für die anderen die Einheiten, nämlich das Ohm für den Widerstand und das Volt für die elektromotorische Kraft, so wählen, daß sich statt der obigen symbolischen Gleichung die bestimmteren symbolischen Gleichungen ergeben:

$$1 \text{ Amp.} = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ohm}} \text{ und Ohms Gesetz: } J \text{ Amp.} = \frac{V \text{ Volt}}{W \text{ Ohm}}.$$

Für die Reihenfolge der Definitionen dieser beiden Maßgrößen „Ohm“ und „Volt“ kommt in Betracht, daß sich Widerstände von bestimmter Größe viel leichter messen und untereinander vergleichen lassen als elektromotorische Kräfte; weshalb der Widerstand (I) im elektromagnetischen Maße so definiert wird:

II. Die Einheit des elektrischen Widerstandes ist 1 Ohm (1Ω), der Widerstand eines Leiters, in dem ein Strom von 1 Amp. die Leistung von 1 Watt, d. h. die Arbeit von 1 Joule per sec = 10^7 Erg per sec verrichtet (§ 22, S. 94). — LA 190.

Diese Arbeitsleistung wird am bequemsten im kalorischen Maße ausgedrückt, indem 1 Joule = 10^7 Erg äquivalent 0,24 cal. sind (§ 82).

Dieser theoretischen, auf die Einheiten des C-S-G-Systemes zurückgehenden Definition der Widerstands-Einheit waren praktische Bestimmungen der Wider-

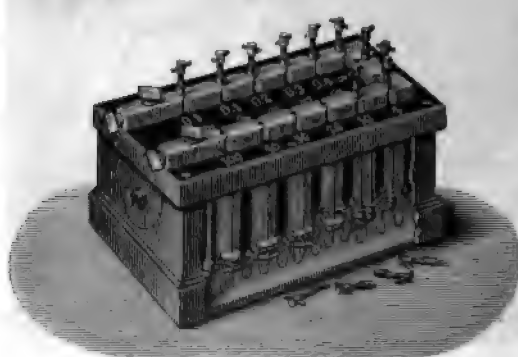
stände durch JACOBI (Kupferdrähte) und SIEMENS vorangegangen. SIEMENS Quersilbereinheit ist der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge 1 mm² Querschnitt bei 0° C. Da diese Einheit völlig konstant und leicht zu messen ist, so bezieht man auf sie auch die Definition:

Das gesetzliche Ohm ist der Widerstand einer Quecksilbersäule von 1,063 m Länge und 1 mm² Querschnitt bei 0° C.;

$$1 \Omega = 1,063 \frac{\text{m}}{\text{mm}^2} \text{Hg } 0^\circ \text{C.}$$

Um in dieser Maßeinheit die Widerstände von Leitern aus verschiedenen Stoffen und verschiedener Gestalt (meist, aber keineswegs immer in Draht

Fig. 531.

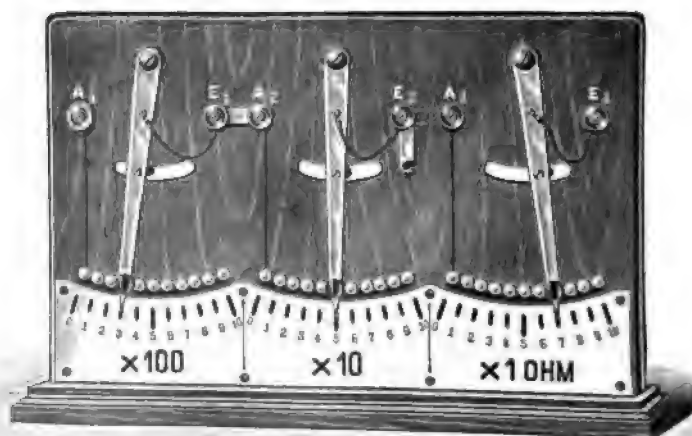


anzugeben, dienen die Widerstands-Etalons, denen sehr verschiedene Einrichtungen gegeben hat: Der Stöpsel-Resistenzstat von Siemens (Fig. 531) hält Drahtspulen, deren Widerstände Bruchteile und Vielfache eines Ω (analog einem Gewichte von $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ g, 5 g, 10 g . . .) darstellen. Wenn alle Stöpsel eingesetzt, so wird der Strom von der einen Klemme zur anderen durch die Drähte und fast widerstandslos geleitet. Wird dagegen z. B. ein Stöpsel 1 Ω herausgezogen,

so muß hier der Strom seinen Weg durch die eine Spule nehmen, deren Widerstand 1 Ω ist. — Ähnlich (noch bequemer) beim Kurbelreohstaten zu bestimmten Zwecken (z. B. Fig. 532 nach Hartmann und Braun). — Während bei

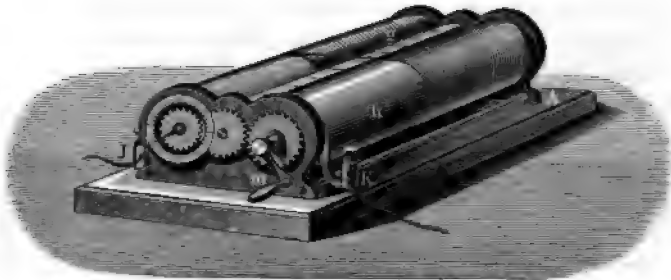
Fig. 532.

$\frac{1}{6}$ n. Gr.



schriebenen Rheostaten die Widerstände nur unstetig geändert werden können, schiebt dies stetig z. B. beim Walzenrheostaten von WHEATSTONE, wo sich beliebig lange Drahtteile von einer nicht leitenden Rolle aus Serpentin, Buchsbaumholz auf eine leitende Rolle, deren Widerstand zu vernachlässigen ist, wickeln lassen, Fig. 533.

Fig. 533.



Einem anderen Zwecke als diese Maßwiderstände dienen die Regulier- (erschalt-) Widerstände, z. B. der Kurbelrheostat (vergl. Fig. 646, ähnlich Lampenrheostat), um nämlich z. B. die Starkströme der Straßenleitungen auf eine für die einzelnen einzuschaltenden Apparate taugliche Stromstärke abzusetzen. — Flüssigkeitswiderstände.

Die Abhängigkeit des Widerstandes von der Gestalt der Körper ist die einfachste im Falle von Prismen und Zylindern (so bei Drähten, Säulen, Flüssigkeitssäulen in Röhren, Trögen u. s. w.).

Z. B. Ein Kupfer-, Eisendraht von der Länge l m und dem Querschnitt q mm² hat den

$$\left. \begin{array}{l} \text{Widerstand } w = c \frac{l}{q} \\ \text{und die} \\ \text{Leitungsfähigkeit } \frac{1}{w} = k \frac{q}{l}, \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wo } c \text{ der spezifische Leitungs-} \\ \text{widerstand} \\ \text{und } \frac{1}{c} = k \text{ das spezifische Leitungs-} \\ \text{vermögen} \end{array}$$

des leitenden Stoffes (Kupfer, Eisen . . .) heisst.

Diese Beziehung von w zu l und q ergibt sich zunächst theoretisch nach Analogie zum Wärmestrome aus der analogen Stellung des Faktors $k \frac{q}{l}$ in den Gleichungen für den kalorischen und den elektrischen Strom, § 140, S. 440. Daraus ist die Bezeichnung „Widerstand“ von der Vorstellung hergenommen, daß es im Drahte fließende Ladungsmenge in ihm eine Art Reibungswiderstand findet, ähnlich wie das Wasser in engen Leitungsröhren; wobei das bloß Bildliche und Hypothetische dieser Vorstellung nicht zu verkennen ist (auch gibt es gerade bei der Wärmeleitung nichts, was als „Widerstand“ zu denken wäre, den die von Stellen höherer zu Stellen niederer Temperatur fließenden Wärmemengen finden). Aber den tatsächlichen Kern des Begriffes „elektrischer Leitungswiderstand“, daß nämlich in jedem durchströmten Leiter ein kleinerer oder größerer Teil der elektrischen Energie in Wärme-Energie umsetzt, vergl. § 152.

LA 180, 191.

Experimentell kann die Vergleichung von Widerständen durch einander- oder Nebeneinschalten des zu messenden Widerstandes mit Widerstandetalons und Vergleichung der so sich ergebenden Stromstärken bei der elektromotorischen Kraft der Stromquelle erfolgen. Meistens, so nur bei Widerstandsbestimmungen mittels der **Wheatstoneschen Brücke** (LA 180) kommen in Anwendung die Gesetze der

Stromverzweigung. Die Klemmen z. B. einer galvanischen Batterie kann man statt durch einen Draht auch durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000, 1001, 1002, 1003, 1004, 1005, 1006, 1007, 1008, 1009, 1010, 1011, 1012, 1013, 1014, 1015, 1016, 1017, 1018, 1019, 1020, 1021, 1022, 1023, 1024, 1025, 1026, 1027, 1028, 1029, 1030, 1031, 1032, 1033, 1034, 1035, 1036, 1037, 1038, 1039, 1040, 1041, 1042, 1043, 1044, 1045, 1046, 1047, 1048, 1049, 1050, 1051, 1052, 1053, 1054, 1055, 1056, 1057, 1058, 1059, 1060, 1061, 1062, 1063, 1064, 1065, 1066, 1067, 1068, 1069, 1070, 1071, 1072, 1073, 1074, 1075, 1076, 1077, 1078, 1079, 1080, 1081, 1082, 1083, 1084, 1085, 1086, 1087, 1088, 1089, 1090, 1091, 1092, 1093, 1094, 1095, 1096, 1097, 1098, 1099, 1100, 1101, 1102, 1103, 1104, 1105, 1106, 1107, 1108, 1109, 1110, 1111, 1112, 1113, 1114, 1115, 1116, 1117, 1118, 1119, 1120, 1121, 1122, 1123, 1124, 1125, 1126, 1127, 1128, 1129, 1130, 1131, 1132, 1133, 1134, 1135, 1136, 1137, 1138, 1139, 1140, 1141, 1142, 1143, 1144, 1145, 1146, 1147, 1148, 1149, 1150, 1151, 1152, 1153, 1154, 1155, 1156, 1157, 1158, 1159, 1160, 1161, 1162, 1163, 1164, 1165, 1166, 1167, 1168, 1169, 1170, 1171, 1172, 1173, 1174, 1175, 1176, 1177, 1178, 1179, 1180, 1181, 1182, 1183, 1184, 1185, 1186, 1187, 1188, 1189, 1190, 1191, 1192, 1193, 1194, 1195, 1196, 1197, 1198, 1199, 1200, 1201, 1202, 1203, 1204, 1205, 1206, 1207, 1208, 1209, 1210, 1211, 1212, 1213, 1214, 1215, 1216, 1217, 1218, 1219, 1220, 1221, 1222, 1223, 1224, 1225, 1226, 1227, 1228, 1229, 1230, 1231, 1232, 1233, 1234, 1235, 1236, 1237, 1238, 1239, 1240, 1241, 1242, 1243, 1244, 1245, 1246, 1247, 1248, 1249, 1250, 1251, 1252, 1253, 1254, 1255, 1256, 1257, 1258, 1259, 1260, 1261, 1262, 1263, 1264, 1265, 1266, 1267, 1268, 1269, 1270, 1271, 1272, 1273, 1274, 1275, 1276, 1277, 1278, 1279, 1280, 1281, 1282, 1283, 1284, 1285, 1286, 1287, 1288, 1289, 1290, 1291, 1292, 1293, 1294, 1295, 1296, 1297, 1298, 1299, 1300, 1301, 1302, 1303, 1304, 1305, 1306, 1307, 1308, 1309, 1310, 1311, 1312, 1313, 1314, 1315, 1316, 1317, 1318, 1319, 1320, 1321, 1322, 1323, 1324, 1325, 1326, 1327, 1328, 1329, 1330, 1331, 1332, 1333, 1334, 1335, 1336, 1337, 1338, 1339, 1340, 1341, 1342, 1343, 1344, 1345, 1346, 1347, 1348, 1349, 1350, 1351, 1352, 1353, 1354, 1355, 1356, 1357, 1358, 1359, 1360, 1361, 1362, 1363, 1364, 1365, 1366, 1367, 1368, 1369, 1370, 1371, 1372, 1373, 1374, 1375, 1376, 1377, 1378, 1379, 1380, 1381, 1382, 1383, 1384, 1385, 1386, 1387, 1388, 1389, 1390, 1391, 1392, 1393, 1394, 1395, 1396, 1397, 1398, 1399, 1400, 1401, 1402, 1403, 1404, 1405, 1406, 1407, 1408, 1409, 1410, 1411, 1412, 1413, 1414, 1415, 1416, 1417, 1418, 1419, 1420, 1421, 1422, 1423, 1424, 1425, 1426, 1427, 1428, 1429, 1430, 1431, 1432, 1433, 1434, 1435, 1436, 1437, 1438, 1439, 1440, 1441, 1442, 1443, 1444, 1445, 1446, 1447, 1448, 1449, 1450, 1451, 1452, 1453, 1454, 1455, 1456, 1457, 1458, 1459, 1460, 1461, 1462, 1463, 1464, 1465, 1466, 1467, 1468, 1469, 1470, 1471, 1472, 1473, 1474, 1475, 1476, 1477, 1478, 1479, 1480, 1481, 1482, 1483, 1484, 1485, 1486, 1487, 1488, 1489, 1490, 1491, 1492, 1493, 1494, 1495, 1496, 1497, 1498, 1499, 1500, 1501, 1502, 1503, 1504, 1505, 1506, 1507, 1508, 1509, 1510, 1511, 1512, 1513, 1514, 1515, 1516, 1517, 1518, 1519, 1520, 1521, 1522, 1523, 1524, 1525, 1526, 1527, 1528, 1529, 1530, 1531, 1532, 1533, 1534, 1535, 1536, 1537, 1538, 1539, 1540, 1541, 1542, 1543, 1544, 1545, 1546, 1547, 1548, 1549, 1550, 1551, 1552, 1553, 1554, 1555, 1556, 1557, 1558, 1559, 1560, 1561, 1562, 1563, 1564, 1565, 1566, 1567, 1568, 1569, 1570, 1571, 1572, 1573, 1574, 1575, 1576, 1577, 1578, 1579, 1580, 1581, 1582, 1583, 1584, 1585, 1586, 1587, 1588, 1589, 1590, 1591, 1592, 1593, 1594, 1595, 1596, 1597, 1598, 1599, 1600, 1601, 1602, 1603, 1604, 1605, 1606, 1607, 1608, 1609, 1610, 1611, 1612, 1613, 1614, 1615, 1616, 1617, 1618, 1619, 1620, 1621, 1622, 1623, 1624, 1625, 1626, 1627, 1628, 1629, 1630, 1631, 1632, 1633, 1634, 1635, 1636, 1637, 1638, 1639, 1640, 1641, 1642, 1643, 1644, 1645, 1646, 1647, 1648, 1649, 1650, 1651, 1652, 1653, 1654, 1655, 1656, 1657, 1658, 1659, 1660, 1661, 1662, 1663, 1664, 1665, 1666, 1667, 1668, 1669, 1670, 1671, 1672, 1673, 1674, 1675, 1676, 1677, 1678, 1679, 1680, 1681, 1682, 1683, 1684, 1685, 1686, 1687, 1688, 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694, 1695, 1696, 1697, 1698, 1699, 1700, 1701, 1702, 1703, 1704, 1705, 1706, 1707, 1708, 1709, 1710, 1711, 1712, 1713, 1714, 1715, 1716, 1717, 1718, 1719, 1720, 1721, 1722, 1723, 1724, 1725, 1726, 1727, 1728, 1729, 1730, 1731, 1732, 1733, 1734, 1735, 1736, 1737, 1738, 1739, 1740, 1741, 1742, 1743, 1744, 1745, 1746, 1747, 1748, 1749, 1750, 1751, 1752, 1753, 1754, 1755, 1756, 1757, 1758, 1759, 1760, 1761, 1762, 1763, 1764, 1765, 1766, 1767, 1768, 1769, 1770, 1771, 1772, 1773, 1774, 1775, 1776, 1777, 1778, 1779, 1780, 1781, 1782, 1783, 1784, 1785, 1786, 1787, 1788, 1789, 1790, 1791, 1792, 1793, 1794, 1795, 1796, 1797, 1798, 1799, 1800, 1801, 1802, 1803, 1804, 1805, 1806, 1807, 1808, 1809, 1810, 1811, 1812, 1813, 1814, 1815, 1816, 1817, 1818, 1819, 1820, 1821, 1822, 1823, 1824, 1825, 1826, 1827, 1828, 1829, 1830, 1831, 1832, 1833, 1834, 1835, 1836, 1837, 1838, 1839, 1840, 1841, 1842, 1843, 1844, 1845, 1846, 1847, 1848, 1849, 1850, 1851, 1852, 1853, 1854, 1855, 1856, 1857, 1858, 1859, 1860, 1861, 1862, 1863, 1864, 1865, 1866, 1867, 1868, 1869, 1870, 1871, 1872, 1873, 1874, 1875, 1876, 1877, 1878, 1879, 1880, 1881, 1882, 1883, 1884, 1885, 1886, 1887, 1888, 1889, 1890, 1891, 1892, 1893, 1894, 1895, 1896, 1897, 1898, 1899, 1900, 1901, 1902, 1903, 1904, 1905, 1906, 1907, 1908, 1909, 1910, 1911, 1912, 1913, 1914, 1915, 1916, 1917, 1918, 1919, 1920, 1921, 1922, 1923, 1924, 1925, 1926, 1927, 1928, 1929, 1930, 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 1938, 1939, 1940, 1941, 1942, 1943, 1944, 1945, 1946, 1947, 1948, 1949, 1950, 1951, 1952, 1953, 1954, 1955, 1956, 1957, 1958, 1959, 1960, 1961, 1962, 1963, 1964, 1965, 1966, 1967, 1968, 1969, 1970, 1971, 1972, 1973, 1974, 1975, 1976, 1977, 1978, 1979, 1980, 1981, 1982, 1983, 1984, 1985, 1986, 1987, 1988, 1989, 1990, 1991, 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196,

alvanometer, für stärkere als Ampéremeter und bei Einschalten der Spule großem Widerstande als Voltmeter dient). Wird nämlich das Voltmeter bei Stellen P_1, P_2 einer Stromquelle oder Stromleitung angeschlossen, so entsteht sich in dem Solenoid wegen des großen Widerstandes ein nur schwacher Strom und es wird die Potentialdifferenz zwischen P_1 und P_2 durch den Meßrat selbst nur wenig verändert (ähnlich wie durch ein Thermometer von geringer Wärmekapazität sich die Temperatur des zu prüfenden Körpers nur wenig ändert). Aus dem bekannten Widerstande des Solenoids und der jeweilig stehenden Stromstärke lassen sich daher die Potentialdifferenzen $V_2 - V_1$ berechnen; dies kann ein für allemal für die möglichen Stromstärken geschehen das Instrument direkt nach Volt geeicht werden.

Maßangaben über die elektromotorischen Kräfte verschiedener Ladungs- und Quellen vergl. §§ 150, 155, 162.

Für diejenige Größe, die durch Volt gemessen wird und die im bisherigen Potentialdifferenz, teils elektromotorische Kraft (für die in der Elektrotechnik das Zeichen EMK gebräuchlich ist) genannt wurde, ist auch, ähnlich in der Elektrotechnik, der Ausdruck **Spannung**, speziell **Klemmenspannung** in Gebrauch; z. B. es herrsche an den Endklemmen einer Dynamo-Maschine, von denen der Strom in die Leitungen zu elektrischen Eisenbahnen u. dergl. geführt wird, eine Klemmenspannung von 500 Volt, von 2000 Volt u. dergl. Das Wort „Spannung“ wurde in § 133 für einen wesentlich anderen Begriff, nämlich für den aus der gegenseitigen Abstoßung von Ladungselementen hervorgehenden statischen Druck auf die Flächeneinheit verwendet (somit zu messen in dyn per cm², wogegen elektrische Potentiale und Potentialdifferenzen in Erg pro st. LE zu messen sind). Diese Verschiedenheit der Bedeutungen erklärt sich aus, daß das Wort Spannung schon in derjenigen Zeit der Entwicklung der Elektrizitätslehre gebräuchlich war, da die Begriffe selbst sich erst zu klären anm. Im folgenden soll von Spannung im Sinne von Potentialdifferenz erst innerhalb der Elektrotechnik (§ 162 ff.) die Rede sein. —

Beziehungen zwischen elektrostatischen, elektromagnetischen und elektrotechnischen Maßen. — Da in § 136 die Einheit der Potentialdifferenz und hiermit die der Stromstärke gegründet war auf die Vorstellung der elektrostatischen Ladungseinheit (§ 135) und des „Strömens“ solcher Ladungen in Leitern, wogegen von diesen Vorstellungen das elektromagnetische Maß der Stromstärke ganz unabhängig ist, so tritt die Frage nach den Umrechnungs-Verhältnissen zwischen beiden Systemen auf. Die Antwort kann in verschiedenen Formen gegeben werden (LA 192), am besten prägt man sich ein:

LA 192.

1 Volt [d. i. die Einheit der Potentialdifferenz im elektrotechnischen Maßsystem] = $\frac{1}{300}$ **elektrostatische Potentialeinheit** (§ 136) = 10^9 **absol. elektromagnetische Einheiten** (§ 148).

Die Zahl **300** ist als abgerundeter Wert gewählt worden auf Grund der von W. WEBER 1856 gefundenen Zahl $3,1707 \cdot 10^{10}$, für die nach späteren genaueren Versuchen ein Wert zwischen $3,003 \cdot 10^{10}$ und $3,014 \cdot 10^{10}$ zu setzen wäre, als mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes sehr nahe einstimmend, in der elektromagnetischen Theorie des Lichtes (§ 157) zu größerer Geltung gelangt ist. Einige weitere Beziehungen zwischen den elektrischen Größen in den verschiedenen Maßsystemen vergl. math. Anh., Nr. 29.

Anh. 29.

Über die in der Elektrotechnik üblichen Bezeichnungen **Volt-Ampère = 1 Watt** (Einheit der Leistung), **Wattstunde** (als Einheit der Arbeit) u. dergl. vergl. § 172.

Bemerkung 1: Man hört oft von Anfängern fragen, „wie stark der Strom einer gegebenen Batterie, eines Akkumulators, einer Dynamomaschine etc. in dieser Form ist die Frage gegenstandslos, da es ganz vom „äußeren Widerstande“ des an die Klemmen geschlossenen Apparates (Elektromagnet, Spule, Elektromotor, Wasserzersetzungsgesetz, Glühlampe . . .) nebst dem Widerstande der zum Anschlusse verwendeten Leitungsdrähte abhängt, wie groß in diesem ganzen Stromkreise die Stromstärke ausfällt. — Nur wenn die Klemmen durch einen Leiter von sehr geringem Widerstande („Kurzschluss“ durch einen kurzdicken Draht) verbunden wären, hinge die so sich ergebende Maximal-Stromstärke, die diese Stromquelle geben kann, nur mehr von ihrer elektromotorischen Kraft und von ihrem eigenen inneren Widerstande ab. Begreiflicherweise pflegen aber die Stromquellen gerade für diesen Grenzfall nicht mehr eingerichtet zu sein, sondern z. B. eine Dynamomaschine, die zum Betriebe einer Lichtmaschine bestimmt ist, würde (falls nicht besondere Sicherheitsvorkehrungen getroffen sind, „Bleisicherungen“ § 171) bei eintretendem Kurzschlusse sofort in ihren eigenen Stromleitungen eine so große Stromstärke geben, daß die Bewicklungen und Drähte abbrennen würden. (Bei „Nebenschlussschaltern“ tritt bei Kurzschlusse Entmagnetisierung, also kein Abbrennen ein.)

Bemerkung 2: Der Begriff des „äußeren Widerstandes“ drängte sich früher auf als der des „inneren Widerstandes“, indem sich z. B. bei langen und dünnen Zuleitungsdrähten die Stromstärke geringer zeigte, trotzdem an der Stromquelle scheinbar keine Veränderung eingetreten war. Wenigstens aber der obige Versuch III zeigt, daß ähnlich wie die Verlängerung des Drahtes auch die Verlängerung des Flüssigkeitsprismas zwischen den beiden Platten des Elementes zur Schwächung der Wirkungen im äußeren Stromkreise beiträgt, und wenn wir dies auch dieser Flüssigkeit einen Widerstand zuschreiben, so wird doch dieser Begriff eines inneren Widerstandes einer näheren Untersuchung vor allem bedürftig, weil in der Flüssigkeit beim Durchgang des Stromes auch chemische Veränderungen eintreten. Überdies sind aber die Berührungstellen von Flüssigkeit und Metall selbst Stromquellen (etwas der Entstehung des Stromes Förderliches, wogegen die äußeren Stromleiter zur Entstehung des Stromes überhaupt nichts beitragen). — Noch auffallender ist dies bei dem inneren Widerstande z. B. einer Dynamomaschine, wo die Drahtwindungen der zwischen Magnetpolen rotierenden Spulen gleichzeitig die Erzeugungstellen des Stromes sind und auch diesem Strom Widerstand entgegensetzen. — Es soll daher der Begriff und Einfluß des „inneren Widerstandes“ an dem typischen Beispiele des inneren Widerstandes galvanischer Batterien in § 155 noch näher untersucht werden.

Bemerkung 3: Sowie bei der Stromverzweigung mehrere äußere Leiter den Leitungskreis bilden, können auch an mehr als zwei Stellen P_1 und P_2 des Leiterkreises mehrere und verschiedenartige Stromquellen vorhanden sein. Es wäre z. B. denkbar und ausführbar, hintereinander Batterien, Thermoelemente, Dynamomaschinen u. s. f. zu schalten. Wie Rechnung und Versuche zeigen, gilt dann das folgende verallgemeinerte Ohmsche Gesetz:

$$\text{Stromstärke} = \frac{\text{Summe der elektromotorischen Kräfte}}{\text{Summe der Widerstände}}, \quad i = \frac{\sum E}{\sum W},$$

oder $\sum E = i \sum W$, welcher Ausdruck auch für je eine der Zweigleitungen gilt. Da in einer solchen nach den eingangs geschilderten Versuchen 1 und 2 die Stromstärke an allen Stellen des Leiters konstant ist, so ist weiter $\sum E = i \sum W$. In dieser Form heißt die Beziehung der zweite Kirchhoffsche Satz. Als

ter Kirchhoffscher Satz wird der (oben bei der Berechnung der Stromverteilung benutzte) Satz bezeichnet, daß an jeder Stelle eines geschlossenen ionären Stromes so viel Ladung zufließt, als abfließt; somit $\sum i = 0$.

§ 150. Magneto- und Elektro-Induktion.

Geschichtliches. FARADAY erwartete im Hinblick auf die Erscheinungen der elektrischen und magnetischen Verteilung, sowie des Bewegtwerdens von Strömen durch Magnete, daß in der Nähe eines stromdurchflossenen Leiters oder eines Magnets in geschlossenen Stromleitern Ströme auftreten werden. Diese Erwartung bestätigte sich aber so lange nicht, als jene Körper in gegenseitiger Ruhe waren. Erst als Faraday zufällig bemerkte (1831), daß im Augenblicke Entstehens und Vergehens des Stromes im „primären“ Stromkreise, und auch bei gegenseitiger Annäherung und Entfernung des primären und sekundären Leiters das mit letzterem verbundene Galvanometer einen (kurz dauernden) Strom anzeigte, und nachdem er weiter auf Grund der Äquivalenz von stromdurchflossenen Spulen und Magneten auch bei Bewegung eines Magnets gegen einen sekundären Leiter solche Ströme gefunden hatte (noch 1831), war die Reihe der Beziehungen zwischen Strömen und Magneten (Combinationen der Bewegung und der „Erregung“ nach Übersicht S. 470) vollständig in der Erfahrung nachgewiesen. — Entsprechend der bisher eingehaltenen Ersetzung der Wirkungen von Kreisströmen durch die von Magneten stellen wir die Versuche der Magneto-Induktion voran:

Fig. 535.

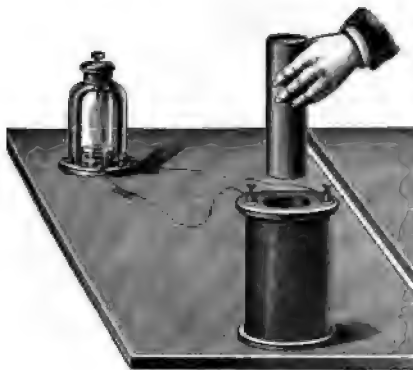
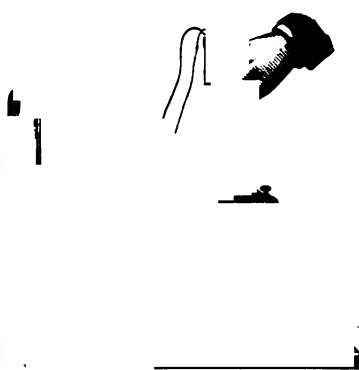


Fig. 536.



Versuch a): Eine Spule mit sehr vielen Windungen dünnen Drahtes ist durch lange Zuleitungsdrähte mit einem Galvanometer zu einem geschlossenen Stromleiter verbunden (Fig. 535). Die Nadel zeigt 1. einen Strom an, wenn man der Spule einen Magnet nähert (rasch die Hölhlung hineinschiebt); 2. keinen Strom, solange der Magnet ruhig in der Spule befindet; 3. einen Strom von entgegengesetzter Richtung wie in 1, wenn von der Spule der Magnet entfernt (rasch

mechanische Kräfte zwischen Strömen und Magneten u. s. w.

a) wird; 4. keinen Strom, wenn der Magnet sich ruhend vor der Spule befindet. — Man nennt die bei 1 und 3 auftretenden Ströme **magnetoinduzierte Ströme**.

b) wird der Magnet durch ein Solenoid ersetzt (eine Spule von wenigen Windungen dicken Drahtes, damit der Widerstand klein, also die Selbstinduktionsstärke groß sei), durch das der „primäre“ Strom einer Batterie (Fig. 536 a. v. S.), so ergeben sich bei den gleichen Bewegungen wie in 1 und 3 **elektroinduzierte Ströme**.

Sowohl bei a) wie bei b) kommt es nur auf die relative Bewegung der erregenden Magnete in bezug auf die Induktionsspule an; es kann also auch die Induktionsspule zu ruhenden Magneten und Primärspulen hinbewegt oder von ihnen entfernt werden (Fig. 592: einfachstes Vorbild der Wechselstrommaschine).

c) Dem Annähern der geschlossenen (ruhenden) Magnete, gleichwertig das Entfernen des Magnets, bzw. Solenoids an der Spule ist gleichwertig ein Verstärken des primären Stromes. Das Entfernen (a, b, 3) ist ebenso gleichwertig dem Abnehmen des primären Stromes.

Es sind nun die induzierten Ströme festzustellen.

Zu c). Gehen wir speziell der einer Windung der Spule an.

Fig. 537.



a. den durch den Magnet induzierten Strom hat dann die durch den Magnet angegebene Richtung. Dies lässt sich direkt experimentell feststellen, aber auch schon vorher nach Analogie des Arbeitsaufwandes bei Influenzmaschinen (bzw. beim Abheben des Elektrophordeckels, § 194) mit Wahrscheinlichkeit erwarten.

Anh. 37. warten (log. Anhang, Nr. 37). Denn angenommen, das Herzubewegen von N habe schon einen Induktionsstrom von der angegebenen Richtung erregt, so wird dieser Strom gemäß der Handregel den Nordpol von sich wegzubewegen suchen und es wird also das Annähern des Poles entgegen dieser Abstoßung mechanische Arbeit kosten, für die dann eben dieser Strom das elektrische Äquivalent darstellt. — Gleiches gilt, wenn (b, 1) einer Windung der sekundären Spule eine Windung des primären Stromes genähert wird, wobei der induzierte Strom dem induzierenden entgegengesetzt gerichtet (beim Entfernen der Primärwindung gleich gerichtet) ist; denn da entgegengesetzte Ströme einander abstoßen (§ 148), hat das Annähern der Primärspule entgegen der Abstoßung seitens der sekundären Spule Arbeit gekostet. — Diese Beziehungen wurden sehr bald nach der Entdeckung der magneto- und elektroinduzierten Ströme von FARADAY selbst experimentell allseitig bestätigt und 1834 (also noch 8 Jahre vor der allgemeinen Aufstellung des Gesetzes der Erhaltung der Arbeit durch ROBERT MAYER) von LENZ formuliert in der seitdem sogenannten

Lenzschen Regel: Die Richtung aller Arten von Induktionsströmen ist eine solche, daß diese den erregenden Bewegungen der Magnete oder Solenoide mechanischen Widerstand leisten.

Inwiefern auch die Induktion durch Magnete und Ströme, die sich in Bezug auf den sekundären Leiter nicht bewegen, sondern nur stärker und schwächer werden, mit der Lenzschen Regel und sohin mit der Erhaltung der Arbeit im Einklange ist, vergl. folgenden Paragraphen.

Zu β). Wie von vornherein zu erwarten (genauere Malsbestimmungen im folgenden Paragraphen), sind die induzierten Ströme um so stärker, je stärker die induzierenden Magnete und Ströme sind, ferner je rascher sich ihre Stärke vergrößert oder verkleinert (am kräftigsten bei raschem Anfangen oder Aufhören der magnetischen Kräfte oder des Stromes), bzw. je rascher sie in Bezug auf den sekundären Leiter bewegt werden (vorausgesetzt, daß nicht infolge der rascheren Bewegung der sekundäre Leiter auch nur kürzer im Kraftfelde des erregenden Magnets oder Solenoids ist); endlich je länger der sekundäre Leiter ist. — Im Hinblick auf die gemäß der Lenzschen Regel zu verrichtende Arbeit gilt allgemein: Um starke Induktionsströme zu erhalten, müssen die Induktionsspulen innerhalb des Kraftfeldes der induzierenden Magnete und Solenoide so bewegt werden, daß der zu überwindende Widerstand ein möglichst großer ist; dies der leitende Gedanke für den Bau aller Dynamomaschinen, allgemeiner: Strommaschinen oder Generatoren, §§ 162, 164.

Als Induktionsapparate kurzweg bezeichnet man solche für Elektroinduktion, insbesondere DUBOIS-REYMONDS Schlittenapparat (Fig. 538) und RÜHMKORFFS Induktorium (kurz: „ein Rühmkorff“,

Fig. 538.

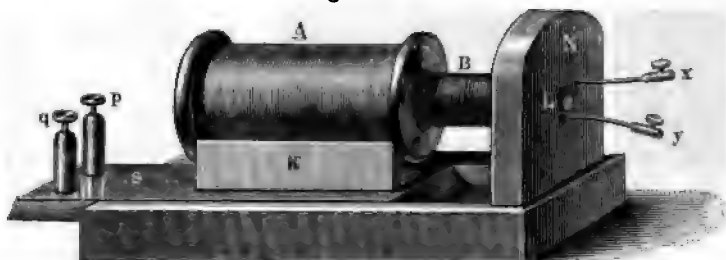


Fig. 539 a. f. S.). In beiden wird (in der Regel seitens einer Batterie) ein Primärstrom in eine Primärspule von verhältnismäßig wenigen Windungen dicken Drahtes geleitet, die sich innerhalb einer Sekundärspule von vielen Windungen dünnen Drahtes befinden (bei großen Rühmkorff bis zu Längen von 100 000 m). In den Primärstrom sind Selbstunterbrecher verschiedener Formen (WAGNERS Hammer, § 173; bei großen Induktorien als besonderer Nebenapparat FOUCAULTS Interruptor, Fig. 539, a. f. S., neuestens WEHNELTS Unterbrecher u. a.) geschaltet.

Innerhalb der Primärspulen befindet sich (entweder fest oder in sie schiebbar) ein Bündel von Drähten aus weichem Eisen, durch das die Wirkung beträchtlich verstärkt wird und zwar in folgender Weise: Durch den intermittierenden Primärstrom wird das weiche Eisen intermittierend magnetisch und wirkt daher auf die Sekundärspule magnetoinduzierend. Von dieser Wirkung der Eisenkerne zunächst abgesehen, läßt sich das Prinzip der Induktorien so erklären: Je eine Windung der Primärspule wirkt gleichzeitig auf viele der

ihr nahen Windungen der Sekundärspule überall in demselben Sinne ein. Es wird infolgedessen der elektrische Strom im sekundären Leiter vergleichbar mit dem einer Batterie von vielen hintereinander geschalteten Elementen, wie sie beim

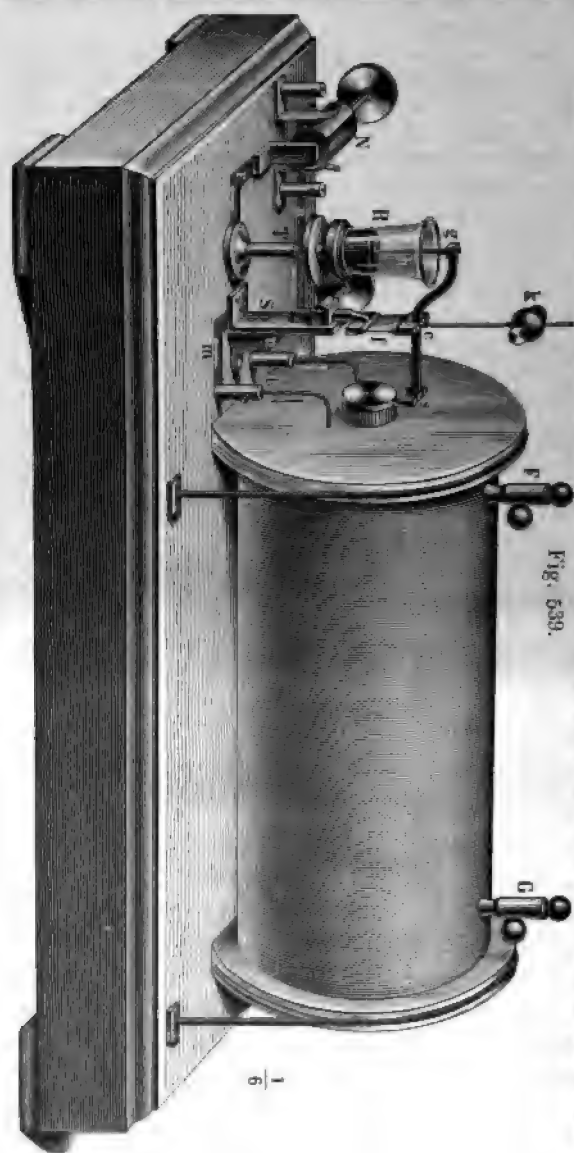


Fig. 553.

Versuch 2 im § 140 verwendet worden war, indem dabei der Draht der primären Spule dünn gewählt sein muß, damit viele seiner Windungen in der Nähe jener primären Windungen Platz finden. Wird der Widerstand dieses dünnen langen Drahtes ein großer und daher gemäß dem Ohmschen Gesetz die Stromstärke eine kleine sein; wieder ähnlich, wie die kleinen Elemente bei jenem Versuch nur schwache Ströme liefern. So werden in größeren Ruhmkorff'schen Apparaten starke Primärströme (etwa 40 A) bei mäßiger Klemmenspannung (etwa 12 Volt) in schwache Ströme (etwa 0,8 A) von hoher Klemmspannung (etwa 600 Volt) „transformiert“. Die Wirkung kann durch Kondensatoren (Stanniolblätter zwischen Wachsstück), mit denen die Poldrähte der Sekundärspule in Verbindung stehen, ähnlich gesteigert werden, wie durch Leydener Flaschen die Wirkung der Influenzmaschine. — Über die durch Induktoren zu erzielenden prachtvollen optischen Erscheinungen, die jenen der sogenannten elektrostatischen Entladungen ähnlich sind, vergl. § 156.

Die Induktoren stellen einen besonderen Fall der **Transformatoren** im weiteren Sinne dar; über Transformatoren im engeren Sinne vergl. § 166.

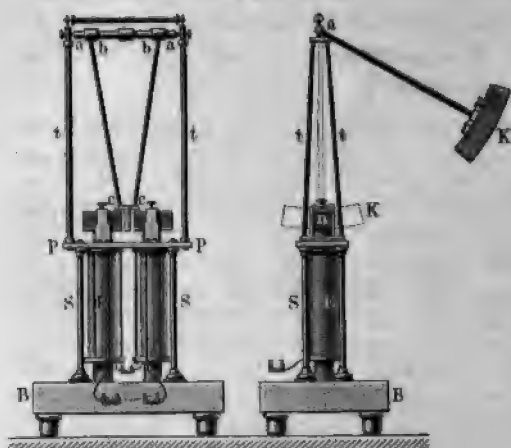
Extrastrom; Selbstinduktion. Sowie ein Strom bei jeder

erung seiner Stärke in einem benachbarten Stromleiter Ströme ziert, tut er es auch im eigenen Schließungsleiter. FARADAY nannte den Induktionsstrom, der jeden nicht stationären Strom im neuen Leiter begleitet, den **Extrastrom**; man sagt jetzt von ihm, **er** sei durch **Selbstinduktion** entstanden.

Da beim Verstärken und speziell beim Anfangen eines Stromes der Extrastrom entgegengesetzte Richtung hat, wird ein an Stärke zunehmender Primärstrom gleichsam durch sich selbst geschwächt; und ebenso wird ein an Stärke abnehmender Primärstrom durch sich selbst verstärkt. Diese Tatsachen erklären ihr Paradoxes, wenn man sie vergleicht mit dem Anlauf und Endlauf nach dem Trägheits- und Beharrungsgesetz sich bewegendem Masse (§ 15, I; s. auch § 31): im Anlauf nämlich setzt die Masse der beschleunigenden Kraft einen Widerstand entgegen, als ob sie das Beschleunigen hindern wollte; im Endlauf setzt sie der Verzögerung einen Widerstand entgegen, als ob sie das Verzögern hindern wollte. — Tatsächlich erreicht infolge des Extrastromes der Strom nicht schon im Zeitpunkte des Schließens, sondern erst etwas später ihm nach der elektromotorischen Kraft und nach dem Ohmschen Widerstand zunehmende Stromstärke. — Man kann diese Tatsachen auch so ausdrücken: Einem an Stärke zunehmenden Strom gegenüber zeigt jeder Leiter einen größeren Widerstand, einem an Stärke abnehmenden Strom einen kleineren Widerstand als gegenüber einem stationären Strom. In dieser Weise kommt jedem Leiter **Selbstinduktion** zu (und jedem nicht stationären Strom eine „elektromotorische **Gegenkraft** der Selbstinduktion“, sowie jedem Leiter ein **duktiver Widerstand**“ neben dem Ohmschen, deren Resultierende der **hebbare Widerstand**“ heißt). — Extrastrome und Selbstinduktion sind in Drahten beträchtlich, da hier je eine Windung auch auf die benachbarten wirkt, dagegen unbeträchtlich in geraden Leitern. — Die einfachste und auffälligste Erscheinung, welche in der Selbstinduktion ihre Erklärung findet, zeigt der **Versuch**: Eine Spule gibt beim Schließen keine Funken (oder doch nur bei sehr hoher Potentialdifferenz der Drahtenden, und auch da nur verhältnismäßig schwache), wohl aber kräftige Funken beim Öffnen; dagegen wird der Unterschied bei geraden Leitungsdrähten unmerklich. Ähnlich die physiologische Wirkung der beim Öffnen und Schließen hinreichend starker Ströme zu beobachtenden elektrischen Schläge.

FOUCAULTS Ströme. Noch vor FARADAYS Entdeckungen der Magneto- und Elektroinduktion hatte ABAGO beobachtet, daß eine über einer wagrechten, rotierenden Kupferscheibe stehende Magnetnadel abgelenkt und bei hinreichend rascher Rotation der Scheibe selbst in Drehung versetzt wurde (dies auch dann, wenn zwischen Scheibe und Nadel eine zwischengelegte Glasscheibe Luftströmungen zwischen Scheibe und Nadel geschlossen waren). Dämpfung der Schwingungen von Magnetstäben durch die Luft. — Durch Faradays Entdeckung der Magnetoinduktion erklärten sich dann diese Erscheinungen, indem durch die Relativbewegung zwischen Nadel und Kupfer in diesem Stromkreise erzeugt werden, die nach ØRSTEDS Gesetz wieder auf die Nadel ablenkend wirken. Man pflegt solche Ströme nach FOUCAULT zu benennen, da sie von diesem besonders eingehend untersucht wurden. — WALTENS Pendel (Fig. 540 a. f. S.) zeigt solche Erscheinungen in besonders auffälliger Weise: Schwingt nämlich das Pendel zwischen den Polschuhen, solange der Elektromagnet noch nicht durch einen Strom angeregt ist, unter unmerklichem Widerstande der Luft und Reibung, so kommt es doch fast augenblicklich zum Still-

Fig. 540.



stande, wenn die Polachse magnetisch werden. Auch hier wird im Kupfer durch die Polachse Ströme induziert. Dabei erwärmt sich das Kupfer ähnlich wie wenn es in einer eisenen Masse durch Stöße und Reibung aufgehoben würde. — Solche Ströme treten auch in den zusammenhängenden Eisenmassen der Elektromagnete bei allen Veränderungen der Stromstärke auf. Um daher bei Dynamomachinen u. dergl. die Erhitzung der Eisenkerne zu verhindern, werden diese aus dünnen Blöcken weichen Eisens, die lackiert oder durch Papierblätter getrennt sind, zusammengesetzt.

§ 151. Einige Maßbestimmungen für Induktionsströme. Wechselströme, Mehrphasenströme.

Nach der Lenzschen Regel treten nur dort Induktionsströme auf, wo entgegen einer elektromagnetischen oder elektrodynamischen Anziehung oder Abstoßung zwischen dem induzierenden Magnet oder Solenoid einerseits, dem induzierten Strom andererseits mechanische Arbeit zu leisten ist. Zur Anwendung dieser Regel ist also erforderlich, daß die Richtungen der Kräfte, welche vom Magnet oder Solenoid einerseits, vom sekundären Leiter andererseits ausgehen, einander ganz oder zum Teil (d. h. Komponenten jener Kräfte) der jeweiligen Richtung der relativen Bewegung entgegengesetzt seien. — Dies führt auf die Beachtung der Kraftlinien des dem Magnet, bzw. Solenoid zugehörigen Kraftfeldes, in welchem der sekundäre Leiter bewegt wird. Es wird dann sowohl das Auftreten oder Nichtauftreten von Induktionsströmen überhaupt wie auch deren Stärke bestimmt durch die bewundernswert einfache

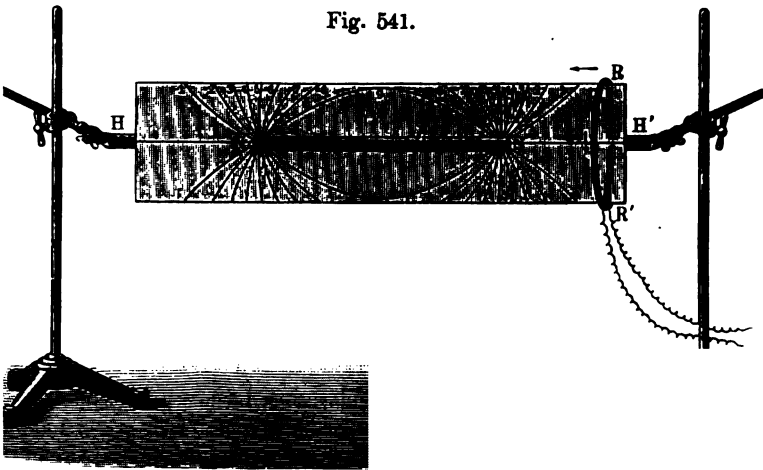
Faradaysche Regel: Wird ein Leiter im Kraftfeld eines Magnets oder stromdurchflossenen Leiters bewegt, so ist die **Maßzahl der elektromotorischen Kraft** (und daher beim Widerstande 1Ω auch die der **Stromstärke**) des induzierten Stromes **gleich der Anzahl der per sec vom Leiter gleichsinnig durchschnittenen Kraftlinien.**

Der Sinn und die Richtigkeit dieses ganz allgemein (für kurze und lang-gerade und krumme, senkrecht oder schief gegen die Kraftlinien gerichtete Leiter von größerem oder kleinerem Widerstande, die gerade oder schief, schneller oder langsamer gegen die Kraftlinien bewegt werden) geltenden Gesetzes (rechnerischer

LA 194. Beweis für einfache Fälle vergl. LA 194) sind erläutert in Fig. 541: Sekundärer Leiter ist der aus mehreren Windungen bestehende und zu einem Galvanometer von mäßiger Empfindlichkeit führende Draht RR' , welcher in der Richtung des größeren Pfeiles bewegt wird. Induzierend wirkt der Magnet NS , der ersetzt

ann durch eine stromdurchflossene Spule mit oder ohne Eisenkern. Auf Karton sind die Kraftlinien so gezeichnet, daß, wenn der Karton um die NS rotiert, der Raum des Kraftfeldes in 10 gleiche Räume geteilt wird, deren jeden also ein Zehntel der sämtlichen Kraftlinien hindurchgeht. Daß bei Annäherung von RR' an den Pol S ein Strom von der Richtung des kleineren induziert wird, ergibt sich nach Lenz' Regel zusammen mit der Handregel. Man wird nämlich z. B., daß derselbe Leiter RR' einem isolierten Nordpol N genähert werde, so wird der in der vorderen Hälfte des Ringes nach aufsteigende Strom den Nordpol abzustossen suchen, und wenn er ihm trotz-

Fig. 541.



genähert wird, wird dies Arbeit kosten. Die Annäherung des Stromes an den Ring wird also einen entgegengesetzt gerichteten Strom erzielen. — Mit Benutzung der Kraftlinien erhellt, daß zunächst beim isolierten Pol der induzierte Strom am kleinsten sein wird, wenn sich der Pol in der Ebene des Ringes befindet. Denn werden die vom isolierten Pol radial weggehenden Kraftlinien (in der Zeichnung nahezu vertikalen) vom Stromleiter normal geschnitten. Wird ferner der Leiter über den vollständigen Magnet geschoben, so hat der induzierte Strom die gleiche Stärke, wenn er die Kraftlinie 5 schneidet, beim Hingleiten über N bei der stärksten entgegengesetzt gerichteten u. s. w.

Selbst bei den kompliziertesten gestalteten Magneten ohne Bewickelung oder ohne Eisen lassen sich die Kraftlinien, wenn auch manchmal kaum mehr berechnen, doch empirisch durch das einfache Mittel des Aufstreuens von Eisenfeilicht bestimmen; und der Elektrotechniker hat beim Bau von Dynamomaschinen dann darauf zu achten, daß die bewegten Stromspulen möglichst viele dieser Kraftlinien schneiden, wonach sich die Form der Spulen und der Magnete zu richten hat (vergl. §§ 162, 164). — Ein besonders einfaches Beispiel für diese Bestimmung von Sekundärleitern und Kraftlinien gibt der

Erdinduktor (Fig. 542 a. f. S.). Die Kraftlinien des homogenen Magnetfeldes der Erde liegen in der Richtung der Inklinationssnadel. Wenn also der Ring des Erdinduktors mit seiner Ebene zuerst normal zur Richtung der Inklinationssnadel gestellt und dann gedreht,

Fig. 542.

LA 195.



so schneidet er bei jeder Drehung diese Kraftlinien der Erde (LA 195) und gibt Induktionsströme.

Bei den Versuchen von PALMIER: gab es 200 Windungen eines $1\frac{1}{2}$ mm dicken Kupferdrahtes auf einem elliptischen Rahmen von den Halbachsen $a = 1,1$ m, $b = 0,3$ m. Faden, elektrische Schläge und Wasserzerlegung.

Die Methode der Kraftlinien macht es nun auch begreiflich, warum z. B. das Annähern eines Magnetpols an einen Kreisstromleiter oder ein Solenoid auch das Verstärken des Poles äquivalent ist: es geraten nämlich dann die Kraftlinien in Bewegung (indem sich ihrer mehr zum Pole hinzubegeben, § 144) und sie schneiden somit den ruhenden Leiter. Ähnlich in allen übrigen Fällen der Verstärkung oder Schwächung von Magneten und Primärspulen.

Wechselströme. Wiewohl die induzierten Ströme z. B. beim Hineinstoßen eines Magnetstabes in die Hölzung einer Sekundärspule rasch an- und abackwellen, so wäre es doch denkbar, Induktionsströme von konstanter Stärke (wenigstens für kurze Zeit) zu erhalten, wenn zugleich mit der Bewegung des erregenden Stromes oder Magnets auch seine Stärke entsprechend verändert würde. In der Praxis kommt dieser Fall nirgends vor; wohl aber gelingt es durch geeignete Stromwender (§ 173), den Induktionsströmen gleiche Richtung zu geben, so daß sie dann von Batterieströmen sich nur noch durch mehr oder weniger Intermission unterscheiden. In den ersten Zeiten der Konstruktion von Strommaschinen war man darauf bedacht, solche Gleichströme zu gewinnen, die dann z. B. in elektrochemischen Anwendungen geeignet sind. Erst später erkannte man, daß auch die Wechselströme bestimmte Vorteile haben, insbesondere ökonomische: vergl. § 164.

Der einfachsten mathematischen Behandlung zugänglich sind diejenigen Wechselströme, deren Stromstärken einer Sinuskurve entsprechen (kurz: Sinusströme), bei der die Abszissen die Zeit, die Ordinaten die Stromstärke darstellen. Auf solche Ströme werden dann die Begriffe der Wellenlehre übertragen: Schwingungsdauer, Schwingungszahl, Amplitude u. s. w. des Stromes. — Die oberhalb der Abszissenachse liegenden Wellenberge stellen den in der einen, die Täler den in der entgegengesetzten Richtung fließenden Strom dar. Die „mittlere Stärke“ des einen Stromes wird dargestellt durch die Höhe desjenigen Rechteckes, das der Fläche eines Wellenberges flächengleich ist (math. Anhang, Nr. 19, LA 197).

Anh. 19.

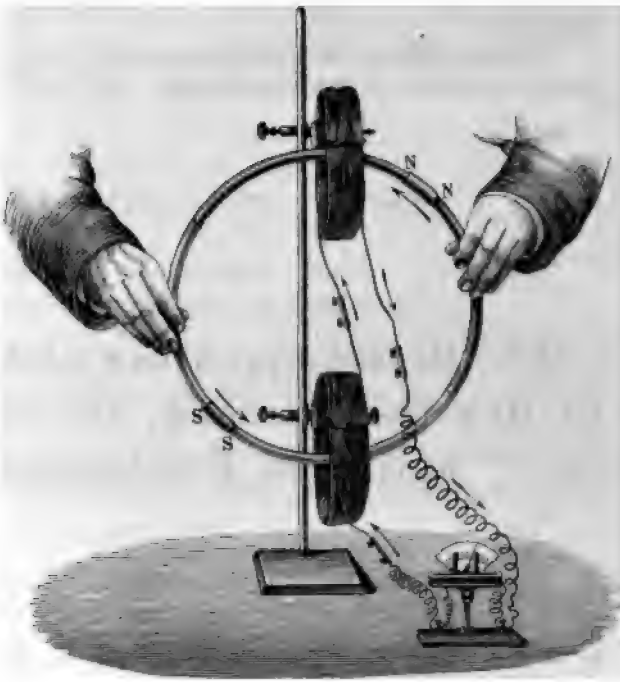
LA 197.

e Grundgleichung (das Weg-Zeit-Gesetz) für die einfache Schwingung hwingung eines Punktes lautet: $s = a \sin at$ (§ 12, GL 5), so lautet die der Zeit wechselnde elektromotorische Kraft e eines Sinusstromes at , wo E der Maximalwert von e ist (Ableitung dieser GL LA 196). LA 196, 197.

nfaches Beispiel für das Entstehen von Wechselströmen (das zu-chematisch vereinfachte Vorbild für die Einrichtung des charakteri-

standteiles
omaschine,
Gramme-
res, § 162,
Fig. 543
wei Spulen
umen mit
anometer
geschlosse-
reis. Zwei
nige Mag-
l mit den
en Polen
S zu einem
n Magnet-
vereinigen.
Ring durch
in hin-
schwinder
er Bewe-
sinne der
N und SS
kreist in
rähnen bei
Figur er-
ickelungs-
m im Sinne
en Drähten
Pfeile.

Fig. 543.



wir uns dabei den Magnetring zu einem geraden Stab ausgestreckt, e Kurve von der in Fig. 544 dargestellten Gestalt (ebenfalls je nach isierung des Stabes mehr oder minder annähernd eine Sinuslinie) Ordinaten die Stärken der magnetischen Kräfte darstellen.

wir uns dann über diesen geraden Stab wieder eine Drahtspule im feile hingeschoben, so treten die stärksten Induktionsströme auf beim

Fig. 544.



n über die Stellen NS, weil dort die Spule die meisten Kraftlinien ad zwar mit allen ihren Teilen gleichsinnig. Eine Spule, parallel zum desselben vorbeigeführt, erfährt hingegen gerade bei N und S keine In-

duktion, weil dort vordere und hintere Spulenseiten gleichgerichtet, also in Kreise entgegengesetzte Induktionen erfahren, die sich aufheben.

Denken wir uns endlich (was konstruktiv in dieser Form freilich nicht verwirklicht ist) den Magnetring in der Stellung nach Fig. 543 festgehalten und die Spulen in dem den Pfeilen entgegengesetzten Sinne um den Ring herumgeführt, so ergibt sich dieselbe relative Bewegung zwischen Spule und Magnet und also auch derselbe Strom. — Von dieser Einrichtung wäre dann nur noch ein Schritt zum Grammeschen Ring (§ 162); auch er gäbe Wechselstrom, wenn nicht durch die Kollektoren für die Verwandlung in Gleichström gesorgt wäre.

Den aus mehreren einfachen Schwingungen zusammengesetzten Schwingungen entsprechen die **Mehrphasenströme**, vergl. § 164.

IV. Beziehungen der elektrischen zu den thermischen, chemischen und optischen Erscheinungen.

Vorbemerkung: In den Abschnitten I, II, III wurden aus dem Ineinandergreifen der elektrischen Erscheinungen mit allen Gattungen sonstiger physikalischer Erscheinungen speziell die „mechanischen Wirkungen“ herausgehoben. So ist z. B. die Anziehung zweier geladener Pendel, aber auch die Anziehung eines Elektromagnets auf seinen Anker u. dergl. für sich betrachtet nur ein mechanischer Vorgang, indem die „Wirkungen“ der Ladungen, der Ströme und der magnetischen Kräfte hier nur **Beschleunigungen** und **mechanische Spannungen** sind. Umgekehrt ist auch das Auftreten eines Induktionsstromes z. B. infolge Bewegung eines Magnets in dem entstehenden Kraftfelde des Stromes durch eine rein mechanische „Ursache“ bewirkt, nämlich durch die **mechanische Arbeit** entgegen der Abstossung, bezw. Anziehung zwischen Pol und induziertem Strom. Dabei stellen sich die elektrostatische Induktion (z. B. das Auftreten von Ladungen einer Influenzmaschine) und die elektromagnetische Induktion (Magneto- und Elektroinduktion) als die verhältnismässig durchsichtigste Umwandlung mechanischer in elektrische Energien dar — jedenfalls sind sie minder verwirklicht als selbst die Elektrisierung durch Reibung.

Die noch erübrigenden **thermischen, chemischen und optischen Wirkungen** des Stromes zeigen eine ähnliche Reziprozität, wie die für die **mechanischen Wirkungen** und Ursachen gemäß der im § 147, S. 470 gegebenen Übersicht mechanischen Vorgänge zwischen elektrischen Strömen und Magneten. So es z. B. einerseits die **Thermostrome**, andererseits **Peltiers Phänomen**; den elek-

sehen Erscheinungen entsprechen als Umkehrung die Batterieströme. Überall da wir es hier mit doppelseitigen Umsetzungen von Energie, z. B. von Stromenergie in Wärme, bezw. Wärme in Stromenergie, zu tun.

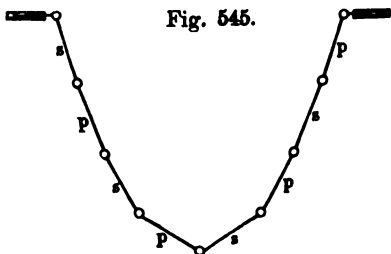
Überdies wird sich durch die Beobachtung dieser aufsermechanischen Vorgänge an Strömen der Einblick in das Wesen des elektrischen Stromes und in die für seine Leitung maßgebenden molekularen Zustand der verschiedenen Arten von Stoffen überhaupt vertiefen, indem in den Gutleitern (Leitern erster Ordnung) vorwiegend die thermischen Wirkungen, in den Elektrolyten (Leitern zweiter Ordnung) die chemischen Wirkungen, in den Schlechtleitern (Isolatoren) die optischen Wirkungen (Lichterscheinungen bei Entladungen Gasen) der „Elektrizität“ vorwiegend zur Erscheinung kommen.

A. Stromarbeit und Wärme.

§ 152. Umsetzung von Stromenergie in Wärme. Kalorisches Maß der Stromstärke.

Die aus der Elektrotechnik bekanntesten „Wärmewirkungen des Stromes“ sind die in den elektrischen Bogenlampen und Glühlampen (§§ 167, 168); ferner die Zündensprengung, Galvanokaustik, elektrisches Schweißen u. dergl. m.

Vorversuche: 1. Werden die Enden der Drähte einer (hinreichend großartigen) galvanischen Batterie mit den Enden aneinander geprefst, so empfindet man ein Warmwerden dieser Drahtenden. Wird dann zwischen sie ein hinreichend langer und nicht zu langer Metalldraht eingeschaltet, so wird er glühend. 2. In einem Kettchen aus gleich dicken Stücken aus Silber- und Platindraht (Fig. 546) wird beim Durchgang eines Stromes, der eben zum Glühen bringt, Silber nicht glühend.



Überall tritt hier an den Stellen größeren Widerstandes (z. B. zwischen den Kohlenspitzen der Bogenlampe) eine beträchtlichere Erhöhung des Wärmebedarfes im Vergleich zu den übrigen Teilen des Stromleiters auf. Gleichwohl fehlt an solcher Wärmeentwicklung auch nicht in den bestleitenden Teilen eines Stromleitungskreises; ja eben dieser Umsatz von Stromenergie in Wärme ist es, nach dem die Vorstellung eines „Widerstandes“, wie er gemäß Versuchen von anderer Art der in § 149, S. 476 geschilderten an allen Stellen eines Stromleiters geringerem oder höherem Grade vorhanden ist, erst am unmittelbarsten physikalisch verständlich wird. Leuchtet z. B. eine elektrische Glühlampe, die in den Stromleitungskreis derselben Stromquelle (Dynamomaschine, Batterie . . .) geschaltet

bei langen dünnen Drähten weniger als bei kurzen dicken, so erklärt sich der größere „Widerstand“ eben daraus, daß in den langen dünnen Drähten mehr von der Stromenergie sich schon in Wärme umgesetzt hat.

hungen der elektrischen zu den thermischen u. s. w. Erschein

cher als das Gesetz für die Abhängigkeit des Wärmeg
stärke und Widerstand (sowie von der inneren und Ä
tungsfähigkeit, § 79, des Stromleiters, seiner speci
l. s. f.) ist das Gesetz für die durch den ganzen
generierte **Wärmemenge**; und zwar am einfachsten dann, wa

Fig. 546.



Strom keine Gelegenheit hat, einen Teil
Energie vor ihrem Übergang in Wärme zu
tischen, Induktions- oder chemischen Wir
zu verbrauchen. Es ist dies dann der Fall,
zwischen den Polklemmen nur ein Draht
homogenem Metall (ohne eingeschaltete T
elemente, elektrolytische Zellen u. dergl.) gef

Wird ein Teil dieses Drahtes z. B. durch
Kalorimeter sendes Gefäß mit reinem Wasser oder
(die als Schmelzleiter, § 79, ein Abzweigen des
a a in die kalorimetrische Flüssigkeit
u Thermometer geführt, so läßt sich
diesem Teil des Drahtes entwickelte Wärmemenge
(Fig. 546, LA 199). Nach dieser und anderen Meth
stättigt sich

JOULES Gesetz: Wenn sich die Energie eines Stromes von
bei einer elektromotorischen Kraft von e Volt in einem Wide
von w Ohm während t sec ganz in Wärme (nicht auch zum
andere Energieformen) umsetzt, so beträgt diese

$$\text{Stromwärme } Q = 0,24 i e t = 0,24 i^2 w t \text{ cal,}$$

wo der Koeffizient 0,24 (genauer 0,2394) das kalorische Äqui
(in Grammkalorien) der mechanischen Arbeitseinheit (in
ist. (Vergl. § 82.)

Dies Gesetz hatte JOULE noch vor den bestätigenden Versuchen d
gende theoretische Überlegungen gefunden: Bei einem stationären Strom
binnen 1, 2, 3 ... t sec 1, 2, 3 ... t mal so große elektrische Ladungsm
Entladung, die als Stromwärme das kalorische Äquivalent der in der
aufgespeicherten elektrischen Energie darstellt. Diese Energie ist
stärke \times Zeit) \times (Stromstärke \times Widerstand); LA 198. — Darin,
theoretisch erwartete und in Einheiten der mechanischen Arbeit ausgedr
trag der aus dem Strom zu gewinnenden Wärmemenge mit der aus den v
ermittelten Wärmemenge übereinstimmt, war erst der experimentelle
geführt, daß ebenso wie der Wärme auch der Stromenergie ein m
sches Äquivalent zukommt.

Kalorische Messung der Stromstärke: Auf Grund vorstehende
kann man eine Stromstärke ebenso wie im elektromagnetischen (und gen
im elektrochemischen) Maße auch im kalorischen Maße messen. D
gemäß obiger Gleichung die Maßzahlen nach kalorischem Maße die Q
der Maßzahlen nach elektromagnetischem (sowie nach chemischem) M

ch lehrreich ist, indem es zeigt, daß in dem Begriffe „Stärke des „ nicht schon von selbst gegeben ist, was wir unter einem „2, 3 . . . i-Strom“ zu verstehen haben, sondern daß erst festgestellt werden muß, cher „Wirkung“ des Stromes wir ihn selbst bemessen wollen.

ktisch sind die kalorimetrischen Messungen für sich nicht so einfach wie esungen an der Tangentenbussole (oder am Ampèremeter und Voltameter). d sie vorzüglich geeignet namentlich für Wechselströme, da diese keine e Stromstärke besitzen, die einen bestimmten Ausschlag an der Tangenten- (oder konstante Wasserzersetzung in einem Voltameter) gibt; wohl aber e bestimmte Menge Stromenergie auch bei Wechselströmen in Wärme t und läßt sich also durch diese Wärmemenge messen (§ 172).

153. Umsetzung von Wärme in Stromenergie. Peltiers und Thomsons Phänomene.

schichtliches. SEEBECK hat (1821) beobachtet, daß, wenn die Lötstelle verschiedener Metalle erwärmt und andere Stellen derselben Metalle durch bliefsungsleiter verbunden werden, in diesem ein Strom auftritt. — Daß röße schon bei geringen Erwärmungen, bezw. Abkühlungen der Löt- rächtliche Stärke haben können, zeigt folgender

rsuch: Ein Antimon- und ein Kupfer-
ig. 547, bezw. ein Kupfer- und ein
t-, bezw. ein Antimon- und ein Wis-
b) sind zusammengelötet zu einem ge-
nen Rahmen, der um eine Deklinations-
ührt. Wird der Rahmen in die Ebene
gnetischen Meridians gestellt und nun die
tstelle auch nur durch die Flamme eines
lzchens erwärmt, bezw. durch Auflegen von
geköhlt, so weicht die Nadel um beträcht-
inkel aus. Aus dem Sinne der Ablenkung
ich, daß durch eine erwärmte Lötstelle der
in der Richtung Kupfer—Antimon (bezw.
—Kupfer, Wismut—Antimon: für diese
etalle also „dem Alphabet entgegen“)
durch abgekühlte Lötstellen im entgegen-
ten Sinne.

Verbindung zweier Metalle heißt ein Thermo-
, wenn sie nur eine zu erwärmende oder abzu-
Lötstelle hat; eine Verbindung mehrerer solcher
g. 548 u. 549 eine Thermosäule. (Eine Anwendung
rmosäule in Verbindung mit dem Galvanometer zur Nachweisung und
sehr geringer Temperaturdifferenzen, vergl. z. B. in Mellonis Apparat
S. 377.) — Ein Thermoelement ist also zu vergleichen mit einem galva-
Element; und wie an diesem, solange es nicht geschlossen ist, die aus

Fig. 547.

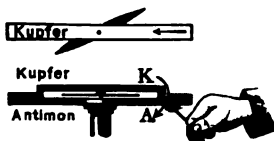


Fig. 548.



Fig. 549.



der Flüssigkeit ragenden Enden der festen Körper eine Potentialdifferenz aufweisen, werden wir uns eine solche auch erwarten dürfen an dem nicht geschlossenen Thermoelement; desgleichen eine größere Potentialdifferenz an einer nicht geschlossenen Thermosäule. In der Tat ergaben z. B. 20 hintereinandergeschaltete Elemente eine Potentialdifferenz gleich der eines Bunsenelementes, also von etwa 2 Volt, ein solches Thermoelement demnach eine von etwa $\frac{1}{20}$ Volt. Daher äußert sich die elektrostatische Ladung eines solchen Elements erst an einem sehr empfindlichen Elektroskop oder Elektrometer. — Dagegen

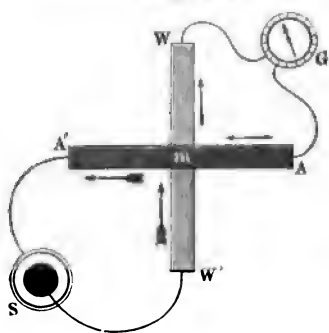
Fig. 550.



zeigt ein Galvanometer von kleinem inneren Widerstande Thermoströme sogar schon dann, wenn nicht, wie bisher angenommen, zwei Metalle verschiedener chemischer Beschaffenheit einander berühren und dieselbe eine andere Temperatur als in der Umgebung besitzen; sondern schon ein zu einem Knoten geschlungener Kupferdraht (Fig. 550) gibt in der Nähe des Knotens erwärmt, merkliche Ströme; es erklärt sich dies daraus, daß das Biegen des Drahtes den Stoff etwas unhomogen gemacht hat.

Die Erklärung der Wärmeströme glaubte man anfänglich aus der bloßen Berührung von chemisch (oder mechanisch) verschiedenartigen Stoffen erklären zu können (analog der „Kontakttheorie“ galvanischer Elemente, § 155), welche die doch wesentliche Bedingung des Temperaturunterschiedes gegen die Umgebung nicht in die Erklärung mit einbezogen war. — Im Hinblick darauf ist es angemessener, von der Tatsache auszugehen, daß zwischen den ungleich warm gehaltenen Berührungsstellen der 2 (3, 4, ...) Metallstäbe vor allem ein stationärer Wärmestrom sich bildet, und daß in der Temperaturdifferenz zusammen mit der chemischen Differenz erst die vollständige Ursache der auftretenden Potentialdifferenzen und daher des Stromes liege. — Das Ineinandergreifen dieser drei Zustandsdifferenzen bestätigt sich in der Umkehrung des Vorganges bei den Thermoströmen in

Fig. 551.



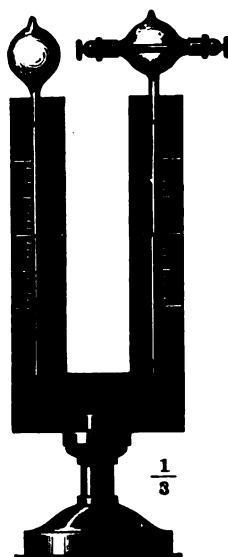
Peltiers Versuch: Wird durch ein Doppelstäbchen aus Antimon und Wismut ein Strom in der Richtung $A - W$ (also hier: im Sinne des Alphabetes) geleitet, so zeigt sich in der Umgebung der Lötstellen beider Metalle eine Abkühlung; bei Umkehrung der Stromrichtung eine Erwärmung.

Da der Strom $A - W$ nach dem Jouleschen Gesetze den ganzen Stromkreis, also auch die Lötstellen, erwärmt, so ist die zu beobachtende Abkühlung nur der Überschuss einer stärkeren Abkühlung über die schwächere

Erwärmung. Namentlich aber, wenn die Stäbe hinreichend dick sind und also kleine Leitungswiderstände geben, kann diese Erwärmung beliebig klein gemacht werden, so daß die kurz als „Peltiers Phänomen“ bezeichnete Abkühlung beliebig rein zur Erscheinung zu bringen ist. — Dabei wird für die bequemste

Ausführung des Versuches und namentlich für genaue Messungen jene Abkühlung nicht direkt thermo- und kalorimetrisch ermittelt, sondern auf sie daraus geschlossen, daß im „Peltier-Kreuz“ (Fig. 551) die durch Batteriestrom $SW'm A'S$ bewirkte Abkühlung bei m dem Stromkreise $m A G W m$ einen Thermostrom herauf, dessen Stärke das Galvanometer G zeigt. Umsetzbarer durch das Differentialthermometer in Fig. 552.

Fig. 552.



Als „Thomson-Effekt“ wird die Erscheinung bezeichnet, daß auch schon, wenn der Strom nicht aus verschiedenem Metall zusammengesetzt, aber an verschiedenen Stellen verschiedene Temperaturen künstlich erhalten werden, ein hin- und hergehender Strom Änderungen dieser Temperaturen hervorruft.

Peltiers Phänomen bildet eine Umkehrung der Erscheinung der Thermostrome (ohne doch mit der Joule'schen Erwärmung identisch zu sein). — Es ist hier so bei der Erzeugung der Wärme durch mechanische Arbeit (z. B. pneumatisches Feuerzeug) und der Erzeugung mechanischer Arbeit durch Wärme (z. B. Dampfmaschine).

Joulesche Erwärmung dagegen mag der den eigentlichen Effekt des pneumatischen Feuerzeuges begleitenden Erwärmung durch Reibung (des Kolbens an den Glaswänden) analog gesetzt werden.

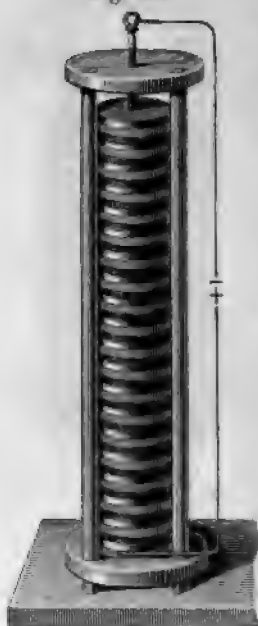
Pyro-Elektrizität. — Ein Turmalinkrystall nimmt bei gleichmäßiger Erwärmung an den Enden seiner krystallographischen Hauptachse entgegengesetzte elektrostatische Ladungen an. Dies ist ein Beispiel, daß speziell in das krystallinische Gefüge (ähnlich wie die mechanische Unhomogenität im Eisen nach Fig. 550) zusammen mit Veränderungen des Wärmezustandes Potentialdifferenz bedingen kann.

B. Stromarbeit und chemische Arbeit.

Geschichtliches. Von allen Beziehungen zwischen Stromenergie und anderen Energieformen ist zufällig am frühesten bekannt geworden die Erregung elektrischer Ströme durch chemische Vorgänge, was dann zur Erfindung galvanischen Elemente führte (gegenwärtig ist ihre Bedeutung fast schon schwindend im Vergleich zu den Dynamomaschinen oder kurz „Generatoren“, 32). Diesen Strömen bei chemischem Verbinden (bzw. Substituieren, z. B. Zn für H₂ in H₂SO₄) entspricht als Umkehrung die Elektrolyse, d. i. die Zersetzung chemischer Verbindungen durch den elektrischen Strom. — Dabei haben uns heute (ähnlich wie die Wärmewirkungen des Stromes die theoretische Grundlage für das Verständnis der Thermostrome bildeten) die elektrolytischen Vorgänge als wesentlich für die elektrochemischen Vorgänge in den Elementen, in auch innerhalb jedes Elementes fortwährend elektrolytische Vorgänge finden, wie sich praktisch am auffallendsten an den nicht konstanten Elementen (in der „galvanischen Polarisation“) zeigt.

Das theoretische Verständnis der Vorgänge in galvanischen Elementen und Batterien als wesentlich elektrochemischer Vorgänge hat sich aber erst

Fig. 553.



spät entwickelt und schwer zu behaupten vermocht gegenüber der von VOLTA vertretenen „Kontakttheorie“, die ihrerseits der Wahrheit um einen Schritt näher gekommen war als die ursprüngliche Meinung GALVANIS, daß das von ihm 1789 zufällig beobachtete Zucken von Froschschenkeln, die mittel Kupferhaken an eisernen Stäben aufgehängt waren, der „tierischen Elektrizität“ zuzuschreiben sei. VOLTA erklärte diese Erscheinungen so, daß hierbei Elektrizitätsquelle die Berührung der beiden chemisch verschiedenen Metalle sei, und daß der Froschschenkel, der bei zufälligem Berühren des Eisenstabes zuckte, nur einerseits als Schließungsleiter (für den Stromkreis Kupfer-Schenkel-Eisen-Kupfer), anderseits als Elektroskop wirke. Die Verfolgung dieses Gedankens führte zur Erfindung der (von einem Lebewesen unabhängigen) **Voltaschen Säule** (Fig. 553), in welcher Scheiben von Zink, Silber, feuchtem Tuch — Zink, Silber, feuchtem Tuch u. s. f. übereinander geschichtet waren. Die Endplatten zeigten dann um so kräftigere Ladungen, je mehr Platten vorhanden waren. Diese Zusammenstellungen zweier chemisch verschiedener Metalle und einer Flüssigkeit vervollkommnete sich dann bald in der handsameren **Voltaschen Batterie** (Zn, Cu, H_2SO_4 mit H_2O).

Schon vor der Erfindung von Säule und Element sollte der Nachweis, daß bei der Berührung zweier verschiedener Metalle diese Ladungen zeigen, erbracht werden durch den sogenannten Voltaschen Fundamentalversuch: Auf ein sehr empfindliches Elektroskop (meist mit Zambonischer Säule siehe unten) wurde als Sammler z. B. eine Zinkplatte geschraubt und auf sie mittels eines isolierenden Handgriffes eine Kupferplatte gesetzt. Nach dem Abheben der Cu-Platte zeigt das Elektroskop eine positive Ladung der Zn-Platte an. Bei Vertauschung der Platten zeigt sich eine negative Ladung der Kupferplatte. — Von Einrichtung und Verwendung des Kondensationselektroskops unterscheidet sich dieser Versuch wesentlich dadurch, daß die Platten blank gepulvt sein und in metallische Berührung gebracht werden müssen. Eine Zink- und Silberplatte geben stärkere, eine Zink- und Platinplatte noch stärkere Wirkungen. Hiernach wurden die festen Gutleiter (Leiter erster Ordnung) geordnet in die „Spannungsreihe“ nach VOLTA (andere Forscher erhielten einigermassen abweichende Reihen):

+ Zn, Pb, Sn, Fe, Cu, Ag, Au, Kohle, Graphit, Braunstein —

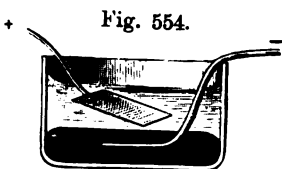
VOLTA hatte auch schon richtig bemerkt, daß Wasser, Säuren, Salzlösungen... sich dieser Spannungsreihe nicht einordnen lassen. Überdies hatte er fälschlich geglaubt, daß diese „Leiter zweiter Ordnung“ mit den der Spannungsreihe angehörigen „Leitern erster Ordnung“ keine oder nur sehr geringe Potentialdifferenzen geben; aber BUFFES Ausdehnung des Voltaschen Fundamentalversuches zeigte, daß bei Berührung jener Flüssigkeiten mit Zink die Flüssigkeit positive Ladung, das Zink aber jetzt negative Ladung annimmt.

gen die durch diese Versuche scheinbar zur Tatsache erhobene Hypothese, die bloße Berührung heterogener Stoffe reiche aus, ihnen entgegengesetzten Ladungen, also eine Potentialdifferenz, zu erteilen, wurde von den Gegnern der Kontakttheorie“ geltend gemacht, daß sie dem Gesetze der Erhaltung der Energie widerspräche (wie denn auch VOLTA seine Säule für ein elektrisches *im mobile* gehalten hatte). Um jene vermeintliche Tatsache mit diesem neuen Naturgesetz in Einklang zu bringen, wurde darauf hingewiesen, daß man nicht von jeder chemischen Einwirkung seitens der anhaftenden und feuchten Luft freizuhalten seien und daß in Wahrheit diese chemische die Quelle der elektrischen Arbeitsfähigkeit sei. Diese elektrochemische Theorie bestätigte sich in der bei weitem weniger subtilen Weise als bei den Versuchen am Voltaschen Element, indem hier ein auffälliger Verbrauch von Zink und Schwefelsäure mit dem Auftreten des Stromes jederzeit Hand in Hand geht. Gegenwärtig ist denn auch die Kontakttheorie fast völlig durch die elektrochemische Theorie überwunden.

• Aufwand von Stromenergie bei der Elektrolyse. Chemisches Maß der Stromstärke.

geschichtliches. Daß der galvanische Strom beim Durchgang durch chemisch angesetzte leitende Flüssigkeiten diese zersetze, wurde 1800 durch NICHOLSON und VALLISLE (bald darauf von RITZER) in dem besonderen Falle der sogenannten Zersetzung beobachtet. Als hierher gehörig wurde nachmals erkannt, daß ALEXANDER V. HUMBOLDT schon 1797 bei Kontakt von Zink, Silber und neben einer Oxydation des Zinks auch Entwicklung von Wasserstoff und nachgewiesen hatte. Die epochemachendste Entdeckung war dann die 1807 von FARADAY mit Hilfe kräftiger Ströme vollzogene Zerlegung der Alkalien und Erden (S. 214), die wir schon mit schwächeren Strömen erzielen durch folgende

Versuche: Ein Stückchen Ätznatron (NaHO) wird durch Anhauchen feucht gemacht und auf ein Platinplättchen gelegt, das mit dem vom positiven Pol einer Zelle kommenden Drahte leitend verbunden ist. Wird der vom negativen Pole kommende Draht an das Ätznatron gehalten, so entwickeln sich an der Berührungsstelle Gasbläschen von Wasserstoffgas nebst Metall, das anfangs silberweiß ist, bald aber dunkel weißlich werden; sie zeigen alle Eigenschaften des metallischen Natriums (Na). — Natrium erhält man, wenn in dem Gefäß (Fig. 554) ein mit Quecksilber bedeckter Draht zentriert in Ätznatronlösung gebracht wird.



FARADAY hat nicht nur die Elektrochemie durch unzählige Einzeltatsachen bestätigt, sondern auch die (zum Teil siehe unten, noch heute übliche) Terminologie eingeführt:

Elektrolyse heißt jede chemische Zerlegung eines zusammenhängenden Stoffes beim Durchgang des Stromes; **Elektrolyte** heißen die zerlegenden Stoffe (— über ihre allgemeinen Unterschiede von Elektrolytiten erster Ordnung“ s. u.). — **Anode** heißt die Eintrittsstelle des (positiven) Stromes, **Kathode** die Austrittsstelle des (positiven, Austrittsstelle des negativen) Stromes; beide heißen Elektroden. —

Anion heißt der an der Anode sich ausscheidende (wörtlich: zu der Anode hinwandernde) Stoff; **Kation**; beide heißen Ionen (im älteren, Faradayschen Sinne des Wortes; über einen neueren, engeren Sinn siehe unten).

Das allgemeinste Ergebnis für die Beziehungen zwischen dem chemischen und elektrischen Verhalten der Stoffe besteht darin, daß Wasserstoff, die Metalle, Metalloxyde, Basen u. s. f. **Kationen** oder **elektropositive** Stoffe sind (letzte Bezeichnung in Hinblick auf den Satz von der Anziehung ungleichnamig geladener Körper); Sauerstoff und die anderen Nichtmetalle, die sauren Oxyde, Säuren und Säurereste sind **Anionen** oder **elektronegative** Stoffe. — Über elektrochemische Äquivalente vergl. §§ 209, 211.

Drücken wir die (zum Teil erst „sekundäre“, siehe unten) Zerlegung z. B. von Natron, Kochsalz u. s. f. aus durch die Symbole Na_2O , NaCl , HCl , CaCl_2 , so sind die vor dem Striche stehenden Stoffe elektropositiv, die hinter dem Striche stehenden elektronegativ.

Schon daß z. B. bei Humboldts Beobachtungen das Zink durch den bei ihm ausgeschiedenen Sauerstoff angegriffen wurde, läßt einen noch einfacheren chemischen Vorgang erwarten, wenn statt des Zinks eine durch Sauerstoff nicht angreifbare Elektrode, z. B. Platin, verwendet wird. Hiernach unterscheiden sich z. B. die beiden folgenden

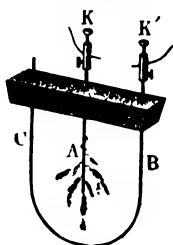
Versuche (Fig. 555): Aus Kupfersulfat in Wasser scheidet sich an der Kathode Kupfer aus (und zwar gleichgiltig, ob der hier eintauchende Draht aus Platin, Kupfer oder einem anderen Metall ist). Ist 1. die Anode Platin, so steigen hier Bläschen von Sauerstoff auf, die umgebende Flüssigkeit wird lichter und erweist sich schließlich als Schwefelsäure. — Ist dagegen 2. die Anode Kupfer, so zeigt sich an ihr kein Sauerstoff, wohl aber wird das Kupfer selbst angegriffen und die Flüssigkeit bleibt Kupfersulfatlösung.

Fig. 555.



Primärer Vorgang bei 1 und 2 ist die Zerfällung Cu/SO_4 . **Sekundärer Vorgang** ist bei 1, daß die Atomgruppe SO_4 mit dem Wasser der Kupfersulfatlösung die Reaktion gibt: $\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} = \text{H}_2\text{SO}_4 + \text{O}$. [Über das Nähere dieser Reaktion gibt es mehrere Hypothesen: α) SO_4 zerfällt in $\text{SO}_2 + \text{O}$; dieses aus SO_4 stammende O bleibt frei, während sich SO_2 mit H_2O zu H_2SO_4 ergänzt. β) SO_4 entreißt dem Wasser H_2 und das aus dem Wasser stammende O wird frei. γ) Nach den neuesten Vorstellungen sind an dem Vorgange je zwei O-H Ionen (siehe unten) beteiligt, so daß $2(\text{SO}_4 + \text{OH} \cdot \text{H}) = 2\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O} + \text{O}$. — Überdies sind mit Rücksicht darauf, daß nicht O_2 , sondern nur O , als freies Molekül bestehen kann, bei α , β , γ alle Glieder zu verdoppeln]. —

Fig. 556.

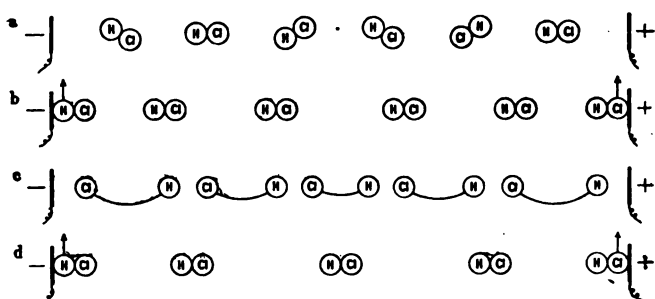


Bei Versuch 2 ist der sekundäre Vorgang der, daß sich SO_4 mit Cu immer wieder zu CuSO_4 ergänzt. — Anwendung in der Galvanoplastik (§ 169). **Versuche** über den „Bleibaum“ (Fig. 556) und ähnliche.

auch die sogenannte „Wasserzersetzung“ ist in Wahrheit als ihrer Vorgang eine Zersetzung der dem Wasser beigemengten Elektrolyte (Säuren, Basen, Salze). Erst sekundär, tritt auch Zersetzung des Wassers ein nach dem Schema $\text{H}_2\text{SO}_4 + \text{H}_2\text{O}$.

Die Gründe für diese Auffassung sind folgende: Chemisch reines Wasser dem Durchgange des Stromes einen überaus grossen Widerstand entgegen. darf als „chemisch reines Wasser“ nicht das gewöhnliche destillierte gelten, von viel weniger schlecht leitet und z. B. binnen $4\frac{1}{2}$ Stunden 70 Proz. und fügen um das 40fache an Leitungsfähigkeit zunimmt; denn schon von den Aufbewahrung dienenden Glasgefässen löst chemisch reines Wasser genügend leitende Stoffe auf, daß die Lösung verhältnismässig gut leitend wird.) Nach allgemeinen Gesetze, daß Elektrolyte nur leiten, wenn sie zersetzt werden. umgekehrt (siehe unten), kann also Wasser selbst kaum als Elektrolyt — Dennoch ist der Name „Wasserzersetzung“ (desgl. „Wasserzersetzungst“ u. dergl.) nicht ganz zu verwerfen, indem ja wenigstens mittelbar die sich entwickelten Mengen H_2 und O doch aus dem den Elektrolyten beigemengten Wasser stammen; wie denn auch z. B. mittels einer gegebenen H_2SO_4 eine beliebige Menge H_2O in Knallgas verwandelt werden kann. GROTHUSS' und CLAUSIUS' Erklärung der Elektrolyse: Achtet man darauf, an welchen Punkten des von dem Strome durchflossenen, durch die beiden (rechteckigen) Elektroden begrenzten Prismas aus angesäuertem Wasser oder aus Salzsäureflüssigkeit Bläschen aufsteigen, so sieht man, daß dies nur an den Blechen, also nur an den Endflächen des Prismas, nicht aber in seinem Innern geschieht. Es ist also ein wesentlicher Unterschied der chemischen von den Wärmewirkungen des Stromes; denn ein stromdurchflossener Draht erwärmt sich nicht nur an seinen Enden, sondern an seiner ganzen Oberfläche wie im Innern.) — Um diese Tatsache zu erklären, nahm GROTHUSS folgende Reihe von Vorgängen (nach Schema

Fig. 557.



7 a, b, c, d . . .) an: Wenn z. B. HCl zersetzt wird, so werden zwar durch durchfließenden Strom alle HCl -Moleküle infolge der elektrischen Anziehung der positiv und negativ geladenen Endplatten in H^+ - und Cl^- -Atome getrennt, aber so, daß nur bei - ein H -Atom, bei + ein Cl -Atom frei wird (b), in sich die übrigen frei gewordenen Atome neuerdings zu Paaren verbinden (c). Diese werden dann infolge der elektrischen Anziehung seitens der positiv und negativ geladenen Endplatten so gedreht, daß wieder der Kathode die

ngen der elektrischen zu den thermischen u. s. w. Erscheinungen.

Anode die Cl-Atome zugekehrt sind (d) und wieder daselbst Spaltung in Moleküle und Entweichen der einfachen Gase eintritt (d) u. s. f. — se läßt es aber unerklärt, warum z. B. ein H-Atom stärker durch elektrisch angezogen werden soll, als es vom benachbarten O-Atom gezogen wird. Diese und noch andere Schwierigkeiten der Erklärung beseitigte *usius*, indem er darauf hinwies, daß mit Rücksicht auf die gegenseitigen Bewegungen der Atome je eines Moleküls immer ein Teil der Moleküle in Zerfall begriffen sei und daß nur die jeweiligen freien Atome von den Elektroden angezogen zu werden brauchen. Da hiernach keine eigene Kraft zum Zerreißen der Moleküle erforderlich ist, wird es erklärlich, daß ein Strom anfänglich auch schon bei der geringsten Stromstärke Elektrolyse hervorruft vermöge. — *Kohlrausch* hat berechnet, daß bei einem Potentialabfall von 1 Volt auf 1 cm Länge in einem Elektrolyten, der nur wenig von reinem Wasser verschieden ist, die Geschwindigkeit der Wasserstoffentwicklung bei 13° etwa 0,0029 cm sec⁻¹ ist und daß die Kraft, die den Wasserstoff um 1 g H mit der Geschwindigkeit 1 cm sec⁻¹ durch die Lösung zu bewegen vermag, gleich ist der eines Gewichtes von 3,3 · 10⁻⁸ kg.

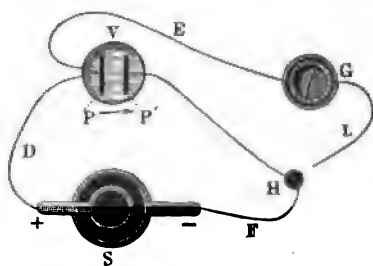
Die neueste Ionenwandernden Stoffe selbst scheidenden, meist schon zeichnet werden. Indem die Stoffmengen ausgeschieden jedes chemische Äquivalent bestimmt unveränderlich wäre. (Über den hierin begründeten Begriff des Elektrolyten vgl. unten.) —

Der Begriff des „Ion“ so, daß nur die an den Elektroden überhaupt sich aussonderten Stoffe als Anion und Kation benannt werden. In den Elektroden chemisch äquivalenten Vorgang so auf, wie wenn Elektrolyten wandernden Ions mit einer negativen Ladungsmenge verbunden in anderen elektrischen Erscheinungen (vgl. unten.) —

Die bisher beschriebenen und erklärten Vorgänge in einer elektrolytischen Zelle werden nun aber wesentlich mitbestimmt und kompliziert durch die jede Elektrolyse begleitende (und nur durch sekundäre Vorgänge, z. B. in den konstanten Elementen, wieder aufzuhebende) sogenannte

Galvanische Polarisation. Versuch: Werden die Drähte eines Wasserzersetzungapparates, nachdem er einige Zeit in Tätigkeit gewesen

Fig. 558.



war, von der Stromquelle (Batterie) weggenommen und an ein Galvanometer geschaltet (Fig. 558, wo *H* ein Quecksilbernäpfchen darstellt, in das zuerst der Draht *F*, dann statt dessen der Draht *L* gesenkt wird), so zeigt das Galvanometer *G*, daß jetzt die Zersetzungszelle wie ein galvanisches Element wirkt.

Der Strom kommt dabei von derjenigen Platinplatte, an der sich der Wasserstoff ausgesondert hatte. — Dabei ist der von der Zelle gelieferte Strom sehr schwach, wenn der ursprüngliche Strom nur kurze Zeit hindurchgegangen war, und erreicht nach längerem Durchgange eine bestimmte größte Stärke, die

hängt von der Stärke des erregenden Stromes und von dem Material der Elektrodenplatten; besonders kräftig dann, wenn es Bleiplatten, verzogen mit Bleisuperoxyd, gewesen waren (Akkumulatoren, § 170).

War also in den Stromkreis einer Stromquelle (Batterie, Dynamomaschine) reichend lange eine elektrolytische Zelle (Wasserzersetzungsgesetz, Apparat, Akkumulator) geschaltet, so sendet er seinerseits einen Gegenstrom in jene Stromquelle (ähnlich wie wenn zwei Batterien in denselben Stromkreis so geschaltet werden, daß sie entgegengesetzt gerichtete Ströme senden, von denen dann bald der eine, bald der andere überwiegen kann oder die sich auch aufheben können). Werden (bestimmten von) Dynamomaschinen als Stromquellen für Elektrolyse oder für Ladung von Akkumulatoren verwendet, so können sie durch den Gegenstrom eine „Umkehrpolarisation“ (Richtungswechsel des durch sie gelieferten Stromes) erfahren. Vergleichung des Gegenstromes mit der Selbstinduktion (§ 150).

Durch diese elektromotorischen Gegenkräfte erklärt es sich nun, daß ein Wasserzersetzungsgesetz z. B. nicht durch 1 und nicht durch 2, sondern erst durch 3 oder mehrere hintereinander geschaltete Daniell-Elemente in Funktion gehalten werden kann: denn jene Gegenkraft ist bei den polarisierten Platinblechen des Zersetzungsgesetzes selbst schon 2,03 mal so groß wie die von einem Daniell-Element. Dagegen reichen schon zwei Bunsenelemente zur Wasserzersetzung aus. Eben diese galvanische Polarisation ist es auch, die die Inkonstanz niger Elemente zur Folge hat; vergl. den folgenden Paragraphen.

Allgemeine Unterschiede zwischen den Elektrolyten oder Leitern zweiter Ordnung und den Leitern erster Ordnung. — Allgemein versteht man Elektrolyte alle Stoffe, die dem elektrischen Strome den Durchgang gestatten (also Gutleiter oder wenigstens Halbleiter sind), die aber während dieses Durchganges chemisch zersetzt werden. Hierzu gehört auch schon ihrem Begriffe nach, daß sie chemisch zusammengesetzt seien, überdies aber in der Regel, daß sie im flüssigen (weder im festen, noch im gasförmigen) Zustande seien. — Doch sind nicht alle chemisch zusammengesetzten Flüssigkeiten Elektrolyte; z. B. Terpentinöl, Naphta, chemisch reines Wasser. — Dabei ist nicht nur, daß ein Elektrolyt primär durch den Strom nur dann zersetzt wird, wenn er selbst (nicht bloß eine Beimengung, die bei der sogenannten Wasserzersetzung) den Strom leitet, sondern auch umgekehrt: Ein Elektrolyt kann den Strom nicht leiten, ohne doch ihn zersetzt zu werden.

Auf Grund der letzteren Tatsache (die allerdings nach neuesten Versuchen leicht doch nicht ausnahmslos ist) ergibt sich als eine wahrscheinliche Hypothese die folgende weitere Ausgestaltung der oben dargestellten Theorie von AUSTIN: Eine elektrolytische Leitung besteht in einem Konvektionsvorgange (S. 80), d. h. die bei der Anode eintretenden positiven Ladungen werden von den der Anode anliegenden Atomen übernommen und an die Nachbaratome weitergegeben u. s. w. Neuestens ist diese Hypothese noch weiter gebildet worden zum Begriffe „elektrisches Atom“ oder „Elektron“ (— so nannte STONEY 1881 das von LAMBERT 1881 angenommene elektrische Elementarquantum, d. h. die sich

bei keinem Vorgange an thermischen Atomen weiter teilenden elektrischen Ladungsmengen. Indem gewisse elektrodynamische Wirkungen dieser Elektronen, z. B. bei Kathodenstrahlen, § 158, zu ähnlichen Erscheinungen führen wie die Trägheit der mechanischen Masse, so wurde ihnen auch „scheinbare Masse“ zugeschrieben, und diese wäre 1000—2000 mal so klein als die eines Wasserstoffatoms. Die Größe eines Elektrons verhielte sich zu der eines Bacillus wie dieser zur Erdkugel. Über viel ältere Hypothesen von „Uratoemen“ vergl. § 209).

Von den Elektrolyten oder Leitern zweiter Ordnung unterscheiden sich die **Leiter erster Ordnung** (die Metalle, Kohle, Braunstein und einige andere) dadurch, daß der Durchgang des Stromes mit keinen chemischen Zersetzungen verbunden ist, was sich bei Metallen und Kohle als Grundstoffen von selbst versteht, aber auch von fast allen chemisch zusammengesetzten festen Stoffen und ebenso erhitzten Gasen, die den Strom einigermassen leiten, gilt.

Besteht der Durchgang des Stromes bei den Elektrolyten in einer Konvektion, so wohl auch bei den Leitern erster Ordnung und den Gasen, aber so, daß entweder ein Zerfall der Moleküle in Atome nicht stattfindet, oder jedem Zerfall ein sofortiges Wiederersetzen, ohne Ausscheidung der Bestandteile an den Elektroden, entspricht. — Unabhängig von diesen Hypothesen ist Tatsache (die auch die hypothetischen Vorstellungen von der Konstitution der beiderlei Stoffe und ihr Verhalten gegen hindurchgehende Ladungen weiter bilden helfen kann).

Während das Leitungsvermögen bei den meisten Leitern erster Ordnung mit der Temperatur zunimmt, nimmt es bei allen Leitern zweiter Ordnung ab.

Fig. 559.



Chemisches Maß der Stromstärke.
Versuch: Wird über die Platinbleche eines Wasserzersetzungapparates ein gemeinsames Rohr gestellt, so mengen sich die ausgeschiedenen Gase zu Knallgas. Die **Zahl der in der Minute ausgeschiedenen Kubikcentimeter Knallgas** (reduziert auf 0° C und 76 cm Druck) gibt ein chemisches Maß der Stromstärke. — Schaltet man überdies eine Tangentenbussole (ein Ampèremeter) ein, so zeigt sich, daß dieses chemische Maß einfach direkt proportional ist dem elektromagnetischen Maß der Stromstärke.

Die zu solchen elektrochemischen Messungen bestimmten Apparate heißen **Voltameter**; bei ihnen wird das Knallgas nach dem Volumen (Fig. 559), oder im Kupfer-, bzw. Silber-Voltameter die Menge des an der Kupferkathode aus Kupfersulfatlösung ausgeschie-

an Kupfers, bzw. an einer Silberkathode (oder in einem Platin-
gel) aus Silbernitrat ausgeschiedenen Silbers durch Wägung vor
nach dem Durchgange des Stromes bestimmt.

Umgekehrt kann man auch die Tangentenbussole nach dem Voltameter eichen.
gelten dabei als Reduktionszahlen (elektrochemische Äquivalente des
Wassers, Kupfers, Silbers — vergl. FARADAYS allgemeines Gesetz der elektro-
mischen Äquivalenz, §§ 209, 211) die folgenden wichtigen Konstanten:

a) Ein Strom von 1 Amp. zersetzt (scheidet aus):

	Knallgas (0°, 76 cm)	Wasser	Kupfer	Silber
sec	0,1740 cm ³	0,0933 mg	0,3281 mg	1,118 mg
min	10,44 cm ³	5,6 mg	19,686 mg	67,08 mg

b) Daher zeigt umgekehrt die Ausscheidung von 1 cm Knallgas per sec
7 Amp. (per min von 0,09578 Amp.) an.

Wieder ist wie bei der Messung der Ströme durch elektromagnetische Meß-
arate zu bedenken, daß durch die Einschaltung des elektrochemischen Apparates
die Stromstärke entsprechend dem Widerstande des Meßapparates
et verringert; wobei in diesen Widerstand auch die elektromotorische Gegen-
t des Voltameters, das Polarisation annimmt, einzurechnen ist. Dies geht so
t, daß gemäß obigen Tatsachen der galvanischen Polarisation z. B. die durch
Daniell-Element bei übrigens noch so geringem äußeren Widerstande gelieferte
mstärke durch ein Knallgasvoltameter überhaupt nicht gemessen werden kann.

155. Umsetzung chemischer Energie in Stromenergie und Wärme. — Galvanische Elemente und Batterien.

Von den zahllosen Arten „galvanischer Elemente“, die sich einteilen
en einerseits in solche mit einer und mit zwei Flüssigkeiten, andererseits
konstante und inkonstante, seien hier nur einige wenige angeführt:

a) Mit einer Flüssigkeit (oder gemengten
issigkeiten):

1. **Volta-Element**: Zink und Kupfer in
dünnter Schwefelsäure. (Inkonstant.)

2. Das **Chromsäure-Element** von Buff
d Bunsen (Fig. 560): Zink und Kohle
einem Gemenge von Schwefelsäure
d doppeltchromsaurem Kali (Kalium-
chromat). (Inkonstant.)

3. Das **Smee-Element**: Zink und Silber,
mit Platinmoor überzogen ist, in ver-
nnter Schwefelsäure. (Konstant;
Volt.)

4. Das **Leclanché-Element** (Fig. 561

f. S.): Zink und ein Gemenge von Kohle und Braunstein in
zentrierter Salmiaklösung. (Konstant; 1,5 Volt.)

Fig. 560.



hier durch zwei durch eine poröse Wand (Diaphragma) getrennte, aber berührende Flüssigkeiten:

5. **Miell-Element**: Zink in verdünnter Schwefelsäure und Kupfer in konzentrierter Kupfervitriollösung, d. h. Kupfersulfat in Wasser. (Konstant; 1,088 Volt.) — Ähnlich **Meidinger-Ballonelement** (ohne Diaphragma Fig. 562).

6. **Bunsen-Element**, Fig. 563): Zink in verdünnter Schwefelsäure, Kohle in konzentrierter Salpetersäure. (Konstant; 1,9 Volt.)

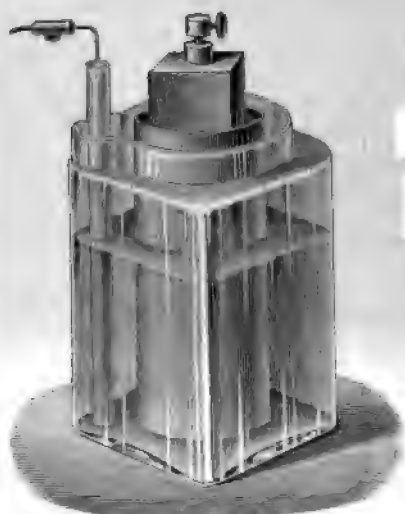


Fig. 561. Leclanché-Element.



Fig. 562.
Meidinger-Element.



Fig. 563. Bunsen-Element.

Spezielle Vorteile und Nachteile einiger dieser Elemente sind: Die **Leclanché-Batterie** wird benutzt für schwache, nach langen Pausen zu verwendende Ströme; sie empfiehlt sich also z. B. für Zimmertelegraphen, indem nur von Zeit zu Zeit eine Salmiaklösung nachgefüllt zu werden braucht. — Das **Bunsen-Element** hat große elektromotorische Kraft, bedarf aber besonderer Vorsichtsmaßregeln bei der Anstellung, da es die schädlichen Untersalpetersäuredämpfe entwickelt.

7. **Latimer Clarks Normal-Element**: Chemisch reines Zink und ein Platindraht in einem Brei aus Quecksilbersulfat und Zinksulfatlösung; ist theoretisch wichtig wegen seiner sehr konstanten elektromotorischen Kraft.

8. Der Voltaschen Säule wurde nachgebildet **Behrens' (Zambonis) trockene Säule**; sie wird so hergestellt: Je ein Bogen sogenannten unechten Silber- (Zinn-) und Gold- (Kupfer-) Papiers werden mit den Papierseiten aufeinander geklebt; einige 100 oder 1000 Scheibchen in einer isolierenden Glasröhre so aufeinander geschichtet, daß je eine Zinn- und Kupferschicht einander metallisch berührt. Die metallischen Endfassungen einer solchen Röhre zeigen dann jahrelang

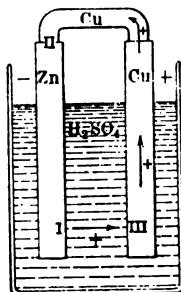
schliche Potentiale (Vergleich mit der 100-mentigen Batterie Fig. 474, S. 439). — Eine lehe Säule bildet den Hauptbestandteil in schners Elektroskop (Fig. 564). An einem schen im physikalischen Kabinett der Uni-rität in Innsbruck pendelt das Goldblätt-chen seit dem Jahre 1823. Gleichwohl ist cherlich auch Zambonis Säule nicht etwa in elektrisches *perpetuum mobile*, sondern ie im Papier enthaltene Feuchtigkeit unter-ält schwache chemische Vorgänge, die als ie Ladungsquelle zu betrachten sind.

Fig. 564.



Erklärung der Vorgänge im oltaschen Element (Fig. 565): Sind e in H_2SO_4 tauchenden Platten 1 und Cu mittels eines Schließungsleiters Cu verbunden, so sind s Berührungsstellen heterogener Stoffe in Betracht zu ziehen: H_2SO_4 —Zn, II Zn—Cu, III Cu— H_2SO_4 . — Hier ist vor allem die alle I, da an ihr nicht nur Berührung, sondern ich chemischer Umsatz stattfindet, als Ladungs-elle ähnlich aufzufassen wie die bewegte Scheibe or Influenzmaschine. Wie dann in der Influenz-achine sich die Ladungen durch das ganze System cheibe, Saugkämme u. s. w.) bis an die Polkugeln egeben und daselbst eine elektrostatische Po-entialdifferenz bewirken, so zeigt sich eine solche ach an den aus der Säure ragenden „Polen“ des icht geschlossenen Elementes. Wie ferner in einem die Polkugeln der Influenzmaschine verbind-enden Leiter ein Strom fließt, so strömt von der Stelle I negative Ladung im Sinne I, II, III und von III durch die Säure nach I zurück; dagegen positive Ladung von I durch die Säure über III nach II und durch das Zink nach I zurück.

Fig. 565.



Die ältere Kontakttheorie zog überdies auch noch die Berührungsstellen I und III in Betracht, wobei die von II ausgehenden Ströme sich mit denen von I addieren, wogegen die von III einen schwachen Gegenstrom bilden sollten. gegenwärtig wird II (— vorausgesetzt, daß hier keinerlei chemischer Umsatz zwischen Zn und Cu stattfindet) überhaupt nicht mehr als Ladungsstelle betrachtet; und bezüglich III ist es wahrscheinlich, daß bei der Berührung von Cu und H_2SO_4 sofort Cu-Ionen in Lösung gehen, so daß also Berührung zwischen Cu, $CuSO_4$ und H_2SO_4 in Betracht zu ziehen wäre. — Hauptquelle der Ladungen und Ströme bleibt doch nur die Stelle I; zusammenfassend gilt also auf alle Fälle:

Im offenen Volta-Element ist das aus der Säure ragende Kupferende der positive, das aus der Säure ragende Zinkende der negative

gen der elektrischen zu den thermischen u. s. w. Erscheinungen.

Pol. — len die Pole durch einen Leiter verbunden, so fließt in diesem inneren Schließungsleiter der Strom von Cu nach Zn. Zusammen mit der Flüssigkeit bilden dann der äußere Schließungsleiter und die Platten einen geschlossenen Stromkreis und in diesem fließt innerhalb der Säure der Strom von Zn zu Cu. Für diesen durch die Säure gehenden Strom des geschlossenen Elementes ist also Zn die Anode, Cu die Kathode.

Der stromdurchfließende Nachweis, daß wirklich auch in der Flüssigkeit des Elementes ein Strom fließt, hat FRECHET im Anschluß an den durch Fig. 527 dargestellten Versuch geführt. Wie nämlich dort die Magnetnadel über die Reihe der stromdurchflossenen Metalle: Quecksilber, Zinn, Kupfer . . . gehalten und durch den Strom überall gleich stark abgelenkt wurde, so zeigt sich auch hier, daß die Magnetnadel über eine Glasröhre gehalten wird, in der Zinn und Kupfer in Säure (oder in Schwefelsäure in Diaphragma getrennt sind) hineingebracht sind und durch einen Strom verbunden sind.

Der durch die Zinkplatte gehende Strom zersetzt die Schwefelsäure in einem Wasserzersetzungselement. Der Strom zersetzt wird, an der Kupferplatte in Wasserstoffgas, welches sich mit dem Zn zu $ZnSO_4$ verbindet.

Die Schwefelsäure des Elementes zersetzt sich so, wie das angesäuerte Wasser durch den von außen kommenden Strom. In dem Elementes wird der Wasserstoff H_2 gesammelt, wogegen der Rest SO_4 an der Kupferplatte t.

Gleichzeitig liefern aber die nunmehr elektrolytisch angeregten Platten des Elementes auch einen Gegenstrom, wodurch nicht nur der Strom im inneren Schließungsleiter der Schwefelsäure, sondern auch der im äußeren geschwächt wird; hiermit ist die Inkonstanz des Voltaschen Elementes erklärt.

Die Aufgabe, dieser Inkonstanz vorzubeugen, hat zuerst DANIEL (1836) dadurch gelöst, daß er im Voltaschen Elemente die Kupferplatte statt mit H_2SO_4 mit $CuSO_4$ umgab. Indem sich nun an der Kupferplatte nicht mehr H_2 , sondern Cu ausschied, war die galvanische Polarisation vermieden, d. h. das erste konstante Element erfunden.

Man könnte daran denken, auch die Zinkplatte nicht mehr von H_2SO_4 umgeben sein zu lassen, damit das Angegriffenwerden des Zn durch SO_4 unterbleibe. Hiermit aber wäre die Entstehung des Stromes überhaupt unterdrückt, falls nicht die Ersatzflüssigkeit (wie z. B. die Salmiaklösung in den Leclanché-Elementen) eine wenn auch nicht so rasche chemische Wirkung wie die Schwefelsäure auf das Zink hätte. (Vergl. unten FAVRES Gesetz.)

Die Konstanz des Smee-Elementes erklärt sich daraus, daß die an der Silberplatte sich abscheidenden Wasserstoffbläschen am Platinmoor nicht festhaften, sondern emporsteigen. — Ähnlich beim Bunsen-Element, wo die die Kohle umgebende Salpetersäure es zum Ausscheiden von Wasserstoff nicht kommen läßt, da H mit einem Teile des Sauerstoffs der Salpetersäure sich zu H_2O verbindet. — Ähnliche Erklärungen für die übrigen konstanten Elemente.

Indem wir bisher nur die Stromenergie betrachteten, die aus der verbrauchten chemischen Energie von Säure und Zink hervorgeht, haben wir nur einen Teil der Energieumsetzungen im Elemente beobachtet, nicht aber die begleitenden Wärmevorgänge. Wie aber im äußeren Schließungsleiter (Leiter erster Ordnung) die Joulesche Wärme auftritt, so ist auch in der elektrolytischen Flüssigkeit des Elementes als einem Leiter zweiter Ordnung eine Erwärmung zu erwarten. Eine solche tritt auch in der Regel ein, und zwar um so rascher, wenn das Element kurz geschlossen, d. h. der innere Widerstand klein gegen den äußeren ist. FAVER hat, indem er Elemente und äußere Schließungsleiter kalorimetrisch untersuchte, die Summen der in und außer dem Element auftretenden Wärmemengen bei den verschiedensten Widerständen gleich gefunden; und zwar wird an allen Elementen, in denen binnen längerer oder kürzerer Zeit gleich große Mengen Zink verbraucht werden, die produzierte Gesamtwärmemenge gleich gefunden — nämlich gleich der Wärmemenge, die auftritt, wenn die gleiche Zinkmenge mit Schwefelsäure in Zinksulfat übergeht, ohne daß ein elektrischer Strom hat fließen können. Wir müssen also allgemeiner sagen, daß der im Elemente verbrauchten chemischen Energie die gewonnene Stromenergie nicht für sich äquivalent sei, sondern die Stromenergie zusammen mit der Wärmeenergie. — Die Güte eines Elementes wird also wesentlich davon abhängen, ob von der verbrauchten chemischen Energie ein größerer oder kleinerer Teil zuerst die Form der Stromenergie annimmt, bis er zusammen mit der kleineren oder größeren gleich anfangs gebildeten Wärmeenergie schließlich wieder in die Form von Wärme (dieses schließlich „Grab aller Energie“) übergeht. Es ist also wie bei verschiedenen Beleuchtungsmethoden, wo z. B. eine gewöhnliche Gasflamme so gleich wenig Licht und viel Wärme, ein Auerbrenner viel mehr Licht gibt, das aber schließlich auch absorbiert wird, also in Wärme übergeht. — In neuerer Zeit wurde gefunden (BRAUN, JAHN), daß es Elemente gibt, die bei sehr großem äußeren Widerstande sich sogar abkühlen (z. B. das Chlorsilber-Element von WARREN DE LA RUE). In diesen Elementen muß also die Stromenergie mehr betragen, als durch die chemischen Prozesse an Energie geliefert wird, wobei dann der Abgang aus der Wärme des Elementes und dessen Umgebung gedeckt wird. — Überdies nimmt in den während des Betriebes sich erwärmenden Elementen die elektromotorische Kraft mit steigender Temperatur ab, in den sich abkühlenden zu. In Elementen, deren elektromotorische Kraft von der Temperatur unabhängig ist, wie es nahezu beim Daniellschen zutrifft, wird gerade die ganze verfügbare chemische Energie in Stromenergie umgewandelt.

Galvanische Batterien. — Es lag nahe, die Wirkungen eines galvanischen Elementes zu steigern I. durch Vergrößerung des Elementes, vor allem seiner Platten, II. durch Vermehrung der Elemente. — Im Falle II zeigt sich aber schon vor genauerer Messung der wesentliche Unterschied, daß, wenn a) alle Zinkplatten untereinander und alle Kupferplatten untereinander verbunden werden, es auf die Zahl der Elemente nicht ankommt, indem n solcher „nebeneinander geschalteter Elemente“ (Fig. 566, a. f. S.) annähernd nur so wirken wie ein Element mit n mal so großen Platten (Fall I). — Werden dagegen b) die „Elemente hintereinander geschaltet“, d. h. so, daß Zn_1 mit Cu_2 , Zn_2 mit Cu_3 . . . verbunden werden (wie beim Versuche mit der vielelementigen Batterie, § 140 und Fig. 567, a. f. S.),

gen der elektrischen zu den thermischen u. s. w. Erscheinungen.

Die Potentialdifferenz der Endplatten proportional der Zahl der Elemente; wogegen es wieder für die Elemente zu erreichende Potentialdifferenz auf die Elemente nicht ankommt.

Fig. 566.
(Neben einander-
geschaltet.)



Fig. 567.
(Hintereinander-
geschaltet.)



Überdies fällt als einer Batterie im äußeren Widerstande einer Magnethöhle durch die Glühendmachung eines oder Nebeneinanderschließen; II. andere Leitung, die physiologischen Menschen) was die Vermehrung der hintereinander geschalteten Elemente, nicht aber durch deren Vergrößerung.

den verschiedenen Wirkungen I. manche (z. B. die Ablenkung des Magneten, dicken Draht, ebenso das Vergrößerung der Elemente bei Vermehrung der Elemente die in einer langen Telegraphenlinie Polklemmen der Batterie an-

Vermehrung der hintereinander geschalteten Elemente, nicht aber durch deren Vergrößerung.

Die Erklärung dieser und verwandter Tatsachen liegt darin, daß neben dem äußeren Widerstande im Stromkreise je eines oder mehrerer Elemente auch deren innerer Widerstand in Rechnung gezogen werden muß; und indem die unter Anwendung des Ohmschen Gesetzes auf die inneren Widerstände durchgeführte Rechnung durch die Versuche bestätigt wird, ist erst der allseitige Nachweis für jene Erweiterung des Ohmschen Gesetzes vollendet.

Es sei für je ein Element der äußere Widerstand w_a , der innere Widerstand w_i , die elektromotorische Kraft e gleich der Potentialdifferenz an den Polen. Dann herrscht sowohl im äußeren wie im inneren Schließungsleiter ein Strom von derselben Stärke i Amp., die wir kurz bezeichnen als die

$$\text{Stromstärke eines Elementes } i = \frac{e}{w_a + w_i}.$$

Grenzfälle sind hier I. „ w_a klein“ (d. h. der äußere Widerstand verschwindend klein im Vergleich zum inneren w_i); II. „ w_a groß“, so daß wir geradezu $w_a \neq 0$, bzw. $w_i \neq 0$ setzen können. Dann wird, wenn

$$w_a \text{ klein, } i_1 \neq \frac{e}{0 + w_i} = \frac{e}{w_i} = i'_1$$

$$w_a \text{ groß, } i_2 \neq \frac{e}{w_a + 0} = \frac{e}{w_a} = i'_2$$

Für das Neben-, bezw. Hintereinanderschalten mehrerer Elemente haben folgende zwei Grundtatsachen als nicht weiter erklärbar hinzuzunehmen:

I. Die Potentialdifferenz zweier einander berührender, chemisch verschiedener (und aufeinander chemisch wirkender) Körper ist von der Größe der Berührungsfläche ganz unabhängig. (Analogieen: Der hydrostatische Druck per cm² ist unabhängig von der Größe des Querschnittes; ferner: Der Grad der Verbrennungswärme an einer φ mm² grossen Schnittfläche eines Phosphorstückes bei dessen Berührung mit Sauerstoff ist unabhängig von den übrigen Quadratcentimetern, Berührungs- und Brennsfläche; u. dergl. mehr.) — Daher wird dann auch Nebeneinanderschalten die Potentialdifferenz nicht gesteigert.

II. Werden zwei Elemente so hintereinander geschaltet, daß z. B. an Zn₁ des ersten Elementes das Cu₂ des anderen sich anschliesst, so dringt gleichsam die Ladung von Zn₁ durch Cu₂, durch die Säure des zweiten Elementes bis Zn₂ vor, so superponieren sich hier die Ladungen von Zn₁ und Zn₂. Wegen der unveränderten Kapazität des letzten Zn wird also durch Hintereinanderschalten die Potentialdifferenz auf das 2-, bezw. n -fache gesteigert. — Diese Tatsache kann man sich durch die Erwägung plausibel machen, daß auch sonst Ladungen sich superponieren, wobei aber das Auseinandertreten der Ladungen und die Anhäufungen an den entgegengesetzten Polen mindestens ebenso besondere Erfahrungen darstellt wie die Grundtatsache der elektrostatischen Induktion, und wie z. B. die Erscheinungen des § 132, Versuch c, die zur paradoxen Auslegung führten, als die sogenannte freie Ladung ungestört durch die gebundene hindurch abfließt.

Diese beiden Tatsachen I und II führen dann weiter zu folgenden Erklärungen der Batterien von n Elementen: Sind die n gleichen Elemente nebeneinander geschaltet, so bleibt die Potentialdifferenz an den Polen ungeändert,

wogegen wird der innere Widerstand verkleinert, nämlich $\frac{w_i}{n}$, da der gesamte Strom durch einen Elektrolyt von n mal so großem Gesamtquerschnitt zu strömen hat. Werden dagegen die Elemente hintereinander geschaltet, so wächst sowohl die Potentialdifferenz der Endpole auf ne , wie auch die Summe der inneren Widerstände auf nw_i ; wogegen bei gleichem Schließungs-
widerstand w_a unverändert bleibt. Daher sind die Stromstärken für n Elemente bei

Schaltung nebeneinander
(auf Menge oder Quantität)

$$J_I = \frac{e}{w_a + \frac{w_i}{n}}$$

Schaltung hintereinander
(auf Spannung oder Intensität)

$$J_{II} = \frac{ne}{w_a + nw_i} = \frac{e}{\frac{w_a}{n} + w_i}$$

Grenzfälle sind hier wieder: I. Der äußere Widerstand w_a sei schon bei einem Elemente verschwindend klein gegen w_i ; er ist dann um so mehr verschwindend klein gegen den Gesamtwiderstand der n Elemente; kurz „ w_a klein“. — Es sei im anderen Grenzfalle „ nw_a groß“, sogar gegen nw_i . — Dann wird, wenn

$$w_a \text{ klein, } J_I = \frac{e}{w_i} = n \frac{e}{w_i} = n i'_i \quad \left| \quad w_a \text{ groß, } J_{II} = \frac{e}{\frac{w_a}{n}} = n \frac{e}{w_a} = n i'_{II} \right.$$

In diesen beiden Fällen wird also die Ver- n -fachung der Elemente wirkungslos sein („sich lohnen“). — Dagegen bleibt sie wirkungslos, wenn

$$\text{groß, weil dann } J'_{II} = \frac{e}{w_a} = i'_{II} \quad \left| \quad w_a \text{ klein, weil dann } J''_I = \frac{e}{w_i} = i'_i \right.$$

hungen der elektrischen zu den thermischen u. s. w. Erscheinungen. Wirklichkeit kommt es weder zu dieser vollen Unabhängigkeit der Stromstärke von der Größe der Elemente, der Quantität des Stromes, der Elemente, noch auch zu jener Ver-n-fachung der Wirkung; sondern für die Stromstärke günstigste Schaltung ist diejenige, bei welcher der äußere Widerstand gleich ist dem inneren (LA 200).

LA 200. der ... äußere Widerstand gleich ist dem inneren (LA 200).

Messende Versuche im einzelnen zur Bestätigung der entwickelten Gesetze (z. B. mittels 1, bezw. 2, 3 ... Latimer Clark-Elementen und dem Kurzschluss mit dem Galvanometer von Hartmann u. Braun) (LA 201). — —

LA 201. stand mit dem Galvanometer von Hartmann u. Braun) (LA 201). — —

Ganz analoge Betrachtungen und Rechnungen wie für die Ströme in den inneren und äußeren Widerständen der Batterien abgeleitet, gelten auch für die Ströme der Dynamomaschinen (LA 202).

LA 202. der Thermoketten ... (LA 202).

C. Elektrizität und Licht.

§ 156. Lichterscheinungen bei Entladung durch Gase und Schlechtleiter. — Die verschiedenen Arten der Entladungen. — Kaltes Bogenlicht.

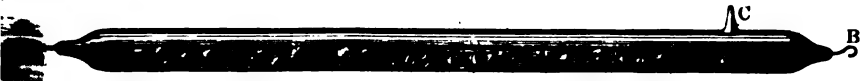
Fig. 568. Von den sogenannten „Lichtwirkungen“ elektrischer Entladungen und Ströme sind nur mittelbare, nämlich bloße Erscheinungen der auftretenden hohen Wärmegrade zu beobachten. Leuchten der glühenden Kohlenfäden in den Glühlampen, die auch leuchten würden, wenn der Kohlenfaden statt durch den elektrischen Strom z. B. unter Luftabschluss in einem Ofen erhitzt würde. Auch das elektrische Bogenlicht reich an kurzwelligen Licht ist, stimmt noch mit der Erfahrung überein, dass in glühenden Körpern bei höheren Temperaturen — und die des elektrischen Lichtbogens gehören zu den höchsten erreichbaren — immer kürzere Wellenlängen hinzukommen. — Dagegen:



Zahlreiche Erscheinungen, namentlich an Geißler-Röhren (Figg. 568, 569 a. f. S.), Crookes-Röhren (vergl. § 158), also bei Entladung in verdünnten Gasen unter hoher Potentialdifferenz, weisen darauf hin, dass durch die elektrischen Zustände der Lichtäther auch gleichsweise unmittelbar, nämlich nicht erst durch die Erwärmung der in ihn eingebetteten Moleküle, die Emission von Licht angeregt werden kann, die als „Elektrolumineszenz“ (§ 121) bezeichnet wird. Es ist nämlich z. B. die entsprechend verdünnte Luft in Crookes-Röhren violett, also kurzwelliges Licht schon bei Temperaturen von etwa 80°C aus. — Auch das kalte Bogenlicht an Spitzen und Kugeln von Ele-

maschinen, das St. Elmsfeuer . . . ist nicht eine bloße Glüherscheinung. — Oft erregen die Entladungen auch Fluoreszenz (Fig. 569).

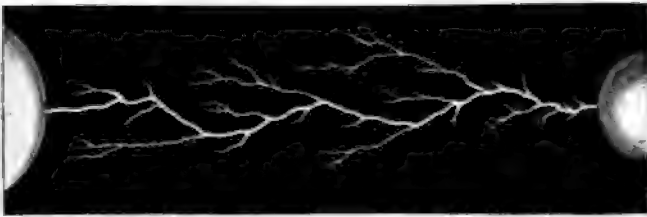
Fig. 569.



Die Fünkchen hinwiederum, welche im Augenblick des Schließens und kräftiger Wiedertrennen der Poldrähte einer galvanischen Batterie auftreten, zeigen eine gelbliche Farbe an Kupferdrähten, gelbliche bei Eisen, weiße beim (Eintauchen in Quecksilber und erweisen sich so schon wieder als sekundäre Erscheinungen der Wärmewirkung des elektrischen Stromes, nämlich der Verbrennung jener Metalle; desgleichen die Feuererscheinungen beim Kurzschluss von Starkstromleitungen.

Der im engeren Sinne sogenannte elektrische Funke (Fig. 570) zwischen den Polkugeln einer Elektrisiermaschine, bei Entladung einer

Fig. 570.



Leydener Flasche, zwischen den Polen eines Induktoriums u. dergl. zeigt sich als aus beiderlei Lichtwirkungen, den mittelbaren und unmittelbaren, zusammengesetzt.

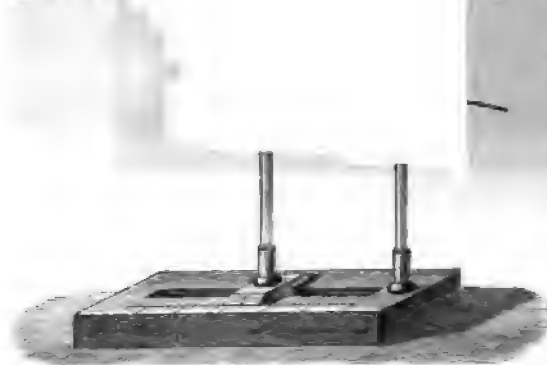
Die spektroskopische Untersuchung ergibt nämlich folgendes: Wird mittels einer Sammellinse das Bild der verschiedenen Teile des Funkens auf den Spalt des Spektralapparates geworfen, so entsprechen die hellen Spektrallinien nahe den metallischen Elektroden dem Emissionsspektrum eben dieser Metalle; in größeren Abständen von den Elektroden werden diese Linien schwächer, dünner und weniger zahlreich. Dagegen zeigt sich an allen Stellen zwischen den Elektroden das Spektrum des Gases, durch welches die Entladung stattfindet, und zwar ebenso wie es sich zeigt, wenn das Gas in einer Geißler-Röhre mit einem sehr engen, geraden Rohrteile zur Elektrolumineszenz gebracht wird (wobei die hier hellleuchtende schmale Lichtquelle selbst schon den Licht durchlassenden Spalt vertreten kann). — Hiernach kann also von einem selbständigen „Spektrum des elektrischen Funkens“ nicht die Rede sein, da die Vergleichung der Funken verschiedener Elektroden und verschiedener Gase sonst nichts Gemeinsames aufweist. — Solche Beobachtungen bilden auch einen (wiewohl nicht völlig abschließenden) Grund gegen die Auffassung, daß durch die elektrische Entladung der Lichtäther (nicht nur vergleichsweise, sondern völlig) direkt, ohne Vermittelung der in ihn eingebetteten Moleküle wägbaren Stoffes, zur Lichtemission angeregt werde (unbeschadet der im folgenden Paragraphen darzulegenden Wesensgleichheit elektrischer und optischer Wellen).

Gleichwohl stellen der elektrische Funke, nach Abzug des an ihm mitbeteiligten Glühens der Metalle, und das von ihm nur graduell verschiedene elektrische Büschellicht und Glimmlicht eine eigenartige Erscheinungsgruppe dar, die man unter der Bezeichnung **disruptive Entladung durch Dielektrika** zusammenfaßt, im Gegensatz zu den Stromerscheinungen in Leitern erster und zweiter Ordnung. — Einiges zur Erklärung der disruptiven Entladungen aus dem Begriffe der „elektrischen Festigkeit“ zu Ende des folgenden §.

Die folgende Tabelle gibt die Schlagweite d cm zwischen zwei gleichen leitenden Kugeln vom Radius r cm bei V statischen Potentialdifferenz-Einheiten u (in trockener Luft bei 74,5 cm Druck und 18° C):

$r = 2,5$ cm		$r = 1,0$ cm		$r = 0,5$ cm		$r = 0,25$ cm	
d	V	d	V	d	V	d	V
0,5	61,2	0,5	58,3	0,5	57,7	0,5	52,4
1,0	109,5	1,0	104,3	1,0	90,0	1,0	67,3
1,5	154,1	1,5	—	1,5	—	1,5	74,4

Auf G
man aus der



abzuleitenden Gesetzmäßigkeiten kann (Fig. 571) gemessenen Schlagweiten auf die Potentiale schließen; wie ja eine ähnliche Schätzung der Leistungsfähigkeiten der Elektrisiermaschinen u. dergl. von jeher instinktiv ausgeteilt wurde.

TESLA (1892) hat durch Wechselströme von hoher Frequenz (Hunderttausende von Stromwechseln per sec mittels oszillierender Entladungen in Leydener Flaschen,

folgender Paragraph) Lichterscheinungen hervorgerufen, die sich von allen bis dahin bekannten schon dadurch unterscheiden, daß z. B. Geißler-Röhren auch schon aufzuleuchten beginnen, wenn nur ihr eines Ende in leitender Verbindung mit der Stromquelle ist. — „Kaltes Licht.“

Diese Tesla-Ströme zeigen auch sonst höchst überraschende Wirkungen, indem sie trotz Spannungen von Hunderttausenden von Volt den in sie eingeschalteten menschlichen Körper nicht beschädigen. Theoretisch ist dies wieder ein Hinweis darauf, daß die „Leitung“ — wenigstens dieser Wechselströme — nicht in den sogenannten Gutleitern vor sich geht, sondern an deren Oberfläche im Dielektricum, indem infolge der ungeheuer raschen Stromwechsel die Strömungen nicht Zeit finden, in den menschlichen Körper oder sonst einen Gutleiter einzudringen.

§ 157. Elektrische Wellen und Lichtwellen. — Die Hypothesen von Maxwell und die Versuche von Hertz.

Geschichtliches. Die erste Tatsache, welche den unmittelbaren Zusammenhang zwischen elektromagnetischen und optischen Vorgängen herstellte, war FARADAYS (1846) Entdeckung der Drehung der Polarisationssebene eines polarisierten Lichtstrahles in einem kräftigen magnetischen Felde. — Aus den ganz neuen geometrischen Anschauungen über die Zuordnung von elektrischen und magnetischen Kräften und Kraftlinien, die FARADAY aus seinen reichen experimentellen Forschungen abgeleitet hatte, entwickelte MAXWELL (1831 bis 1879) eine rechnerische Theorie, die das Ganze der elektrischen und magnetischen Erscheinungen und als „elektromagnetische Lichttheorie“ auch die optischen Erscheinungen (sowie die der „Ätherstrahlung“ überhaupt, § 121) zu umfassen bestimmt war. Diese theoretischen Konstruktionen MAXWELLS erfuhren ihre glänzende experimentelle Bestätigung durch HERTZ' Versuche über elektrische Wellen (1888), deren Endergebnis sich dahin aussprechen läßt, daß die Vorgänge in der nichtleitenden Umgebung z. B. eines elektrischen Induktoriums nicht qualitativ, sondern nur dadurch von den Vorgängen in einem lichtdurchstrahlten Raume unterschieden sind, daß die auf direktem elektrischen Wege gemessenen elektrischen Wellen in der Luft oder in anderen Dielektrici Wellenlängen von mehreren Metern bis herab zu $\lambda = 6 \text{ mm}$ (5 mm), dagegen die leuchtenden von $\lambda = 0,0008 \text{ mm}$ bis herab zu $\lambda = 0,0003 \text{ mm}$ (vergl. Tafel V) haben.

Als die früheste einschlägige experimentelle Erfahrung stellen sich im Lichte dieser epochemachenden Entdeckung die Versuche von FEDDERSEN (1858) über oscillatorische Entladungen an Leydener Flaschen dar. Wird nämlich das Bild des Entladungsfunkens einer Leydener Flasche in einem Planspiegel beobachtet, der um eine zur Längsausdehnung des Funkens parallele Achse rotiert, so zeigt sich dieses Bild als eine Reihe zahlreicher paralleler heller Streifen. Es ist also in Wahrheit nicht ein Funke, sondern eine Folge solcher aufgetreten. Dabei varriert das abwechselnd Breiter- und Schmälerwerden der Funkenbilder (Fig. 572

Fig. 572.

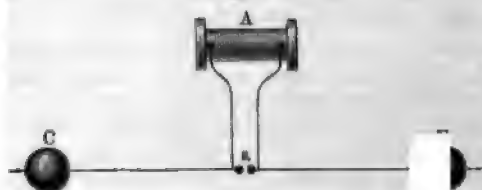


nach photographischen Aufnahmen) ein oscillatorisches Wechseln der elektrischen Zustände beider Pole. — In der Tat war es schon früher bei Erforschung der magnetischen Wirkungen von Flaschenentladungen aufgefallen, daß die Lage der Pole bei gleicher Ladung der Flasche und gleicher Richtung des Entladungsstromes scheinbar unregelmäßig wechselt. (Die Erklärung hiervon ergab sich aus den sogenannten Ladungsrückständen, welche nach Entladung von Leydener Flaschen im Dielektricum sich zeigten und die ebenfalls bald positiv, bald negativ waren.) Alle diese Erscheinungen erklärten sich aus einer Art Hin- und-Herwogen der Ladungen, ähnlich wie die Schwankungen der Flüssigkeit in Kommunikationsgefäßen bei Störungen des Gleichgewichtes.

Sowie aber das genannte hydromechanische Gleichnis schon den wirklichen Vorgang beim stationären Strom nur teilweise versinnlichen konnte, so gilt es auch, das „gleichsam Hin- und Herfluten“ der entgegengesetzten Ladungen beim Entladen einer Leydener Flasche oder sonstiger höherer Potentialdifferenzen aus den anderweitig bekannten Gesetzen elektrischer Erscheinungen möglichst frei von bloßen Gleichnissen näher zu verfolgen. Solche theoretischen Vorüberlegungen waren es, die HERTZ auf seine Versuche führten (wogegen eine bloße zufällige, rein empirische Beobachtung der bei den Versuchen auftretenden Erscheinungen schon deshalb ausgeschlossen war, weil diese Erscheinungen für sich, namentlich bei den ersten Versuchen, ganz unscheinbare waren — winzige Fünkchen auf einer etwa 0,5 bis 2 mm langen Funkenstrecke).

HERTZ verwendete statt der Ladung einer Leydener Flasche die eines Funkeninduktors *A* (Fig. 573) und als Funkenstrecke den Abstand *a* zweier Messingkugeln

Fig. 573.



von je 1,5 cm Halbmesser. Diese Polkugeln waren mit zwei Zinkkugeln *B* und *C* von je 15 cm Halbmesser mittels eines 2,6 m langen, 5 mm dicken Kupferdrahtes leitend verbunden. Somit war einerseits die Kapazität *C* des Leitersystems *C a B*, anderseits der Selbstinduktionskoeffizient *L* dieses Systems bekannt; desgleichen die Potential-

differenz bei *a* zu 86 000 Volt. Hier berechnete Hertz, daß die Dauer *T* der elektrischen Schwingungen während der Entladung $T = 2,5 \cdot 10^{-8}$ sec sein mußte (LA 203).

Daß nun diese elektrischen Schwingungen in dem den Induktionsapparat umgebenden Dielektricum elektrische Wellen hervorrufen, erkannte HERTZ, indem er in einem Rechtecke aus Draht, das bis auf eine ganz kurze Funkenstrecke geschlossen war, Fünkchen beobachtete, die ein Analogon zur Resonanz darstellten. Deshalb jenes Drahtrechteck als „elektrischer Resonator“ bezeichnet wurde. Ferner zeigten sich Erscheinungen der Reflexion, zuerst an den Wänden des Experimentierzimmers, dann an großen, zu parabolischen Zylindern gestalteten Blechen. Bei entsprechend gewähltem Abstände zwischen der primären Funkenstrecke und der Wand bildeten sich nämlich durch Interferenz der reflektierten mit den neu ankommenden, fortschreitenden Wellen stehende Wellen, was sich dadurch kundgab, daß in Abständen von durchschnittlich 4,8 m Maxima, bezw. Minima der Fünkchen auf der sekundären Funkenstrecke zeigten. Hiermit war die Länge dieser elektrischen Wellen in der Luft zu $4,8 \text{ m} \times 2 = 9,6 \text{ m}$ ermittelt.

Aus jenem berechneten Werte von *T* und diesem beobachteten Werte von λ ergab sich schließlich gemäß der allgemeinen Gleichung $c = \lambda : T$ auch die

Fortpflanzungsgeschwindigkeit elektrischer Wellen
 $c = 300\,000 \text{ km sec}^{-1}$ — also eine Geschwindigkeit gleich der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes, d. i. nach der Wellenlehre des Lichtes: gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwellen.

Schon WHEATSTONE (1834) hatte die „Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektrizität in einem Kupferdrahte“ durch folgende direkte Methode bestimmt: Die Entladung einer Leydener Flasche ging durch drei Funkenstrecken *ab*, *cd*, *e*

4), wobei von b nach c und ebenso von d nach e je ein 367 m langer Draht

Die Funken wurden beobachtet durch einen sehr rasch rotierenden Spiegel, Achse parallel der Geraden *af* lag. Hierbei zeigte sich 1. jedes Funken senkrecht zu *af* etwas in die Breite gezogen, woraus auf die Dauer Funken gleich $\frac{1}{115 \text{ sec}}$ geschlossen

2. Die Funkenbilder von ab und ef

derselben Geraden; cd aber war um so verschoben, daß WHEATSTONE auf eine Indigkeits in diesem Drahte zu 430 000 km

SIEMENS fand (1876) nach einer anderen die Geschwindigkeit im Eisendrahte km. Zu diesen stark voneinander ab- den Zahlen ist zu bemerken, daß hier die Kapazität der Drähte und ihre liche Ladung und Entladung in Be- am; wogegen erst die HERTZsche Zahl $\cdot 10^3$ km sec $^{-1}$, eine eigentliche Aus- geschwindigkeit unter einfachen Ver- darstellt. — Auch die Umrechnungs- elektrostatischen in das elektromag-

Maßsystem war schon viel früher (WEBER und KOHLRAUSCH 1856) rund 10^8 m sec⁻¹ gefunden worden. Inzwischen hat MAXWELL aus seiner mathematischen Theorie vorausgesehen, daß jene Zahl gleich sein müsse der Lichtgeschwindigkeit elektrischer Wellen.

gelang durch Weiterbildung der
hen Versuche (namentlich durch
erung der Oscillationen einerseits
h Ersetzung der Resonatoren durch
„Empfänger“: Kohärer [§ 160],
er u. dergl.), elektrische Wellen
zu erzeugen. Von da bis zu d
0 $\mu\mu$ = 0,0027 mm (vergl. Tafel
- wahrscheinlich nicht, weil es V
nicht gibt oder geben kann, so
ger nicht mehr, und anderseits
ht auf solche Strahlen reagieren.

Die Entdeckung der Wesensgleichheit der elektrischen Wellen mit Wärme-, und chemischen Wellen erhielt alsbald eine große Zahl Bestätigungen als sich auch jene elektrischen Wellen als transversale herausstellten, für nebst der Reflexion auch einfache Brechung (z. B. an einem Prisma) und Beugung, Polarisation, Doppelbrechung u. s. f. experimentell zeigen ließen.

n kann aber nicht sagen, hiermit seien die elektrischen Wellen qualitativ
htwellen“ in dem Sinne erwiesen, daß man die Vorstellungen der ersten
les XIX. Jahrhunderts festhält, nach welchen die Lichtwellen einfach
rische Wellen im elastisch gedachten Lichtäther sein sollten; sondern
rt lag es nahe, nun vielmehr die Lichtwellen und spezieller ihre Trans-

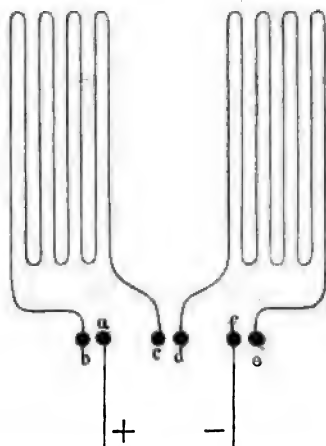


Fig. 574.

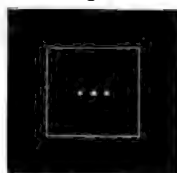


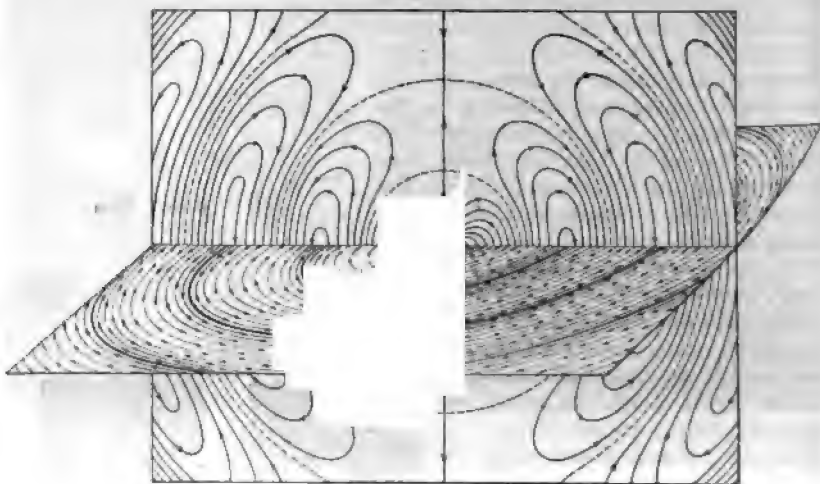
Fig. 575.



Fig. 576.

versalität auf die von den elektrischen und magnetischen Erscheinungen her schon bekannten Tatsachen der transversalen Wirkungen magnetischer und elektrischer Körper aufeinander zu deuten. — Für den besonderen Fall, daß wir uns die Polkugeln der primären Funkenstrecke α , die wir nach dem Vorausgehenden als einen elektrischen Oszillator bezeichnen können, nicht von einem wägbaren Medium, sondern nur vom Äther umgeben denken, läßt sich der Zustand des Äthers während der elektrischen Oszillationen nunmehr wieder beschreiben durch die magnetischen und elektrischen Kraftlinien, deren Gestalt und gegenseitige Lage für einen bestimmten Zeitpunkt aus Fig. 577

Fig. 577.



ersichtlich wird. Wäre nämlich in dem Oszillator ein konstanter Strom geflossen, so hätten ihm magnetische Kraftlinien von der Anordnung der Fig. 512 entsprochen; und blieben diese in unveränderter Lage und Dichte, so würden sie einem ebenfalls konstanten Zustande des magnetischen Kraftfeldes entsprechen. Wenn dagegen der Strom 1. seine Stärke von 0 an erst binnen der kleinen Zeit τ sec erreicht und wenn 2. die jeder einzelnen Stromstärke entsprechende Stärke des magnetischen Feldes durch den Raum mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit durchzieht, so müssen statt der ruhenden Kraftlinien **magnetische Wellenringe** vom Stromleiter weg sich fortpflanzen; und zwar so, daß jedem Wechsel der Stromrichtung im Oszillator eine Umkehrung der Richtung der magnetischen Kraftlinien entspricht; in der Fig. 577 angedeutet durch die entgegengesetzten Richtungen der Pfeile. — Diese Wechsel des magnetischen Zustandes müssen dann weiterhin in dem als Leiter gedachten umgebenden Äther **magnetoinduzierte**, in sich geschlossene elektrische Ströme zur Folge haben, deren Gestalt und Richtung sich aus den Gesetzen der Magneto- und Elektroinduktion einerseits, der elektromagnetischen und elektrodynamischen Kräfte anderseits ergibt. — Fig. 578 (I bis V) stellt die allmähliche Entstehung der elektrischen Wellen vom Beginn der elektrischen Schwingungen am Oszillator dar. Und zwar I zur Zeit, ehe sie sich noch auf ein Viertel Wellenlänge ausgedehnt haben, während die beiden Sammelkugeln entgegengesetzt geladen sind: Fig. II, während sich die Sammelkugeln bereits zu entladen beginnen; in Fig. III

schneürt sich ein Teil jeder Kraftlinie ab, indem er sich in die Sammelkugeln zurückzieht, wogegen der andere Teil sich in sich selbst schließt; weshalb in IV zu beiden Seiten

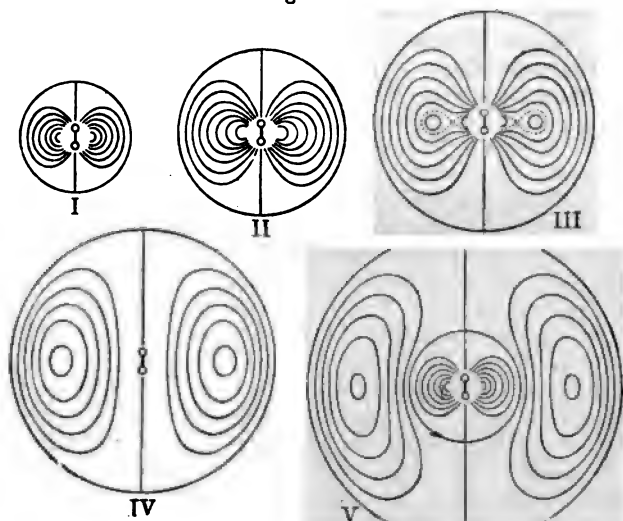
Fig. 578.

des Oscillators geschlossene Ringwellen sich vom Oscillator entfernen, während die Sammelkugeln ganz entladen sind. In V rückt dann wieder ein neues Wellensystem wie in I nach; u. s. f.

Im bisherigen war wieder über die „physikalische Natur der magnetischen und elektrischen Kraftlinien“ keine noch weiter vordringende Hypothese gemacht worden.

Aber FARADAYS Gedanke ist noch weiter verfolgt worden, indem sich MAXWELL die magnetischen Kraftlinien als die Achsen von Wirbeln im Äther dachte; infolge der kreisenden Bewegung in den Wirbeln würden dann Zentrifugalspannungen entstehen, in denen sich senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien gerichtete elektrische Kräfte wiedererkennen lassen. Hiermit wäre zunächst ein Ausgangspunkt für die mechanische Erklärung elektrokinetischer Vorgänge gegeben.

Die elektrostatischen Zustände in einem Dielektrikum wären dann so zu denken, daß der Äther (den man, statt wie einst mit einem festen, starren Körper von ungeheurem Elastizitätsmodul, nun mit elastischer Gallerte verglich) durch alle elektrischen Ladungen eines in ihn gebetteten Leiters eine „dielektrische Verschiebung“ erfahre. — Zur Erläuterung der Begriffe „Dielektricum“ und „dielektrische Verschiebung“, die die Grundlage der neueren Elektrizitätstheorien bilden, einiges nach MAXWELL: Die Stoffe, die man früher Schlechtleiter oder Isolatoren genannt hatte, weil sie einem elektrischen Strome sehr großen, ja unendlichen Widerstand zu bieten schienen (alle Gase, einige Flüssigkeiten, die nicht Elektrolyte sind, wie Terpentinöl, Naphta; einige feste Körper, wie Guttapercha, Kautschuk, Bernstein, Glas bei niedriger Temperatur, krystallinische Elektrolyte), werden nun Dielektrica genannt, „weil man doch gewisse elektrische Wirkungen durch sie hindurchsenden kann“. — Eine auf ein Dielektricum wirkende elektromotorische Kraft bringt in der Richtung dieser Kraft im Dielektricum eine dielektrische Verschiebung hervor. Ist die elektromotorische Kraft konstant, so ist nur Verschiebung, aber kein Strom vorhanden. Wächst die elektromotorische Kraft, so ist die Zunahme der Verschiebung einem elektrischen Strome äquivalent, der in derselben Richtung verläuft, in der die elektromotorische Kraft wirkt. Nimmt die elektromotorische Kraft ab, so ist die



Abnahme der elektrischen Verschiebung äquivalent einem Strome in entgegengesetzter Richtung. — Umgekehrt: In einem Dielektricum wird durch eine dielektrische Verschiebung eine innere elektromotorische Kraft hervorgerufen, deren Richtung der der Verschiebung entgegengesetzt ist, und welche die Verschiebung auf Null zu bringen bestrebt ist. Der Sitz dieser inneren Kraft ist in dem Dielektricum überall da, wo eine Verschiebung ist. — Um eine elektrische Verschiebung in einem Dielektricum hervorzubringen, ist ein Aufwand von Arbeit erforderlich, die durch das halbe Produkt aus der elektromotorischen Kraft und der elektrischen Verschiebung gemessen wird. Diese Arbeit ist als potentielle Energie im Dielektricum aufgespeichert. — Die Dielektrizitätskonstante eines Stoffes gibt das Verhältnis der Größen der Verschiebungen an, die durch dieselbe elektromotorische Kraft in dem Stoffe und im Vakuum hervorgerufen werden. Daraus, daß nach **BOLTZMANN** die Dielektrizitätskonstanten vieler Stoffe (Schwefel, Kolophonium, Paraffin, Hartgummi; Luft, CO_2 , CO , H , NO , CH_4 , C_2H_2) den Quadraten ihrer Brechungsquotienten gleich sind (§ 139), wird nicht nur die Analogie zwischen Licht und Elektrizität ersichtlich, sondern es ist dies auch ein Beispiel, wie die Optik ihrerseits aus der elektromagnetischen Theorie des Lichtes als solche zu erwarten hat, wo die Größen und Verschiedenheit der Lichtkräfte nur durch mehr oder weniger mechanischen Kräfte zwischen Körpern zu erklären vermocht hatte.

Speziell die disruptive Entladung ist ebenfalls nahe, die dielektrische Verschiebung zu vergleichen. Indem feste Körper oft durchgebohrt, zerrissen, zum Teil in Dampfform zerstreut werden, sind diese Entladungserscheinungen dem Zerreißen, Zerbrechen, Zerdrehen ... eines Körpers analog. Wie kleine oder große Kräfte oder Kraftmomente Dehnung, Biegung, Verdrehung ... herbeiführen, so die elektromotorischen Kräfte kleinere oder größere dielektrische Verschiebungen. Der konstanten elastischen Deformation entspricht Leitung oder Durchgang von Ladungen; dem vollkommen elastischen Körper, der nach Aufhören der Kraftwirkung seine frühere Gestalt wiedergewinnt, entspricht ein Dielektricum, das gegenüber einer nicht zu großen elektromotorischen Kraft als vollkommener Isolator wirkt. Wie jeder über seine Festigkeitsgrenze mechanisch deformierte Körper zerbricht oder zerbricht ... , so gibt es auch eine elektrische Festigkeit, gemessen durch die größte elektromotorische Kraft, die das Dielektricum aushalten kann, ohne daß es zur disruptiven Entladung kommt. Daß sich beim elektrischen Funken zwischen zwei Leitern die ganzen Ladungen nahezu auf einmal entladen, ist zu vergleichen dem Vorgange, durch den z. B. ein Blatt Papier bei zu starker Spannung plötzlich zerreißt. Immer erfolgt hierbei der Riß von den schwächsten Stellen der Ränder aus und geht unregelmäßig zu den übrigen schwachen Stellen des Papiers; ebenso sind die Zacken des elektrischen Funkens wahrscheinlich durch Staubteilchen u. dergl. bedingt. — Ein unvollkommen elastischer Körper, der nach Aufhören der Kraftwirkung seine frühere Gestalt nicht mehr vollständig annimmt, entspricht einem Halbleiter. Stoffe, wie Luft, die nur disruptive Erscheinungen hindurchlassen, kann man „elektrisch brüchige“ nennen, ähnlich den spröden oder brüchigen Stoffen. — Die elektrischen Rückstände im Glase einer Leydener Flasche oder in der Guttapercha eines unterseeischen Kabels entsprechen der elastischen Nachwirkung. (LA 204.)

**§ 158. Kathodenstrahlen, Röntgenstrahlen,
Becquerelstrahlen u. s. f.**

Die Lichterscheinungen bei disruptiven Entladungen in der Luft von gewöhnlicher Dichte und namentlich in verdünnten Gasen konnten ins Große gesteigert und aufs mannigfachste abgeändert werden seit der Verwendung mächtiger Induktoren an Stelle der Reibungselektrischer- und Influenzmaschinen. Hierbei

ergaben sich überdies noch besondere Klassen von Erscheinungen insofern, als in sehr verdünnten Gasen nicht nur ein Aufleuchten an Ort und Stelle, sondern eine geradlinige Ausbreitung bestimmter Wirkungen zu beobachten war, die (noch vor HERTZ' experimenteller Bestätigung des Begriffes elektrischer Wellen) zu dem Begriffe von Kathodenstrahlen geführt hatten. Es hat nämlich HITTORF

1869 und um dieselbe Zeit CROOKES in sehr stark verdünnten Gasen Erscheinungen beobachtet, die Crookes auf einen „vierten Aggregatzustand“ deutete, der noch über den gasförmigen hinausgehen sollte; Stoffe in diesem Zustande nannte er „strahlende Materie“. — Nach einer anderen Auffassung sollten bei den Entladungen von den als Kathode dienenden Platindrähten und Blechen Platinteilchen

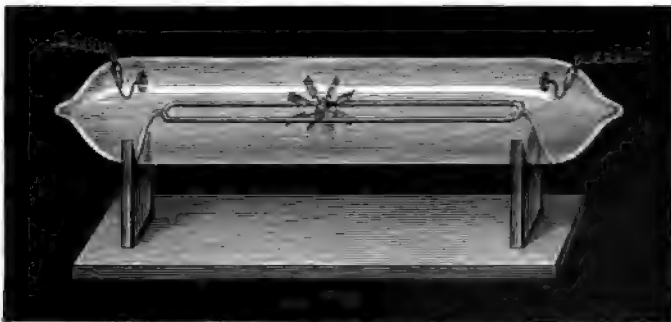
abgerissen und mit großer Geschwindigkeit in's merklich gerader Linien ortgeschleudert werden. — Nach einer neuesten Hypothese sind die Kathodenstrahlen nichts anderes als die negativen Elektronen (§ 154) selbst, die von

der Kathode in den Raum geschleudert werden. — Einige der zahlreichen, diesen Hypothesen zu Grunde liegenden Tatsachen sind folgende: Wenn in dem mit sehr verdünnter Luft gefüllten Gefäße (Fig. 579) die Platte *a* als Kathode verwendet wird, so erzeugt das Kreuz *b* aus Aluminiumblech auf der hinter ihm liegenden Wand bei *d* einen Schatten (von dem noch besonders merkwürdig ist, daß, wenn das Kreuz *b* um das unten befindliche Scharnier umgelegt wird und die Entladung

Fig. 579.



Fig. 580.



bei *a* ihren Fortgang nimmt, dann das früher dunkle Kreuz bei *d* nun heller als seine Umgebung aufleuchtet — zu vergleichen den negativen Nachbildern auf unserer Netzhaut).

Fig. 581.



Wird der Strom gewechselt, so daß *a* Anode und *b* Kathode ist, so bleiben diese Erscheinungen aus. Auch direkt mechanische Wirkungen lassen sich erzielen, indem z. B. das Glimmerrädchen in Fig. 580 (s. v. S.) von der Kathode weggetrieben wird, wie wenn aus dieser Wind ausströmte. Hat die Kathode die Gestalt eines Hohlspiegels, so beginnt in dessen Krümmungsmittelpunkt (nicht im Brennpunkt — vergl. Fig. 581) ein Platinblech zu glühen, wie wenn es von den normal zu den Flächenelementen des Spiegels fortgetriebenen Teilchen gleichsam gehämmert oder wie wenn es von den eben in dieser Richtung ausgehenden Strahlen ähnlich erhitzt würde wie der Feuerschwamm im Brennpunkte eines Hohlspiegels. — Gegenwärtig ist die Bezeichnung Kathodenstrahlen allgemein gebräuchlich geworden; in ihr ist, unabhängig von näheren Hypothesen, festgehalten, daß die Erscheinungen jedenfalls so erfolgen, als ob von der Kathode Strahlen ähnlich den Licht- und Wärmestrahlen ausgingen und auch alle Wirkungen hervorbringen, die den der sonst als Strahlung erkannten Vorgänge ähnlich sind. Die direkt erwiesene Tatsache,

daß jene „Strahlen“ negative Ladungen mit sich führen, wurde zum Ausgangspunkt für die „Elektronen“-Theorie.

Größtes Aufsehen erregte (1895) die Entdeckung der von Röntgen als **X-Strahlen**, seither allgemein als **Röntgenstrahlen** bezeichneten Strahlen, die von den durch Kathodenstrahlen getroffenen Stellen ausgehen und durch völlig undurchsichtige Stoffe hindurch noch kräftige chemische, Fluoreszenz- und elektrische Entladungswirkungen ausüben.

So wurden die Röntgenstrahlen fast unmittelbar nach ihrer Entdeckung zu einem regelmäßigen diagnostischen Hilfsmittel für den Arzt, der nun photographische Aufnahmen vom Innern des menschlichen Körpers gewinnen und so z. B. eingeschlossene Fremdkörper, Unregelmäßigkeiten im Knochenbau, bei besonders guten Aufnahmen auch von Weichteilen gewinnen konnte. Es gehört hierzu 1. ein Induktorium, 2. eine Röntgenröhre (von der Form des Gefäßes in Fig. 579, wo *a* wieder die Kathode, statt *b* ein einfacher Zuleitungsdraht angebracht ist, oder auch von mancherlei anderen Formen). Die X-Strahlen gehen dann z. B. durch die zu photographierende Hand, unter der 3. die photographische Platte in einer lichtundurchlässigen Kassette liegt. Auf der Platte entwickelt sich wie sonst durch Lichtstrahlen das negative Bild, indem die Weichteile viel mehr, die Knochen weniger oder nichts von den Strahlen hindurchlassen. — Theoretisch waren diese Strahlen insofern von größtem Interesse, als keine

nehmung an ihnen wahrgenommen werden konnte, weshalb eine Wellen-Ausbreitungsgewindigkeit noch viel größer sein müßte als die der Licht- und elektrischen Wellen. — Nach der neuesten Elektronentheorie entsprechen die Röntgenstrahlen Explosionswellen, die sich von Stellen fester Körper ausbreiten, von Elektronen mit ungeheurer Geschwindigkeit, nach RICHARD etwa ein Viertel der Lichtgeschwindigkeit, aufprallen.

Seit wenigen Jahren sind noch weitere merkwürdige Erscheinungen bekannt geworden, die man **Becquerelstrahlen** nennt. Einige Stoffe nämlich, die als Uranverbindungen abgeschieden und als Radium und Polonium bezeichnet wurden (es ist nicht sicher, ob es Grundstoffe sind), aber auch andere **radioaktive Stoffe**, wie Chlorbaryum, Brombaryum u. s. f., wirken entladend auf einen ihnen nahen, geladenen Leiter; schon sehr kleine Mengen dieser Stoffe wirken, in Metallhülsen eingeschlossen, durch diese hindurch erregend auf die photographische Platte oder fluoreszierende Schirme ähnlich wie Röntgenstrahlen; neuerdings wurde neben zahlreichen anderen überraschenden Wirkungen auch beobachtet, daß schon kleine Mengen solcher Stoffe, in Zelluloid oder dünne Metallhülsen eingeschlossen und für einige Stunden in die Nähe der Haut gebracht, in dieser nach Tagen Entzündungen bis zu erst nach Wochen heilenden Wunden hervorriefen. Letztere Erscheinungen würden vielleicht eher hindeuten auf ein Eindringen von Stoffteilchen in die Haut, die dann daselbst als Fremd- oder Giftstoffe immer neue Reizung herbeiführten. Namentlich die photochemischen und die Fluoreszenzwirkungen weisen aber auf eine innere Verwandtschaft mit sonstigen Strahlungsvorgängen hin. Auch das Entladen von Leitern hat sein unmittelbares Vorbild an der (sonderbarerweise erst von HERTZ bemerkten) Tatsache, daß Lichtstrahlen, namentlich die stark brechbaren und ultravioletten Strahlen, auf negativ geladene Leiter sehr rasch entladend wirken. — Daß die radioaktive Wirkung Monate (ja wie man schließen zu dürfen glaubt, Jahrhunderte) lang ohne meßbaren Verlust oder Ersatz an Masse und Energie andauert, wurde aus folgender Weiterbildung der Elektronenhypothese erklärt: Es ist kein Zufall, daß die Stoffe von größtem Atomgewicht, Uran (240), Thor (232), Radium (226), besonders radioaktiv sind; denn diese Systeme von einer Viertel- bis einer Halbmillion Elektronen (vergl. S. 504) hätten die Grenze möglicher Stabilität erreicht und es rissen sich aus ihnen immer einzelne Subatome mit jenen ungeheuren Geschwindigkeiten los.

Anhang:

§ 159. Elektrische Vorgänge im lebenden tierischen Körper.

Schon im Altertum wußte man, daß der Zitterrochen der ihn ergreifenden Hand diejenige Empfindung verbunden mit Muskelzucken erzeuge, die wir jetzt **„elektrischen Schlag“** nennen. Als MUSSCHENBROECK zum erstenmal den Schlag einer Leydener Flasche verspürte, bemerkte er sogleich die Ähnlichkeit dieser Empfindung mit der beim Schlage des Zitterrochens. Seither kennt man als **„elektrische Fische“** überdies den Zitteraal, Zitterwels und einige andere. — Der Lebensprozeß dieser Tiere ist also eine Quelle kräftiger elektrischer Ladungen. Der von hier gewonnene Begriff **„tierische Elektrizität“** wurde dann auch irrigerweise herangezogen zur Erklärung von GALVANIS Beobachten der zuckenden Roschschänkel (§ 153), wurde aber durch VOLTAS abweichende Deutung jener Erscheinung eine Zeitlang überhaupt zurückgedrängt.

DUBOIS REYMOND (1848) zeigte in einer umfassenden Untersuchung, daß sowohl in den Nerven als auch in den Muskeln während der Funktion dieser Organe elektrische Ströme auftreten. Mittels empfindlicher Galvanometer gelingt es, solche schon beim bloßen Biegen des Fingers nachzuweisen.

Nun lag es wieder nahe, die Ausbreitung von Nervenreizungen mit der Fortpflanzung von Strömen in Telegraphendrähten zu vergleichen; ja das Nervensystem mit seinen Leitungsbahnen und Zentralorganen (Gehirn, Rückenmark) legte den Vergleich mit einem Telegraphennetze, seinen Drähten und Zentralstationen nahe. Es ist aber gewiß, daß der „Nervenstrom“, dessen Geschwindigkeit HELMHOLTZ zu 30 bis 40 m sec⁻¹ festgestellt hatte, kein elektrischer Strom sein könnte, schon wegen dieser millionenmal zu kleinen Fortpflanzungsgeschwindigkeit. (Vielmehr sind es im Nerv höchst wahrscheinlich chemische Umsetzungen, indem der eifende Reiz die in ihr aufgespeicherte Energie in ähnlicher Weise ein Lauffeuer allmählich zum Abbrengen bringt.)

Die sogenannten physiologischen Wirkungen elektrischer Entladungen sind viel weniger an stationäre Ströme als an Änderungen der Stromstärke geknüpft. Die kräftigsten Wirkungen geben daher Induktionsapparate mit raschem Stromwechsel.

Auch beim Schlag der Leydener Flasche mögen es die raschen Umladungen sein, die ihn so empfindlich machen; dagegen die Erfahrungen mit Teslaströmen (voriger Paragraph). — Tötungen durch Blitzschlag, durch Starkströme.

V. Aus der Elektrotechnik.

Vorbemerkung. Die theoretischen Grundlagen der Elektrizitätslehre, welche in den vorausgegangenen Abschnitten I bis IV erörtert wurden, und welche ursprünglich zumeist auf rein empirischem Wege gefundenen Erscheinungen und Vorgänge auf diesem Gebiete in das exakte Gewand von Gesetzen und mathematischen Formeln kleiden, bilden die Grundlage für die mannigfaltigsten praktischen (technischen) Anwendungen, die sich die gesamte zivilisierte Menschheit mit geradezu beispielloser Raschheit binnen der jüngsten Jahrzehnte zu nutze gemacht hat und die man schon heute gar nicht mehr zu entbehren vermöchte. Telegraph und Telephon stehen für die öffentliche, Geschäfts- und Privatwelt dem Briefverkehr zur Seite; das elektrische Licht strahlt nicht mehr nur in großen und kleinen Städten, sondern auch in kleinsten Dörfern, in den Tiefen der Bergwerke und der Tunnel; der elektrischen Arbeitsübertragung bedienen sich das Kleingewerbe wie die Großbetriebe der Fabriken, wobei seit einigen Jahren die Übertragung ganz gewaltiger Leistungen mit hohem Wirkungsgrade auf Entfernungen

~~von~~ mehreren Hunderten von Kilometern nichts Seltenes mehr ist. Es sei noch ~~erinnert~~ an die wirtschaftliche und verkehrstechnische Wichtigkeit der elektrischen ~~Bahnen~~ für den Straßenbahn- und für den Lokalverkehr, wozu noch in aller-~~nächster~~ Zeit der Fernschnellverkehr kommen wird (bis Ende 1901 wurden bei ~~den~~ Versuchsfahrten bereits Fahrgeschwindigkeiten von 160 km per Stunde erreicht).

Für diese und unzählige andere Anwendungen vom grölsten bis zum kleinsten ~~listet~~ sich behufs geordneten Überblickes mehrere Einteilungsgründe dar:

Der noch bis vor kurzem einschneidendste Gegensatz war der zwischen ~~Schwachstromtechnik~~ (Telegraphie, Telephonie, Signalwesen . . .) und ~~Starkstromtechnik~~ (Dynamomaschinen, elektrische Bahnen, elektrisches Licht, Elektro-~~metallurgie~~ . . .). Doch werden heute auch schon die Ströme z. B. für Telephon-~~zentralen~~ von Dynamomaschinen oder Akkumulatoren geliefert.

Eine andere der Praxis des Technikers selbst entnommene Gliederung ist die:

1. **Stromquellen** (dymoelektrische Maschinen für Gleichstrom und Wechsel-~~strom~~; Akkumulatoren, gegen welche die Batteriesen, Thermoelemente u. dergl. schon fast ganz zurückgetreten sind). 2. **Elektromotoren** für Gleichstrom und Wechselstrom. 3. **Telegraphie und Telephonie**. 4. **Bogen- und Glühlampen**. 5. **Elektrochemische Betriebe** (Galvanoplastik, Metallurgie . . .). — Neben diesen Vorrichtungen für Erzeugung und Verbrauch der Ströme beanspruchen aber nicht minder große Aufmerksamkeit 6. die **elektrischen Leitungen** einschließlic der Sicherungen (gegen Kurzschluss, Blitzschlag . . .), 7. die **Messinstrumente**, 8. noch mancherlei Nebenapparate der Elektrotechnik (Widerstände, Umschalter, Klemmen u. s. w.).

Die im folgenden eingehaltene Reihenfolge ist durch die äußerliche Rücksicht ~~des~~ unmittelbaren Anschlusses an die theoretischen Abschnitte III und IV vor-
gezeichnet.

A) Anwendungen der elektromagnetischen und Induktionswirkungen.

I. Telegraphie, Telephonie, Signalwesen.

Geschichtliches. Von denjenigen Telegraphenapparaten, die heute noch praktisch verwendet werden, ist am frühesten erfunden Morses Schreibtelegraph (in der heutigen Form konstruiert 1840, im allgemeinen Gebrauch seit 1850). Neben ihm stehen heute allgemein in Verwendung HUGHES' Typendruckapparat (1855) für Hauptstationen und THOMSONS Syphonrekorder (1853) für überseeische Telegraphie.

Nachdem man längst eine „Fernschrift“ mittels Magneten geahnt hatte (so PORTA 1569), und LESAGE in Genf (1774) mittels mechanischer Wirkungen durch Leydener Flaschen, SÖMMERING (1808) mittels Wasserzersetzung sogar wirklich schon telegraphiert hatten, schlug AMPÈRE (1820) die Magnetenadel als Zeichenbringer vor und dieser Vorschlag wurde von SCHILLING in Cannstadt verwirklicht. Doch sind als die ersten, welche einen elektromagnetischen (Nadel-) Telegraphen (1833) praktisch zur Anwendung brachten, GAUSS und WEBER zu nennen. Sie verständigten sich zwischen dem magnetischen Observatorium und dem physikalischen Kabinett in Göttingen (etwa 3 km) durch die Bewegungen eines Magnets,

der zuerst durch einen Batteriestrom, dann durch Induktionsströme abgeleitet wurde. STEINHEIL in München verbesserte diesen Apparat wesentlich und fand insbesondere (1838) die „Erdleitung“; seine Leistungen enthalten eigentlich alles, was die Grundlage der modernen elektrischen Telegraphie bildet.

Die Konstruktion verschiedener Apparate, wie der Zeigertelegraphen (WHEATSTONE 1839), bei denen durch Verstellen eines Kontaktes an der eine Station ein Zeiger über einer kreisförmigen Platte zu dem zu telegraphierenden Buchstaben geführt wurde, der chemischen Telegraphen (BAIN 1842), die auch Zeichnungen (nach einer Art Rastermethode) zu übertragen gestatteten, ferner der Rufapparate und der Relais (WHEATSTONE 1839) bildeten das eine Problem der elektrischen Telegraphie; zwei andere Probleme aber wurden durch das Bestreben der immer weiteren Ausbreitung der telegraphischen Korrespondenz hervorgerufen: a) das Problem der überseeischen oder Kabeltelegraphie und b) das der Multiplextelegraphie.

a) Die Kabeltelegraphie verlangt bereitungen zur Herstellung hinreichend selbst auf dem Meeresgrunde. Nach erst 1866, das erste transatlantische fähig zu machen; es folgten alsbald Anfang 1901 gab es 1750 unterseeische

b) Der große Andrang zu den Streben, solche Linien dadurch zwischen den einzelnen Pausen zwischen den einzelnen die Zeichen einer zweiten (eventuell Durch geeignete Taster, Bewickelungen Morse- wie bei Hughes-Apparaten; insbesondere bei letzteren wird in der Tat von dieser Multiplexschaltung heute öfters Gebrauch gemacht. (Stimmgabeltelegraphie Bis Ende 1901 gelang es MERCADIER, 24 Depeschen gleichzeitig zwischen verschiedenen Aufgabs- und Empfangsorten auf derselben Linie zu befördern; Versuche auf der Telegraphenlinie Paris—Bordeaux.)

Neuestens ist die drahtlose Telegraphie zu einem Problem geworden, das MARCONI (1896) zu praktischer Verwendung gebracht hat.

Die Telephonie erregte sogleich bei BELLS Erfindung (1877), der ein Telefon von REIS (1860) vorausgegangen war, allgemeine Aufmerksamkeit, fand aber wirkliche praktische Verwendung erst in Verbindung mit dem von HROST (1878) erfundenen Mikrophon. Gegenwärtig vermitteln Telephonzentralen den schon sehr beträchtlichen telephonischen Verkehr innerhalb der Städte und auch die interurbane Telephonie ist zu bedeutendem Ansehen gekommen. (Längste Linie Chicago—New York 1520 km.)

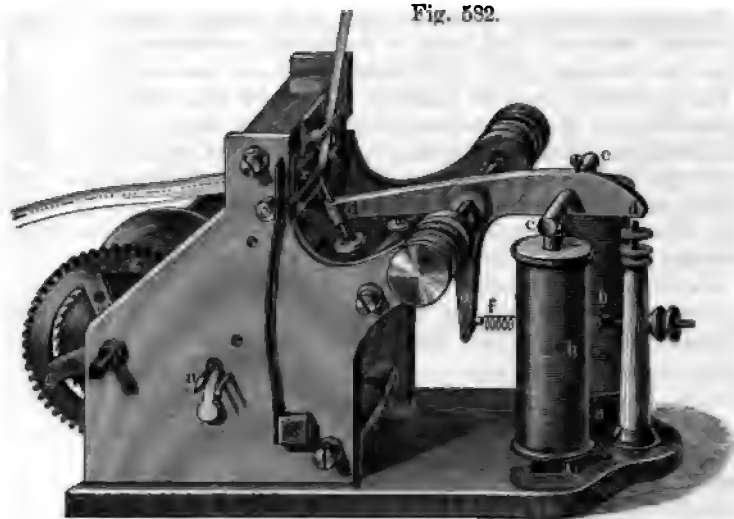
Das Signalwesen hat sich unter Zuhilfenahme verschiedener Apparate: Läutwerke, Verschluss- und Sicherungsapparate, Kontrollapparate, Telegraphen-Telephone ganz besonders im Eisenbahnbetriebe entwickelt.

§ 160. Einige Arten von Telegraphen.

1. Morses Schreibtelegraph hat in der Aufgabestation *A* als Zeichengeber einen Taster, in der Empfangsstation *E* als Zeichenbringer (Zeichenempfänger, Fig. 582 — die Doppelschaltung zeigt schematisch Fig. 583) einen Schreibapparat, bestehend aus einem

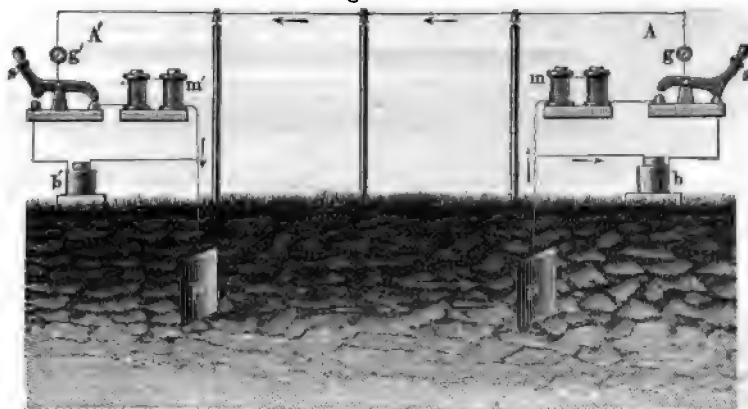
Elektromagnet und einem Hebel, der an dem einen Ende einen Anker, dem anderen einen Schreibstift trägt, an dem ein Papierstreifen zwischen zwei Walzen mittels eines Räderwerkes vorüber gezogen wird.

Fig. 582.



Bei älteren Apparaten drückt der Stift Striche und Punkte in das Papier, bei neueren schreibt er sie mit Farbe (also deutlicher sichtbar) auf. — Durch eine elastische Feder wird der Hebel in die Ruhelage gebracht, sobald der Elektromagnet stromlos ist.

Fig. 583.

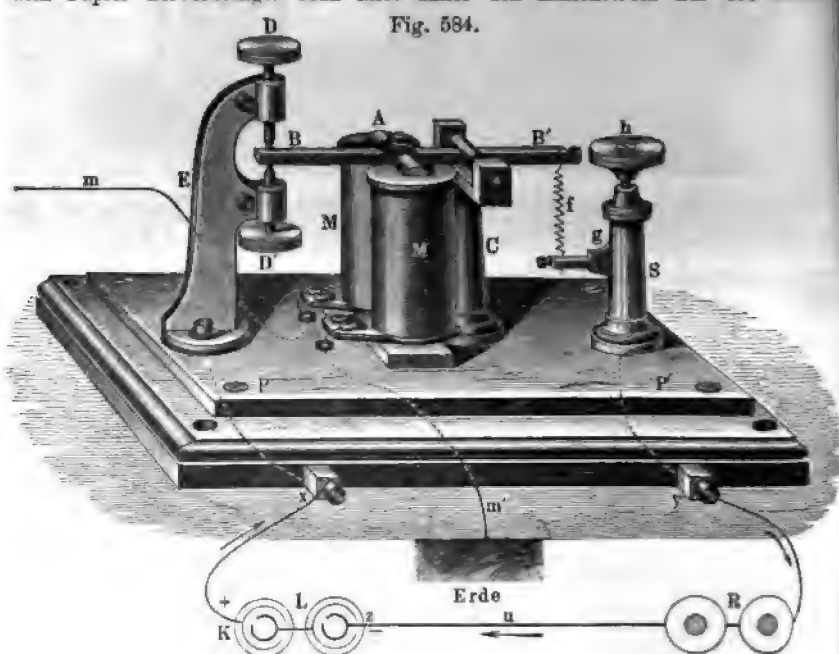


Erdleitung: Nach dem ursprünglichen Gedanken, auf dem alle Telegraphie ruht, hätte der Strom von der Linienbatterie zum Zeichengeber, von da durch die Linienleitung zum Zeichenbringer und von diesem durch eine Rückleitung zur Linienbatterie zurückgehen müssen. Diese Rückleitung hat STEINHEIL

erspart, indem er sowohl von der Batterie wie vom Zeichenbringer Leitungen in die Erde eingesenkten Metallplatten (Erdplatten) geben ließ. Man stellte sich zuerst das Erdprisma zwischen diesen Platten als Ersatz des Rückleitungsdrahtes vor. Doch entspricht diese Vorstellung gewiß nicht dem wirklichen Vorgange: schon der Gedanke, daß viele Tausende solcher Platten über den Kontinent verbreitet sind, läßt es unglaublich erscheinen, daß jeder Strom den Weg zur richtigen Platte zurückfindet. Vielmehr hat zunächst die von dem einen Pol der Batterie zur Erde gehenden Leitung nur den Zweck, das Potential an diesem Pole auf Null herabzusetzen, wodurch dann, weil die Potentialdifferenz konstant bleibt, das Potential des anderen Poles auf das Doppelte steigt. Von hier aus findet dann längs der Linienleitung ein Potentialabfall bis zum Zeichenbringer und der mit ihm verbundenen Erdplatte statt, d. h. es fließt auch jetzt der Strom von der Batterie durch den Zeichengeber zum Zeichenbringer.

Relais: Bei langen Leitungen würde die Stärke des aus der Linienbatterie kommenden Stromes nicht ausreichen, um den Elektromagnet des Zeichenbringers kräftig genug zu erregen, daß der Stift deutliche Zeichen auf dem Papier hervorbringt. Man läßt daher den Linienstrom nur den leichten

Fig. 584.



Kontakthebel eines Übertragers (Relais, Fig. 584) in Bewegung setzen, der dann den Strom einer Lokalbatterie schließt. Erst dieser Lokalstrom setzt den Zeichenbringer in Tätigkeit.

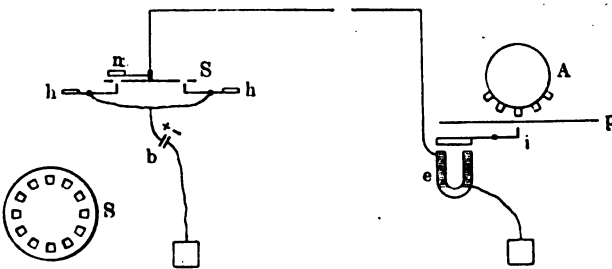
Über die Blitzschutzvorrichtungen, die einen wesentlichen Bestandteil jeder Telegraphenanlage bilden, vergl. § 171.

2. Hughes' Typendrucktelegraph. Fig. 585 zeigt für zwei Stationen die Hauptbestandteile und ihre Verbindung. Am Umfange des „Typenrades“ A sind die Buchstaben des Alphabetes und die Ziffern der Reihe nach angeordnet; die

Lehrende Scheibe *S* enthält ebenso viele Schlitzte als das Typenrad Zähne und Klaviatur des Apparates ebenso viele Tasten *h*, die mit den Buchstaben, bezw. *α* bezeichnet sind. Wird in der Station I die Taste *h* (etwa für den Buchstaben *a*) niedergedrückt, so tritt das metallische Ende des Tasterhebels durch den Schlitz der Scheibe *S*. Der rasch um die vertikale Achse rotierende Kontaktschlitten *n* schließt

Fig. 585.

Vorübergehend den Stromkreis der Spule des polarisierten Elektromagneten eingeschaltet. Der Anker wird durch Federlosungen und drückt Papierstreifen *p* an den nach



gekehrten Zahn des Typenrades: der dort befindliche Buchstabe wird auf Papierstreifen abgedruckt. Da Kontaktschlitten und Typenrad in stets übereinstimmender (isochroner und synchroner) Rotation erhalten werden (durch ein Laufwerk mit geeigneten Brems- und Korrektionsvorrichtungen — in Figur weggelassen), so befindet sich im Augenblick des Kontaktes (für den Buchstaben *a*) das Typenrad *A* in der Lage, daß gerade der Buchstabe *a* dem Papierstreifen gegenübersteht und auf ihn abgedruckt wird.

3. Casellis Pantelegraph löste die Aufgabe, nicht nur einzelne Zeichen oder Lettern, sondern beliebige Zeichnungen, Unterschriften u. dergl. in genauer Weise zu telegraphieren. Das Prinzip ist das zweier genau isochron schwingender massiver Pendel; das an der Aufgabestation schwingt über der auf Zinnfolie aufgetragenen Schrift aus nichtleitendem Stoffe, dieser unterbricht einen Strom, der vom Zinn in das berührende Pendel übergeht. In der Empfangsstation geht aus dem Pendel der Strom durch ein mit Blutlaugensalz getränktes Papier und bringt hier Zersetzung und Blaufärbung hervor, so daß dem Papier eine Folge blauer Punkte entsprechend den Unterbrechungen durch die Schrift in der Empfangsstation entsteht. — Dieser höchst geistreiche Gedanke war ausgeführt worden, aber nicht in die Praxis eingedrungen. — Eine um so bessere Zukunft verspricht

4. MARCONI'S sogenannte drahtlose Telegraphie (dieser Name ist nur so zu verstehen, daß es keiner Leitungsdrähte zwischen Auf- und Empfangsstation bedarf, wohl aber werden als Absender best Drähte bis zu 50 m Länge um ihrer Kapazität willen verwendet). Das Prinzip ist das der HERTZ'schen Wellen. Solche werden in der Aufgabestation durch ein Induktorium hervorgebracht und zwar in Unterbrechungen mittels eines Morse-Tasters. Diese Wellen erregen in der Empfangsstation einen Morseschen Apparat, indem sie das Relais und mit auch die Lokalbatterie den Punkten und Strichen entsprechend längere oder kürzere Zeit mittels eines „Kohärrers“ (Fritters, von denen = oberflächlich zusammenschweißen) in Tätigkeit setzen.

Dieser Kohärer besteht in einer Glasröhre, die mit feinem Metallpulver (auch Höfler, Physik.

Schrauben u. dergl.) gefüllt ist. Dieses hindert den Durchgang des Stromes infolge zu großen Leitungswiderstandes an den Stellen loser Berührung; aber der Fritter von elektrischen Wellen getroffen wird, gestattet er den Durchgang des Stromes der Lokalbatterie, indem durch die Wellen die Metallteile engeren Zusammenhang gesetzt werden. Durch eine Klopfvorrichtung wird der Fritter jedesmal wieder aufgerüttelt und zum Empfang neuer Wellen bereit. Ende 1901 soll Marconi einfache Zeichen schon über den Atlantischen Ozean telegraphiert haben.

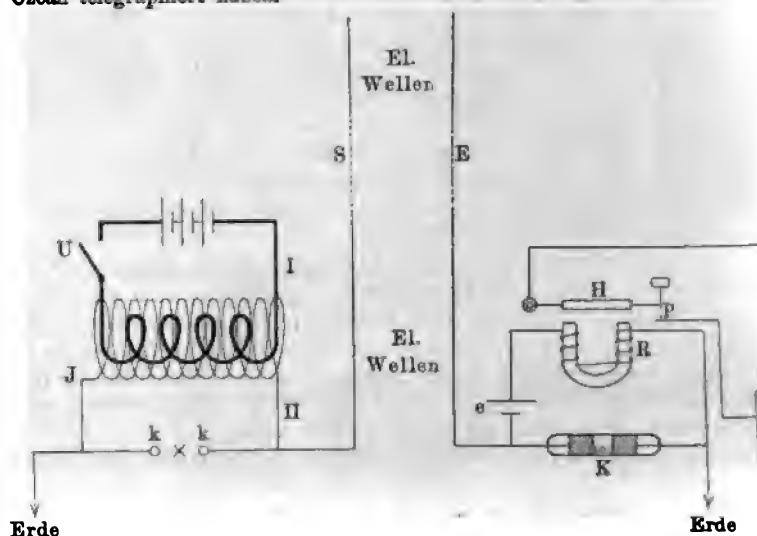


Fig. 586. Senderapparat

für sogenannte drahtlose Telegraphie.

Fig. 587. Empfängerapparat

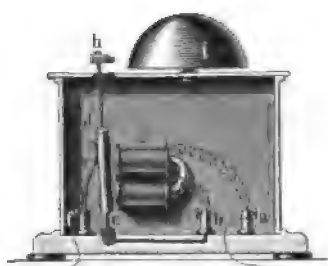
I Primärschleife, *II* Sekundärschleife, *U* Unterbrecherschlüssel, *kk* Funkenstrecke des Induktionsdrahts. — *S* Senderdraht.

R, H Relais, *M* Morse-Schreibapparat, (*Klopfer* fortgelassen), *e* Lokalbatterie. — *E* Empfängerdraht.

Im Gegensatz zu dieser bisher höchsten Leistung der Telegraphie eine der einfachsten dar

5. Die elektrischen Läutwerke. In einer elektrischen einfachsten Form (Fig. 588) nimmt der Strom den Weg *abcd* dem er zwischen *a* und *b* um den Elektromagnet *g* führt, wodu

Fig. 588.



Anker *cd* angezogen und der Kontakt *e* gelöst wird. Indem hiermit der Strom bei *e* unterbrochen und also *g* netisch ist, wird der bei *c* federnd wieder an den Kontakt bei *e* gebracht. Strom fließt wieder u. s. f. — (zur Theorie der „Selbstunterbrechung“ in § 173.) — Der mit dem Anker bundene Hammer *h* schlägt in Folge an die Glocke *i*.

Um ein solches Lärntwerk zu Signalzwecken zu verwenden, wird noch ein geeigneter Taster in die Leitung eingeschaltet; für die Hausklingel z. B. ein Drücker, für ein Stationsdeckungssignal ein mit der Stationsscheibe (Semaphor) verbundener, durch Drehung der Scheibe zu schließender Kontakt u. dergl.

Für größere Signalanlagen, z. B. Hotels, Bureaux u. s. w., ist noch ein Nummerntableau (Indikator) erforderlich, das angibt, von welchem Zimmer aus das Zeichen mit der Klingel gegeben wurde.

§ 161. Telephon und Mikrophon.

GRAHAM BELL hat (1877) die Aufgabe des Fernsprechens durch sein Telephon gelöst, bei welchem Geber (Sprechtelephon, I) und Empfänger (Hörtelephon, II) völlig gleich gebaut waren. Über das eine Ende, z. B. N, eines nicht bis zur Sättigung magnetisierten Stahlstabes NS (Fig. 589 a schematisch, Fig. 589 b nach der wirklichen Einrichtung) ist eine flache Spule mit vielen Windungen dünnen Drahtes

Fig. 589 a.

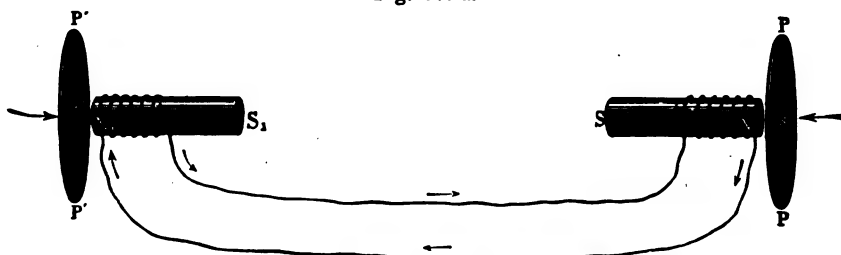
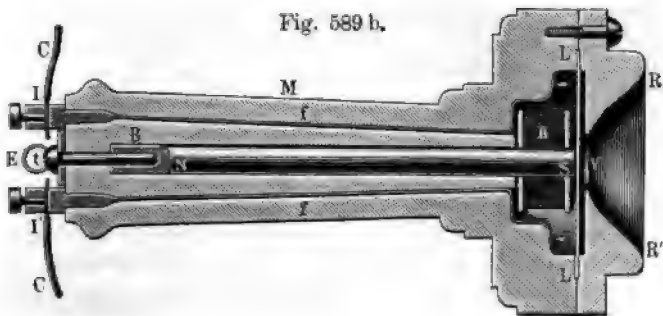


Fig. 589 b.



geschoben. Diesem Ende gegenüber liegt in kleinem Abstände ein kreisförmiges dünnes Eisenblech („Membran“), vor das ein Mundstück geschraubt ist. Die Enden des Spulendrahtes führen zu den am hinteren Ende der Kapsel aufgeschraubten Klemmen. Von diesen führt eine Leitung zu den Klemmen des Hörtelephones, und zwar entweder eine isolierte Hin- und Rückleitung, oder letztere ersetzt durch eine „Erdleitung“ wie beim Telegraphen (doch ist diese hier nicht immer anwendbar, weil schweifende Erdströme („vagabundierende“

Ströme aus Starkstromanlagen, besonders elektrischen Bahnen) im Hörtelephon störende Geräusche hervorrufen können).

Sobald gegen die Membran von I gesprochen wird, gerät sie in Schwingungen, und ihr Abstand von dem Pole N wird hierdurch abwechselnd kleiner, bzw. gröfser als ihr mittlerer Abstand in der Ruhelage. In dieser Ruhelage war sie durch Verteilung seitens N hin zu einer bestimmten Stärke magnetisiert gewesen und hatte auf N ebenfalls in bestimmter Stärke zurückgewirkt. Dem Annähern der Membran entspricht daher ein Verstärken, dem Wegbewegen der Membran eine Schwächung des Poles N. Diese Änderungen von N erzeugen magnetoelektrische Ströme in der Spule nächst N und in der ganzen Leitung von hier zum Hörtelephon. In diesem wird dann durch elektromagnetische Wirkungen der Spule auf den Stahlkern die magnetische Anziehung des Poles nächst der Membran stärker und schwächer und daher diese Membran des Hörtelephones in Schwingungen versetzt.

Wäre also z. B. an die Membran des Gebers ein einfacher Ton a' von 435 Schwingungen per sec hineingekommen, so würde auch die Membran des Empfängers (annähernd) einfache Sinusschwingungen von der gleichen Schwingungszahl ausführen, diese an die angrenzende Luft übertragen und somit von den Empfänger ebenfalls ein einfacher Ton a' herauserklingen. — Ähnlich bei beliebigen Summen von einfachen Tönen. — In Wirklichkeit war die Wiedergabe der Klangfarbe in Bells Telephon eine mangelhafte, indem die Schwingungsform der Geber-Membran sich doch nicht nach allen Partialtönen gleichmäfsig auf die Empfänger-Membran übertrug. Noch mangelhafter als die Klänge, speziell Vokale, wurden manche Konsonanten wiedergegeben.

Doch hatte Bells Telephon unbeschadet seiner praktischen Mängel höchstes theoretisches Interesse. Wie man nämlich sieht, war an dem Entstehen der Ströme in Bells Telephon keinerlei Batterie beteiligt, sondern die minimale Veränderung des magnetischen Zustandes im Sprechtelegraphen hatte für die Erregung der Ströme genügt. Eben dieser Umstand hatte beim Bekanntwerden der Erfindung das höchste Staunen erregt (WILLIAM THOMSON begrüfste sie mit dem Ausrufe: „Wunder über Wunder“). — Immerhin wäre aber mit jener bewundernswert einfachen Vorrichtung ein direktes Fernsprechen z. B. zwischen Berlin und Paris, Triest und Hamburg noch nicht möglich gewesen.

Bei den gegenwärtig gebrauchten Telephonverbindungen liefern Batterien (oder Akkumulatoren) den Strom, der im Sprechapparate periodische Änderungen seiner Stärke nach nachfolgendem Prinzip erhält: Der Strom geht durch ein Kohlenstäbchen, das lose in Fassungen liegt, die mit einem elastischen Resonanzbrettchen verbunden sind (Mikrophon). Wird gegen diese gesprochen (Ticken einer Uhr, Fig. 590, „Trampeln“ einer Fliege), so genügt die mechanische Erschütterung, um den Kontakt des Kohlenstäbchens zu einem mehr oder minder innigen, daher den Widerstand an den Enden des Stäbchens kleiner oder gröfser und somit die Stromstärke im ganzen Stromkreise gröfser oder kleiner zu machen. —

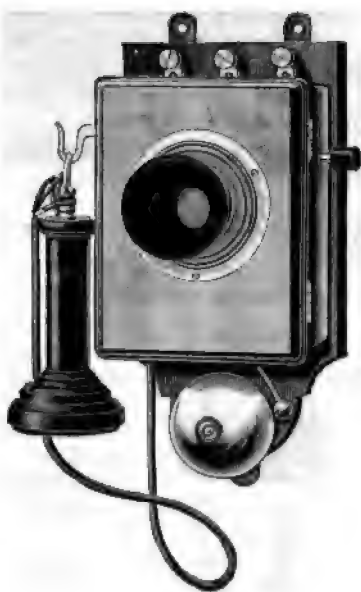
Die Hörtelephon bringen dann diese Änderungen der Stromstärke die-
 selben Wirkungen hervor wie beim Bellschen Telephon.

Fig. 590.



Die Durchführung dieses Prinzipes erfährt eine wesentliche Verbesserung, indem die Leitung der Batterie und des Mikrophons mit einer primären Spule verbunden ist, die in einer sekundären Spule steckt; letztere ist in die Leitung eingehängt, die zum Hörtelephon führt. Indem nun wie beim Schlittenapparate die primäre Spule einen verhältnismäßig starken Strom leitet, der in der Sekundärspule in einen verhältnismäßig hochgespannten transformiert wird, vermag dieser in den langen dünnen Leitungen noch kräftig zu wirken (insbesondere auch die nicht mehr verschwindende Selbstkapazität dieser Leitungen durch die Selbstinduktion der Sekundärspule zu kompensieren). Aus diesen Umständen erklärt sich die Leistungsfähigkeit der Bellschen Vorrichtung, denn auch die Spule um N_1 (Fig. 589a, S. 531) stellt eine solche Sekundärspule dar. — Die gegenwärtig gebräuchliche Zusammenstellung von Sprech- und Hörapparat zeigt Fig. 591.

Fig. 591.



Der Telephonograph von Poulson (1900) verbindet die Leistung der in seinem Apparat angedeuteten beiden Apparate insofern, als anstatt der ruhenden Eisenplatte des Sprechtelephones ein Stahlband an dem Magnetpol vorbeizieht und so hintereinander Magnetisierungen wechselnder Stärke annimmt. Wird es irgend wann wieder an dem Pole eines Hörtelephones vorbeigezogen, so erregen in diesem die wechselnden Magnetisierungen wieder akustische Schwingungen. — Singende und leuchtende Bogenlampe (Simon und Duddell, 1900).

Bemerkung: Bells Telephon in seiner ursprünglichen Form ist auch heute noch interessant, als es sozusagen in kleinstem Mafsstabe ein Vorbild der elek-

trischen Kraftübertragung darbietet. Das Sprechtelefon entspricht dem Generator, das Hörtelefon dem Motor.

II. Generatoren und Motoren.

Vorbemerkung. Der Verband Deutscher Elektrotechniker hat am 29. Juni 1901 folgende Definitionen und Bezeichnungen angenommen:

Generator oder Dynamo ist jede rotierende Maschine, die mechanische in elektrische Leistung verwandelt.

Motor ist jede rotierende Maschine, die elektrische in mechanische Leistung verwandelt.

Motorgenerator ist eine Doppelmaschine, bestehend in der direkten mechanischen Kuppelung eines Motors mit einem Generator.

Umformer ist eine Maschine, in welcher die Umformung des Stromes in einem gemeinsamen Anker

Wird das Wort e
gebraucht, so ist darunter,
Gegenstände zu verstehen.

Anker ist bei elektrischen
wirkungen eines magnetischen

Transformator ist ein Apparat
Umwandlung elektrischer Leistung

Unter **Spannung bei D**
(Spannung zwischen je zwei der an

Unter **Übersetzung bei Transfor**
bei Leerlauf zu verstehen.

Unter **Frequenz** ist die Anzahl der vollen Perioden in der Sekunde zu verstehen.

chine oder Maschine schlechthin
zusammenhang, einer der vorgenannten

derjenige Teil, in welchem durch Elektromotorische Kräfte erzeugt werden.
Wechselströme ohne bewegte Teile zu
ische Leistung.

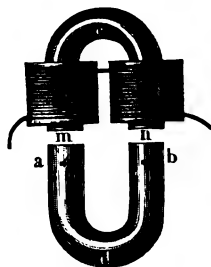
ist die verkettete effektive Spannung
einstellungen) zu verstehen.

ist das Verhältnis der Spannungen

§ 162. Generatoren für Gleichstrom (Dynamomaschinen).

Die ältesten Maschinen, in denen durch Rotation von Stromspulen in Magnetfeldern magnetoelektrische Ströme erzeugt wurden, entsprachen der in Fig. 592

Fig. 592.



dargestellten Anordnung. In den Stromspulen befanden sich Eisenkerne, und indem sie samt den Spulen vor den Polen eines permanenten Stahlmagneten vorbeigeführt wurden, wurden die Eisenkerne magnetisch und erregten bei jedem Wechsel ihrer Magnetisierung in den sie umgebenden Drahtwindungen magnetoelektrische Ströme. Diese waren zunächst Wechselströme gewesen; da man aber mit solchen damals und noch auf lange Zeit hinaus nichts anzufangen wufte, wurde durch eigentümlich angeordnete Kontaktvorrichtungen (die Vorbilder der „Kollektoren“ und „Bürsten“ an den gegenwärtigen Dynamomaschinen) der Wechselstrom in Gleichstrom verwandelt.

Der entscheidende Schritt zur praktischen Verwertung des dargelegten Prinzips bestand in der Erfindung des Grammeschen Ringes 1871 (GRAMME war damals Arbeiter in einer elektrotechnischen Fabrik; schon 1864 hatte PACINOTTI den wesentlich gleichen Gedanken veröffentlicht, aber nicht fehlerlos praktisch durchgeführt). — Wir können uns den Grammeschen Ring hervorgegangen denken aus der in Fig. 592 dargestellten Verbindung von Eisenkernen

pulen, wenn die Eisenkerne nicht mit parallelen Achsen nebeneinander, sondern in der Weise der Fig. 596 zu einem in sich geschlossenen Ring ineinander angeordnet werden. — Die konstruktive Schwierigkeit, ja Möglichkeit, den magnetischen Eisenring innerhalb eines gegen außen hin geschlossenen und also von außen her unzugänglichen Spulenkranzes in bleibender Lage zu erhalten, umging GRAMME durch folgende, in Fig. 594 schematisch dargestellte Anordnung:

Fig. 593.

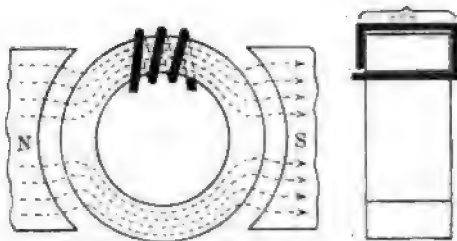


in Eisenring samt den ihn umgebenden Spulen (**Ringanker**, auch **Anker**) rotiert zwischen den Polschuhen *NS* eines kräftigen permanenten Magnetes (Fig. 593 nach einem Schulmodell) oder Elektromagnetes, den wir uns vorläufig — im Gegensatz zu dem „Prinzip“, siehe unten — durch einen von außen zugeführten Strom

erregt denken. Bei Drehung wird an immer denselben Stellen des Ringes Induktion durch Umpolung vorübergehend hervorgerufen, und es gleiten die Spulen ähnlich hin- und her, wie es in Fig. 594 dargestellt ist.

Fig. 594.

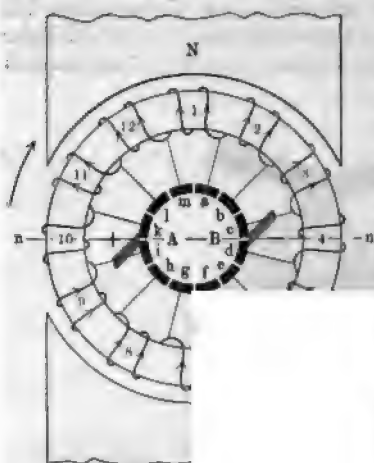
aktiver Teil



Die günstigste Durchführung dieses Prinzipes auf Grund der Kraftlinien des Magnetfeldes *NS* gehen infolge der großen Permeabilität

(magnetischen Leitungsfähigkeit) des Ringankers fast ausschließlich das Eisen des Ringes (vergl. die punktierten Linien in Fig. 594) und nur

Fig. 595.



Ringes) liegen
(der Zeicheneb-
infolge dessen
entsteht in dem

von Induktionsströmen nur die windungstücke übrig, welche auf der äußeren Mantelfläche des Ankers liegen; bei diesen ist aber nur diejenige Komponente wirksam, die normal steht zur Richtung der Kraftlinien. Nach dem Induktionsgesetz in §§ 150, 151 folgt nun, daß in den Spulen 1, 2, 3 der induzierten Ströme bei der Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung auf der äußeren Ringfläche vom Beschauer weg, also nach rückwärts fließen, während in den Spulen 5, 6, 7, 8, 9 an der äußeren Ringfläche die Ströme gegen den Beschauer fließen. Die Ströme der oberen und unteren Ringhälfte vereinigen sich bei den Lamellen *cd* und *ki*; legt man also an diese Stellen zwei feste Bürsten (aus Kupferblech oder Kupferdrahtgaze, auch aus Kohle), so kann durch den äußeren Stromkreis einen konstanten gleichgerichteten Strom geleitet werden, der entspricht dabei die Bürste bei *k, i* dem $+$ -Pole, die Bürste bei *c, a* dem $-$ -Pole der Maschine.

Gegenüber den ältesten Maschinen (GRAMME, PACINOTTI, SIEMENS, LADD u. s. w.) mit permanenten Stahlmagneten war die fruchtbarste Maschine die folgende:

WERNER VON SIEMENS hatte (schon 1867) vorgeschlagen, anstatt permanenter Stahlmagnete Elektromagnete zu setzen und diese durch den von den Bürsten abgeleiteten Strom selbst zu erregen. Es besitzen nämlich die Eisenkerne dieser Elektromagnete wie überhaupt fast jedes Eisenstück, wenigstens eine geringe Magnetisierung; namentlich bleibt nach einer einmal vorgenommenen Erregung (durch einige Elemente oder Akkumulatoren) ein schwacher

schwindend kleiner Bruchteil der Kraftlinien durchsetzt den Luftraum im Innern des Ringankers (Kraftlinien-Streuung).

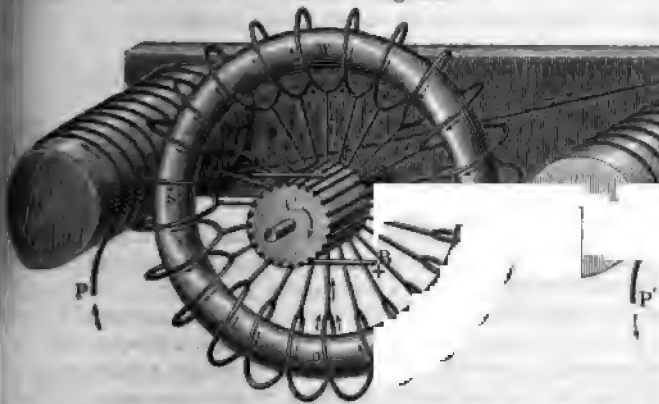
Der Ring ist nun mit einer Anzahl von Spulen isolierten Drahtes bewickelt, die eine fortlaufende Windung bilden (Fig. 595). Die Vereinigungspunkte der einzelnen Spulen sind mit den „Lamellen“ *a, b, c, d, e, f, g, h, i, k, l, m, n* verbunden (deren Zahl in großen Maschinen 300 bis 400 ist). Die Lamellen sind gegeneinander isoliert. Eine Welle fest aufgesetzt und dienen zur Stromableitung in den äußeren Stromkreis (vergl. Fig. 595, 593 und 596).

Da durch das Innere des Ringankers keine Kraftlinien hindurchtreten, auch in den innen liegenden Teilen der Maschine eine nur sehr geringe EMK induziert wird, in den Stirnflächen des Ringes (z. B. Fig. 593 sichtbaren Teilen des Grammes) zu derjenigen Mittelebene des Magneten, die auf der Drehungsachse normal steht, gestücke gar keine Kraftlinien, d. h. keine EMK .

Demnach bleiben für die Erzeugung des Stromes nur die windungstücke übrig, welche auf der äußeren Mantelfläche des Ankers liegen; bei diesen ist aber nur diejenige Komponente wirksam, die normal steht zur Richtung der Kraftlinien. Nach dem Induktionsgesetz in §§ 150, 151 folgt nun, daß in den Spulen 1, 2, 3 der induzierten Ströme bei der Drehung im Sinne der Uhrzeigerbewegung auf der äußeren Ringfläche vom Beschauer weg, also nach rückwärts fließen, während in den Spulen 5, 6, 7, 8, 9 an der äußeren Ringfläche die Ströme gegen den Beschauer fließen. Die Ströme der oberen und unteren Ringhälfte vereinigen sich bei den Lamellen *cd* und *ki*; legt man also an diese Stellen zwei feste Bürsten (aus Kupferblech oder Kupferdrahtgaze, auch aus Kohle), so kann durch den äußeren Stromkreis einen konstanten gleichgerichteten Strom geleitet werden, der entspricht dabei die Bürste bei *k, i* dem $+$ -Pole, die Bürste bei *c, a* dem $-$ -Pole der Maschine.

unter Magnetismus zurück. Wird nun in diesem schwachen Magnetfeld eine GRAMMESCHER Ring in Drehung versetzt, so entstehen vorerst nur sehr schwache Induktionsströme; werden diese aber im richtigen Sinne durch die Windungen des Elektromagneten (des „Feldmagneten“) verwendet (Fig. 596), so wird die Polstärke des letzteren wachsen, da-

Fig. 596.



rch werden aber auch die induzierten Ströme stärker, infolgedessen s Magnetfeld weiter gekräftigt u. s. f., bis das Eisen der Feldmagnete „gesättigt“ ist; die Maschine ist eine selbsterregende geworden, sie „leht an“. — Erst dieser geniale Gedanke, der unter dem Namen **SIEMENS' dynamo-elektrisches Prinzip** bekannt ist, machte s bequeme und ökonomische Erzeugung elektrischer Ströme von fast unbegrenzter Intensität und Spannung praktisch durchführbar.

Von da an trat die Elektrotechnik ihren beispiellos schnellen und imponierenden Siegeszug an; denn jetzt war die Aufgabe einer direkten Umwandlung der mechanischen Leistung in elektrische Leistung gelöst; bis jetzt hat man dabei schon einen elektrischen Wirkungsgrad bis zu 95 Proz. der zugeführten mechanischen Energie erzielt.

Diese „dynamo-elektrischen Maschinen“ (kurz „Dynamomaschinen“ genannt) führen nach der Schaltung ihrer Feldmagnetspulen die Bezeichnungen:

a) **Hauptstrommaschine** (Reihenmaschine, Serienmaschine), Fig. 597; Ankerwindungen, Magnetwindungen und äußerer Stromkreis sind hintereinander geschaltet und von demselben Strom durchflossen (Hauptstrom).

b) **Nebenschlußmaschine** (Shunt-

Fig. 597.

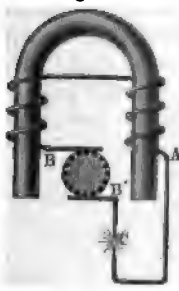


Fig. 598.

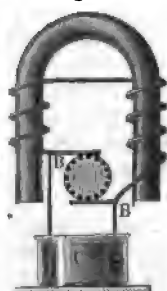
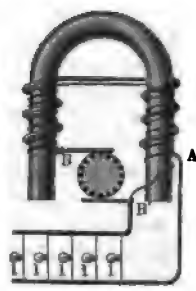


Fig. 599.



maschine) Fig. 598; der aus dem Anker kommende Strom spaltet sich bei den Bürsten BB' , der grössere Teil geht durch den äusseren Stromleiter (z. B. durch das galvanische Bad C), der kleinere in die Magnetwindungen. Diese Magnetwindungen „liegen im Nebenschluss“ zum Anker; sie und der äussere Stromkreis sind parallel geschaltet.

c) Compoundmaschine (Verbundmaschine) Fig. 599; die Maschine hat eine Hauptstromwicklung und eine Nebenschlusswicklung; letztere kann parallel zum Anker oder aber parallel zum äusseren Stromkreise geschaltet sein; in beiden Fällen unterstützen sich die beiden Wicklungen.

Über die charakteristischen Eigenschaften dieser drei Maschinengattungen

LA 207. vergl. LA 207.

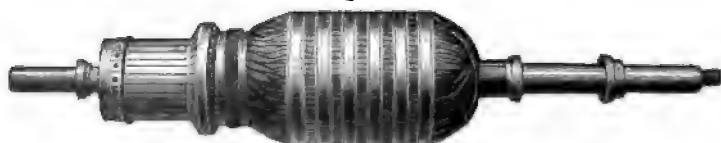
Von fundamentaler Wichtigkeit ist für jede Dynamomaschine die Beziehung zwischen den magnetischen Grössen, den Konstruktionsdaten und der erreichbaren EMK , welche in der „Grundgleichung der Dynamomaschinen“ niedergelegt ist (vergl. LA 205).

LA 205. vergl. LA 205).

Wenn die Wicklungstücke an der Innenseite des Ringes infolge der sogenannten „Streuung“ der Kraftlinien wirksam werden, rufen sie Induktionsströme der entgegengesetzten Richtung hervor, welche also schwächend wirken. Man kann diese Schwächung dadurch fast ganz vermeiden, dass man den „magnetischen Widerstand“ des Ringankers möglichst klein macht. Der Eisenkern des Ringes ist nicht aus einem Stücke hergestellt, sondern besteht aus einer grossen Anzahl ringförmiger dünner Eisenblechscheiben [jede etwa 0,3 mm dick], welche zu einem Hohlzylinder aufgebaut sind; dieses Weicheisenblech, sogenanntes Ankerblech mit sehr grosser Permeabilität und geringen Hysteresisverlusten.)

HEFNER v. ALTENECK (1872 Ingenieur bei Siemens & Halske) setzte an Stelle des Ringankers den „Trommelanker“, damit ein möglichst grosser Teil des aufgewickelten Drahtes die Kraftlinien des Magnetfeldes rechtwinklig schneidet und Ströme liefert (wogegen die Radialstücke der Spulen nicht stromerzeugend sind, sondern nur den inneren Widerstand der Maschine vergrössern). — Fig. 600.

Fig. 600.



Der Trommelanker ist zusammengesetzt aus einer grossen Anzahl kreisförmiger dünner Eisenblechscheiben, welche durch dünne Papierzwischenlagen oder Schellackanstrich voneinander magnetisch und elektrisch isoliert sind (zur Vermeidung von Wirbelströmen [Foucaultströmen]); auf der Mantelfläche des „Trommelankers“ liegen die Drähte parallel zur Achse; sie sind auf den Stufenflächen in geeigneter Weise zu einer fortlaufenden Windung miteinander verbunden und überdies wieder zu einem „Kollektor“ geführt, auf welchem die Bürsten schleifen, wie beim GRAMMESCHEN RINGE.

Bei den älteren Maschinen wurden die Drahtwindungen sowohl beim Ringanker als auch beim Trommelanker einfach auf die Mantelfläche gelegt und durch den „Mitnehmer“ mit dem Anker verbunden. Dadurch wurde ein ziemlich grosser Luftzwischenraum zwischen Anker und Polschuhen geschaffen, welcher einen grossen magnetischen Widerstand hervorrief und für die Erregung eine grosse Zahl

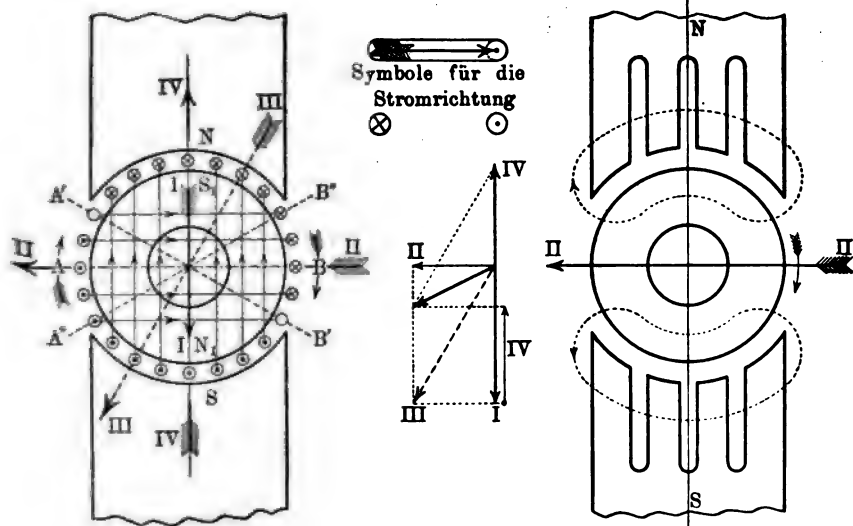
Wickelpfadenwindungen erforderlich machte. Bei den modernen Konstruktionen des Ring- und Trommelankers werden daher die Drähte zumeist in Nuten gelegt, welche in der Mantelfläche des Ankers parallel zu dessen Achse dadurch hergestellt werden, daß jede Blechscheibe auf der „Nutenstanzmaschine“ mit den entsprechenden Werkzeugen versehen wird; werden dann diese Bleche aufeinander geschichtet und zusammengepresst, so erhält der ganze Anker die Form eines Cylinders mit Nuten. Der Luftzwischenraum zwischen dem „Nutenanker“ und den Polen ist jetzt auf ein Minimum herabgedrückt (etwa 2 mm); gleichzeitig können die „Mitnehmer“ entfallen, da die stehenbleibenden Zähne der Scheiben deren Funktion übernehmen.

Ankerreaktion und Bürstenverschiebung. — In Fig. 595 war angenommen, daß die Bürsten in der sogenannten „neutralen Zone“ aufgelegt werden, nämlich dort, wo keine Magnetisierung durch Verteilung auftritt; diese Stellen liegen bei ruhendem Ring- oder Trommelanker 90° vor den Polen der erregenden Magnete (ein zwei-, nicht mehrpoliges Magnetfeld vorausgesetzt). Wenn nun durch den Anker Strom fließt, so wird durch diesen Strom der Anker selbst zu einem Magneten, nur ist die Richtung dieses zusätzlichen Magnetfeldes II um 90° gegen das Hauptmagnetfeld I verschoben (Fig. 601); diese beiden Felder setzen sich zu dem resultierenden Magnetfelde III zusammen (Fig. 602); es wird also das

Fig. 601.

Fig. 602.

Fig. 603.

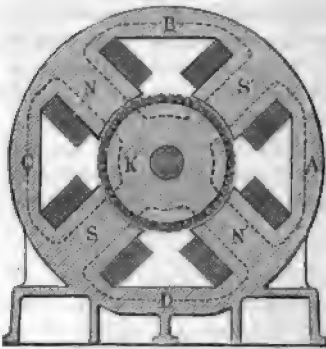


Magnetfeld durch den stromführenden Anker „verzerrt“; dadurch wird aber auch die neutrale Zone von AB nach $A'B'$ verschoben (Fig. 601), d. h. also, es müssen bei der Dynamomaschine die Bürsten in der Drehrichtung des Ankers verschoben werden, wenn eine Funkenbildung unter den Bürsten vermieden werden soll, und zwar um so mehr, je stärker der Strom im Anker ist, je mehr also die Dynamomaschine belastet wird. — Die Windungen ($A'B''$) ($A''B'$) (Fig. 601) bewirken also eine „Quermagnetisierung“ des Ankers. Die Windungen ($A''A'$) ($B''B'$) dagegen magnetisieren den Anker in der Richtung IV, d. h. sie schwächen das Hauptfeld I; man nennt daher diese Windungen „Gegenwindungen“.

Man sieht auch, daß die Wirkung der Dynamomaschine um so mehr beeinträchtigt wird, je größer die Verschiebung der neutralen Zone ist; das Bestreben der Konstrukteure geht daher dahin, diese „Ankerreaktion“ möglichst herabzudrücken, was auch schon in der vollkommensten Weise gelungen ist. Ein vielfach angewendetes Mittel besteht darin, die Polschuhe mit mehreren tiefen Einschnitten zu versehen (Fig. 603 a. v. S.), weil dadurch die Kraftlinien des Magnetfeldes in einen großen magnetischen Widerstand finden, der dieses schädliche Querfeld des Ankers schwächt.

Mehrpole Maschinen. — Dynamomaschinen für große Leistungen werden in der modernen Elektrotechnik gewöhnlich mit den Dampfmaschinen

Fig. 604.

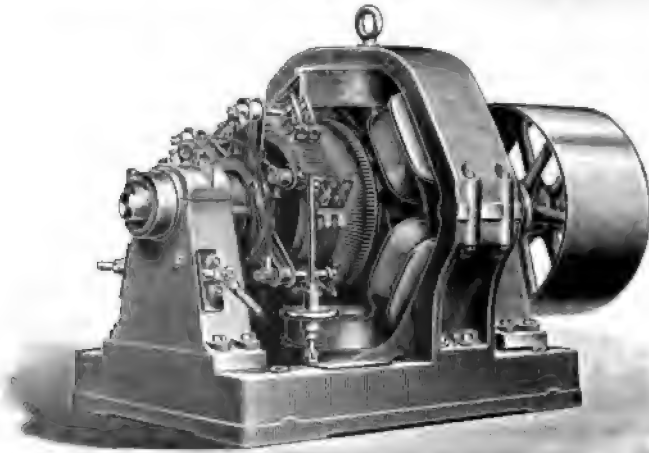


LA 205.

beliebig steigern, ohne daß die Zahl der Pole vermehrt werden müßte. Man gelangt auf diese Weise zu den mehrpoligen Maschinen, welche

oder Turbinen „direkt gekuppelt“ (d. h. ohne Treibriemen, Zahnräder oder dgl., sondern an derselben Welle), sind daher an eine verhältnismäßig niedrige Tourenzahl gebunden (selbst mehr als 200 Touren per Minute, gewöhnlich noch weniger). Würden solche Maschinen zweipolig (ein Polpaar) ausgeführt, so gelänge es niemals, eine größere EMK zu erzeugen, weil der Anker und die Feldmagnete so zusammen würden, daß die Maschine die Dimensionen annähme, daher sehr teuer und die Ankerreaktion viel zu groß würde. Nach der Grundgleichung der Dynamomaschine (LA 205) läßt sich aber durch Verändern der Polpaare die EMK der Maschine

Fig. 605.



weitaus kompändiöser gebaut werden können als die zweipoligen, wenn es sich um große Leistungen handelt (Fig. 604 zeigt einen vierpoligen, Fig. 605 einen sechspoligen Gleichstromgenerator).

§ 163. Elektromotoren für Gleichstrom. — Prinzip der elektrischen Kraftübertragung. Elektrische Eisenbahnen.

Bald nach der Entdeckung der elektromagnetischen Erscheinungen ging man daran, Elektromotoren (ältere Bezeichnung: elektrische Triebmaschine, neuestens **Motor**) zu bauen. Dabei ahmte z. B. der Motor von PAGE (Fig. 606) die hin- und her gehende Bewegung des Kolbens einer Dampfmaschine dadurch nach, daß ein Stab aus weichem Eisen abwechselnd in das eine oder andere zweier Induktoren hineingezogen wurde; den Stromwechsel besorgten Bleche, die an einer zentralisch ausgeschnittenen Welle schleifen. — Motor von FROMENT (Fig. 607 a, b).

Alle derartigen Motoren waren so lange nicht ökonomisch verwertbar, als der Strom aus Batterien zugeführt wurde; denn der Verbrauch des Zinkes war weit mehr kostspieliger als der der Kohle in den Dampfmaschinen.

Die ökonomische Bedeutung der Elektromotoren datiert seit jener Zeit, da 1. der Strom elektrischen Generatoren entnommen werden konnte, und da 2. als Motoren Maschinen verwendet wurden, die ganz ebenso gebaut sind wie die Generatoren, jedoch in umgekehrter Weise verwendet werden.

Diese Umkehrbarkeit der Wechselbeziehungen zwischen mechanischer und elektrischer Leistung ist eine Anwendung im großen der Erregung von Induktoren durch Bewegung von Stromleitern und umgekehrt (Schema § 147); die erste Erscheinung entspricht dem Generator, die zweite dem Motor. Vergleiche: Dampfmaschine (Motor), welche umgekehrt bei entsprechender Anordnung der Ventile auch als Verdichtungs- oder Wasserpumpe (Generator) verwendet werden kann. 2. Wasserpumpe (Motor), welche als Wassersäulenmaschine (Generator) verwendet werden kann. 3. Windrad (Motor) und Ventilator (Generator). — Inwieweit entspricht 4. Froments Motor dem mehrpoligen Generator? — Wird an dem Schulapparat Fig. 608 (a. f. S.) der mittlere Magnetstab durch die Hand in drehende Bewegung versetzt, so treten in den Spulen Ströme auf. Werden umgekehrt den Spulen von außen in richtigem Wechsel Ströme zugeführt, so gerät der Magnet in drehende Bewegung (wie in den „Drehstrommotoren“, § 165).

Beim Generator (Dynamomaschine) wird die zugeführte mechanische Leistung z. B. an der Riemenscheibe: Umfangskraft \times Riemengeschwindigkeit) umgesetzt in elektrische Leistung ($E M K \times$ Stromstärke im Anker), welche zum geringen Teil zur Deckung der „Verluste“ in dem Generator (Stromwärme, Reibung u. s. w.) verbraucht wird, zum überwiegend größeren Teile aber (bis etwa 92 Proz.) an den Klemmen der Maschine als elektrische Nutzleistung (= Nutzeffekt in Watt = Klemmenspannung \times Stromstärke im äußeren Kreise) zur Verfügung steht. Diese elektrische Nutzleistung läßt sich nun durch eine Leitung einem Elektromotor zuführen; es wird dabei auf dieser Leitung ein „Effektverlust“ von einigen Prozenten auftreten (Stromstärke \times Spannungsverlust in der Leitung LA 211). Die noch verfügbare elektrische Leistung hat dann im Motor die Verluste durch Stromwärme, Reibung u. s. w. zu decken, welche aber ebenfalls nur einige Prozente betragen, so daß der größte Teil (etwa 80 bis 85 Proz.) der elektrischen Leistung des Generators dazu verwendet wird, die stromdurchflossenen Ankerdrähte im Magnetfelde des Motors zu bewegen. Es wirkt nämlich seitens des Magnetfeldes auf die Ankerdrähte eine Zugkraft ein, und dieselben bewegen sich mit ihrer bestimmten Geschwindigkeit; auf diese Weise ist nun die elektrische Leistung

Fig. 606.

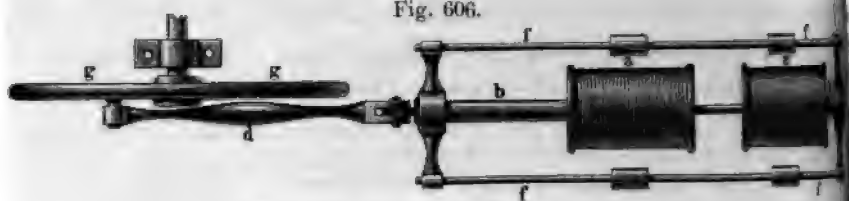


Fig. 607 a.

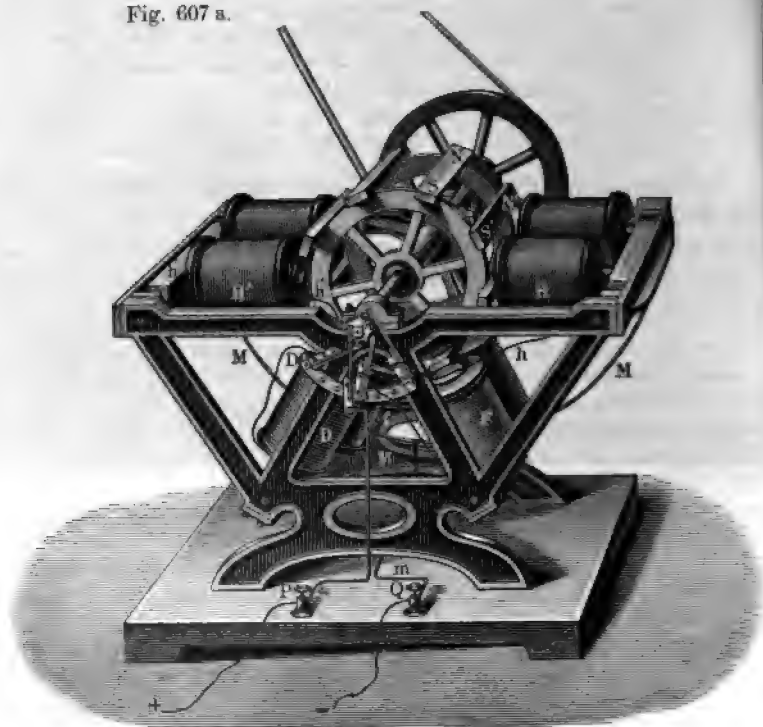


Fig. 607 b.

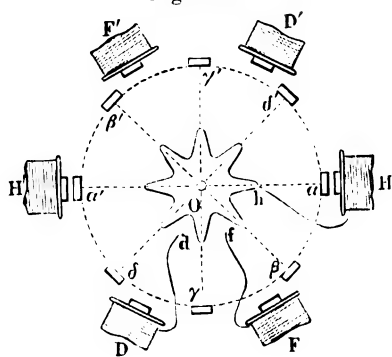


Fig. 608.



wieder in mechanische Leistung umgewandelt worden (Umfangskraft am Anker, Geschwindigkeit der Ankerdrähte).

Man bezeichnet die Umsetzung einer mechanischen Energie (z. B. Wasserfalles, einer Dampfmaschine . . .) in die elektrische Energie einer Dynamomaschine, ihre Fortleitung in Drähten und ihre Umwandlung in mechanische Energie eines Elektromotors als **elektrische Kraftübertragung** (nach der sonstigen physikalischen Terminologie ist Energieübertragung gemeint).

Dieses Prinzip gilt für Gleich- und Wechselstrom; warum bei Kraftübertragung auf größere Entfernungen (so beim Fabrikbetrieb mittelst ferner Wasserkräfte und auch beim elektrischen Fernschnellverkehr) nur Wechselstrom ökonomisch ist, vergl. § 165. Dagegen wird fast ausschließlich Gleichstrom verwendet bei der

Elektrischen Straßenbahn. Der in elektrischen Zentralen („Elektrizitätswerken“) erzeugte Strom wird durch die Speisekabel (gewöhnlich etwa 500 Volt, teils mittels Ober-, teils mittels Unterleitungen, seltener aus Akkumulatorenbatterien, die im Wagen selbst untergebracht sind) den in die Wagen eingebauten Motoren zugeführt, deren Bewegung durch Zahnräder auf die Radwelle übertragen wird.

Der Strom muß entweder durch die Räder und Schienen in die Erde abfließen können (nach Art der „Erdleitung“ bei Telegraphen, indem dann in der Zentrale der eine Pol des Generators mit der Erde verbunden ist), oder er wird meistens vorteilhafter durch besondere Rückleitungen, die mit den Schienen in Verbindung stehen, in die Zentrale zurückgeführt. — Der Führer des Motorwagens reguliert die Fahrgeschwindigkeit mit der Kurbel des „Kontrollers“, der ähnlich wie ein Walzenschalter (vergl. § 173) eingerichtet ist und die erforderlichen Umschaltungen in einfacher Weise ermöglicht.

Wird bei einer Dynamomaschine von außen Strom in den Anker und in die Windungen der Feldmagnete gesendet, so beginnt sich der Anker zu drehen; dabei schneiden die Ankerdrähte die Kraftlinien des Magnetfeldes, weshalb in diesen Drähten eine *EMK* induziert wird, die nach dem Lenzschen Gesetze (§ 150) die Bewegung zu hemmen sucht und als elektromotorische Gegenkraft (*EMGK*) bezeichnet wird.

Die frühere Anschauung, welche die *EMGK* als etwas Schädliches hinstellte, ist gänzlich unhaltbar; LA 206. Über Wirkungsweise, Regulierung und Betriebsverhältnisse der Serien- und Nebenschluß-Motoren vergl. LA 207. LA 207.

Warum ist es auch beim Elektromotor günstig, die Bürsten (aber gegen die Drehrichtung) zu verschieben, wenn der Motor „belastet“ ist? (Vergl. Ankerreaktion und Bürstenverschiebung bei den Generatoren, § 162, Fig. 601—603).

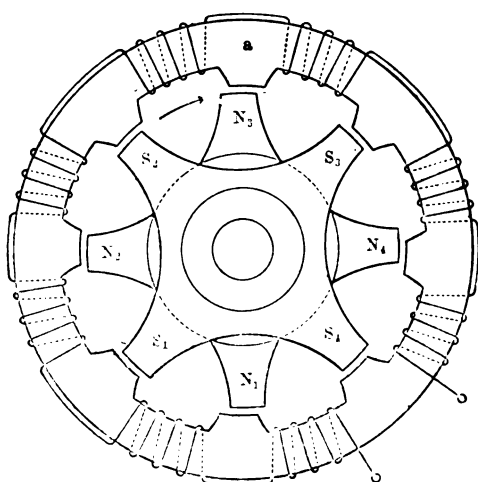
Wenn man zwei ganz gleichgebaute Dynamomaschinen miteinander durch Leitungen verbindet, so daß die eine als Generator, die andere als Motor wirkt, so ist bei Hauptstrommaschinen (Fig. 597, S. 537) die Drehrichtung des Motors die entgegengesetzte von der des Generators, bei Nebenschlußmaschinen (Fig. 598, S. 537) jedoch beim Motor und Generator dieselbe; warum?

§ 164. Generatoren für Wechselstrom.

Vor etwas mehr als einem Jahrzehnt konnte die Elektrotechnik nur bei Verwendung von Gleichströmen auf groÙe Erfolge rechnen; das weite Gebiet des Wechselstromes war theoretisch und praktisch noch nicht genügend geklärt. Aber die Erfindung der Transformatoren (Gaulard und Gibbs 1834 und Zipernowsky-Déni-Bláthy 1885), des magnetischen Drehfeldes durch Marcel Deprez (1880 bis 1883), und Prof. Ferraris (Turin 1885 bis 1888), sowie die Konstruktion der Mehrphasenwechselstrommotoren durch Nikola Tesla (1887 bis 1891), v. Dolivo-Dobrowolsky (Allg. Elektr.-Ges. Berlin, 1888 bis 1890) und C. E. L. Brown (Masch.-Fabrik Oerlikon bei Zürich) führte schon im Jahre 1891 bei der elektrotechnischen Ausstellung in Frankfurt am Main zur vollständig gelungenen Kraftübertragung mit Hilfe von Dreiphasen-Wechselströmen; es wurden dabei 300 Pferdestärken (Turbine in Lauffen am Neckar) auf eine Entfernung von 175 km mit einem Gesamtwirkungsgrade von 70 Proz. nach Fernleitung wurde dabei bis zu einer Entfernung von 10 km aufwärts) handelt, da dann die Wechselstromsysteme weitaus ökonomischere Resultate liefern.

Bei der praktischen Ausführung von Wechselstrommaschinen wird stets eine größere Anzahl von Magnetpolen erforderlich, wenn die Tourenzahl der Maschinen bei der erforderlichen Periodenzahl des Wechselstromes in realisierbaren Grenzen

Fig. 609.



bleiben soll. Die Wechselstrommaschinen werden daher stets mehrpolig gebaut, und zwar mit geringen, rein konstruktiven Abänderungen nach folgendem Typus:

Der feststehende äußere Spulenkranz *a* (Anker, Armatur, Fig. 609) ist mit einer geraden Zahl von Polansätzen *a*, welche nach innen gerichtet sind, ausgerüstet; dieser Kranz wird aus dünnen Eisenblechen zusammengesetzt und mit abwechselnd rechts und links gewickelten Spulen versehen. Innerhalb dieses Kranzes

Drehen sich die „Feldmagnete“ $N_1 S_1 N_2 S_2 \dots$, welche mit Gleichstrom durch entsprechende Wicklung abwechselnd zu Nord- und Südpolen erregt werden; dieser Erregerstrom wird durch zwei Schleifringe von außen zugeführt und

Fig. 610.



einer Akkumulatorenbatterie entnommen oder noch häufiger durch eine besondere „Erregermaschine“ erzeugt. Bei der Rotation des inneren Kranzes wird in den feststehenden Spulen des äußeren Kranzes AA ein Wechselstrom induziert, welcher bei den Klemmen abgenommen werden kann. — Die Ausführung im großen zeigt Fig. 610.

Die Periodenzahl (meist 40 bis 100 per sec) dieses „einphasigen“ Wechselstromes ist gleich der Zahl der Polpaare multipliziert mit der Tourenzahl per sec; die Polwechselzahl ist doppelt so groß.

Maschinen für Mehrphasenwechselströme.

a) Zweiphasenmaschinen. — Denken wir uns zwischen die Pole aa (Fig. 609) des feststehenden Spulenkranzes ebenso viele Pole bb eingefügt, welche in ganz derselben Weise wie aa mit Spulen versehen sind, so wird auch in dieser zweiten Spulengruppe bb , welche zu zwei weiteren Klemmen K, K_1 führt, ein Wechselstrom II induziert, welcher dieselbe Periodenzahl und dieselbe Kurvenform (Sinuskurve) besitzt wie der Wechselstrom I , nur erreicht er dieselben Werte um eine Viertelperiode später (früher) als der Wechselstrom I ; oder: Zwischen den Strömen I und II besteht ein Phasenunterschied von einer Viertelperiode (Phasenverschiebung = 90°).

Wenn nämlich zur Zeit t der Wechselstrom I die Stärke $i_1 = J \sin \alpha t = J \sin \varphi$ besitzt, so ist in demselben Augenblicke die Stärke des Wechselstromes II : $i_2 = J \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) = -J \cos \varphi$. (Bei umgekehrtem Windungssinn der Spulen bb würde $i_2 = J \cos \varphi$.)

Diese beiden Ströme I und II lassen sich entweder getrennt verwenden oder aber miteinander kombinieren, und sie bilden dann einen „zweiphasigen Wechselstrom“ (Zweiphasenstrom).

So zeigt Fig. 611 ein offenes (unverkettetes) Zweiphasensystem. Fig. 612 ein „verkettetes“ mit gemeinsamer Rückleitung für beide Phasen. In beiden Fällen bedeuten die Wellenlinien die Spulen der Maschine, die kleinen Kreise Glühlampen u. dergl. Beim verketteten Zweiphasensystem ist der Strom in der gemein-

Fig. 611.

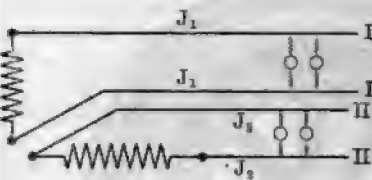
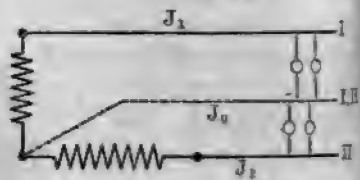


Fig. 612.



samen Rückleitung [Mit weniger als doppelt so
 $J_0 = \sqrt{J_1^2 + J_2^2} = J$
 der Ströme I]

ker als in jedem „Außenleiter“, jedoch
 der Maximalwert J_0 im Mittelleiter:
 wobei $J_1 = J_2 = J$ der Maximalwert

b) Dreip
 strommaschin
 wenn in den
 Pole b und c ein
 Zeitpunkt

Es lassen sich aus einer Wechse
 lwechselströme I, II, III entnehmen,
 chen je zwei Pole aa noch die
 bewickelt werden, daß für je einen

$$\left. \begin{array}{l} \text{I. } i_1 = J \sin \varphi \\ \text{II. } i_2 = J \sin (\varphi - 120^\circ) \\ \text{III. } i_3 = J \sin (\varphi - 240^\circ) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{wobei wegen der identischen Gleichung} \\ \text{(LA 208, 209),} \\ \sin \varphi + \sin (\varphi - 120^\circ) + \sin (\varphi - 240^\circ) = 0 \\ \text{für jeden Zeitpunkt } i_1 + i_2 + i_3 = 0. \end{array}$$

Dieses Dreiphasensystem (drei Wechselströme mit einer Phasenverschiebung gleich einem Drittel Periode zwischen je zweien der Ströme I, II, III) verlangt

Fig. 613.

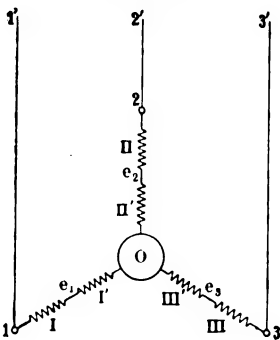
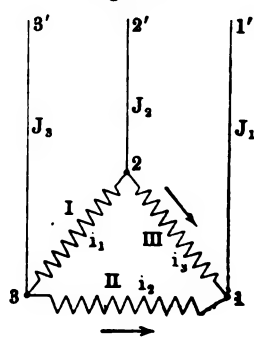


Fig. 614.



anscheinend sechs Leitungen. Vereinigt man jedoch die drei Rückleitungen $I' II' III'$ zu einer gemeinsamen Leitung, so fließt durch dieselbe in jedem Zeitmomente die Summe der drei Momentanwerte der Ströme: $i = i_1 + i_2 + i_3 = 0$; wir brauchen deshalb diese Rückleitung überhaupt nicht und lassen

daher weg; nur müssen wir überall, wo wir Strom aus den drei Zuleitungen *I*, *II*, *III* für Glühlampen, Motoren u. s. w. entnehmen, die drei „Phasen“ zu einem Vereinigungspunkte, zum sogenannten „Nullpunkte“ führen. Wir gelangen so zu der sehr einfachen „Sternschaltung“ (Fig. 613). Eine andere oft verwendete Schaltungsanordnung heisst „Dreieckschaltung“ (Fig. 614).

Eben diese Entbehrlichkeit der drei Rückleitungen stellt den ersten Umstand dar, der dem Dreiphasensystem die meiste Anwendung verschafft hat (obgleich es natürlich auch Wechselströme mit beliebig vielen Phasen herstellen lassen; welche brauchen jedoch für jede Phase eine eigene Leitung, wenn das System „symmetrisch“ ist; bei unsymmetrischen Systemen kommt dann noch wenigstens eine gemeinschaftliche Rückleitung dazu; und diese vielen Leitungen verbieten ihre praktische Verwertung). Der zweite Umstand, dem von den Mehrphasenwechselströmen besonders der Dreiphasenstrom seine Bedeutung verdankt, liegt in der besonderen Art, wie er den Betrieb der sogenannten Drehstrommotoren ermöglicht; vergl. folg. §.

§ 165. Wechselstrommotoren: Einphasenmotoren und Drehstrommotoren.

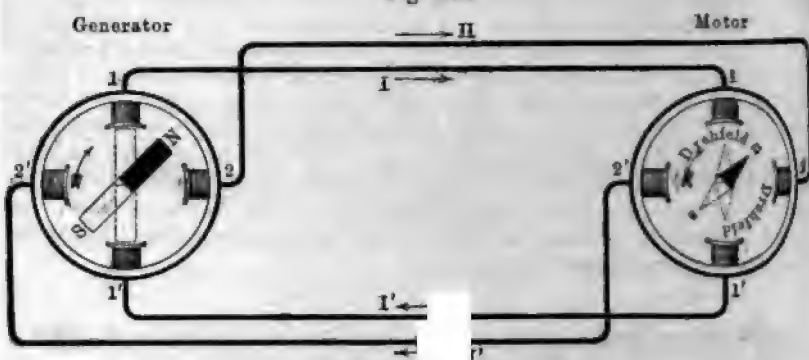
a) Jeder Wechselstromgenerator, der zur Erzeugung einphasigen Wechselstromes bestimmt ist, lässt sich auch als Motor verwenden, wenn dem feststehenden äußeren Spulenranke *AA* Einphasenwechselstrom, dem Feldmagneten *FF* Gleichstrom zugesendet wird. Ein Drehmoment kann jedoch nur dann abgegeben werden, wenn ein Polwechsel in den Spulen des Motors immer gerade dann eintritt, sobald der vorübergehende Magnet infolge des Stromwechsels im Generator seinen Pol wechselt, d. h. wenn der Motor in „Synchronismus“ mit dem zugeführten Wechselstrom läuft; man nennt daher solche Motoren „Einphasensynchron-Motoren“. Diese Motoren besitzen praktisch schwerwiegende Nachteile: sie laufen beim Einschalten mit Belastung nicht an, sondern müssen belastet zuerst mechanisch oder elektrisch auf synchronen Gang gebracht werden, darauf erst die Motorwelle ein Drehmoment abgeben kann; sie übertragen keine Lastung, sondern bleiben in einem solchen Falle sofort stehen („fallen aus dem Ritt“). Nur einen Vorzug besitzen sie, nämlich die konstant bleibende Tourenzahl vom Leerlauf an bei allen Belastungen bis zum zulässigen Maximum. Immerhin tun diese Motoren gute Dienste für große andauernde Leistungen.

b) Wenn bei einem Gleichstrommotor (Serien- oder Nebenschlussmotor) die Zuleitungen miteinander vertauscht werden, so ändert sich die Stromrichtung am Anker und in den Feldmagnetwindungen; daher bleibt die Drehrichtung des Motors ungeändert. Es können daher derartige Motoren auch mit einphasigem Wechselstrom betrieben werden, nur macht sich (besonders bei Nebenschlussmotoren) der Einfluss der Selbstinduktion störend bemerkbar. Solche Motoren sind daher nur für kleine Leistungen verwendbar.

c) Wechselstrommotoren mit magnetischem Drehfeld. — Durch die Spulen 11' fließt der Wechselstrom $i_1 = J \sin \alpha$, durch die Spulen 22' der Wechselstrom $i_2 = J \cos \alpha$; beide Ströme haben dieselbe Periodendauer *T* und denselben Maximalwert *J*. Die Spulen 11' erzeugen ein Wechselfeld in der Richtung *I*, die Spulen 22' ein solches der Richtung *II* hervor. Es scheint dann ein resultierendes

Magnetfeld von konstanter Stärke zu rotieren (nach der schematischen Fig. 615), so daß einer Periode eine volle Umdrehung des Magnetfeldes entspricht (magnetisches Drehfeld).

Fig. 615.



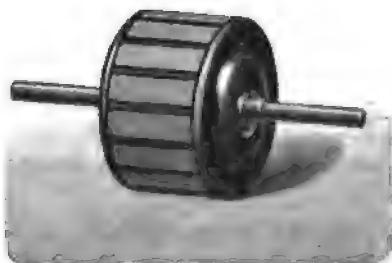
Wegen $i_1^2 + i_2^2 = J^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) = J^2$ ist die resultierende Intensität $i = \sqrt{i_1^2 + i_2^2} = J$, also von der Phase t unabhängig.

Zur Erzeugung eines solchen Drehstroms mit einer Phasendifferenz $= 1/3$ Periode (Verschiebung 120°) verwendet werden. Wechselströme haben den (allerdings nicht erhalten; besser ist die im vorigen § bezw. „dreiphasiger“ Wechselstrom (Mehrphasen-, speziell Dreiphasenstrom).

Befindet sich im „Drehfeld“ eine Magnetnadel (so in der schematischen Fig. 615) oder ein durch Gleichstrom erregter Elektromagnet, so wird er mit derselben Tourenzahl umlaufen wie das Magnetfeld und dabei ein mechanisches Drehmoment abgeben können (Synchrone Drehfeldmotoren; TESLA).

Noch weitaus wichtiger und praktisch vorteilhafter sind die sogenannten asynchronen Drehfeldmotoren (Induktionsmotoren oder kurz „Drehstrommotoren“, v. Dolivo-Dobrowolski, Brown), deren Prinzip folgendes ist:

Fig. 616.



suchen, so daß der stromführende Zylinder ein Drehmoment abzugeben vermag.

In einem magnetischen Drehfeld, dessen Intensität konstant ist und welches mit der konstanten Tourenzahl n_1 im Sinne des Pfeiles I (Fig. 617) rotiert, denken

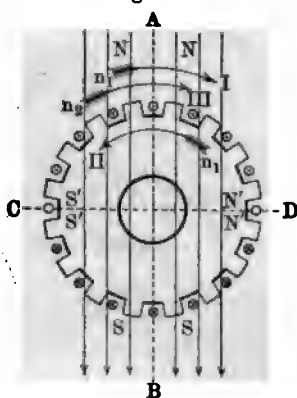
In einem magnetischen Drehfeld ist ein Stromleiter (der im wesentlichen die Gestalt eines Hohlzylinders besitzt und Kurzschlussanker heißt, Fig. 616) um seine Achse drehbar angebracht. Die Kraftlinien schneiden bei ihrer Rotation diesen Stromleiter und induzieren in demselben Ströme, die dem Drehfeld nachzueilen

uns einen Nuten-Trommelanker (vergl. Fig. 600, S. 538), bei welchem jedoch die Ankerdrähte an den beiden Stirnseiten direkt miteinander verbunden sind (z. B. durch Kupferringe, Fig. 616, so daß die ganze Wicklung einem Käfig ähnlich sieht, daher „Kurzschlussanker“, „Käfiganker“). Dieser sei vorläufig in Ruhe, so daß bei der Drehung des Magnetfeldes in den Ankerdrähten Ströme induziert werden. Da es nur auf die relative Bewegung zwischen den Stromleitern und dem Magnetfelde ankommt, können wir uns denken, es stehe das Magnetfeld fest und der Anker drehe sich mit derselben Tourenzahl n_1 im Sinne des Pfeiles II, also in entgegengesetzter Richtung; diese Annahme ermöglicht bequemer die Bestimmung der Richtung der Induktionsströme in den Ankerdrähten. Nach den Induktionsregeln in § 150 findet man, daß in der oberen Ankerhälfte die Ströme gegen den Beschauer hin, in der unteren Ankerhälfte vom Beschauer weg fließen; diese Ströme magnetisieren den Anker in der Querrichtung CD. Wenn also in

dem betreffenden Augenblicke das Hauptfeld (Drehfeld) bei A seinen Nordpol N, bei B seinen Südpol S hatte, so entsteht durch die Induktionsströme im Anker bei D ein Nordpol N', bei C ein Südpol S'; diese beiden letzteren Pole werden um so stärker sein, je stärker das Hauptfeld und je größer die Tourenzahl n_1 desselben ist. Die beiden Felder NS und N'S' ziehen sich nun gegenseitig an, so daß eine Drehung des Ankers in demselben Sinne resultiert (Pfeil III), in welchem das Drehfeld NS rotiert; es läuft demnach das Ankerfeld N'S' mit einer Tourenzahl n_2 dem Hauptfelde NS nach. Würde $n_2 = n_1$, würde sich also der Anker mit derselben Geschwindigkeit drehen wie das Drehfeld, dann würden die Kraftlinien NS

Ankerdrähte überhaupt nicht schneiden, so ständen also keine Induktionsströme und kein Drehfeld, d. h. dann könnte der Anker kein mechanisches Drehmoment abgeben. Es ist aber der Anker stets belastet, wenn auch bei „Leerlauf“ nur durch die Reibungswiderstände in den Lagern und durch den Luftwiderstand; infolgedessen ist n_2 kleiner sein als n_1 , wenn auch nur verhältnismäßig wenig kleiner. Ist doch der Anker gezwungen, ein großes mechanisches Drehmoment abzugeben, z. B. zum Antriebe einer Transmission, eines Aufzuges, eines Kranes, eines Bahnwagens u. s. w., dann wird wegen der erforderlichen großen Zugkraft am Lauferumfang die Tourenzahl n_2 sinken, da ja die elektrische Leistung, welche erzeugt wird und zur Erzeugung des Drehfeldes verwendet wird, konstant bleibt (konstante mechanische Belastung vorausgesetzt), und weil deshalb auch die ergebene Leistung, welche dem Drehmomente und der Tourenzahl n_2 proportional ungeändert bleibt. Es bleibt dann der Anker mehr hinter dem Drehfelde zurück, wodurch aber mehr Kraftlinien des Drehfeldes die Ankerdrähte schneiden und somit das Feld n_2 verstärkt wird. Der Anker vermag also dann wirklich ein größeres Drehmoment abzugeben und zwar um so mehr, je größer die Differenz ($n_1 - n_2$) ist, weil diese Differenz proportional der Zahl der geschnittenen Kraftlinien ist. Man bezeichnet diese Differenz als „Schlupfung“; der Name ist glücklich gewählt, da gewissermaßen der Anker in dem Drehfelde, welches er selbst mit großer Kraft mitzureißen sucht, etwas zurückschlüpft und zwar um so mehr, je stärker der Anker mechanisch belastet ist.

Fig. 617.



Diese Drehfeldmotoren (gewöhnlich als „Drehstrommotoren“ bezeichnet) führen auch den treffenden Namen „asynchrone Induktionsmotoren“, weil die Tourenzahl des Ankers n_a nicht zusammenfällt mit der Tourenzahl des Drehfeldes n , und weil die wirksamen Ströme im Anker erst durch Induktion hervorgerufen werden.

Diese „Drehstrommotoren“ (es sei der gebräuchliche Name weiterhin gestattet) haben eine außerordentliche Bedeutung für die Praxis erlangt, da sie keinen Kollektor brauchen, vielmehr dem drehbaren Teile (dem Anker, auch „Läufer“ oder „Rotor“ genannt) von außen gar kein Strom zugeführt zu werden braucht, nur das feststehende Magnetgestell („Ständer“ oder „Stator“ genannt), in welchem das Drehfeld entsteht, ist mit unbeweglichen und fix montierten Zuleitungen zu versehen, ein praktisch sehr wichtiger Vorzug vor anderen Motoren. Das Anlaufdrehmoment ist sehr groß, der Motor verträgt auch kurz dauernde Überlastungen und Stöße sehr gut und hat nur einen Nachteil: die schwierige Regulierung der Tourenzahl, wenn es sich um weitere Grenzen derselben handelt.

Drehstrommotoren finden auch bei elektrischen Bahnen in neuester Zeit vorteilhafte Anwendung (Lugano, Gornigratbahn und Jungfraubahn in der Schweiz u. s. w.); allerdings verlangen sie mindestens drei Leitungen (z. B. zwei

Drehstrommotoren für größere schlussankern, sondern mit dem sogenannten die Einschaltung eines „...“ eine eingehende Erklärung ist hier

ngen werden zumeist nicht mit Kom- „Phasenanker“ ausgerüstet; letztere lerstandes“ beim Anlauf des Motors. glich.

§ 166. Transformatorn und Umformer.

In § 150 wurde jeder Induktionsapparat als „Transformator im weiteren Sinne“ bezeichnet; denn wird in die primäre Spule z. B. eines Schlittenapparates ein Strom von der Stärke J_1 und der elektromotorischen Kraft (Klemmenspannung) E_1

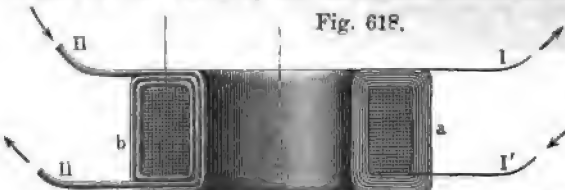


Fig. 618.

geschickt, so verläßt ein Strom von der Stärke J_2 und der Klemmenspannung E_2 die sekundäre Spule, wobei wegen der kleineren Windungszahl und des kleineren Widerstandes der

primären im Vergleich zur sekundären Spule $J_1 > J_2$, aber $E_1 > E_2$ ist. Dabei wird die Wirkung durch einen Kern aus weichem Eisen, der sich im Innern der primären und somit auch der sekundären Spule befindet, beträchtlich gesteigert. — Überdies findet aber in dem „Transformator im engeren (elektrotechnischen) Sinn“ nicht nur Stromunterbrechung, sondern Stromwechsel statt. — Das Wesentliche dieser Einrichtung können wir nun auch so beschreiben:

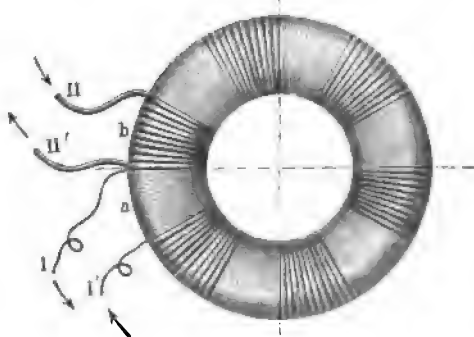


Fig. 619.

Um einen Kern aus weichem Eisen gehen zwei Systeme von Drahtwindungen (Figg. 618, 619); wird in die eine ein Strom gesendet, so verläßt die andere ein Strom von im allgemeinen anderer Stärke und Spannung, oder: der eine Strom wird in einen anderen transformiert. Dies geschieht in dem ruhenden Apparate durch die Bewegung der Kraftlinien des Magnetfeldes.

Wie bei jeder Induktionswirkung ist für das Entstehen eines sekundären Stromes wesentlich, daß der primäre Strom nicht stationärer Gleichstrom, sondern entweder Gleichstrom mit wechselnder Stromstärke, speziell mit Stromunterbrechung, oder daß er Wechselstrom ist. Unter Transformator im speziellen elektrotechnischen Sinne versteht man eine Vorrichtung, in der ein Wechselstrom einen anderen Wechselstrom erzeugt.

Die Einrichtung unterscheidet sich von der des Induktionsapparates — außer durch die oft beträchtlichen Dimensionen (bis 2 m Höhe und 1 m Durchmesser) — im wesentlichen auch dadurch, daß man nicht einen geraden, sondern einen ringförmig in sich geschlossenen Eisenkern mit beiden Windungen versieht, wodurch die Einrichtung und Wirkungsweise dann so zu beschreiben ist: In einem „geschlossenen magnetischen Kreise“ wird durch einen Wechselstrom I von der Stärke J_1 und der Klemmenspannung E_1 ein Wechselstrom II von der Stärke J_2 und Klemmenspannung E_2 hervorgerufen. Die Periodenzahl beider Ströme ist dieselbe, und theoretisch ist $J_1 E_1 = J_2 E_2$, da $J_1 : J_2 = Z_2 : Z_1$, $E_1 : E_2 = Z_1 : Z_2$, wo Z_1 und Z_2 die Windungszahlen der primären und sekundären Spule sind. — Praktisch läßt sich jene theoretische Gleichheit des primären und sekundären Effektes $J \cdot E$ nie vollständig erzielen, da Verluste durch Stromwärme der primären und sekundären Spule, sowie durch Hysteresis und Wirbelströme eintreten. Immerhin beträgt aber bei großen Transformatoren moderner Konstruktion $J_2 E_2$ bis 96 Proz. von $J_1 E_1$, und Transformatoren mit einem elektrischen Wirkungsgrade von nur 90 Proz. werden schon als schlechte bezeichnet.

Die Transformatoren lassen sich sowohl für einphasigen wie auch für mehrphasigen Wechselstrom anwenden („Wechselstromtransformator“ schlechthin und „Drehstromtransformator“); sie haben für die Praxis die allergrößte Wichtigkeit; denn erst seit ihrer Erfindung kann man die Wechselströme von verhältnismäßig niedriger Spannung, wie sie die Maschinen liefern (bis etwa 5000 Volt, gewöhnlich aber viel weniger), fast ganz ohne Verluste umwandeln in Ströme von hoher Spannung (etwa 10000 Volt; es existieren bereits Anlagen mit 40 000 Volt); solche hochgespannten Ströme brauchen nur sehr dünne Leitungen, so daß eine Übertragung des elektrischen Effektes auf sehr große Distanzen noch wirtschaftlich günstige Resultate liefert (Ausnutzung billiger Wasserkräfte). An der Konsumstelle können die hochgespannten Ströme durch Transformatoren wieder auf geringe Spannungen (100 Volt) „heruntertransformiert“ werden, so daß sie ihre physiologisch gefährlichen Eigenschaften verlieren.

Nach den bisher angegebenen Prinzipien können, wie gesagt, nur Wechselströme in Wechselströme transformiert werden. Da aber Wechselströme zwar ökonomischer zu übertragen sind als Gleichstrom, jedoch z. B. für elektrolytische Zwecke nicht unmittelbar zu verwenden sind, so entsteht die Aufgabe, Wechselströme in Gleichströme zu verwandeln, „umzuformen“; dies leisten die

Motor-Generatoren: Der einem Wechselstrom- oder Drehstromverteilungsnetze entnommene Strom setzt einen Wechselstrom-(Drehstrom-)Motor in Bewegung, der direkt mit einem Gleichstromgenerator gekuppelt ist.

Dieser Gleichstromgenerator ist für die zum jeweiligen besonderen (elektrolytischen, galvanoplastischen . . .) Zwecke erforderliche Stromstärke und Klemmenspannung gebaut. — Die elektrische Leistung des Gleichstromgenerators pflegt um 10 bis 20 Proz. hinter jener des zugeführten Wechselstromes zurückzubleiben.

Bei den „Umformern“ (im engeren Sinne des Wortes, die von den Transformator, trotz der sprachlich gleichen Bedeutung beider Ausdrücke, völlig verschieden sind) wird die Umwandlung von Wechsel- in Gleichstrom in einer Maschine besorgt.

B. Anwendungen d . . . nischen Wirkungen.

Vorbemerkung: Eine unmittelbare Stromes, d. h. der in Wärmemengen . . . **Heizung**“. Eine solche ist zwar als Heizungen, Kochapparate . . . , auch zweckmäßig; im großen wäre wo große Wasserkraft u. dergl. die Elektrizität eine „höher organisierte“ als die Wärme, so ist es im allgemeinen die niedrigste Form der Energie überzuführen.

Auch die an sich nützliche Anwendung bei **Minensprengungen** (wo die Verwendung elektrostatischer Entladungen sich im allgemeinen als zweckmäßiger erwiesen hat als das Glühen von Drähten), bei der **Galvanokaustik** (Abschneiden z. B. von krankhaften Neubildungen mittels elektrisch glühender Drähte) können nicht zu den elektrotechnischen Anwendungen im großen gezählt werden.

Um so mehr sind das „elektrische Licht“ in seinen beiden wesentlich verschiedenen Formen, als **Glühlicht** und **Bogenlicht**, Anwendungen der Wärmewirkungen im großen. Wie hier die Lichtwirkung nur eine sekundäre Folge der Wärmewirkung (§ 156, Eingang), so ist zwar auch die besondere elektrochemische Anwendung des elektrischen Lichtbogens im „elektrischen Ofen“ nicht ein direkt chemischer (elektrolytischer), sondern ein **elektrothermischer** Vorgang, nämlich eine Dissoziation infolge der sehr hohen Temperatur; sie soll aber wegen ihrer praktischen Ähnlichkeit mit sonstigen elektrochemischen Anwendungen erst im folgenden Abschnitte (§ 169) behandelt werden.

§ 167. Glühlampen.

In einem durch Quecksilberluftpumpen nahezu vollständig evakuierten birnförmigen Glasballon ist ein dünner Kohlenfaden eingeschlossen, dessen beide Enden durch einen elektrolytisch hergestellten Kohlenniederschlag mit den Stromzuleitungsdrähten verbunden sind; die Zuleitungsdrähte sind an der Stelle, wo sie in die Glasbirne eingeschmolzen sind, aus Platin hergestellt, weil Platin nahezu denselben

Wärmeausdehnungskoeffizienten besitzt wie Glas; die beiden Enden der Zuleitungsdrähte sind mit dem „Lampensockel“ verlötet, der aus zwei gegeneinander isolierten Teilen besteht und in der „Fassung“ gewöhnlich durch Einschrauben zu befestigen ist (Edison-Fassung, Fig. 620). Der Kohlenfaden wurde früher durch Verkohlungen von Bambusfasern oder Papier hergestellt; jetzt werden als Rohmaterial Fäden aus Zellulose verwendet, welche in Glühöfen unter Luftabschluß verkohlt und dann durch Dissociation (in einem Bade von Wasserstoff, Petroleum) ausgeglichen werden.

Sendet man nun einen Strom (Gleich- oder Wechselstrom) durch diesen Kohlenfaden, so gerät (bei richtigem Widerstand des Fadens und entsprechender Spannung des Stromes an den Lampenenden) in lebhaftes Weißglut, ohne zu veraschen, weil ja in der Glasbirne kein Sauerstoff vorhanden ist.

Es verbraucht dabei die Glühlampe im Mittel für Hefner-Einheit (§ 117) einen Effekt von 3 Watt, so daß durch eine 16 kerzige Glühlampe bei 100 Volt Spannung eine Stromstärke von rund $\frac{1}{2}$ Ampère fließt; eine 16 kerzige Glühlampe braucht also bei 100 Volt etwa 48 Watt Stromstärke. Der Arbeitsverbrauch einer 16 kerzigen Glühlampe beträgt daher in einer Stunde: Wattstunden = nahezu $\frac{1}{2}$ Hektowattstunde = ungefähr $\frac{1}{16}$ Pferdestärkenstunde. (LA 210.)

Die Glühlampe ist für Gleichstrom oder Wechselstrom in gleicher Weise anwendbar, weil die erzeugte Wärmemenge, daher auch die Lichtemission, vom Quadrat der Stromstärke abhängt, welches vom Vorzeichen des Stromes, also von seiner Richtung, unabhängig ist.

Erfinder der Glühlampe mit Kohlenfaden (statt des anfänglich versuchten Platindrahtes) ist nicht, wie meist geglaubt wird, Edison, sondern ein Deutscher namens GOEBEL, dem die Ergebnisse jahrelanger und schließlich erfolgreicher Versuche durch eine mit Edison verbundene Gesellschaft abgekauft wurden.

Bei der Glühlampe nach dem System NERNST werden sogenannte „Leiter erster Klasse“ (insbesondere Magnesiastäbchen), die bei gewöhnlicher Temperatur Isolatoren zu betrachten sind, durch eine elektrische Heizvorrichtung vorwärmt, wodurch sie zu Leitern werden, so daß der nun durchfließende Strom in lebhafter Weißglut zu erhalten vermag; dabei ist nur etwa 1 Watt pro Hefner-Einheit erforderlich.

Die Auer-Osmium-Lampe verwendet statt des Kohlenfadens einen Draht aus Osmium, das noch schwerer schmelzbar ist als Platin, daher höhere Temperaturen verträgt und so bei höchster Weißglut noch reicher an leuchtenden (nicht zwiegend wärmenden) Strahlen ist.

Fig. 620.



LA 210.

§ 168. Bogenlampen.

Sir HUMPHRY DAVY (1821) erzielte durch einen Batteriestrom von hoher und Spannung, den er durch zwei einander berührende und dann bis auf Millimeter Abstand voneinander gebrachte Kohlenstäbe gehen liefs, das bis dahin bekannte künstliche Licht, das bis heute vorwiegend gemeint ist vom „elektrischen Licht“ schlechtweg geredet wird. Gegenwärtig wird der in Gleich- oder Wechselstromgeneratoren erzielte Strom dazu verwandt, wesentliche Vorgang dabei ist:

Fig. 621. Zwei Stäbe aus Gaskohle (gepresste Kohle, Fig. 621) werden einander bis zur Berührung genähert, und der gehende Strom erzeugt an der Berührungsstelle als den des höchsten Widerstandes intensive Gelbglut der Spitzen. Werden die Spitzen bis auf wenige Millimeter A voneinander entfernt, so werden Kohlentheilchen losgerissen, eine leitende Brücke für den Strom bilden, ihm aber noch höheren Widerstand entgegensetzen, so daß die Temperatur in diesem elektrischen Lichtbogen auf 3500 bis steigt. Das von diesem Lichtbogen ausgesandte Licht ist an kurzwelligem (auch ultravioletten) Strahlen und zeigt färbliche und violette Farbe. Der Gesamteindruck von Licht und Bogen ist der des blendend weissen Lichtes.

Daß das Spektrum des Bogenlichtes ein kontinuierliches ist, beweist, daß die Licht emittierenden Kohlentheilchen noch im festen Zustande sind (da beim Abbrennen sich bildende Kohlendioxydgas kommt nicht als Lichtgebener in Betracht). — Die Intensität des ausgestrahlten Lichtes ist nicht nach allen Richtungen gleich groß, sondern beträchtlich kleiner in der Richtung normal zur Anordnung der Kohlenstäbe als unter einem Winkel von 45° gegen diese Richtung (daher werden die Kohlenstäbe manchmal (z. B. im Skioptikon) schief aufgestellt, damit nach wagrechter Richtung möglichst intensives Licht ausgesendet wird).

Fig. 622.

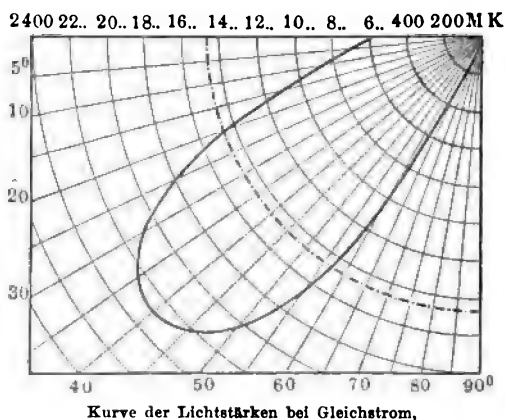
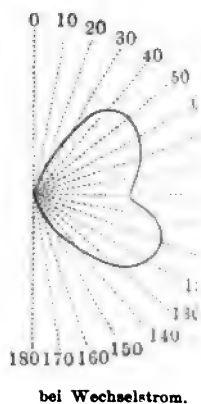


Fig. 623.



gleich groß, sondern beträchtlich kleiner in der Richtung normal zur Anordnung der Kohlenstäbe als unter einem Winkel von 45° gegen diese Richtung (daher werden die Kohlenstäbe manchmal (z. B. im Skioptikon) schief aufgestellt, damit nach wagrechter Richtung möglichst intensives Licht ausgesendet wird).

Lichtbogen verhält sich wie der Sitz trommotorischen Gegenkraft, indem inen Gleichstrombogen von etwa 2 mm : Spannungsdifferenz von rund 45 Volt ist, damit diese EMGK überwunden om aufrecht erhalten wird; bei Wechsel- nur etwa 30 Volt nötig. — Die Kohlen- nen allmählich ab, da (mit Ausnahme e Kohlen fast luftdicht in eine Glasglocke nden Lampen) die Luft ungehindert Zu- Bei Gleichstrom brennt die + Kohle elt so rasch ab als die — Kohle; bei om ist der Abbrand bei beiden Kohlen . — Durch den Kohlenabbrand wird der länger und seine EMGK steigt, wodurch ärke sinkt, bis endlich der Lichtbogen d die Lampe erlischt. Es müssen daher stets einander genähert werden, was er automatisch wirkenden Bogenlicht- en (Bogenlampen-Regulierwerke) ge- Dabei kommen stets zwei Kräfte zur 1. Eine vom Hauptstrome durchflossene wirkt durch Anziehung eines Eisenkernes tfernung der beiden Kohlen und eine er ein Gewicht nähert dieselben einander nlampe); diese Lampe verlangt konstante e, wenn sie ruhig brennen soll; sie ist inzellichter brauchbar (Leuchttürme 2. Eine von einem Zweigstrome durch- uler nähert die Kohlen, welche von der inander gezogen werden (Nebenschluss- ese Lampe verlangt konstante Klemmen- hier können durch Parallelschaltung ele Lampen gleichzeitig in Betrieb sein e von ihnen aufser Betrieb, ohne dafs tritt des Stromes in die übrigen stört). Differentiallampe (Hefner von Alt- zik) nähert eine Nebenschlusspule die len einander und eine Hauptstromspule voneinander. Diese Lampe hält durch g der beiden Spulen ihren Widerstand o dafs sie gleich gut für Serienschaltung lschaltung anwendbar ist.

Fig. 624.



bedeutung der elektrischen Beleuchtung (Glüh- und Bogenlicht) nimmt u Jahr zu, und nur die im Vergleich zu anderen Lichtquellen (nament- cht) höheren Kosten verzögern seine allgemeine Einführung. Deshalb neuesten Bestrebungen dahin, durch Verringerung des Wattverbrauches -Einheit (bei Glühlampen etwa 3 Watt, bei Bogenlampen etwa 1 Watt) auch und Kosten zu verringern. — Beim „Bremerlicht“ (Effektbogen-

lampen) sind den Kohlen Metallsalze beigemengt (— bis 40%, und zwar für Gelb Na und Ca, für Rot Sr, für Weiss Mg); indem die Stromenergie sich mehr in diese gelbliche, optisch wirksamste Strahlung umsetzt, entspricht demselben Stromverbrauch ein bis 4mal so grosser Lichtstärke als beim Davyschen Lichtbogen.

Über Teslas „Licht der Zukunft“ („kaltes Licht“) vergl. § 156.

C. Anwendungen der elektrochemischen Wirkungen.

§ 169. Galvanostegie und Galvanoplastik.

Wird Gleichstrom durch eine Lösung von Kupfer-, Nickel-, Gold-, Silber- . . . Salzen gesendet und mit der Kathode ein leitender (oder durch Graphitüberzug an der Oberfläche leitend gemachter) Körper verbunden, so scheiden sich an seiner Oberfläche Schichten jener Metalle ab. — Beim galvanischen Verkupfern, Vernickeln, Ver-

Fig. 625.



golden, Versilbern, Verstählen . . . (**Galvanostegie**, Fig. 625) müsse diese Schichten fest haften; dagegen verlangt die **Galvanoplastik** die Lösbarkeit der aus Kupfersulfat niedergeschlagenen Kupferschichte

Damit die Salzlösungen konzentriert bleiben, müssen an der Anode überschüssige Mengen der genannten Metalle vorhanden sein, die dann durch sekundäre Prozesse sich mit den elektronegativen Resten der zersetzten Salze wieder verbinden; so dass es den Anschein hat, als wanderten diese Metalle allmählich von der Anode durch die Flüssigkeit zur Kathode (über die wirklichen Vorgänge vergl. § 15).

Wichtigkeit der Galvanoplastik für das Schonen der Originalplatten und Kupferstichen u. s. w. — Negative Abdrücke (Matrizen), positive Abdrücke.

Die Gewinnung reiner Metalle (Kupfer, Aluminium . . .) geschieht teils selbst wieder auf elektrolytischem Wege oder in der neuestens zu grosser Bedeutung gelangten **elektrischen Ofen**, welchem durch die Hitzgrade des elektrischen Lichtbogens chemische Verbindungen, Metallerze u. s. w. dissoziiert werden.

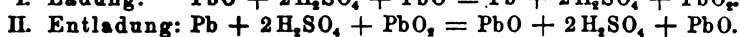
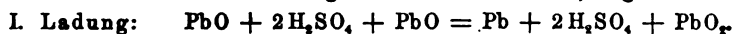
Die Hauptschwierigkeit besteht hier in der Herstellung der den Lichtbogen umgebenden Wärmeschutzmassen (Magnesia, Böcks Gemenge aus Sand und Magnesia...), die den ungeheuren Hitzegraden widerstehen.

§ 170. Akkumulatoren (Sekundärbatterie, Stromsammler).

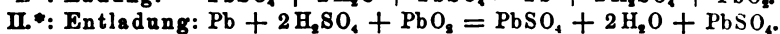
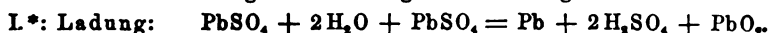
Um den Versuch § 154, Fig. 557 in größerem Maßstabe auszuführen, seien in einem Gefäße aus Glas, Zelluloid u. s. w. zwei Platinplatten P_1 , P_2 einander gegenüber in verdünnter Schwefelsäure gestellt. Leitet man durch diesen Apparat den Strom einer galvanischen Batterie B oder einer Gleichstrom-Dynamomaschine, so wird der Elektrolyt zersetzt und es scheidet sich an der positiven Platte Sauerstoff (O), an der negativen Platte Wasserstoff (H) ab, wobei beide Platten in den Zustand der galvanischen Polarisierung geraten. Unterbricht man dann den „Ladungsstrom“ der Stromquelle B und verbindet man dann die beiden Platten P_1 , P_2 durch einen Draht miteinander, so zeigt es sich, daß ein „Entladungsstrom“ („Polarisationsstrom“) in entgegengesetzter Richtung durch dieses Sekundärelement fließt und zwar so lange, bis wieder der Wasserstoff, bezw. Sauerstoff mit dem nun von neuem an den Platten entstehenden Sauerstoff, bezw. Wasserstoff sich zu Wasser verbunden hat. Das Aufhören dieses Stromes zeigt die vollständige „Entladung“ des Sekundärelementes an. Eine neuerliche Ladung bringt dann dieselben Erscheinungen hervor.

GASTON PLANTÉ (1860) verwendet zwei Bleiplatten (statt der Platinplatten). Bei der Ladung entsteht dann an der positiven Platte durch den frei werdenden Sauerstoff Bleisuperoxyd (PbO_2), während an der negativen Bleiplatte der Wasserstoff frei entweicht, so daß die Platte ungeändert bleibt. Der Entladungsstrom läßt dann an der Bleisuperoxydplatte infolge seiner entgegengesetzten Richtung Wasserstoff entstehen, welcher das Bleisuperoxyd zu Blei reduziert.

Die chemischen Vorgänge sind in Wirklichkeit sehr verwickelt; doch gelten (namentlich für schon in Gebrauch gewesene Akkumulatoren) folgende Formeln:



Nach anderer Ansicht geht die Ladung und Entladung so vor sich:



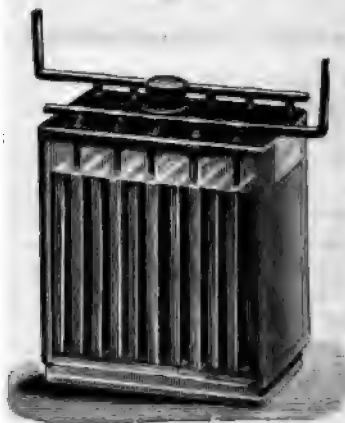
FAURE (1881) bestreicht die Platten von vornherein mit Bleisuperoxyd, Bleioxyd (Mennige); diese Bleisalze werden durch den Strom reduziert, so daß sich eine schwammige, äußerst poröse Bleischicht auf den Platten bildet, wodurch ebenfalls die wirksame Oberfläche sehr vergrößert wird (gepastete Platten).

Beide Methoden, der Planté-Prozess und der Faure-Prozess, finden bei den modernen Akkumulatorkonstruktionen vielfache Anwendung. — Durch Anbringung vieler Plattenpaare (entsprechend dem Nebeneinanderschalten von galvanischen Elementen) nehmen die Akkumulatoren die in Fig. 626 (a. f. S.) dargestellte Gestalt an.

Das Herausfallen der „aktiven“ Masse beim Faure-Prozess wird durch Rippen, Haken und Gitter, welche die Oberflächen der Platten tragen, verhindert.

Der Name „Akkumulatoren“ ist nicht so zu verstehen, als ob sie die Aufspeicherung der elektrischen Energie selbst gestatteten, sondern sie verwandeln nur dieselbe in chemische Energie und ermöglichen dann die Rückverwandlung in elektrische Energie. — Die „Kapazität“ (das Aufspeichungsvermögen) eines Akkumulators ist um so größer, je mehr Sauerstoff 1 kg der positiven Platten zur Bildung von Bleisuperoxyd heranziehen kann; es ist daher die Oberfläche der positiven Platten durch geeignete Mittel möglichst groß zu machen (Großoberflächen-Platten); die Platten werden daher zumeist mit Rippen versehen oder als Gitterplatten ausgebildet.

Fig. 626.



Die vollständige Ladung frei werdenden Gase (H und O) entweichen; der Akkumulator ist dann nutzlos, unter Umständen

Der voll geladene Akkumulator zeigt eine Spannung von etwa 2,05 Volt, die jedoch sehr rasch auf etwa 1,95 Volt sinkt; dann sinkt die Spannung nur sehr langsam bis auf etwa 1,85 Volt herab und nimmt dann rasch bis Null ab; die praktisch verwertbaren Grenzen sind 1,95 bis 1,85 Volt. — Beim Laden steigt die Spannung fast plötzlich von 1,85 auf 2,1 Volt, nimmt dann sehr langsam zu und erreicht gegen Ende der Ladung rasch den Wert 2,6 Volt; nach dem Ausschalten des Ladestromes sinkt die Spannung auf etwa 2,05 Volt.

Wenn zur Ladung A_1 Volt-Ampèrestunden erforderlich sind und wenn dem Akkumulator A_2 Volt-Ampèrestunden entnommen werden können, so ist der Wirkungsgrad: $\eta = A_2 : A_1$. — Bei guten Konstruktionen schwankt η zwischen 75 und 85 Proz. Die Lebensdauer eines guten Akkumulators kann mit etwa 10 Jahren angenommen werden.

Der Nachteil der Blei-Akkumulatoren, ihr großes Gewicht (das ihrer allgemeinen Verwendung in elektrischen Bahnen hinderlich ist) führten zu vielen Versuchen mit anderen Plattenmaterialien (Zink, Kupfer, Aluminium u. s. w.); jedoch hat sich bis jetzt keine dieser Konstruktionen in der Praxis auf die Dauer bewährt.

D. Leitungen. — Meß- und andere Nebenapparate.

§ 171. Leitungen. — Schutzvorrichtungen.

Zur Verbindung der Stromquellen mit den Apparaten und Maschinen, welche die elektrische Energie in andere Energieformen (mechanische Leistung, Wärme, Licht u. s. f.) umsetzen, dienen die elektrischen Leitungen. — Als Leitungs-

erial dient dafür fast ausschließlich Kupfer höchster Leitungsfähigkeit (Elektrikupfer); nämlich etwa 60, bezogen auf Quecksilber.

Die Leitungen müssen, um Strom-
nste durch Ableitung und Überleitung
benachbarte Stromleiter zu verhindern,
ihrer ganzen Länge isoliert wer-

Bei den „Freileitungen“ wird die
t als Isolationsmaterial verwendet
l bei den Unterstützungspunkten der
tungsdrähte kommen die bekannten
ellan-Glocken-Isolatoren (Fig. 627) zur

wendung. — Leitungen, die zur Ver-
ung in der Erde und im Wasser be-
mt sind, werden auf ihrer ganzen
nge durch Umpressung einer nahtlosen

staperschähle isoliert und durch Umspinnung mit imprägnierter Jute, Baum-
lle u. s. w., sowie durch Umpressung eines Bleimantels, nochmalige Umspinnung

nd endlich durch Armierung mit Eisenbändern oder
sendrähten (mechanischer Schutz) gegen die Einflüsse

r Feuchtigkeit u. s. w. geschützt; man nennt solche
itungen Kabel (Figg. 628 bis 630). — Für Wechsel-

um und Drehstrom werden jetzt fast ausschließlich
nzentrische Kabel verwendet, welche die Hin- und

ckleitung, bei Drehstrom alle drei Leitungen enthalten;
ch diese Anordnung wird die magnetische Wirkung

: Leiter nach außen hin aufgehoben. Bei langen
schelstromleitungen spielt auch die Kapazität der Kabel

e wichtige Rolle (teils störend, teils günstig). — LA 211.

Fig. 627.

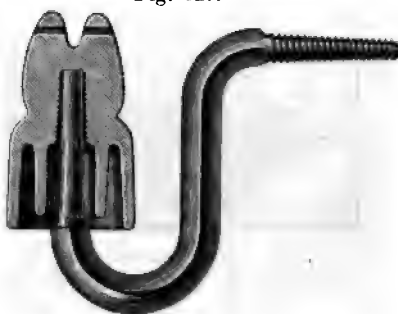
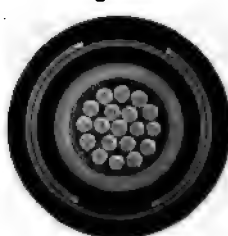


Fig. 628.



LA 211.

Fig. 629.



Fig. 630.

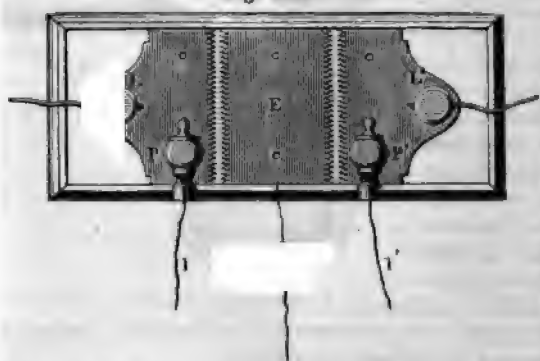


Sicherungen. — Um die Leitungen vor zu hoher Stromstärke und der
urch hervorgerufenen grossen Erwärmung zu schützen, bringt man (ähnlich
Sicherheitsventilen beim Dampfkessel) künstliche schwache Stellen an, welche
Bleistreifen bestehen, die beim zulässigen Maximum der Stromstärke ab-
nelzen (**Bleisicherungen**). Auch automatische Starkstromausschalter werden
fach für denselben Zweck verwendet.

Insbesondere müssen die Freileitungen gegen atmosphärische Entladungen
hützt werden. Die **Blitzschutzvorrichtungen**, welche zu diesem Zwecke kon-
iert wurden, beruhen alle darauf, dafs die atmosphärischen Entladungen leichter
e Luftstrecken (wenige Millimeter) überspringen, als dafs sie die Windungen
Apparate und Maschinen passieren; der Grund hierfür liegt darin, dafs der

Blitz als oszillatorische Entladung von überaus hoher Spannung und Schwingungszahl anzusehen ist, für welche infolge der großen Selbstinduktion der Windungen die zu schützenden Apparate und Maschinen einen außerordentlich hohen induktiven Widerstand

Fig. 631.

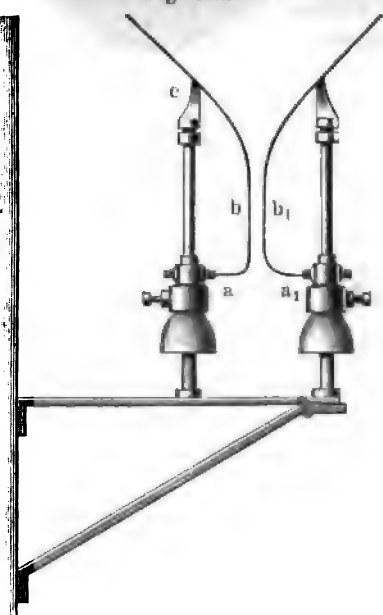


$= 2\pi \times \text{Periodenzahl} \times \text{sec} \times \text{Selbstinduktionskoeffizient}$ darbieten. Es sind im Prinzip die Blitzschutzvorrichtungen nach Fig. 631 anzuordnen. Diese sogenannten Blitzplatten genügen dieser einfachen Anordnung vollkommen für die genannten „Schwachstromlagen“ (Telegraphie, Phonie, Signalwesen u. dgl.). Bei den Starkstromanlagen hingegen müssen die

Schutzvorrichtungen derart angeordnet werden, daß zwischen den Leitungen L und L' und der Erde ein dauernder Kurzschluß verhindert wird, welcher den zwischen L und E und E und L' stehenden bleibenden Lichtbogen gebildet würde; e

Fig. 633.

Fig. 632.



Der Maschinenstrom der leitenden Brücke, welche der Blitz zwischen *LEL'* stellt hat, und hält diese unerwünschte Kurzschließung in Form eines Lichtbogens aufrecht. Die gebräuchlichen Mittel zur Abhilfe sind folgende: 1. Der Blitz nachfolgende Maschinenstrom erregt einen Elektromagneten, welcher mechanische Trennung der drei Platten bewirkt, so daß der Lichtbogen endlich „abreißt“, worauf die Platten in die ursprüngliche Lage zurückkehren. In hohen Spannungen genügt nach den Versuchen von Siemens & Halske die Erzeugung der Luft, unterstützt durch die auftretende elektrodynamische Wirkung, den Lichtbogen zwischen den hornähnlich gekrümmten Drähten *b b*, (Fig. 632) auszutreiben, bis er endlich zerreißt. Die Drähte sind dabei auf Isolatoren *a a* montiert, und für jede Leitung ist eine derartige Blitzschutzsicherung vorgesehen. In hohen Spannungen bildet der durch Blitzschläge eingeleitete Lichtbogen des Schlußstromes eine mächtige und imposante Flammenerscheinung (Fig. 633). Nach dem Vorschlage von Elihu Thomson (Amerika) wird der Lichtbogen durch die Einwirkung eines Elektromagneten „ausgeblasen“.

Dasselbe Prinzip der „magnetischen Funkenlöschung“ findet auch viel Anwendung bei Schaltvorrichtungen (Ausschaltern, Umschaltern u. s. w., „Roller“ bei elektrischen Bahnen) für Starkstromanlagen zur Verhütung des „Verschleissens“ der Kontaktflächen durch den Lichtbogen („Unterbrechungsfunken“).

§ 172. Meßinstrumente.

1. Ampèremeter. Die in der Elektrotechnik gebräuchlichen Meßinstrumente (d. h. zur Messung der Stromstärke) lassen sich nach ihrer Einrichtung einteilen in folgende Gruppen:

Fig. 634.

Fig. 635.



1. Elektromagnetische Ampèremeter (vgl. die Apparate nach Figg. 634 bis 636), bei denen eine feststehende Spule, welche von dem zu messenden Strome durchflossen wird, auf einen beweglichen permanenten Magneten (Torsionsgalvanometer von Siemens) oder auf ein Stück Weicheisen einwirkt (Ampèremeter von Schuckert [Fig. 634], Siemens, Schuckert [Fig. 635] u. s. w.), oder bei denen eine bewegliche Spule sich im Felde eines permanenten Magneten befindet (Fig. 636).

Fig. 636.



Magneten befindet (System d'Arsonval, besonders in tisch vollendeten Kon von Weston, Fig. 636).

2. Elektrodyn Strommefsinstrumente, chen eine feste Spule bewegliche Spule einwir Spulen sind von dem zu den Strome durchfloss trodynamometer von W Siemens, Fig. 637).

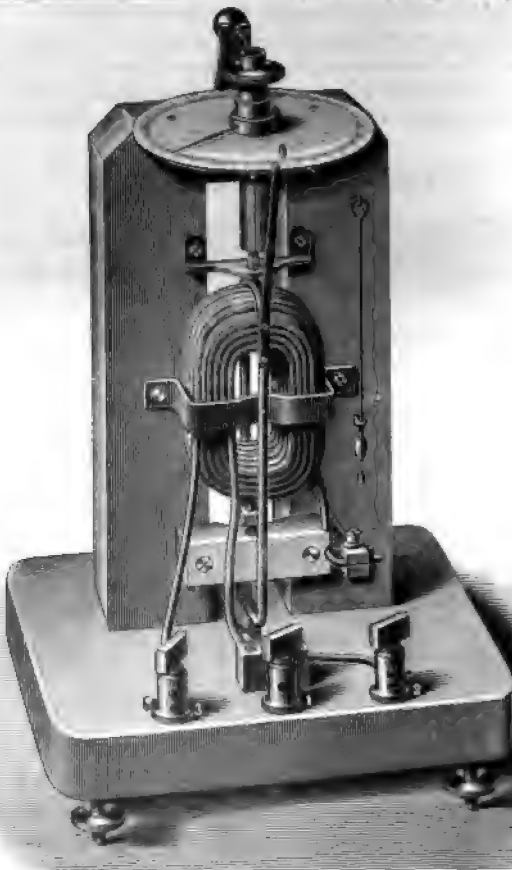


Fig. 637. Elektrodynameter (für Amp.).

3. Kalorische Strommefsinstrumente (Hitzdrahtinstrum Cardew, Hartmann & Braun). Bei diesen wird die Ausdehn

Drahtes zur Messung der Intensität des Stromes benutzt, der seine Wärmewirkung in diesem Drahte eine Verlängerung bringt. — Sie sind für Gleich- und Wechselstrom verwendbar. Zur Eichung dieser Ampèremeter wird zumeist das Kupfervoltmeter und das Voltmeter (§ 154) benutzt, also die elektrochemische Wirkung des

bei jenen Instrumenten, bei welchen permanente Magnete zur Anwendung kommen, sind nur für Gleichstrom brauchbar, während die übrigen auch bei Wechselstrom verwendet werden können, so z. B. die Elektrodynamometer, da in den Spulen der Strom zugleich die Richtung wechselt, also immer dieselbe Wirkung stattfindet.

Voltmeter dienen zur Messung von Spannungs-(Potential-)differenzen; Einrichtung und Theorie sind in § 149 erklärt worden. — Die **Elektrometer** (§ 131, § 136) werden in der Elektrotechnik zur Messung der Potentiale und Potentialdifferenzen verwendet.

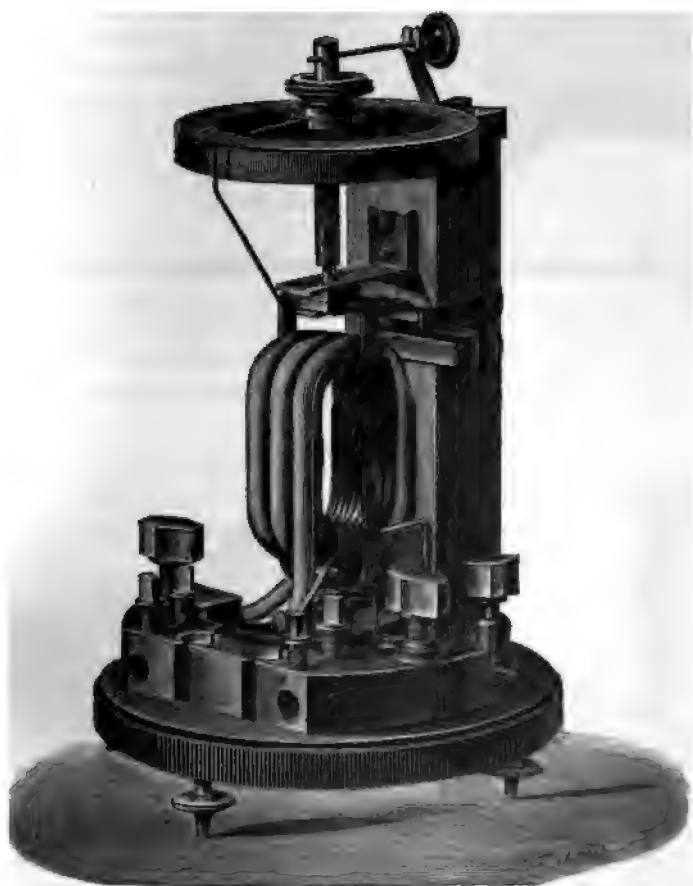


Fig. 638. Wattmeter (Ganz & Co.).

III. Wattmeter dienen zur Messung des elektrischen Eff (Fig. 638 a. v. S.). Sie kommen ihrem Bau nach einem Elektrodynam gleich; die feststehende Spule aus dickem Draht wird von dem strome J durchflossen, die bewegliche Spule aus dünnem Draht d

Fig. 639.



von einem Zweigstrom i , welcher der samen Spannungsdifferenz E proportion die gegenseitige Einwirkung hängt dal dem Produkte $(E \cdot J)$ Watt ab.

IV. Die Messung der elektrischen Ar folgt mit Hilfe der Elektrizitätszähler (el. Vermesser, Fig. 639), deren Angaben in Watts (§ 22, Ende; Hektowattstunden, Kilowattstunden folgen. Diese Instrumente sind im Prinzip anderes als Wattmeter, welche aber den g Effekt (Watt) außerdem noch mit der Zeit (multiplizieren, während welcher dieser Effekt wurde; mit Hilfe eines Zählwerkes werden gemessenen Wattstunden addiert und es kön Summen an den Zeigern des Zählwerkes werden. Die Angaben dieser Elektrizitätszähler (Verbrauchsmesser) bilden die Grundlage für rechnung des Strompreises, den die Elektrizität von ihren Konsumenten einheben.

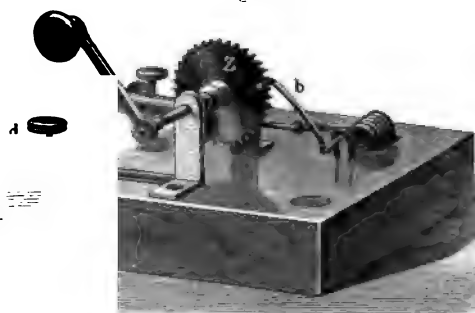
§ 173. Elektrische und elektrotechnische Nebengeräte

Eine große Zahl mannigfacher Formen von Nebengeräten (z. B. Schrauben, Fig. 640) paßt sich den besonderen Anforderungen verschiedener physikalischer Experimente über Elektrizität und insbesondere den elektrischen Anwendungen an. Im folgenden werden nur einige wenige solche Vorrichtungen beschrieben.

Fig. 640.



Fig. 641.

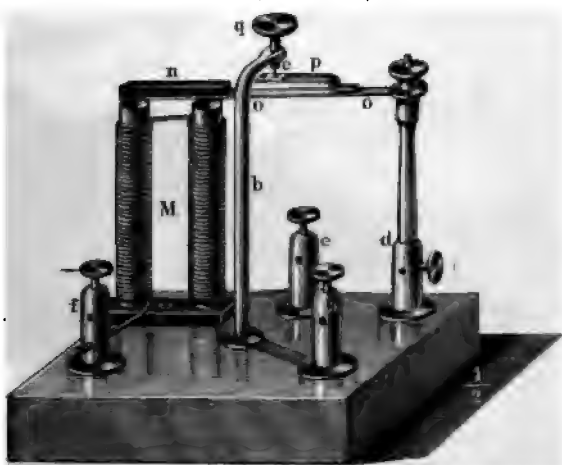


Unterbrecher, Selbstunterbrecher ändern nur die Stärke (womöglich von Null bis zum Maximum in sehr kurzer Zeit) nicht die Stromrichtung.

Das Unterbrechungsrad (Fig. 641) wird durch die Kurbel gedreht; jedem Umlauf eines Zahnes von *Z* an die Feder *b* entspricht ein Schließen des Stromes; wurde namentlich zu physiologischen Zwecken verwendet.

Der Selbstunterbrecher (erfunden von KARL WILHELM VON REICH und unabhängig von ihm durch SIGMUND MARSHALL 1836; daher Marshallscher Hammer, unpassend häufig telegraphischer Hammer genannt) beruht auf demselben Prinzip, das wir bei der elektrischen Induktionsmaschine (Fig. 588, S. 530) Anwendung fanden. Der Batteriestrom tritt an Klemme *a* (Fig. 642)

Fig. 642.



, bei *f* aus (von Klemme *d* geht er z. B. in ein Induktorium und kommt von da nach *e* zurück); der Strom geht von *a* über *b* durch die Kontaktschraube *q* an Kontaktplättchen *c* und von hier über *p*, *o*, *o*, *d*—*e* in die Windungen des Elektromagneten *M* nach *f*. — Wird der Anker *n* (Hammerkopf) durch *M* angezogen, so wird der Kontakt bei *c* gelöst, *M* wird magnetisch, durch die Elastizität der Feder *oo* (Hammerstiel) wird der Kontakt bei *c* wiederhergestellt u. s. f.

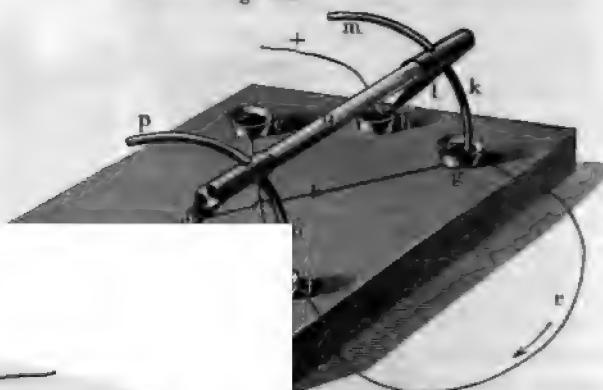
Meist sind solche Selbstunterbrecher mit Induktorien zu einem Ganzen verknüpft, wobei häufig der Elektromagnet *M* ersetzt ist durch das Bündel von Eisenteilen im Innern der Primärspule.

Theoretisch interessant ist die Frage, warum die Schwingungen dieses Hammers sich erhalten, solange der Strom fließt, und warum nicht der Hammer in die Gleichgewichtsstellung zwischen den ihm durch die Kontaktschraube *q* und die elastische Kraft der Feder *oo* angewiesenen Grenzlagen nach einigen Schwingungen einnimmt (ähnlich wie ein Pendel trotz der immer wirkenden Dämpfungskraft infolge der Bewegungshindernisse nach und nach zur Ruhe kommt — gegen beim Uhrpendel das sinkende Gewicht dem Sperrrad immer Anstöße im gleichen Sinne erteilt). — Die Antwort erfordert die Mitberücksichtigung der beim Öffnen und Schließen des Kontaktes *c* den Primärstrom begleitenden Extraströme sowie der Hysteresis des Eisenkernes des Elektromagneten; beide führen nämlich die Symmetrie der Kräfte beim Auf- und Abgehen des Hammers in der Weise ab, daß vom Augenblicke der Unterbrechung an (der Trennung des Hammerkopfes von der Kontaktschraube) die Bewegung des Hammerkopfes zum Stillstand hin in einem etwas stärkeren Kraftfelde erfolgt als beim Rückgange.

Stromwender, Wippen, Kommutatoren ändern die Stromrichtung (und nur vorübergehend die Stromstärke).

Die Pohl'sche Wippe (Fig. 643) findet nicht nur in der Physik, sondern auch in der Elektrotechnik als Laboratoriumsapparat häufig Anwendung. An einer Platte aus Hartgummi (Holz) sind sechs mit Quecksilber gefüllte Vertiefungen angebracht, in welchen zwei gegeneinander isolierte dreiarmlige Metallbügel so ein-

Fig. 643.



gesenkt werden können, das Mal die Verbindungen bc und np c und f , bzw. d und g sind verbunden. — Ähnlich die Poggendorff's.

Verbindungen bg und fe , das andere Mal werden können; die Quecksilberzwei Drähte dauernd über Kreuz ver-
Quecksilberwippe.

Ausschalter dienen dem dauernden Offen-, bezw. Geschlossenhalten von Strömen; sie werden ein- und zweipolig (bei Drehstrom dreipolig) gebaut.

Fig. 644.



Da es sich dabei meist um hohe Stromstärken und auch oft um hohe Spannungen handelt, müssen die Kontaktflächen reichlich bemessen werden (für etwa 0,3 Amp. je 1 mm² Berührungsfläche);

als Kontakte werden fast immer Schleiffedern aus Kupfer oder Messing verwendet, weil solche Kontakte sich durch den Gebrauch selbst rein halten. Da der beim Unterbrechen stets auftretende Lichtbogen die Kontakte verbrennt, werden die Ausschalter oft als „Momentausschalter“ (Fig. 644)

ausgebildet, bei denen die Unterbrechungsgeschwindigkeit unabhängig ist von der Geschwindigkeit, mit welcher der Schalthebel bewegt wird. Bei hohen Spannungen wird oft eine „Funkenentzieh-Vorrichtung“ angebracht, bei welcher der Lichtbogen

in einem leicht auswechselbaren Kontaktstück (gewöhnlich aus Kohle) an; ferner wird dabei oft der Lichtbogen durch einen Elektromagneten abgebrochen, ähnlich wie bei den Blitzschutzvorrichtungen.

Die Zellen sind in derselben Weise für Starkstromanlagen eingerichtet; dazu, um von einer Stromquelle (Dynamomaschine u. s. w.) den Strom in zwei oder mehrere verschiedene Stromkreise senden zu können.

Die Zellen sind als Schalter. Da die EMK einer Akkumulatorenbatterie bei der Ladung ebenso die EMK bei der Entladung sinkt, hält man die Klemmen der Akkumulatorenbatterie (innerhalb der Grenze von etwa 2 Volt) konstant, indem man die Anzahl der Batteriezellen verringert oder vermehrt (Fig. 645).

Fig. 645.

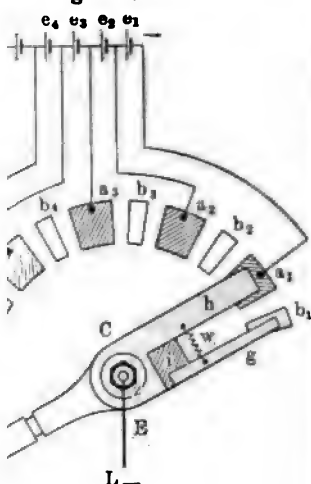
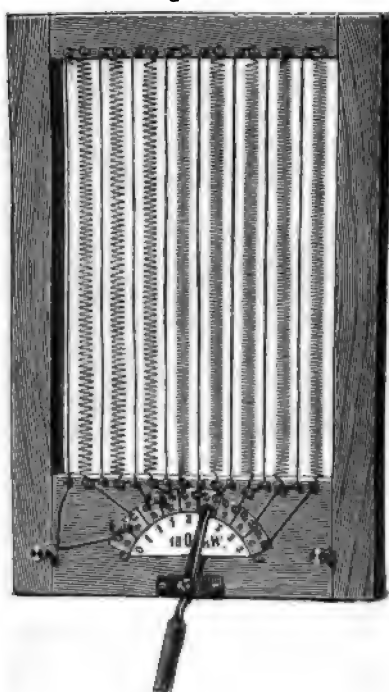


Fig. 646.



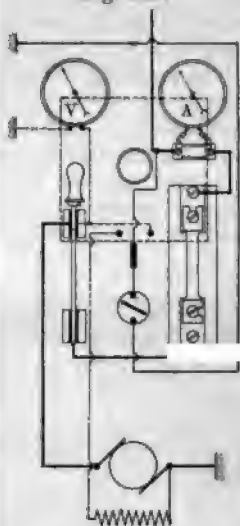
Die Zellen und Regulierwiderstände der Dynamomaschinen werden in den Erregerwindungen der Widerstände (Rheostaten, gl. § 149) konstant gehalten, die Widerstände werden geändert. Bei Elektroanlagen ähnliche Widerstände zum An- und zur Regulierung der

die Zellen als auch die Regulier- und Anlaufwiderstände werden in der Zellenbatterie eingebaut.

Die Zellen und Minimalautomaten. Die Überschreitung, bzw. Unterschreitung bestimmter Stromstärken lässt sich durch Ausschalter verhindern; zu großer, bzw. zu geringer Stromstärke sich automatisch öffnen; besonders beim Betriebe der elektrischen Bahnen allgemeine Anwendung.

Die Zellen einer elektrischen Licht- oder Kraftanlage erforderlichen Messinstrumente und Reguliervorrichtungen werden auf dem „Schaltbrett“ (Schaltwand, Schaltbühne bei großen Anlagen) übersichtlich zusammengefasst, die Bedienung und Kontrolle der Anlage möglichst zu erleichtern; die „Schaltbretter“ werden zumeist aus Marmor hergestellt (Fig. 647 a. f. S.).

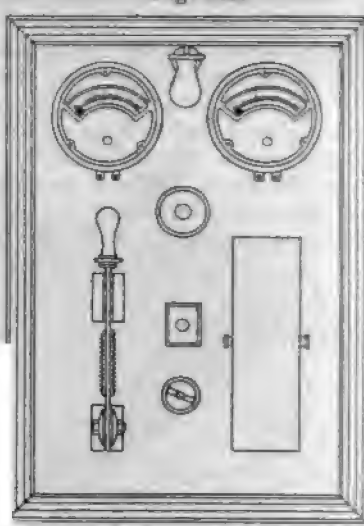
Fig. 647.



In den Kabelleitungen werden
Kasten eingebaut, welche zum
Leitungen enthalten; große
brunnen“. Bei der Einführung
sogenannten „Hausanschlüsse“

bleisicherungen für die betreffende „Hausinstallation“.

Fig. 648.



an Verzweigungspunkten die Verteilung
die Bleisicherungen für die abzweigend
eser Art führen den Namen „Kabe
Lichtleitungen in die Häuser finden d
ung; sie enthalten stets auch die Haup

Außerdem finden in der Elektrotechnik für besondere Fälle noch verschiedene
Spezialkonstruktionen Anwendung, die jedoch nicht von allgemeinem Interesse sind
und daher hier übergangen werden können.

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY



Vierter Teil:

ische, meteorologische, ische Erscheinungen.

us der Astronomie.

licher Überblick (Blick- und Vorblick).

reicht die „alte Zeit“ bis KOPERNIKUS (1473 bis 1543), System (meist das „ptolemäische“ genannt) durch das und dadurch eine „neue Zeit“ aller astronomischen Vorden wir noch jetzt leben. — Innerhalb des vorkopernischen ist — unbeschadet großer Verdienste der Chinesen, älterer Griechen, namentlich der pythagoreischen Schule (5 v. Chr.) der Vater der wissenschaftlichen Astronomie innerhalb der nachkopernikanischen Zeit ist NEWTON (1643) physischen Astronomie, welche die Erscheinungen als ein besonderes Anwendungsgebiet der für das Weltgesetz verstehen lehrte.

geschichtlichen Zeiten reichen im Denken der Menschen, Archäologie ... bezeugt wird, die Vorstellungen von Tag, Woche, Jahr ... zurück. Noch vor HIPPARCH ist namentlich der babylonischen und der griechischen quantitativ schon recht genaue Kenntnis folgender astronomischer veränderliche Lage der „Fixsterne“ in Bezug aufeinander; es Fixsternhimmels in Bezug auf die Erde um die Ost-(Süd-) West binnen 24 Sonnenstunden *minus* drauseilen des Fixsternhimmels in Bezug auf die Sonne ch fast 4 Minuten; die hierin gegebene Bewegung der Fixsternhimmel im Sinne West-(Süd-)Ost um täglich fast jährlich 360°, d. h. die Bewegung der Sonne im Laufe Sonnentagen, in einer auf den Fixsternhimmel sich projizierten „ekliptik“, welche als ein durch bestimmte Sternbilder, den

„Tierkreis“, gehender größter Kreis erkannt war, gegen den die Weltachse um $66\frac{1}{2}^\circ$ geneigt ist. — Das Zurückbleiben des Mondes hinter den Fixsternen um täglich 50 Zeitminuten oder $13'$ und die binnen je einem „siderischen Monat“ von $27\frac{1}{2}$ Tagen im Sinne WSO in einer Bahn nahe der Ekliptik sich vollziehende Wiederkehr des Mondes zu denselben Fixsternen, sowie die binnen einem „synodischen Monat“ von $29\frac{1}{2}$ Tagen sich abspielenden Wechsel der „Phasen“ (Neumond ☾, erstes Viertel ☾, Vollmond ☽, letztes Viertel ☾). — Die überwiegend ebenfalls west-(süd-)östliche, zum Teil aber auch im entgegengesetzten („rückläufigen“, d. i. ost-süd-westlichen) Sinne erfolgende Bewegung von Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn, ebenfalls in der Nähe der Ekliptik, und die Perioden ihrer annähernden Wiederkehr zu denselben Fixsternen und der Sonne. — Alle diese Erkenntnisse sind mehr oder minder genaue Beschreibungen der Beobachtung sich darbietenden Tatsachen; es sind dies die Konstatierungen, die auch heute die allerersten und unentbehrlichsten Grundzüge der deskriptiven und also auch jeder erklärenden Astronomie bilden. An diesen Beschreibungen waren aber auch erklärende Sätze bereits um jene Zeit richtig aufgestellt und von den Denkern angenommen: so der Satz von der Kugelgestalt der Erde, für den schon ARISTOTELES dieselben „Beweise“ vorträgt, welche sich noch heute in den Elementarbüchern finden (natürlich ausgenommen den aus den Weltumsegelungen), und auch das Prinzip, die Größe der Erde aus der Verbindung von Winkelmessungen am Himmel und Längenmessungen auf der Erde zu bestimmen, wurde erkannt und (u. a. von ERATOSTHENES) praktisch durchgeführt. — Desgleichen war die Kugelgestalt des Mondes und die Ursache seiner Lichtphasen scharfsinnig aus der richtigen Beobachtung erschlossen worden, daß die Grenze zwischen dem hellen und dunklen Teil immer die Gestalt von Halbellipsen (inkl. Kreis und Gerade) zeigt.

Daß unbeschadet dieses Reichtums astronomischer Einzelerkenntnisse erst HIPPARCH das Verdienst einer wissenschaftlichen Behandlung im gegenwärtigen Sinne zuerkannt wird, ist darin begründet, wie er die Aufgabe einer exakt mathematischen Beschreibung der himmlischen Bewegungen erfaßte (wie viel später GALILEI die für die Bewegung fallender und geworfener Körper auf der Erde). HIPPARCH löste diese Aufgabe für Sonne und Mond, und PROKLAMUS (bis 150 n. Chr.) nach der nämlichen Methode auch für die Planeten.

Speziell für die Sonne lautet die Aufgabe (in der Sprache der gegenwärtigen Phronomie, vergl. § 3): Das Weg-Zeit-Gesetz für die Bewegung der Sonne längs der Ekliptik anzugeben. HIPPARCH hatte erkannt, daß die Winkelgeschwindigkeit der Sonne innerhalb der Zeit eines Jahres veränderlich ist (als Scheitel des Seh winkels das Auge des Beobachters an irgend einem Punkte auf oder in der Erde angenommen); nämlich bezogen auf die heutige Zeitrechnung legt die Sonne am 1. Januar den größten, am 2. Juli den kleinsten Bogen in der Ekliptik zurück; diese Bogen und daher auch die Winkelgeschwindigkeiten verhalten sich wie 61:57. Da nun HIPPARCH, wie alle Alten und wie selbst noch KOPERNIKUS, an der vorgefaßten Meinung festhielt, daß die Bahn jedes Gestirnes ein reiner Kreis und die Bahngeschwindigkeit eine konstante sei (da andere minder einfache Bewegungen der himmlischen Körper „nicht würdig“ wären), so gestaltete sich seine Aufgabe dahin: Aus einer endlichen Zahl wirklich beobachteter Orte der Sonne diejenige exzentrische Stelle für die Erde innerhalb der als Kreis angenommenen Sonnenbahn zu ermitteln, für welche auch alle übrigen, früher beobachteten und künftig zu beobachtenden Orte der Sonne mit den aus diesem „exzentrischen Kreis-

in Form von „Sonnentafeln“ berechneten übereinstimmen. Trotz der Irrigkeit der (erst durch KEPLERS Ellipsen berichtigten) Grundannahme entsprachen HIPPARCHS numerische Angaben mit übrigen bestmöglicher Annäherung den Beobachtungen für mehr als ein Jahrtausend. (LA 220.)

LA 220.

Auch für den Mond löste HIPPARCH die analoge Aufgabe, wiewohl diese noch bei weitem schwieriger war, indem der Mond zahlreiche „Ungleichheiten“ aufweist (für welche erst die aus NEWTONS Gravitationsgesetz folgende Theorie der Störungen, § 21 II, die einheitliche Beschreibung zusammen mit ihrer Erklärung erlaubte). — Auch für die Präzession der Nachtgleichen fand schon HIPPARCH das richtige deskriptive Gesetz (Bewegung der Himmelspole in Kreisen, die der Ekliptik in $66\frac{1}{2}^\circ$ Abstand parallel sind).

Während für Sonne und Mond die mathematische Darstellung der Bahnform und des Weg-Zeit-Gesetzes möglich gewesen war, indem nur der Erde eine exzentrische Stellung in der Ebene der angenommenen Kreisbahnen angewiesen wurde, war eine solche verhältnismäßig einfache Annahme nicht mehr ausreichend, um die Veränderlichkeit der Geschwindigkeiten und die zeitweiligen Rückläufigkeiten (Zacken- und Schlingenbildung) in den Bahnen der Planeten Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn mathematisch zu beschreiben. Dies leistete des PTOLÉMÄUS' vielgenannte „epizyklische Theorie der Planetenbewegungen“, und zwar mit wesentlich demselben mathematischen Mittel „exzentrischer Kreise“, welches Hipparch anzuwenden gelehrt hatte: nur mußte Ptolemäus annehmen, daß auf der Peripherie des zu jedem Planeten konstruierten „exzentrischen Kreises“ (Deferent) nicht der Planet selbst sich bewege, sondern der Mittelpunkt eines kleinen Kreises, des „Epizykels“, auf dessen Peripherie erst der Planet gleichförmig fortschreitet. Ganz wie dem Hipparch durch glückliche Spezialisierung der verfügbaren Größen die Bestimmung der exzentrischen Lage der Erde, gelang auch dem Ptolemäus durch eine den Beobachtungen möglichst sich anpassende Wahl der relativen Größe und gegenseitigen Lage von Deferenten und Epizykel, sowie der verhältnismäßigen Geschwindigkeiten der beiden letzteren Bewegungen, eine so gute „Theorie der Planetenbewegung“ in Form von Tafeln herzustellen, daß die Angabe dieser seiner *μεγάλη σίνταξις*, von den Arabern *Almagest* genannt, noch ein Jahrtausend später in leidlicher Übereinstimmung mit den immer erneuerten Beobachtungen standen. — Freilich mußte aber jene Theorie, um sie den feineren Einzelheiten der Bewegungen anzupassen, immer mehr mit Hypothesen belastet werden, indem zu jenen Epizyklen noch weitere Epizyklen zweiter Ordnung angenommen wurden. (Indem am Himmel nur die Projektion aller dieser fingierten gleichförmigen Kreisungen beobachtet werden, kommt diese Hipparch-Ptolemäische Methode der mathematischen Beschreibung durch Kreisbewegungen auf die Ersetzung einer gegebenen Funktion durch eine Reihe von Sinus, also auf die durch Fourier begründete, und in der modernen Physik für die verschiedensten Kapitel der Physik überaus fruchtbare, ja unentbehrlich gewordene mathematische Methode hinaus; vergl. mathem. Anhang, Nr. 20.)

Anh. 20.

Die zunehmende Verwicklung der Planetentheorie gab den letzten Anstoß zur Umgestaltung unseres gesamten Weltbildes durch KOPERNIKUS (1543), dessen System die zwei Hauptsätze enthält:

I. Hauptsatz: Die Erde dreht sich binnen einem Sterntag um ihre Achse (tägliche Rotation der Erde).

II. Hauptsatz: Die Erde läuft binnen einem Jahre um die Sonne (jährliche Revolution der Erde).

Durch den I. Satz wird die tägliche Bewegung des Fixsternhimmels in Bezug auf die Erde, durch den II. Satz die jährliche Bewegung der Sonne in Bezug auf den Fixsternhimmel und die Erde erklärt. Aus dem II. Satz erklären sich dann auch speziell die Bewegungen der Planeten als unmittelbare Folge, ohne eine besondere Hypothese oder Hilfshypothese zu erfordern, indem jene Zuckungen und Schlingen sich als die parallaktischen (§ 183) Abbilder der Erdbahn ergaben. Wieder blieb nach diesen Grundgedanken als weitere Aufgabe nur die rein mathematische Ausgestaltung der Theorie. Um z. B. zu erklären, warum die Epizykel für Jupiter kleiner sind als die für Mars, genügt es anzunehmen, daß Jupiter von der Erde entfernter ist als Mars; und umgekehrt läßt sich aus dem Verhältnisse jener Größen und der Häufigkeit des Auftretens von Schleifen bei je einem Umlaufe der genannten Planeten um den ganzen Fixsternhimmel nächst der Ekliptik das Verhältniß der Abstände zwischen Sonne und Erde, bezw. Mars und Jupiter ermitteln; ähnlich aus der Weite der Schlingen in der Richtung normal zur Ekliptik auch die Lage der Bahnebene. — Für die richtige Würdigung von Kopernikus' Ausgestaltung seiner beiden Hauptsätze und empfing die Druckbogen seines *Haustum* auf seinem Sterbebette 15. beiden Grundgedanken nicht selbst den Pythagoreern PHILOLAUS, ARISTARCH, was bei diesen nur genialer Einfalls Ausgestaltung durch Kopernikus zu aber auch diese Theorie wieder mit weiterhin vorausgerechneten Beobachtungen es bei Festhaltung der Hipparchischen und rein gleichförmiger Bewegungen möglich war, so erwies sich wieder durch feinere Abweichungen zwischen der hierauf gegründeten Rechnung und der wirklichen Beobachtung jene Annahme als Vorurteil, und zwar als ein mit den Tatsachen unverträgliches.

Erst KEPLER (1571 bis 1631), welcher vom Beginne seiner astronomischen Studien an sich zur kopernikanischen Theorie bekannt hatte, verbesserte durch die beiden ersten der nach ihm benannten „Gesetze“ jenen Mangel, indem er als Form der Bahn der Planeten die Ellipse und als Gesetz der Geschwindigkeit das der konstanten Flächenräume erwies. Diese beiden Gesetze hat Kepler induziert aus vieljährigen Beobachtungen, welche TYCHO BRAHE (ein älterer Zeitgenosse Keplers, Gegner der kopernikanischen Lehre) über die Örter des Mars angestellt und welche Kepler fortgesetzt hatte, und erst nach dem mühevollsten Durchprobieren einer langen Reihe hypothetischer Gesetze (deren einzelne bis auf Differenzen von 8' mit den Beobachtungen stimmten, ohne daß sich Kepler hiermit zufrieden gegeben hätte) konnte er jene beiden Gesetze als durch die besten Ergebnisse der damaligen Beobachtungskunst verifiziert verkünden (1609, „*De motibus stellae Martis*“); worauf durch ihn bald ihre Bestätigung auch für die übrigen Planeten und den Mond erfolgte. — Während jene beiden ersten Gesetze die Bewegungen jedes einzelnen Planeten beschreiben, gibt das „dritte Keplersche Gesetz“ eine Beziehung zwischen den Entfernungen der verschiedenen Planeten von der Sonne. Eine solche Beziehung hatte Kepler bereits in seiner Erstlingschrift (*Mysterium cosmographicum*, 1596) gefunden zu haben vermeint (in einer uns heute höchst abenteuerlich dünkenden Beziehung der Größen der Bahnen zu den Größen der fünf regulären Polyeder). Aber erst 23 Jahre später (1619, *Har-*

monice mundi) fand Kepler das wahre Gesetz: es war nicht ein solches zwischen den Entfernungen allein (eine annähernde Gesetzmäßigkeit dieses Inhalts bildet die „TITIVS-BODRSche Regel“, welche aber nicht in demselben Range mit Keplers Gesetzen steht), sondern zwischen den mittleren Entfernungen und den Umlaufzeiten ($a_1^3 : a_2^3 = T_1^2 : T_2^2$). Auch dieses Gesetz war durch direkte Induktion gefunden worden. — Durch die drei Gesetze Keplers war das uralte Problem einer exakten Beschreibung der Planetenbewegungen mit einer bis dahin nie erreichten Annäherung (auch jene drei Gesetze sind eben nur Annäherungen an die Wirklichkeit) gelöst. Die volle historische und logische Bedeutung jener Induktionen Keplers konnte aber erst ermessen werden, nachdem sie sich als die gerade notwendige und ausreichende Bedingung für die Erklärung jener Erscheinungen aus den Prinzipien der Galilei-Newtonschen Mechanik erwiesen hatten: die Grundlinien von NEWTONS Gedankengang werden in § 21 („Allgemeine Gravitation“) entwickelt.

Vorstehender Überblick über die Entwicklung astronomischer Beobachtungen und Theorien gibt ein Beispiel im großen aus der Geschichte der Wissenschaft, wie die möglichst genaue Beschreibung der Einzelercheinungen allen zusammenfassenden Erklärungen notwendig vorausgehen muß — wie aber durch solche Zusammenfassungen auch die feinere Ausgestaltung der Beschreibungen immer wieder neue Anregung bekommt. — Im folgenden werden einige dieser Beschreibungen und Erklärungen noch näher ausgeführt, wobei die bloßen Beschreibungen der relativen Bewegungen sowohl nach dem alten geozentrischen wie nach dem heliozentrischen System dargestellt werden können. Denn es bleibt immer zu bedenken, daß unbeschadet der gegenwärtig unverbrüchlichen Überzeugung aller Gebildeten von der Richtigkeit des kopernikanischen Systems die genaue Auffassung der täglichen, vor unsern Augen sich abspielenden Vorgänge am Himmel nach dem geozentrischen System (leicht irreführend häufig als „scheinbare Bewegungen“ bezeichnet) jetzt nicht minder als in den ältesten Zeiten die erste Voraussetzung für alle theoretische Um- und Ausdeutung der astronomischen Tatsachen bildet.

A. Beschreibung der Bewegungen von Fixsternen, Sonne und Erde in Bezug aufeinander.

§ 175. Die drei Himmels-Koordinatensysteme. — System des Horizontes.

Vorbemerkung. Da wir durch alsbald sich aufdrängende Schlüsse (Genaueres in § 182) erkennen, daß die scheinbare Entfernung von Sternen, Sonne und Mond, wie sie sich beim naiven Anblick des „Himmelsgewölbes“ uns darstellen, den wirklichen Größenverhältnissen und absoluten Größen bei weitem nicht entsprechen können (z. B. scheint dem Kinde, wenn es durch eine lange Gasse geht, der Mond nachzulaufen), so werden alle Lagebestimmungen der am Himmel sichtbaren Gebilde zunächst nicht in Längen-, sondern nur in Winkelmaß gegeben (entsprechend den Kreisbögen der Teilkreise an allen astronomischen Meßinstrumenten). Um das Auge des Beobachters (bezw. bei Beobachtungen durch das Fernrohr um den optischen Mittelpunkt des Okulars, manchmal auch des Objektivs, § 112) ist mit beliebigem Halbmesser eine Kugel gelegt gedacht und

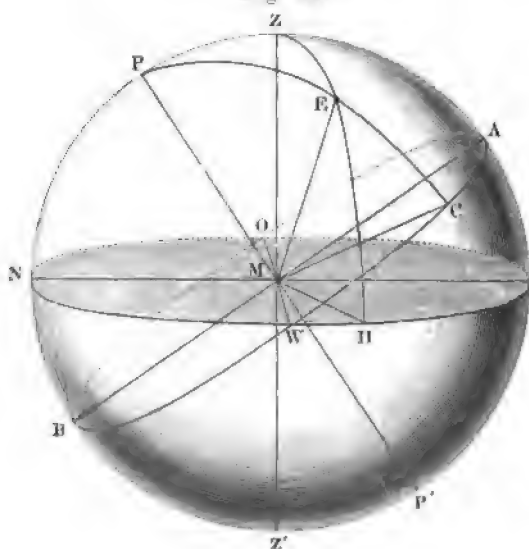
die Lage je dreier Punkte am Himmel durch ein sphärisches Dreieck (Anhang
 Anh. 18. Nr. 18) auf dieser Kugel dargestellt; wobei wie bei jedem sphärischen Dreieck
 nur die Kanteneinkel („Seiten“) und Flächenwinkel („Winkel“) derjenigen körper-
 lichen Ecke, deren Scheitel den Beobachtungsort darstellt, nicht aber der
 Kugelhalbmesser, bezw. die Kantentlänge wesentlich sind. In diesem Sinne sind
 auch alle folgenden Angaben über die „Abstände“ je zweier Gestirne am „Himmel-
 gewölbe“, über die „Bahnen“, welche Himmelskörper dort beschreiben, ferne
 über Hauptkreise (größte Kreise) und Nebenkreise an der „Himmelskugel“
 zu verstehen; desgleichen, wenn diese abgebildet wird auf „Himmelsgloben“
 von beliebigem Halbmesser, und wenn die ganze Himmelskugel oder Teile von
 ihr nachgebildet werden durch Sternkarten (nach denselben Projektionsmethoden
 wie der Erdglobus auf Landkarten).

Wie auf den Erdkugeln, bezw. den Erdgloben jeder Punkt der Erdoberfläche durch die Koordinaten der geographischen Länge (als Abszisse) und geographischen Breite (als Ordinate) angegeben wird, so wird auch jeder Punkt am Himmel bezogen auf ein bestimmtes Himmelskoordinatensystem.

Jedes derselben ist charakteristisch, so dass sie unterschieden werden als der **Eklptik**; ferner durch Punkt und den Sinn der Bewegung werden die Ordinaten gegeben, die Blick auf ganz bestimmte, das des Horizontes im H. Äquators im Hinblick auf (§ 176), das der Eklptik im Fixsternhimmel (§ 177). — Im Zusammenhang mit diesen Erscheinungen selbst sind die Instrumenten kurz beschrieben.

rei Himmelskoordinatensysteme. je einen Grundkreis, nach welchem des **Horizontes**, des **Äquators** und Grundkreise festgesetzten Anfangeneten Abszissen; normal zu diesen ellung dieser Systeme erfolgt im Hnstronomische Erscheinungen, nämlich ilot und Libelle (§ 20), das d Umdrehung des Fixsternhimmels den jährlichen Umlauf der Sonne werden jene Systeme im Zusammenen zu ihrer exakten Messung dienen

Fig. 650.



1. System des Horizonts. Sein Grundkreis ist der **Horizont** (und zwar zunächst der sogenannte „scheinbare“, d. i. die durch das Auge des Beobachters gehende horizontale Ebene, wie sie durch die Libelle angegeben wird; wogegen als der zu jenem Beobachtungsort gehörige „wahre“ Horizont die zum scheinbaren parallel durch den Erdmittelpunkt, § 178, gelegte Ebene bezeichnet wird). Der von allen Punkten des Hor-

zontes um 90° gegen oben abstehende Punkt heist **Scheitelpunkt** oder **Zenit**, Z , Fig. 650 (sein „Gegenpunkt“ Nadir, Z'); auf diesen weist das Bleilot.

Der Nullpunkt im Horizontkreis ist der **Südpunkt** S , d. i. derjenige Punkt des Horizontes, über welchem die Fixsterne (und annähernd auch die Sonne) bei ihrem täglichen Umlaufe „kulminieren“ (vergl. den folg. §).

Die Lage eines Punktes E wird im System des Horizontes bestimmt durch das **Azimut** SH (vom Südpunkt im Sinne SWNOS gezählt von 0° bis 360°) und durch die **Höhe** HE (vom Horizont gezählt bis zum Zenit als positiv, bis zum Nadir als negativ).

Zur Beobachtung dieser Größen dient das **Altazimut** (Theodolit, Universalinstrument, Fig. 651), im wesentlichen bestehend in einem Fernrohr (oder auch bloß einem Diopter) mit zwei Teilkreisen, einem horizontalen (Azimutalkreis) und einem vertikalen (Höhenkreis). — Da es meistens nicht beabsichtigt ist, den Theodoliten ein für allemal so aufzustellen, daß der Nullpunkt des Horizontalkreises selbst nach dem Südpunkt orientiert ist, so pflegt von einem als „Mire“ dienenden festen Punkt in der Nähe des Horizontes (einer Kirchturmspitze, einem Triangulierungszeichen) ein für allemal das Azimut bestimmt zu werden, von dem aus dann bei beliebiger Stellung des Theodoliten leicht die Azimute aller übrigen Punkte bestimmt werden.

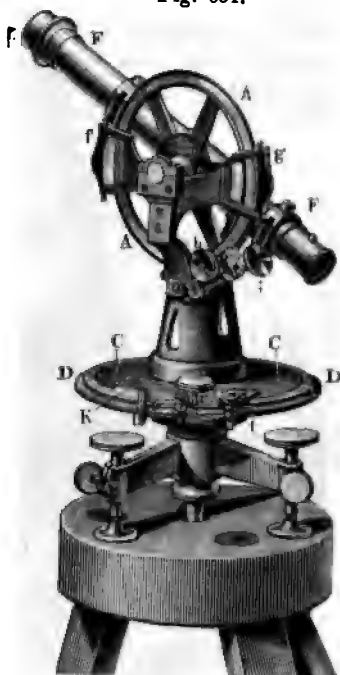


Fig. 651.

Aus den Verschiedenheiten der Horizonte, bzw. Zenite verschiedener Beobachtungsorte und ihrer verschiedenen Lage in bezug auf den Fixsternhimmel ergibt sich die nichtebene Gestalt der Erdoberfläche, § 178.

§ 176. System des Äquators. — Die tägliche Drehung des Fixsternhimmels, bzw. der Erde.

Hat man sich durch die Beobachtung des Sternhimmels zu verschiedenen Zeiten des Jahres und verschiedenen Stunden je einer Nacht eine vorläufige Kenntnis davon erworben, wo je ein bestimmtes Sternbild oder ein einzelner Stern zu finden ist, so lassen sich diese Lagenänderungen dieser „Fixsterne“ in bezug auf die Erde zusammenfassend so beschreiben:

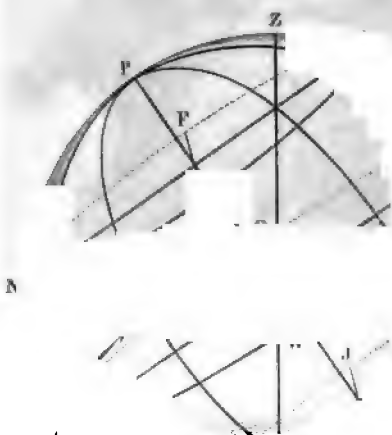
Vorkopernikanisch: Der Fixsternhimmel als Ganzes dreht sich um die **Weltachse** im Drehungssinne **OSW**; oder

kopernikanisch: Die Erde dreht sich um die **Erdachse** im Sinne **WSO**.

Diese Beschreibung der relativen Bewegung von Fixsternen und Erde ergibt sich aber nicht schon hinreichend genau aus jenem allgemeinen Anblick, sondern

erst aus bestimmten Messungen der Bewegung einzelner „Fundamentalssterne“, sowie der in erster Annäherung (vergl. § 188) unveränderlich bleibenden Winkelabstände der übrigen von jenen Sternen, in welcher Unveränderlichkeit der gegenseitigen Lage weitaus der meisten Sterne, unbeschadet ihrer täglichen und jährlichen Bewegung in Bezug auf die Erde und Sonne, erst der Begriff der „Fixsterne“ liegt. Für freies Auge mittlerer Schärfe sind deren in Mitteleuropa 3000 bis 4000 sichtbar, davon 14 erster, 54 zweiter „Größe“ bis zur sechsten; für das Fernrohr noch solche der sechzehnten Größe. — Jenen Winkelmessungen und in unmittelbarem Zusammenhang mit ihnen auch den exaktesten Zeitmessungen, welche wir auf eben jene Drehung des Sternhimmels gründen, dienen die unten zu beschreibenden Instrumente; und auf diese Messungen gründen sich dann folgende Begriffe (nach denen auch die Instrumente und ihre Teile benannt sind):

Fig. 652.



Himmelspole (Nordpol, Südpol, P, P' , Fig. 652) heißen diejenigen beiden Punkte des Fixsternhimmels, welche bei dessen täglicher Drehung keine Lagenänderung in bezug auf den Horizont (also weder in Azimut noch Höhe) aufweisen. Die die beiden Himmelspole verbindende Gerade heißt die **Weltachse**, der durch den Erdmittelpunkt gehende Teil der Weltachse **Erdachse**, ihre Endpunkte an der Erdoberfläche die **Erdpole** (Nordpol, Südpol).

Derjenige größte Kreis der Himmelskugel, dessen Punkte von den Himmelspolen 90° Abstand haben, heißt der **Himmelsäquator**, $AWBOA$; alle diesem Hauptkreis entsprechenden Nebenkreise heißen **Himmelsparallelkreise** (z. B. ND, SH).

Denken wir uns nun dieses System von Äquator, Nebenkreisen und Polen mit dem System des Horizontes starr verbunden (Figg. 650 und 652), so bewegt sich je ein Fixstern, der in einem bestimmten Nebenkreise (inkl. der Grenzfälle Äquator und Pol) gestanden war, zu allen Zeiten eines Tages oder Jahres in dem nämlichen Nebenkreise. — Dieser Tatsache gemäß eingerichtet (und daher auch zu ihrer Veranschaulichung am besten geeignet) ist das

Äquatoreal („parallaktisch montiertes“ Fernrohr, Fig. 653): Mit den Fundamenten des Gebäudes sind möglichst starr verbunden die Lager einer zylindrischen Achse A , die um eine geometrische Achse von der unveränderlichen Rich-

ung der Weltachse mittels eines Uhrwerkes während der Sternbeobachtungen im Sinne OSW gleichförmig gedreht wird, mit solcher Geschwindigkeit, daß sie binnen einem Sterntag (annähernd gleich einem Sonnentag *minus* 4 Minuten) eine volle Umdrehung gemacht hätte. An diese sich drehende Achse kann das Fernrohr unter verschiedenen Winkeln von 0° bis 90° mit der Ebene des Äquators geklemmt werden. Ist es dann auf einen bestimmten Stern eingestellt gewesen, so bleibt dieser trotz der Drehung des Fernrohres ruhig im Gesichtsfelde des Fernrohres. — Solche Fernrohre sind es denn auch, welche der während der letzten zwei Jahrzehnte zu umfassendster Wichtigkeit entwickelten Himmelsphotographie dienen. Es wird dabei an Stelle des Okulars die lichtempfindliche Platte und zwar in die Brennebene des Fernrohrobjektivs gebracht (§ 112). Nur wenn das Fernrohr genau den Gang des Fixsternes mitmacht, sind die Bilder der Fixsterne Punkte (die der Planeten Strichlein). Da selten ein Uhrwerk so genau gleichförmig geht, muß für längere Expositionen die Stellung des Fernrohres durch einen Beobachter von Zeit zu Zeit nachkorrigiert werden. (Bei weitem kompliziertere Vorrichtungen für Expositionen auf Planeten und den Mond; z. B. wurden für Mondphotographien Uhrwerke mit 112 Rädern angewendet.)

Fig. 653.



Auch der Theodolit (Fig. 651) liefert zusammen mit einer genauen Pendeluhr oder einem Chronometer die Beobachtungsdaten, aus welchen sich durch Rechnung (der sphärischen Trigonometrie) alle Stellungen der Fixsterne in Bezug aufeinander und auf das System des Horizontes ergeben. — Speziell die Lage der Himmelspole ergibt sich mittels Theodolit, indem dessen Fernrohr auf einen Stern (für den Himmelsnordpol am besten auf den Polarstern)

eingestellt und nun die größte und (12 Stunden später) die kleinste Höhe dieses Sternes, ebenso auch (6, bezw. 18 Stunden später) seine östlichste und westlichste Stellung beobachtet werden.

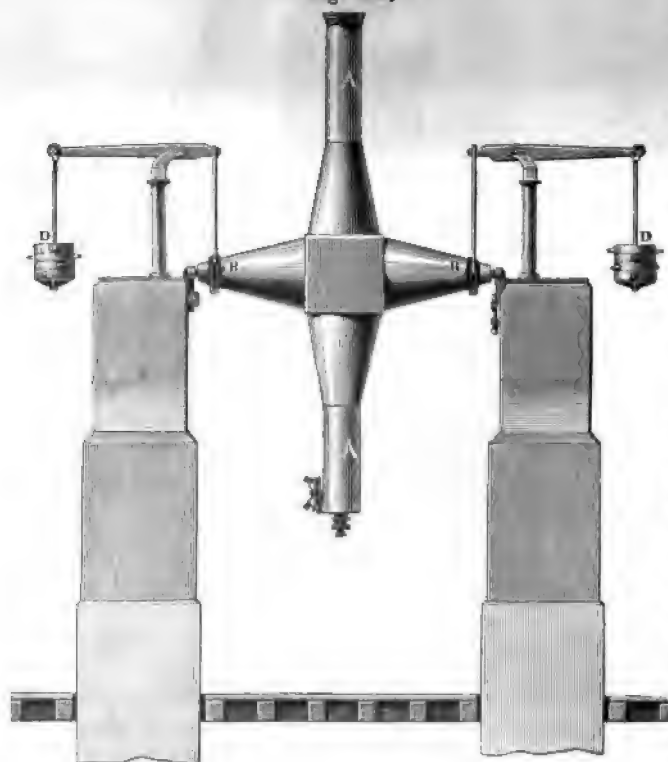
Fig. 654.



Die durch den Pol und den Beobachtungsort gehende Vertikalebene (auch ihre Schnittlinie mit dem „Himmelsgewölbe“ und mit der Horizontebene) heißt der **astronomische Meridian** dieses Ortes ($SADZPNBHZ'P'S$), seine Schnittpunkte mit dem Horizont heißen der **Nord-** und der **Südpunkt** (N, S). In dieser Meridianebene haben alle Fixsterne ihre obere Kulmination (in dem Kreisbogen vom Südpunkt bis zum Pol, z. B. A, D, Z) und ihre untere Kulmination. Sterne (vom

Pol bis zum Nordpunkt), welche beide Kulminationen über dem Horizont haben (nicht in ihm „auf- und untergehen“), heißen **Zirkumpolarsterne** (in

Fig. 655.



der Kugelkappe $NEDFN$).

Solche sind für unsere Breiten die Sterne des Großen Bären, der Cassiopeia u. s. f. — Lage des Himmelsnordpols $11\frac{1}{4}^\circ$ (d. i. drei Vollmondbreiten) vom

„Polarstern“ (in der Richtung gegen ϵ des Großen Bären Fig. 654; der Polarstern P ist der letzte Schweifstern des Kleinen Bären).

Speziell für die Beobachtungen dieser oberen und

unteren Kulminationen (und im Zusammenhang damit ihrer Rektaszensionen und Deklinationen siehe unten) ist eingerichtet das Meridianinstrument (Fig. 655): ein Fernrohr, das mit einer genau wagrechten, in der Richtung OW auf festen Lagern drehbaren Achse unter einem rechten Winkel fest verbunden ist und sich also nur in der Meridianebene drehen kann. Dieses Instrument gibt 1. die Pole des Beobachtungsortes: es wird wieder ein dem Pole naher Stern in der oberen und unteren Kulmination beobachtet und das arithmetische Mittel beider Höhen gezogen. 2. Die Lage des Himmelsäquators, indem dessen höchster Punkt 90° vom Pol absteht. Durch diesen Punkt und die Punkte O und W des Horizontes ist dann die Ebene des Äquators bestimmt. 3. Die „Deklination“ irgend eines Punktes (z. B. eines Sternes), d. i. seinen Winkelabstand vom Äquator: es wird nämlich die Kulmination des Sternes im Fernrohr beobachtet und dann der Winkelabstand dieser Stellung des Fernrohres von der Äquatorstellung abgelesen. 4. Zeitbestimmungen: Es sei das Rohr auf einen Stern S_1 zunächst des Äquators gerichtet und nach einer genauen Pendeluhr werden die Zeiten je zweier aufeinander folgender Durchgänge dieses Sternes durch den Mittelfaden im Gesichtsfelde des Fernrohres beobachtet. Es stellen sich dann nicht nur diese Zeiten als untereinander genau gleich (psychol. Anh., Nr. 41) Anh. 41. heraus, sondern auch, wenn das Rohr auf was immer für Sterne $S'S''$ nördlich oder südlich vom Äquator eingestellt worden war und nun die Zeiten dieser Durchgänge beobachtet werden. Diese Zeit je zweier aufeinander folgender Kulminationen was immer für eines Sternes heißt **Sterntag**. Auf sie erst bezieht dann der Astronom die als „bürgerliche Zeit“ dienende „mittlere Sonnenzeit“ (vergl. § 181) und richtet daher auch seine Pendeluhr nicht nach bürgerlicher Zeit, sondern nach Sternzeit. Es sind auch in vorliegendem § unter Stunden, Minuten, Sekunden immer solche der Sternzeit gemeint. — 5. Steht von zwei Sternen S_1 und S_2 letzterer östlich von S_1 , so erfolgt die Kulmination von S_2 um eine bestimmte Zahl t von Sekunden später als die von S_1 . Da nun einer Umdrehung des Himmels um 360° eine Zeit $T = 24^h$ entspricht, so entsprechen umgekehrt $1^h = 360^\circ : 24 = 15^\circ$, ebenso $1^{min} = 15^\circ : 60 = 15'$ und $1^{sec} = 15' : 60 = 15''$. Diese Angaben in „Stunden, Minuten und Sekunden“ sind in der Astronomie nicht nur als Zeit, sondern geradezu als Winkelmaß gebräuchlich. — 6. Als Nullpunkt der astronomischen Zeit (Sternzeit, über Orts- und Weltzeit vergl. § 181) ist angenommen die Zeit der Kulmination eines bestimmten Punktes des Äquators, des **Frühlingspunktes** (seine Definition als Durchschnittspunkt zwischen Äquator und Ekliptik vergl. im folgenden §).

Dieser Frühlingspunkt bildet ebenso den Nullpunkt im System des Äquators, wie der Südpunkt den im System des Horizontes; und es ergeben sich somit aus den bisher beschriebenen Erscheinungen und Messungen die folgenden Definitionen:

Im System des Äquators ist Grundkreis der **Himmelsäquator**. Der Nullpunkt ist der Frühlingspunkt. Von ihm aus werden längs des Äquators gezählt die **Rektaszensionen** (AR, *ascensio recta*, gerade Aufsteigung, gemessen nach der Zeit vom Durchgang des Frühlingspunktes bis zum Durchgang eines Sternes durch das Fadenkreuz) im Sinne WSO von 0° bis 360° (oder die **Stunden** im Sinne eines Winkelmaßes, $1^h = 15^\circ$, siehe oben). Vom Äquator gegen die Pole hin werden längs der Himmelsmeridiane gezählt die **Deklinationen**,

nördlich oder positiv von 0° bis 90° gegen den Himmelsnordpol, südlich oder negativ von 0° bis 90° gegen den Himmelssüdpol.

Dementsprechend heißen auch die beiden Teilkreise am Äquatoreal Stunden- (Rektaszensions-)kreis DD (Nullpunkt im Meridian) und Deklinationskreis BB. Ist z. B. von einem Fixstern oder Nebel ein für allemal im Sternkataloge, bzw. von der Sonne, dem Monde, einem Planeten in den Ephemeriden (d. i. Tafeln, welche von den großen Sternwarten in Greenwich, Berlin u. s. f. Jahr für Jahr vorausberechnet werden) Rektaszension und Deklination eines Gestirnes für Tag und Stunde gegeben, so kann hiernach das Äquatoreal nach den beiden Teilkreisen eingestellt werden und es muß sich jenes Gestirn im Gesichtsfeld vorfinden.

§ 177. System der Ekliptik. — Der jährliche Umlauf der Sonne, bzw. der Erde.

Von der Erde aus betrachtet, in Bezug auf die Fixsterne ein, kanischen Sinne. Die unmittelbar dadurch sehr erschwert, da die Sterne sichtbar sind; w. Schon bei einer einigermaßen während eines halben Monats bilder immer früher auf-, b. also Sonnenzeit gemeint ist in Bezug auf die Sonne in. Sterne im Sinne WSO. Genau

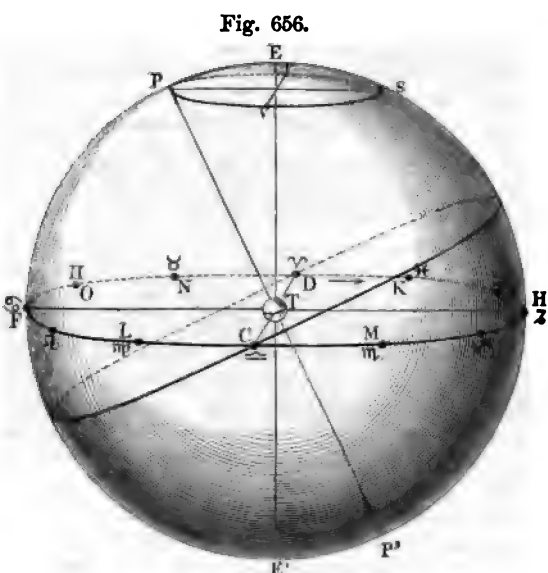
ihre täglichen Bewegung in Bezug auf die Erde um fast 4 Minuten länger braucht als der Sternhimmel, daß sie also in 2, 3 ... 15 ... 30 Tagen um je 8, 12 ... 60 ... 120 Minuten von 0 gegen W zurückbleibt; oder: die Rektaszension der Sonne wächst pro Tag um rund $4^{\text{min}} = 1^\circ$, in 1 Monat um $2^{\text{h}} = 30^\circ$, in 12 Monaten um $24^{\text{h}} = 360^\circ$, oder: die Sonne macht binnen einem Jahre einen vollen Umlauf am Sternhimmel im Sinne WSO. — Dabei ist mit der in jenen Zeitunterschieden sich kundgebenden Rektaszensionsbewegung gesetzmäßig verbunden eine Deklinationsbewegung, wie sich für die kunstlose Beobachtung schon aus dem tiefen Stand der Sonne im Winter, dem mittleren im Frühjahr und Herbst, und dem hohen im Sommer zeigt. Zweimal im Jahre muß dabei der Mittelpunkt der Sonne die Ebene des Himmelsäquators passieren. Diejenigen Punkte des Äquators, in welchen das geschieht, heißen der **Frühlingspunkt** und **Herbstpunkt** (Äquinoktialpunkte), die entsprechenden Zeitpunkte Frühlingsanfang und Herbstanfang (Äquinoktien). — [In der klaren Luft und bei der kurzen Dämmerung in Babylon, Ägypten, Griechenland konnte man kurz vor Sonnenaufgang und nach Sonnenuntergang die der Sonne jeweilig nächsten Fixsterne wirklich sehen und so mehrere der nur durch die angegebenen Schlüsse festzulegenden genauen Begriffe in guten Annäherungen unmittelbar anschaulich gewinnen. Daher wurde dort namentlich der „heliakische Aufgang eines Sternes“, z. B. des Sirius oder „Hundssternes“ in den Hundstagen des August, mit besonderer Sorgfalt und Feierlichkeit beobachtet. So erklärt sich auch die früher viel mehr als gegenwärtig verbreitete Kenntnis des „Fixsternhimmels“.]

Um nun die genaue Form der Bahn, längs welcher die Sonne sich während des ganzen Jahres bewegt, zu ermitteln, ist es nötig, für möglichst viele Zeitpunkte die jeweilige Rektaszension AR und die zugehörige Deklination δ direkt

die Sonne nicht immer dieselbe Lage daher ein „Planet“ im vorkopernichtung dieser Ortsveränderung ist neben der blendenden Sonne nicht ließen wir jene Bewegungen so. en Beobachtung des Sternhimmels onate fällt auf, daß dieselben Sternwobei „früher“ nach der Tagesorten: die Sterne bewegen sich daher die Sonne in Bezug auf die hungen zeigen, daß die Sonne zu

zu messen, was wieder am besten zur Zeit der Kulminationen der Sonne (astronomischer Mittag) mittels des Meridianinstrumentes geschieht, indem man den Zeitunterschied zwischen den Durchgängen der Sonne und des Frühlingspunktes durch den Meridian ermittelt. Betrachtet man dann je ein Paar zusammengehöriger AR und δ als Katheten eines rechtwinkligen, sphärischen Dreiecks, so ergibt sich (math. Anh., Nr. 18, LA 212) als dessen dem Äquator anliegender spitzer Winkel ε für alle Tage des Jahres derselbe Wert $\varepsilon = 23^\circ 27' 10'' \approx 23\frac{1}{2}^\circ$ (erst im Verlauf Anh. 1a.
LA 212. säkularer Zeiträume ändert sich dieser Wert, indem er zwischen den Grenzen $\varepsilon = 24^\circ 35' 58''$ und $21^\circ 58' 36''$ schwankt): Für die beschriebenen Tatsachen und Messungen sind folgende Begriffe und Sätze der kurze Ausdruck:

Die Sonne (genauer: der Mittelpunkt der Sonnen-„Scheibe“) bewegt sich, von der Erde aus gesehen, im Laufe eines Jahres in Bezug auf den Fixsternhimmel in einem größten Kreise, der **Ekliptik** (im Sinne des geocentrischen Systems — über die Ableitung des Namens „Ekliptik“ von *ἐκλειψις*, Finsternis, vergl. § 184), deren Ebene mit der des Äquators einen Winkel von rund $\varepsilon = 23\frac{1}{2}^{\circ}$ (**Schief der Ekliptik**) einschließt — Fig. 656.



Im System der Ekliptik bildet (wie im System des Äquators, vergl. vorigen §) den Anfangspunkt der **Frühlingspunkt** (γ), d. i. derjenige Schnittpunkt von Äquator und Ekliptik, wo die Ekliptik nordwärts vom Äquator abzweigt. Vom Frühlingspunkt an werden im Sinne WSO die **Längen** (von 0° bis 360°) und normal zu ihnen die **Breiten** nördlich und südlich bis zu den beiden **Polen der Ekliptik** gezählt. Diese liegen (unbeschadet der Präcessionsbewegung des Fixsternhimmels binnen 26 000 Jahren, § 170), immer bei denselben Fixsternen, und zwar der nördliche Pol der Ekliptik im Sternbild des Drachens.

Der mit dem Frühlingspunkte beginnende Bogen der Ekliptik von 30° (Länge 0° bis 30°) heisst Tierzeichen des Widders, ihm folgt (Länge 30° bis 60°) das Tierzeichen des Stiers u. s. f. nach den Gedächtnisversen

Sunt: aries, taurus, gemini, cancer, leo, virgo,
Libraque, scorpius, arcitenens, caper, amphora, pisces.

bahn der Sonne, b) in der Ekliptik (Fig. 657), beides nach dem geozentrischen System.

Nach dem heliozentrischen System bezeichnet „Ekliptik“ die Bahn der Erde um die Sonne. Die Tages- und Jahreszeiten ergeben sich dann c) aus der Stellung der Erde in den verschiedenen Punkten dieser Bahn, und der konstanten Neigung der Erdachse (die im Fixsternraum zu sich parallel bleibt, § 180) gegen die Ebene der Ekliptik (Fig. 658).

Da es im Weltraum keine „oben“ und „unten“ gibt, so ist es wissenschaftlich gleichgültig, ob man in Zeichnungen und Modellen (Tellurien) die Ebene der Erdbahn wagrecht oder irgendwie anders annimmt; didaktisch zweckmäßig ist es, in solchen Darstellungen die Erdachse als vertikal und daher die Ebene der Ekliptik als unter $23\frac{1}{2}^\circ$ gegen den Horizont geneigt zu denken. Es entspricht dann die Stellung der Erde im „höchsten“ Punkte der Ekliptik dem Winter der nördlichen Erdhälfte, indem hier die Südhalbkugel für die Einstrahlung seitens der Sonne begünstigt ist. Allgemein sind die Tages- und Jahreszeiten an verschiedenen Punkten der Erde mit abhängig von deren Gestalt.

§ 178. Gestalt und Größe der Erde.

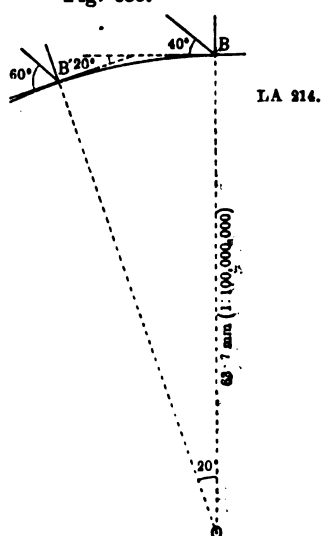
Die populären sogenannten „Beweise für die Kugelgestalt der Erde“ sind:

1. Der Horizont erscheint (von Bodenerhebungen abgesehen) allenthalben kreisrund.
2. Höheren Standpunkten entspricht ein größerer Horizont.
3. Von einem aus der Ferne kommenden Schiffe werden zuerst die Spitzen der Masten, zuletzt der Rumpf sichtbar.
4. Mondfinsternisse lassen erkennen, daß der Erdschatten bei beliebiger Stellung der Erde gegen die Sonnenstrahlen einen kreisrunden Querschnitt hat. (Diese vier Beweise waren schon im Altertum bekannt; mögliche Einwürfe LA 214).
5. Weltumseglungen.
6. Neuestens erkannte man, daß Berge, die untergehende Sonne... in Meeren und großen Seen Konvexspiegelbilder geben.

Alle wissenschaftlich strengen Messungen der wahren Gestalt und zugleich der Größe der Erde bestehen in einer Verbindung von Winkel- und Längenmessungen (solche hat schon ERATHOSTHENES ausgeführt und den Umfang der Erde = 250 000 Stadien gefunden; 150 Jahre später gab HIPPARCH 275 000 Stadien an). Diesen Messungen liegt die Voraussetzung zu Grunde, daß die von einem Fixstern zu was immer für Punkten der Erde (sogar diametral abstehenden) gezogenen Geraden als parallel aufgefaßt werden dürfen; über die Berechtigung dieser Annahme vergl. folgenden §. Die Messungen der Krümmung der Erdoberfläche gliedern sich in I. Meridian (Breiten-) gradmessungen zum Nachweise der nord-südlichen Krümmung und II. Längengradmessungen zum Nachweise der ost-westlichen Krümmung.

I. Gesetzt, es sei für zwei Orte B und B' (Fig. 659) unter demselben Meridian die Kulmination desselben Sternes mit 40° , bzw. 60°

Fig. 659.



und durch Längenmessungen die Bogenlänge $BB' = 2220$ km gefunden worden. Es folgt dann, daß die Lotlinien der beiden Orte einen Winkel von 20° einschließen, und daher — vorläufig wieder erst nur angenommen, der Meridian habe überall die gleiche Krümmung — entfällt dann auf einen Meridiangrad $2220 \text{ km} : 20 = 111 \text{ km}$. Da nun bei zahlreichen Meridiangradmessungen in der Tat die Winkelabstände desselben Sternes vom Zenit den Bogenabständen verschiedener Orte desselben Meridians in erster Annäherung proportional befunden wurden, ist jene Annahme kreisförmiger Meridiane in erster Annäherung als bestätigt anzusehen.

II. Reist man von einem Punkte der Erdoberfläche, durch dessen Zenit der Himmelsäquator geht, d. h. von einem Punkte des Erdäquators, vergl. den folgenden § 215, nach Osten, so zeigt eine Uhr, die am Orte als richtig gehend befunden worden war, daß Sonne u. Sterne je 4, 8 ... Minuten früher auf- und untergehen. Aus den Zeitunterschieden folgt, daß die geographische Länge eine verhältnismäßige Anzahl von Gestirnen parallel einfallenden Strahlen haben müssen, und daß der Meridian kreisförmig. Die gleichen Resultate ergeben sich dann auch für die Parallelkreise.

Wären nun die angegebenen Beziehungen zwischen Winkel- und Bogenlängen genau, so würde daraus folgen, daß die Erde eine Kugel sei, an welcher je ein Bogengrad eines größten Kreises 111 km beträgt, daher der Umfang eines größten Kreises, gleichviel, ob Meridian oder Äquator, $u = 111.360 \pm 40\,000 \text{ km}$, daher der Radius der Erde $r = u : 2\pi \approx 6370 \text{ km}$. — Erst um die Mitte des XVII. Jahrhunderts ergaben sich bei neuen, immer sorgfältigeren Meridiangradmessungen Abweichungen von der einfachen Proportionalität zwischen den Winkelunterschieden und den Bogenlängen, aus welchen dann auf Abweichungen der wahren Gestalt der Erde von der Kugelgestalt geschlossen wurde, LA 215. (Die Abweichungen sind so gering, daß man anfänglich auf Grund von Meridianmessungen in Frankreich und von Rechnungen, die sich später als fehlerhaft herausstellten, die Erde für ein Ellipsoid ähnlich einer Pflaume hielt, in dessen Meridianen die Erdachse die große Achse darstelle.) Schon vorher hatten Huygens und Newton aus der Erwägung, daß die Erde flüssig gewesen sei und sich bei der Rotation abgeplattet habe, auf ein Ellipsoid geschlossen, in dem die Erdachse die kleine Achse darstelle. Diese Vermutung wurde entgeltig bestätigt durch die französischen Messungen in Peru und Lappland um die Mitte des XVIII. Jahrhunderts. Wir können also sagen:

Die Erde ist in erster Annäherung eine Kugel vom Radius $r = 6370 \text{ km}$; in zweiter Annäherung ein Rotationsellipsoid, dessen große Halbachse vom Äquator $a = 6377,39 \text{ km}$, die kleine Halbachse vom Nordpol $b = 6356,08 \text{ km}$ ist (LA 215).

In Wahrheit haben sich alle einzelnen Meridian- und Längengradmessungen aber auch wieder nicht mit der Annahme eines Rotationsellipsoides, ja überhaupt

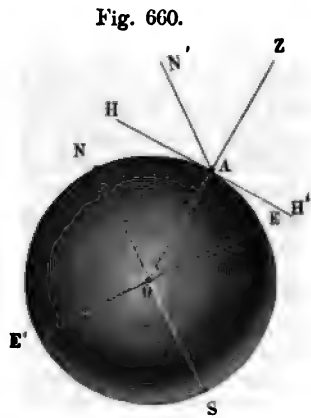
nicht mit der irgend eines vorher rein mathematisch definierten Körpers in Einklang bringen lassen: sondern man nennt Geoid die tatsächliche Gestalt der Erde (genauer: die Gestalt eines die Erde rings umgebend gedachten Meeres, das aber nicht durch seine eigenen Schwerewirkungen die des wirklichen Erdballes beeinflusst — vergl. die fingierten Meeresschichten über dem System Erde—Mond, Fig. 75), und man ist noch immer damit beschäftigt, Messungen zu seiner möglichst genauen Beschreibung mit immer feineren Mitteln durchzuführen; es ist dies eine Aufgabe der „höheren Geodäsie“. Im folgenden kehren wir wieder zu obiger erster Annäherung zurück.

§ 179. Das Gradnetz der Erdkugel.

Indem wir die Mittelpunkte der Erd- und Himmelskugel zusammenfallend und von jedem Punkte des Gradnetzes der Himmelskugel nach dem System des Äquators Gerade durch die Oberfläche der Erde zu deren Mittelpunkt gezogen denken, entspricht jedem grössten Kreis am Himmel (Äquator, Meridiane) ein solcher auf der Erde; ähnlich die Parallelkreise und die Pole. Speziell gelten die Definitionen und Beziehungen:

Fig. 660. Z

Die geographische Breite eines Ortes ist gleich der Polhöhe. Sie ist 0° für den Äquator, 90° für die Pole. Wurde z. B. (mittels des Theodolit oder des Meridianinstrumentes), oder auf der See mittels des Spiegelsextanten) beobachtet, daß der Himmelsnordpol um den Winkel $\angle HAN' = \varphi^\circ$ (Fig. 660) über dem Nordpunkte (H) des Horizontes stehe, so kommt diesem Orte eine geographische Breite $\angle OEA = \varphi^\circ$ zu. Spezielle Schilderung des Fixsternhimmels und des Sonnenlaufes für $\varphi = 0^\circ, \pm 23\frac{1}{2}^\circ$ (Wendekreise), $+45^\circ, 66\frac{1}{2}^\circ$ (Polarkreise), $\pm 90^\circ$ (Nord-, Südpol). Die niedrigsten erreichten Orte der Erde liegen $86^\circ 4'$ (Nansen 1896), $86^\circ 34'$ (Herzog der Abruzzan 1900).



Als Nullmeridian für die Zählung der geographischen Längen (östlich, westlich bis je 180°) ist jetzt meist der durch das Mittagsfernrohr von Greenwich gehende angenommen. (Meridiane von Ferro, Paris.)

Der **Zonenzeit** liegt eine Abgrenzung der Erdoberfläche durch die Meridiane 15°, 30°, 45° u. s. w. östlich und westlich von Greenwich zu Grunde, welche gegeneinander Differenzen von je 1^h mittlerer Sonnenzeit haben. — Über Ortszeit, „mitteleuropäische Zeit“, Weltzeit, Datumgrenze vergl. § 181.

Wie man sich das Gradnetz der fingierten Himmelskugel (nachgebildet durch die „Armillarsphäre“) auf der wirklichen Erdkugel abgebildet denkt, bildet man deren Gradnetz wieder auf dem Erdglobus ab. Da aber die Erde nur in erster Annäherung eine Kugel, in zweiter ein Ellipsoid ist, so bedarf die Feststellung des Gradnetzes auf einem solchen feinerer Begriffsbestimmungen (LA 215). LA 215.

Von speziell physikalischem Interesse sind die 1889 in Berlin begonnenen (in Honolulu, rund 180° von Berlin, bestätigten) Beobachtungen, daß die

Polhöhe desselben Ortes der Erde kleinen Schwankungen unterliegt, welche auf Grund des Satzes „Polhöhe = geographische Breite“ zeigen, daß die Erdoberfläche innerhalb des Erdkörpers ihre Lage änderte, allerdings nur um Winkel von etwa $0^{\circ} 0' 0.6''$, also an der Erdoberfläche um etwa 20 m (längs einer unregelmäßigen Linie). Als Ursache werden Massenverschiebungen an und unter der Erdoberfläche vermutet. — Von diesen Änderungen der Lage der Erdoberfläche in Bezug auf den Erdkörper sind zu unterscheiden die im folgenden § zu beschreibenden Änderungen der Lage der Erdoberfläche in Bezug auf den Fixsternhimmel.

§ 180. Rückschreiten der Tag- und Nachtgleichenpunkte; Vorschreiten der Tag- und Nachtgleichen (Präzession).

Sucht man auf einem Himmelsglobus oder einer Sternkarte z. B. das „Tierzeichen des Widders“ auf, welches sich längs der Ekliptik im Sinne WSO erstreckt, so findet man dieses „Tierzeichen des Widders“ nicht im Sternbild Widder, sondern im Sternbilde der Fische. Desgleichen liegt das Tierzeichen des Stieres im Sternbilde des Widders u. s. w. Vor etwa 2000 Jahren dagegen deckte ein Sternbild, von dem es damals den Namen Widder erhielt, die Ekliptik im Sinne WSO stattfindet und des Mondes und die überwiegenden Bewegungen der Planeten im Sinne WSO als rechtläufig, d. h. im Sinne OSW als rückläufig bezeichnet wurden. Vor etwa 2000 Jahren eingetretene Fortrückungen um den Frühlingspunkt des Sternbildes des Widders in das Sternbild der Fische einen Rückgang des Frühlingspunktes nennen. Gleiches gilt von den Verschiebungen des Herbstpunktes. — Weil dieser Rückgang der Äquinoktialpunkte schon binnen 72 Jahren 1° beträgt, so darf er bei keiner einigermaßen genauen astronomischen Beobachtung und Rechnung vernachlässigt werden, zumal ja alle Rektaszensionen (und Längen) vom Frühlingspunkt gezählt werden und also Sternkarten, welche z. B. für die „Epoche 1900“ angefertigt sind, schon nach etwa 7 Jahren mit den dann zu beobachtenden Rektaszensionen um $\frac{1}{10}$ Grad (nach 1 Jahr um $60':72 = 50''$) differieren. Daraus wird zwar auch begreiflich, daß schon HIPPARCH diesen Rückgang der Äquinoktialpunkte bemerkte; es bleibt aber erstaunlich, daß er die Erscheinung als eine über die von ihm auf etwa 36000 Jahre berechnete ungeheure Zeit periodisch sich erstreckende erkannt hat. — In den Sprachen des heliocentrischen Systems lautet die zusammenfassende Beschreibung der ganzen Tatsache so:

Die Erdachse, d. i. die Achse der täglichen Drehung der Erde, bleibt zwar beim Umlauf der Erde um die Sonne binnen eines oder einiger weniger Jahre sehr annähernd parallel (beschreibt einen Cylindermantel, wie wir aus der annähernd konstanten Stellung des Himmelspoles während eines ganzen Jahres und einiger aufeinander folgender Jahre annehmen müssen). Im Laufe von 26 000 Jahren beschreibt aber die Erdachse (oder die Achse jenes Cylinders) einen **Kegelmantel**, dessen geometrische Achse gegen den Pol der Ekliptik gerichtet bleibt und dessen Seite mit dieser Achse einen Winkel von $23\frac{1}{2}^{\circ}$ einschließt. Es besitzt also die Erdachse während ihrer Um-

laufsbewegung zwar immer dieselbe Neigung gegen jene Achse ($23\frac{1}{2}^\circ$) und gegen die Ebene der Ekliptik ($66\frac{1}{2}^\circ$), aber die Erdachse weist dabei auf immer andere Sterne eines Kreises am Himmel, der durch den gegenwärtigen Himmelsnordpol geht und dessen Mittelpunkt der Pol der Ekliptik ist (Fig. 656). — In etwa 13 000 Jahren wird daher Wega Polarstern sein; vor 2000 Jahren lag der Himmelsnordpol über den Kopf des kleinen Bären, während jetzt der Polarstern der letzte im Schweif des kleinen Bären ist).

Während dieser Bewegungen bleibt die Ekliptik ungeändert (geht durch die nämlichen Sterne hindurch), aber die erweiterte Ebene des Erdäquators, d. i. der Himmelsäquator, schneidet die Ekliptik in immer anderen Punkten.

Die Erde besitzt also die Bewegungen eines Kreisels (vergl. § 34; dort auch die Erklärung der im vorigen nur beschriebenen Bewegungen). — Dafs man diese Bewegungen kurz als „Präzession“ (Vorschreiten) bezeichnet, wiewohl sie oben als ein Rückgang der Äquinoktialpunkte beschrieben werden mußte, rührt daher, dafs diese Bewegung ein Vorrücken der Äquinoktien, d. i. der Tage, an denen die Sonne gleich lange über und unter dem Horizonte steht, zur Folge hätte, falls man das „siderische Jahr“ und nicht vielmehr das auf jenen Rückgang des Frühlingspunkt schon Rücksicht nehmende tropische Jahr der Zeitrechnung zu Grunde legte. (Näheres im folgenden §.)

Zu der hier in erster Annäherung beschriebenen Erscheinung der Präzession kommt noch die der **Nutation**: der beschriebene Kegelmantel ist nämlich sozusagen fein gefältelt, oder: die vom Himmelspol beschriebene Linie kein Kreis, sondern eine cykloidenartige Kurve. Zur dynamischen Erklärung dieser Nebenerscheinung vergl. ebenfalls § 34.

§ 181. Zeitrechnung. Siderisches und tropisches Jahr. Zeitgleichung. Ortzeit, Zonenzeit, Weltzeit; Datumgrenze.

Der im bisherigen überall als bekannt vorausgesetzte Begriff des Jahres bedarf noch genauer Definitionen. Die volkstümliche Bedeutung dieses Wortes ist nur: „Zeitraum, binnen dessen sich je ein Wechsel der Jahreszeiten vollzieht (— neue Kalender ausgegeben werden u. dergl.)“. — Der wissenschaftliche Begriff ist:

Das **Jahr** ist der Zeitraum, binnen dem die **Sonne** einen Umlauf längs der Ekliptik (dieses Wort im geocentrischen Sinne) oder binnen dem die **Erde** einen Umlauf längs der Ekliptik (dieses Wort im heliocentrischen Sinne) zurückgelegt hat.

Dafs ein solcher Umlauf vollendet sei, erkennt man daran, dafs zur selben Tageszeit, diese bestimmt nach der Sonne, die Fixsterne dieselbe Stellung zur Erde (und zur Sonne) einnehmen wie „vor einem Jahr“. — Dies gibt also zuerst nur die Nominaldefinition (log. Anh., Nr. 38): Ein Jahr ist der Zeitraum von x Sonnentagen = $x + 1$ Sterntagen; und es gilt nun, den genauen Wert von x aus den Erscheinungen abzuleiten (dies wird voraussichtlich nicht eine ganze, überhaupt keine einfache rationale Zahl sein; denn die Rotationsdauer der Erde = 1 Sterntag steht zur Revolutionsdauer = 1 Jahr in keiner inneren Beziehung).

— In roher Annäherung ist 1 Jahr = 360 Tage, denn das tägliche Zurückbleiben der Sonne hinter den Fixsternen um rund $1^\circ = 4$ Min. ergibt, daß 360 Sonnentage = 361 Sterntage. Genauer sind $365\frac{1}{4}$ Sonnentage = $366\frac{1}{4}$ Sterntage. Durch die Vernachlässigung dieses $\frac{1}{4}$ Tages hatte die Annahme der ganzen Zahl 365 schon binnen 4 Jahren zu einer Differenz von einem Tage, binnen eines Jahrhunderts zu einem von 25 Tagen, also fast einem Monat führen und sich in den Abweichungen der Zeitrechnung gegenüber dem Charakter der Jahreszeit veraten müssen. Die hieraus entstandenen Verwirrungen wurden von JULIUS CÄSAR im **julianischen Kalender** berichtigt, der jedes vierte Jahr als Schaltjahr mit 366 Tagen ansetzte.

Aber auch die Zahl $x = 365\frac{1}{4}$ ist nur eine annähernde. Der genaue Wert von x ergibt sich verschieden, je nachdem der Begriff „ein Umlauf der Erde, bzw. der Sonne“ verstanden wird. Es kann nämlich gemeint sein die Wiederkehr der Sonne zum selben Punkt des Fixsternhimmels (der Ekliptik); diese Zeitstrecke heißt ein **siderisches Jahr**; es kann gemeint sein die Wiederkehr zum jeweiligen Frühlingspunkt; binnen einem Jahr infolge der Präzession und Nutation um rund $50''$; diese Zeitstrecke heißt ein **tropisches Jahr**; $\tau\rho\acute{\iota}\kappa\omega$, ich wende; gemeint ist die größten nördlichen und südlichen Deklination der Sonne in diesen Punkten liegt der Frühlings- und Herbstpunkt. (Dieser Name hängt zusammen mit $\tau\rho\acute{\iota}\kappa\omega$, tropisch, d. h. in den Tropen, d. h. zwischen den Wendepunkten am Himmel, d. h. die Wendekreise auf der Erdoberfläche, d. h. „tropisches Klima“ u. s. w.). Von je 90° ab.) Da sich die astronomischen Jahreszeiten, diese aber nach der Stellung der Sonne zum Frühlings- und Herbstpunkt, so ergeben sich schließlich die folgenden Definitionen und Größen:

Dem westeuropäischen Kalender liegt zu Grunde das **mittlere tropische Jahr** von $365^d\ 5^h\ 46^m\ 51^s = 365,24222$ Tagen mittlerer Sonnenzeit (= $366^d\ 5^h\ 48^m\ 45,91^s = 366,24222$ Sterntagen). Da das tropische Jahr sehr annähernd $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}$ Tage zählt, so sind alle Jahre, deren Jahreszahl durch 4 teilbar ist, ausgenommen die durch 100, wieder nicht aber die durch 400 teilbaren, **Schaltjahre**, in denen im Februar ein Schalttag eingefügt wird, so daß in ihnen der Februar statt 28 Tage 29 Tage zählt.

Die Feststellung des mittleren tropischen Jahres ist deshalb schwierig, weil der Frühlingspunkt ungleichförmig längs der Ekliptik rückschreitet und so z. B. schon innerhalb der vier Jahre von 1881 bis 1885 die tropischen Jahre untereinander Abweichungen bis zu 8 Zeitminuten aufweisen. Das mittlere tropische Jahr wird daher als das Mittel aus den innerhalb säkularer Zeiträume bestimmten Frühlingsanfängen, d. h. Rückkehr der Sonne zum Frühlingspunkt, bestimmt. Die **Gregorianische Kalenderreform 1582** bestand darin, daß diejenigen Schaltjahre, welche nach dem Julianischen Kalender auf jedes vierte Jahr entfielen, in den genannten Jahrhunderten weggelassen wurden; und diese sinnreiche Berücksichtigung der Abweichung des mittleren tropischen vom Julianischen Jahr bewährte sich so gut, daß erst nach mehr als 3000 Jahren die Einfügung eines weiteren Schalttages nötig werden wird. Die Zeitrechnung nach dem Julianischen

Kalender (z. B. die russische) ist gegenwärtig um 13 Tage hinter dem Gregorianischen zurück.

Das bürgerliche Jahr beginnt am 1. Jänner, der bürgerliche Tag am Mitternacht (Zählung von 12^h Mitternacht bis 12^h Mittag und wieder bis 12^h Mitternacht; in der Eisenbahnzeit mancher Länder, z. B. Italien, von 0^h bis 24^h = Mitternacht). — Die Astronomen zählen von 0^h bis 24^h Sternzeit, und zwar je von der oberen Kulmination des Frühlingspunktes; dieser Zeitpunkt bildet zu allen Zeiten des Jahres den Anfang des Sterntages, fällt aber nur im Frühling um die Mittagszeit, im Sommer um die Abendzeit u. s. f.

Zeitgleichung. Es wird im Publikum nicht selten die Meinung geäußert, daß es die vollständigste Regulierung der Uhren wäre, wenn man sie täglich um 12 Uhr mittags nach der Sonnenuhr stellte (bezw. nach dem Gnomon, der den astronomischen Mittag dadurch angibt, daß auf einer wagrechten Ebene der Schatten eines vertikalen Stabes die kleinste Länge und die Richtung nach Norden hat). Diese Meinung erweist sich aber als irrig aufs auffälligste am 2. November, da an diesem Tage zur Zeit des höchsten Sonnenstandes, d. i. des astronomischen Mittags eine die bürgerliche Zeit möglichst genau angegebende Uhr schon 12^h 16¹/₂^m zeigt. Dagegen tritt am 11. Februar der astronomische Mittag schon 14¹/₂^m vor 12^h (um 11^h 45¹/₂^m) bürgerlicher Zeit ein. Diese Abweichungen werden als **Zeitgleichung** bezeichnet und sind in der Tafel graphisch dargestellt. (Nur am 16. April, 14. Juni, 1. September und 24. Dezember ist die Abweichung Null.) Diese Nichtübereinstimmung der Räder- und Sonnenuhren setzt sich aus zwei geometrisch-phoronomischen Gründen zusammen: 1. Die Sonne bewegt sich längs ihrer Bahn mit veränderlicher Geschwindigkeit, so daß die Zeitstrecke zwischen zwei Kulminationen der Sonne um den 1. Jänner kleiner ist als um den 2. Juli (vergl. § 174). Dieser Umstand wird aber noch weit überwogen von dem, daß 2. selbst wenn die Bewegung der Sonne längs der Ekliptik eine gleichförmige wäre, die Projektionen gleicher Bogenstücke der Ekliptik auf den Himmelsäquator nicht einander gleich, sondern daß diese Projektionen in der Nähe der Solstitien größer sind als in der Nähe der Äquinoktien.

Ortszeit, Zonenzeit, Weltzeit. — Nach § 178 ist die **Ortszeit** nur für Orte desselben Meridians dieselbe; dagegen entsprechen

Unterschieden der geogr. Länge von je 1°, 15°, 90°, 180°, 270°, 360°
Unterschiede „ Ortszeit „ „ 4^m, 1^h, 6^h, 12^h, 18^h, 24^h.

Der um 1892 in England, Deutschland, Frankreich . . . eingeführten **Zonenzeit** liegt die Ortszeit von Greenwich in der Weise zu Grunde, daß diese auch für alle Orte bis 15° östlich von Greenwich (d. i. bis zum Meridian von Stargard) gilt; von hier weitere 15° die um eine Stunde frühere **mitteleuropäische Zeit** u. s. w.

Die **Weltzeit** bestünde darin, daß alle Orte der Erde unabhängig von ihrer eigenen Ortszeit die von Greenwich annähmen. Diese einschneidendste Änderung hätte sich jedenfalls nur für den internationalen Verkehr (Eisenbahn, Schifffahrt, Telegraphie . . .) empfohlen, wogegen neben der Weltzeit für die lokalen Vorgänge (Beginn der täglichen Geschäfte, Mahlzeiten . . .) die Ortszeit jedenfalls in

1.A. 218. Gebrauch geblieben wäre (es hätten etwa die Uhren für jeden Ort eigene Doppelzeiger von bestimmtem Winkelabstand erhalten müssen; Zahlenbeispiele für Stunden- wie Minutenzeiger, LA 216). — Das Hauptbedenken gegen die Einführung der Weltzeit war die Lage der Datungsgrenze, da der Meridian 180° östlich und westlich von Greenwich durch bewohnte Länder geht, in denen dann wahrscheinlich beständige Unsicherheit um einen Tag der Zählung eingetreten wäre. Wie muß das Passieren dieser Datungsgrenze bei Fahrten gegen Westen und gegen Osten in Rechnung gezogen werden?

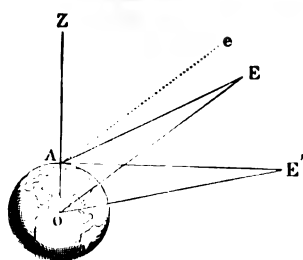
§ 182. Messungen kosmischer Distanzen.

Bekanntlich projiziert sich die Spitze eines Uhrzeigers an Stellen des Zifferblattes, die um so mehr verschieden sind, je mehr Spitze und Zifferblatt voneinander absteilen und je mehr das Auge sich weiter durch die Spitze zum Zifferblatt gelegten Normalen entfernt. Ähnliche „parallaktische Fehler“ bei Barometerablesungen u. dergl.

Alle astronomischen Streckenmessungen erfolgen auf Grund von „parallaktischen“ Beobachtungen und Resultaten. Der trigonometrischen Grundaufgabe liegt:

Ist eine Standlinie $AB = c$ in der Ebene entweder direkt (durch Maßstäbe) oder indirekt (selbst wenn c trigonometrisch) gemessen, und bilden die Visierlinien AC und BC zu einem Punkte C die messbaren Winkel α und β , so lassen sich aus dem $\triangle ABC$ die übrigen Strecken gemäß dem A. S. S. (Satz von Sinus) c, α, β . Der Winkel γ heißt dann die Parallaxe der Strecke c in Bezug auf den Punkt C .

Fig. 661.



Schon mit Rücksicht auf die kugelige (ellipsoidische) Krümmung der Erde erweitert sich dieses Prinzip dahin, daß für die gerade Standlinie AB auch Kreisbogen von gemessener Länge und Krümmung eintreten können. — Wäre die (aus Längen- und Breitengradmessungen, § 179, bekannte) Größe der Erde wirklich verschwindend gegen alle kosmischen Distanzen, wie dies in erster Annäherung häufig angenommen wird, so müßte ein Auge im Erdmittelpunkt O (Fig. 661) ein Gestirn E in derselben Sehrichtung erblicken, wie wenn das Auge von dem Oberflächenpunkte A längs Ae blickt. Läßt sich dagegen der Winkel $eAE = AEO$ als von Null verschieden ermitteln, so wissen wir, daß umgekehrt von dem Punkte E des Weltraumes aus der Erdhalbmesser OA unter dem endlichen Winkel $OE A = EAe$ erscheinen würde. Es ist also dieser Winkel die Parallaxe der Strecke OA in Bezug auf den Punkt E oder kurz die Parallaxe des Punktes E . Für einen Punkt E' , der denselben Abstand von O hat wie E , für den aber $E'A \perp AO$, d. h. der in der zu A gehörigen Horizontalen liegt, ist offenbar $\angle OE'A > OE A$. Da also dieser Winkel die größte unter allen Parallaxen für Punkte desselben Abstandes vom Erdmittelpunkte ist, so wählt man diese Horizontalparallaxe, d. i. den größten Sehwinkel, unter dem ein Erdhalbmesser von einem gegebenen Punkte des Weltraumes aus erscheint, zur Grundgröße für alle parallaktischen Angaben der Astronomie.

Auch die größten auf der Erde noch herstellbaren geraden oder krummen Standlinien genügen nur für die Messungen des Abstandes der Erde vom Monde (LA 217) und von den der Erde zunächst LA 217. kommenden Planeten (Venus in Konjunktion mit der Sonne, namentlich bei „Venusdurchgängen“, siehe unten; ferner Mars in Opposition und neustens der Asteroid Eros, vergl. § 183).

Dagegen stellt sich der Abstand Erde—Sonne = 1 Erdweite nach den sogleich zu besprechenden Methoden als so groß heraus, daß sich zu ihm sogar die größte auf den denkbaren Standlinie, nämlich der Erddurchmesser, verhält wie z. B. der Abstand der Augen = 8 cm zu dem Abstande von etwa 1,8 km; können wir aber nach einem so entfernten Gegenstande abwechselnd mit dem rechten und linken Auge, sind die Sehrichtungen nur noch merklich verschieden. Ebenso

wird niemand von den Enden eines 80 cm langen Fensterbrettes als Standlinie den Abstand eines 18 km entfernten Punktes trigonometrisch bestimmen wollen. — Ohne Kenntnis des Abstandes Erde—Sonne lassen sich zwar die Abstände der verschiedenen Körper des Sonnensystems voneinander nach mannigfaltigen Methoden sehr genau in relativem Maße angeben, wobei die Erdweite als astronomische Längeneinheit dient. — So ergibt sich z. B. der Halbmesser der Venusbahn annähernd gleich $\frac{1}{4}$, genauer 0,723 Erdweiten (183 und LA 218). — Auf Grund dieser Zahl läßt sich aber auch die Venusdurchgänge die Länge der Erdweite in Meilen oder Kilometern nach einer Methode bestimmen, deren Prinzip folgendes ist (Fig. 662):

Wird von zwei möglichst weit abstehenden Orten a und b der Erdoberfläche, für die der Planet Venus v sich auf die Sonnenoberfläche so projiziert, daß er längs der Bahnen ecf , gdh durch die Sonne hindurchzugehen scheint, so gilt die Proportion $cd:ab = 23:(1 - 0,723)$, woraus folgt $cd = 2,6 ab$. Dabei läßt sich die Strecke cd entweder direkt in Bruchteilen des scheinbaren Sonnendurchmessers (mittels des „Heliometers“) bestimmen oder aus den Sehnen ec und gd (als Differenz der Centralabstände dieser Sehnen) berechnen. Trägt nun z. B. die gerade Verbindung auf der Erde 10 000 km, so läßt sich hieraus weiter berechnen, unter welchem Winkel irgend eine Strecke auf der Erde von irgend einem Punkte der Sonnenoberfläche aus gesehen erscheinen müßte. So hat man aus Beobachtungen vom Venusdurchgang von 1769 auf eine Horizontalparallaxe der Sonne $0^{\circ} 0' 8,6''$ und aus den letzten Venusdurchgängen (1874 und 1882) auf eine $8,8''$ geschlossen, woraus sich

Fig. 662.

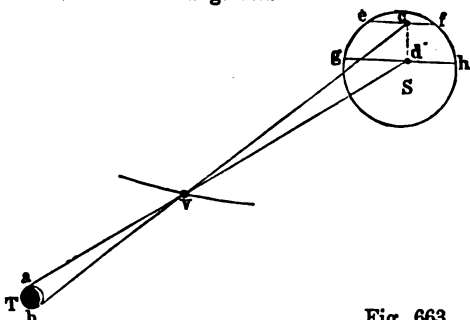
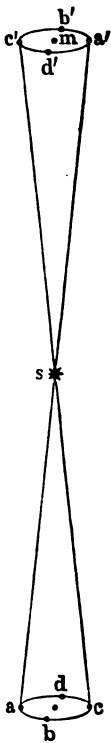


Fig. 663.



LA 218.

Eine Erdweite = 23,440 Erdhalbmesser = 20 Millionen Meilen
 = 148,5 Millionen Kilometer; daher als Erdbahndurchmesser
 = 2 Erdweiten $\neq 3 \cdot 10^8$ km.

Für die Abstände aller nicht unserem Planetensystem angehörigen Körper ist als Standlinie nur dieser Durchmesser der Erdbahn (*ac*, *bd*, Fig. 663, oder eine andere hinreichend große Sehne der Bahnellipsee) verwendbar. Aber auch für diese ungeheure Standlinie sind bis jetzt nur an etwa 50 Sternen die jährlichen Parallaxen bestimmt. Die fünf größten jährlichen Parallaxen und somit die verhältnismäßig kleinsten Abstände von Fixsternen sind annähernd folgende:

	α Centauri	Lalande 21 185	61 Cygni	γ Herkulis	Sirius
Parallaxe . . .	0,75"	0,5"	0,40"	0,40"	0,39"
Erdweiten . .	275 000	413 000	16 000	516 000	530 000
Lichtjahre . .	4,4	6,6	8,2	8,2	8,5

Von diesen Sternen war der jährliche Parallaxe 0,36" bei einem wahren des Heliometers). — Über die vergeblichen parallaxe zu messen, die aber zur Er

Denkt man sich also durch die noch nachweisbar oder schätzbar ist, — die Sonne oder (was hier dasselbe ist) die Abstände der außerhalb dieser Kugel liegenden Gestirne für uns schlechterdings unermessbar; namentlich darf uns der Schein nicht verleiten, die größeren Sterne ohne weiteres für näher, die kleineren für ferner zu erklären. Immerhin aber können uns Wahrscheinlichkeitsschlüsse noch zu weiteren Schätzungen führen. Angenommen nämlich, daß trotz sehr verschieden großer Helligkeit und Eigenbewegung der Fixsterne in allen Teilen des Weltraumes dieselben Durchschnittswerte jener beiden Größen gelten, so können wir die wahrscheinlichen Abstände verkehrt proportional den durchschnittlichen Helligkeiten und Eigenbewegungen setzen, bezw. diese Abstände selbst wieder als Vielfache der größten parallaktisch bestimmten Abstände schätzen.

Denken wir von dem Weltbilde eines „unendlichen Universums“, das uns seit der allgemeinen Annahme des kopernikanischen Systems zur Gewohnheit geworden ist, zurück an die vorkopernikanischen Vorstellungen von den kosmischen Dimensionen, so begreifen wir, daß es lange Zeit einen der stärksten Einwände gegen das kopernikanische System gebildet hat, es müßten ja alle Fixsterne eine beträchtliche Parallaxe zeigen (wiewohl damals der Abstand Sonne — Erde noch 20- bis 100mal zu gering geschätzt wurde). Die Dimensionen, welche Kopernikus, um diesem Einwurfe zu begegnen, dem Weltall zuschreiben mußte, waren so ungeheure, das seine Tat einem Sprengen des antiken und mittelalterlichen Nestchens, in das sich die Menschheit gebettet glaubte, gleichkam. Dennoch hatte dieses instinktive Widerstreben gegen eine unermessliche Erweiterung aller unserer auf irdische Räume gehenden anschaulichen Raumvorstellungen nicht einmal ein ganzes Jahrhundert standhalten können gegen die Gründe, die Kopernikus für seine Geistestat ausschließlich den Erscheinungen der Planetenbewegungen entnommen hat.

B. Beschreibung der Bewegungen von Planeten und Monden.

§ 183. Planeten.

In den vorkopernikanischen Zeiten bezeichnete der Name Planet („bewegliches Gestirn“; *πλανήτης*, ich irre herum) jedes Gestirn, das seine Lage in bezug auf die Fixsterne ändert. Im Gegensatz hierzu bezeichnete das Wort Fixstern die weit überwiegende Zahl derjenigen Gestirne, die ihre Lage in bezug aufeinander nicht ändern, sondern feste Konstellationen (Sternbilder) zeigen. Die tägliche und jährliche Bewegung, welcher dieser ganze „Fixsternhimmel“ im Sinne OSW in bezug auf die Erde besitzt, machen auch die Planeten im ganzen mit, zeigen jedoch überdies mehr oder minder geschwinde Bewegungen in bezug auf die Fixsterne, und zwar in der Nähe der Ekliptik; diese Bewegungen erfolgen im ganzen im Sinne WSO (rechtläufige Bewegung), für kürzere Zeiten aber auch im Sinne OSW (rückläufige Bewegung).

Unter jenen vorkopernikanischen Begriff von „Planeten“ fielen sieben Gestirne: *Mond* (1), *Merkur* (2), *Venus* (3), *Sonne* (4), *Mars* (5), *Jupiter* (6), *Saturn* (7). Sie sind hier geordnet nach der kürzeren oder längeren Zeit (beim Mond rund $27\frac{1}{2}$ Tage, bei Saturn rund 29 Jahre), binnen deren sie einen Umlauf in oder nahe der Ekliptik zurückgelegt haben. Dafs diese Ordnung schon in uralten Zeiten bemerkt worden war, bezeugen u. a. die Namen der sieben Wochentage, welche der Reihenfolge 1, 5; 2, 6; 3, 7; 4 entsprechen. (Auch in der übrigens sinnlosen Bezeichnung „Jahresregent“ und dem mit ihr zusammenhängenden „hundertjährigen Knauerschen Kalender“, der in Wahrheit auch nur ein siebenjähriger ist, die noch heute in keinem Kalender zu fehlen pflegen, hat sich die Erinnerung an jenen vorkopernikanischen Begriff des „Planeten“ erhalten.)

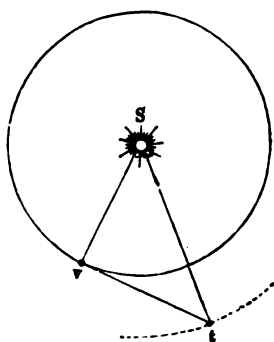
Seit Kopernikus bezeichnet der Name Planet jedes Gestirn, welches einen Umlauf um die Sonne ausführt (von Kometen hier abgesehen). Unter den so umgebildeten Begriff des Planeten fallen dann von den dem Kopernikus bekannten Gestirnen: *Merkur*, *Venus*, *Erde*, *Mars*, *Jupiter*, *Saturn*; geordnet nach ihren Umlaufszeiten (und zugleich ihren Abständen von der Sonne).

Im Sinne des kopernikanischen heliozentrischen Systems werden *Merkur* und *Venus* als *innere*, *Mars*, *Jupiter* und *Saturn* als *äufere Planeten* bezeichnet, indem die Bahnen der beiden ersteren innerhalb, die der anderen außerhalb der Erdbahn liegen.

Schon unabhängig von der Entscheidung für das kopernikanische System fällt nämlich an *Merkur* und *Venus* auf, dafs sie sich immer nur bis auf bestimmte Winkelabstände von der

Höfler, Physik.

Fig. 664.



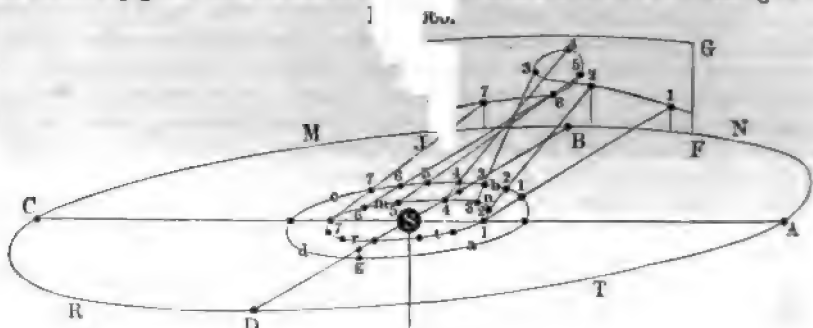
LA 218.

Sonne entfernen — Merkur bis auf 22° , Venus bis auf 46° östlicher (Fig. 664), bzw. westlicher Elongation — daher auch bald nach der Sonne untergehen als Abendsterne oder kurz vor der Sonne aufgehen als Morgensterne. — Deshalb waren Merkur und Venus schon in einem alten Weltsystem (das bei den Römern unter dem Namen des „ägyptischen“ populär war und zu dem auch noch TYCHO BRAHE sich bekannte, als um die Sonne umlaufend angenommen worden. Aus jenen Winkelabständen läßt sich auch leicht das Verhältnis ihrer Abstände von der Sonne im Vergleiche zum Abstand der Erde von der Sonne berechnen (LA 218).

Die äußeren Planeten zeigen sich in allen Winkelabständen von der Sonne von 0° bis 360° (0° Konjunktion, 90° und 270° Quadratur, 180° Opposition). — Bei den zwei inneren Planeten heißt die Stellung zwischen Erde und Sonne untere Konjunktion, die jenseits der Sonne obere Konjunktion.

Die bisher beschriebenen Erscheinungen der wechselnden Stellungen aller Planeten in bezug auf den Fixsternhimmel bilden das Tatsachenmaterial, welches PTOLEMÄUS ebenso wie KOPERNIKUS in ihren „Theorien“ — der geozentrischen wie der heliozentrischen — gemeinsam zu Grunde legten.

Nehmen wir vorläufig den Grundgedanken des heliozentrischen Systems an, so erklären sich die Schleifen und Schlingen als



parallaktische Abbilder der Erdbahn. So zeigt das Modell Fig. 665: Wenn die Erde einen ganzen Umlauf längs des inneren Kreises (1, 2, 3... 7...) binnen einem Erdjahre, und Mars im äußeren Kreise (abcdg) binnen derselben Zeit eines Erdjahres nur einen Teil des Umfanges durchläuft — und wenn überdies die Ebenen beider Bahnen etwas (in der Figur übertrieben) gegeneinander geneigt sind, aber beide durch die Sonne S gehen —: so müssen sich auf dem hinreichend fern gedachten Himmelsgewölbe FGHJ die von der Erde aus gesehenen Orte des Mars längs einer Schleife 1234567 projizieren. — Offenbar lassen sich alle Einzelheiten der Gestalt dieser verwinkelten Bahn konstruieren und berechnen, wenn die Dimensionen und die gegenseitige Lage von Erd- und Marsbahn gegeben sind.

Die Aufgabe, vor der KOPERNIKUS stand, als er das heliozentrische System gemäß den Beobachtungen des PTOLEMÄUS und Späterer numerisch auszugestalten und eben hiermit erst zu beweisen hatte, war die noch bei weitem schwierigere inverse Aufgabe: Aus den verwinkelten Bahnen und Weg-Zeit-Gesetzen der bis dahin bekannten Planeten (siehe Tafel IX) die verhältnismäßigen Größen und Lagen der einzelnen Bahnen und der Umlaufzeiten dieser Planeten einschließlich der Erde zu ermitteln. — Dieselbe Aufgabe hatte in der Sprache des

geozentrischen Systems gelaute: Wie bestimmt man das numerische Verhältnis zwischen den Größen der epizyklischen Bewegung (annähernd gegeben durch die Länge der Schleifen, d. h. durch den zur Ekliptik parallelen Abstand der beiden Punkte des Stationärwerdens, d. h. des Überganges aus Recht- in Rückläufigkeit und aus Rück- in Rechtläufigkeit) und der deferierenden Bewegung (annähernd gegeben durch das Vorrücken der Örter am Fixsternhimmel, bei denen die Schleifenbildung stattfindet)? Vergl. Taf. X.

Die Lösung war für PROLEMÄUS wie für KOPERNIKUS am leichtesten beim „obersten Planeten“, dem Saturn; denn es fällt sogleich auf, daß für aufeinander folgende Jahre die Schleifen gleich groß sind und daß sie jedes Jahr nah der Ekliptik um gleiche Stücke weiter rücken. — Schon die Bahn des Jupiter zeigt zwar ein ähnliches Bild, aber sowohl die Schleifen wie die Abstände des Vorrückens sind größer; noch größer die für Mars. — Nehmen wir dazu die im XVIII. und XIX. Jahrhundert entdeckten teleskopischen Planeten Uranus und Neptun (sowie die sämtlichen Asteroiden), so gilt für alle diese äußeren Planeten, daß je größer die epizyklischen Umlaufzeiten (in Tagen, d), desto kleiner die Längen der Schleifen sind; nämlich (annähernd für 1903):

Mars 780 ^d	Jupiter 399 ^d	Saturn 378 ^d	Uranus 369 ^d	Neptun 367 ^d
18°	9° 5'	6° 45'	4° 20'	3°

Überdies fällt auf, daß die Zahl 367^d schon sehr nahe gleich dem Erdjahr ist, wie es ja sein muß, wenn Neptun als ein sehr entfernter Körper angenommen wird; auch der kleine Schleifendurchmesser von 3° stimmt dazu. Aus beiden Gründen sind dann die anderen Planeten der Reihe nach als minder entfernt zu denken.

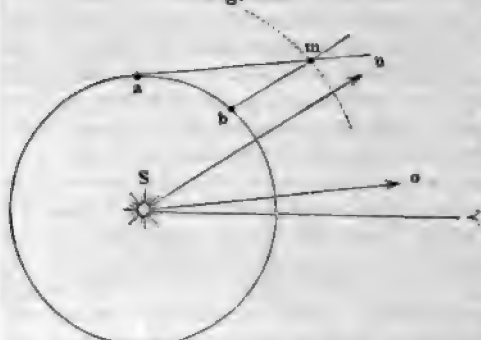
Der strenge, rechnerische Beweis aber, daß wirklich alle Erscheinungen an den Planeten parallaktische Bilder einer und derselben Bewegung, der der Erde, seien, kann erst erbracht werden, wenn wir für jeden Planeten, unabhängig von den anderen und unabhängig von der Stelle der Bahn, von wo aus wir Erdbewohner den Planeten gerade betrachten, 1. einen Ort des Planeten im Fixsternraum in Bezug auf die Sonne angeben können. Auch ergibt sich erst hieraus 2. die wahre Gestalt der Erdbahn in Bezug auf die Sonne. Überdies haben wir 3. die wahre Umlaufzeit T jedes Planeten zu ermitteln; dies geschieht (analog der bekannten Uhrzeigeraufgabe LA 219) nach der Gleichung LA 219.

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{J} - \frac{1}{S} \dots \dots \dots (1)$$

wobei J die Länge des Erdjahres, S die synodische Umlaufzeit des Planeten, z. B. von einer Opposition bis zur nächsten, bedeutet. — Es setzt aber diese Gleichung schon voraus, was erst zu beweisen ist, daß nämlich auch der Erde eine bestimmte Zeit J des „Umlaufs um die Sonne“ zukomme, und daß diese Zeit nichts anderes als das aus dem geozentrischen System bekannte Jahr sei (von dem Unterschiede zwischen siderischem und tropischem Jahre sei im folgenden abgesehen). Zu diesem Beweis gehört 4. eine Methode zur Ermittlung der wahren Umlaufzeit T jedes Planeten, die von Gleichung (1) unabhängig ist.

Die Lösung dieser vier Aufgaben geht zunächst davon aus, daß die Ebene der Erdbahn sowie die Ebene jedes Planeten durch die Sonne hindurchgeht (wie dies in Ptolemäus' und Kopernikus' Annahme „exzentrischer Kreise“ und später im ersten Keplerschen Gesetz mit eingeschlossen ist, indem die Sonne im Brennpunkte jeder Bahnellipse, also in deren Ebene liegt; speziell für die Erdbahn ist dies dadurch gegeben, daß die Ekliptik im geozentrischen Sinne größter Kreis am Himmel ist). —

Fig. 666.



Zu 4: Wiewohl z. B. der Mars (m, Fig. 666) von verschiedenen Stellungen der Erde a, b gesehen sich auf Stellen des Firmamentgewölbes projiziert, aus dem im allgemeinen nicht zu entnehmen ist, was davon auf Rechnung seiner eigenen wechselnden Stellung zu der der Erde kommt, so ist zu dem Zeitpunkt des Hindurchgehens durch den (aufsteigenden) Knoten ein solcher, wozu wir wissen können, daß der Planet nicht nur scheint

sondern wirklich in diesem (aufsteigenden) Knoten befinden müsse, von welchem Punkte der Erdbahn aus wir ihn auch beobachten mögen. — In der That stellt sich auch die Zeit für je zwei aufeinander folgende Durchgänge durch denselben Knoten als eine konstante dar und zwar ist dies eben die wahre Umlaufzeit T des Planeten. Es ergeben sich nach dieser unabhängigen Methode die Umlaufzeiten für die inneren und äußeren Planeten nach Tafel VII. — Anschaulicheres Bild geben noch die Bogen (bzw. Winkel und Winkelgeschwindigkeiten), die die Planeten binnen derselben Zeit zurücklegen, in der der schnellere

Fig. 667.



Merkur, einen ganzen Umlauf zurücklegt (Fig. 667, wo auch die Verhältnisse der Abstände eingehalten sind).

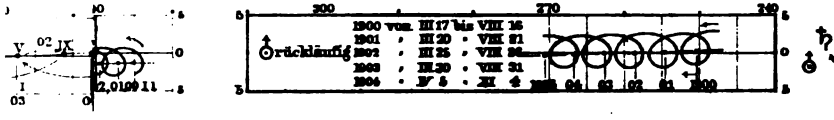
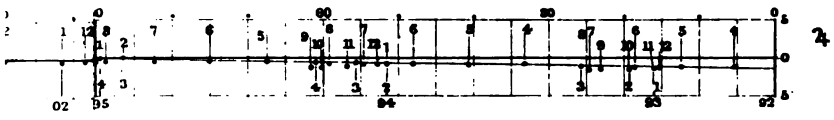
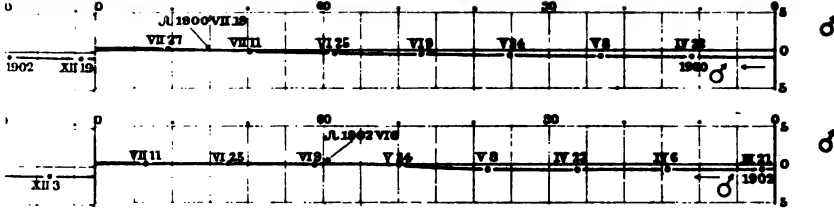
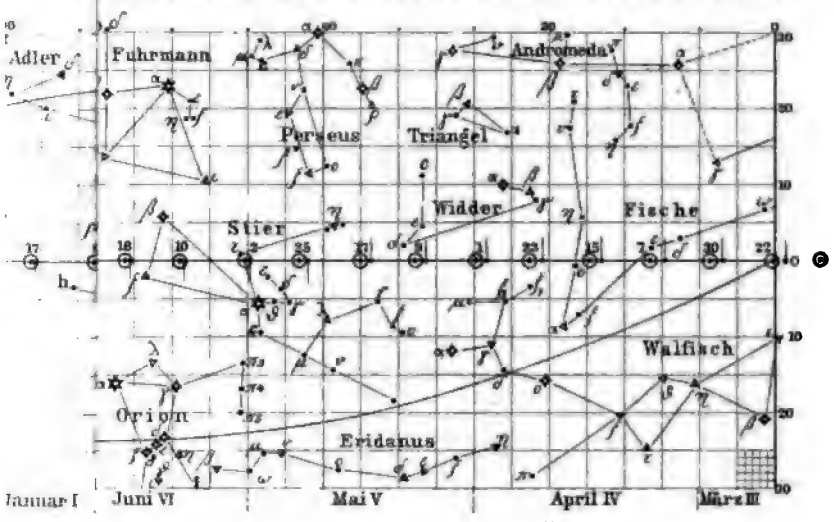
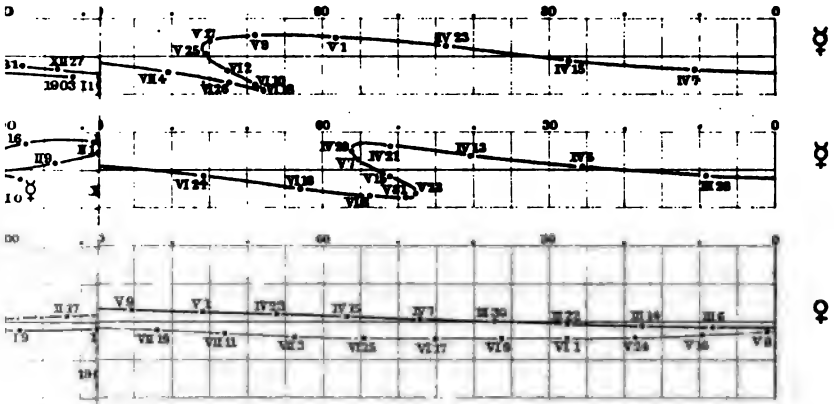
Zu 3: Aus den beobachteten synodischen Zeiten und aus der Annahme, daß das Jahr in geozentrischem Sinne (beobachteter Umlauf der Sonne in der Ekliptik) zugleich das Jahr in heliozentrischem Sinne (d. i. die Umlaufzeit der Erde um die Sonne) sei, ergeben sich die folgenden Zahlen

	Synodische Umlaufzeiten in Erdjahren						
	Merkur	Venus	Mars	Jupiter	Saturn	Uranus	Neptun
beobachtet:	0,327	1,620	2,140	1,090	1,042	1,010	1,004
berechnet:	0,316	1,630	2,130	1,090	1,040	1,019	1,004

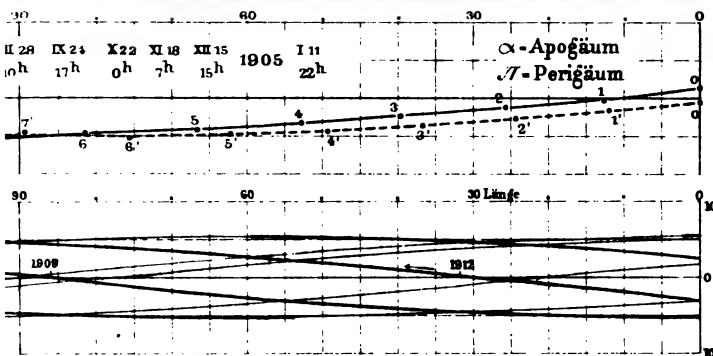
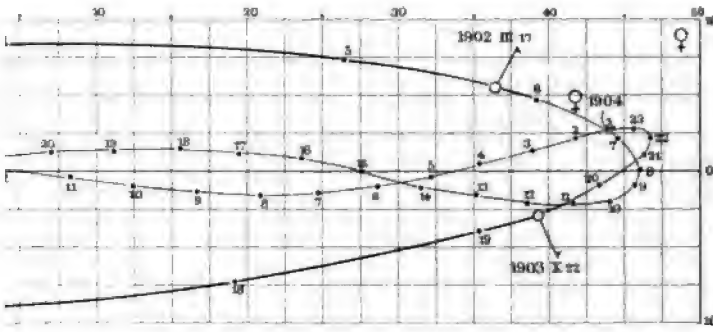
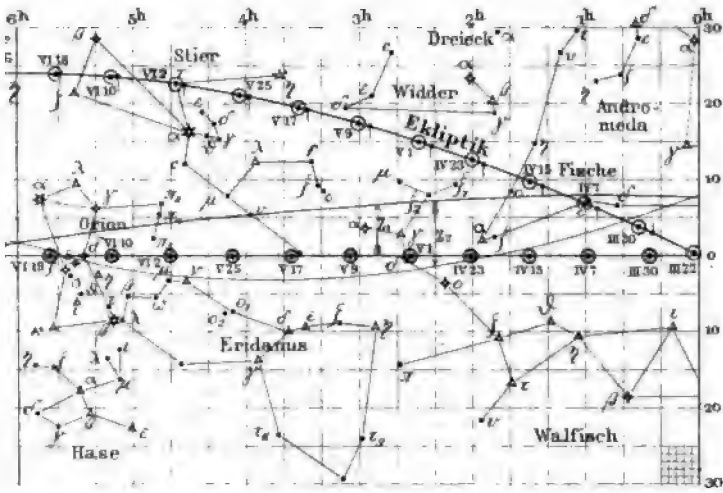
In der sehr guten Übereinstimmung der nach 4 und 3 sich ergebenden Werte von T liegt hiermit der eigentliche Beweis des kopernikanischen Systems.

Zu 2 und 1: Ein Durchgang des Mars durch den aufsteigenden Knoten wurde z. B. am 1. Januar 1846 von der in Bezug auf Sonne und Fixsterne in befindlichen Erde aus beobachtet und das nächstmal am 19. November 1847 von b aus. Denken wir uns die Erdbahn nicht als Kreis, sondern als eine zu bestimmende Kurve und legen wir die Strecke Sa als Längeneinheit Grunde (sie ist der kleinste Abstand Erde-Sonne, da diese am 1. Januar durch das Perihel geht), so sind von einem ebenen Viereck $Samb$ außer dieser Sa noch bekannt drei Winkel: Sam als Längenunterschied von Sonne und barem Marsort; ebenso Winkel Sbm ; endlich Winkel aSb . (Dabei pfe

Tafel IX.



1900 vom 17. bis 18. VII 18	1901	1902	1903	1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032	2033	2034	2035	2036	2037	2038	2039	2040	2041	2042	2043	2044	2045	2046	2047	2048	2049	2050	2051	2052	2053	2054	2055	2056	2057	2058	2059	2060	2061	2062	2063	2064	2065	2066	2067	2068	2069	2070	2071	2072	2073	2074	2075	2076	2077	2078	2079	2080	2081	2082	2083	2084	2085	2086	2087	2088	2089	2090	2091	2092	2093	2094	2095	2096	2097	2098	2099	2100
-----------------------------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------



1. 1. bei Neumond
 2. 2. nisse nach 18 Jahren 11 Tagen
 3. 3. nde nach 19 Jahren 0 Tagen
 4. 4. Jahren
 5. 5. nde im folgenden Jahre mit

Mondbahnen im Januar 1900,
 1903, 1906, 1909, 1912, 1915, 1918.
 In 18,8 Jahren macht der Δ
 einen Umlauf, die Bahn nimmt
 ihre Lage am Fixsternhimmel
 wieder ein.

3	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
8	V 24	VI 9	VI 25	VII 11	VII 27	VIII 12	VIII 28	IX 13	IX 29	X 14	X 30	XI 15	XI 31	XII 16	XII 31
9	V 25	VI 10	VI 26	VII 12	VII 28	VIII 13	VIII 29	IX 14	IX 30	X 15	X 31	XI 16	XI 31	XII 17	XII 31
7	V 23	VI 8	VI 24	VII 10	VII 26	VIII 11	VIII 27	IX 12	IX 28	X 13	X 29	XI 14	XI 30	XII 15	XII 30



Schrichtungen z. B. am parallel zu sich durch die Sonne verlegt zu denken, nach So und diese Richtung $am = so$ durch den Winkel gegen die Gerade der Sonne zum Frühlingspunkte $S \vee$, d. i. durch die heliozentrische Länge Mars an jenem Tage auszudrücken.) LA 221.

LA 221.

Nach dieser Methode hat KEPLER sehr genau die elliptische Form der Bahn und die Stellung der Sonne S im Brennpunkte dieser Bahn festgestellt. — Nachdem hiermit die Lage und (relative) Länge aller Standlinien für Beobachtungen von Planetenörtern bekannt waren, konnte Kepler auch die in aller übrigen Planeten feststellen, was im ersten und zweiten Keplerschen Satze ausgesprochen ist (1609). Figg. 668 und 669 zeigen, in wie guter Anäherung auch schon Ptolemäus die relativen Stellungen von Erde und Mars zu

Fig. 668.

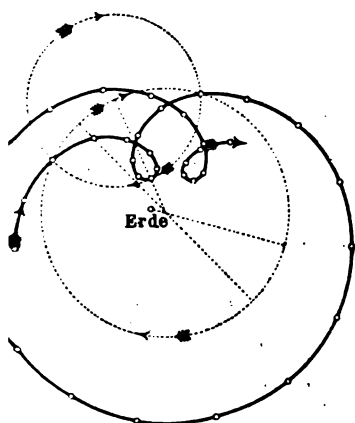
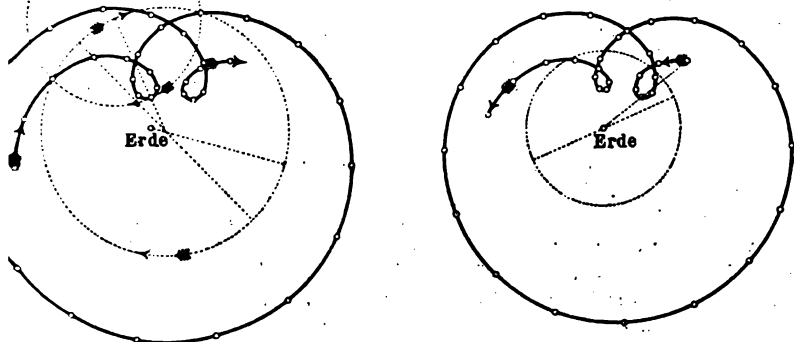


Fig. 669.



schreiben vermocht hat — wie aber doch die Ersetzung der Hipparch-Ptolemäischen exzentrischen Kreise durch Keplers Ellipsen auch schon diese iven Bewegungen etwas anders (durch verschieden große epizyklische eifen) darstellt.

Zwischen den hiermit erkannten großen Halbachsen der Bahnellipsen und nach 3 und 4 erkannten wahren Umlaufzeiten bemerkte sodann Kepler verismäßig spät (1619) auch die im dritten Gesetz ausgesprochene Beziehung.

KEPLERS Zeitgenosse GALILEI hatte fast gleichzeitig mit der Entdeckung der en ersten Keplerschen Gesetze (mit denen sich aber bezeichnenderweise sogar ILEI selbst nicht zu befreunden vermochte) durch die Erfindung des Fernes der kopernikanischen Lehre zu augenscheinlichen Beweisen verholfen, inner zunächst die Phasen der Venus und die verschiedene Größe ihrer iber beobachtete. Es war nämlich öfters als Grund gegen dieses System anht worden, daß dann Venus, indem sie der Erde bis auf 1 Viertel des Erdbahnmessers nahe kommt (in der unteren Konjunktion Venus — Sonne) und sich 7 Viertel Erdbahnhalmmesser von der Erde entfernt (in der oberen Konjunktion) in Größen erscheinen müßte, die sich wie 7:1 verhalten. Dieser Einwurf aber übersehen, daß die kleinste Venusscheibe voll beleuchtet, die größte nicht beleuchtet ist. — Die von GALILEI beobachteten Veränderungen von se und Gestalt der Venusscheibe bzw. -sichel stimmen vollständig mit allen

Forderungen der kopernikanischen Annahme, wenn ebenfalls wieder die Venus wie der Mond, als Kugel angenommen wurde.

Über GALILEIS Entdeckung von vier Monden des Jupiter vergl. folg. §.

An Saturn beobachtete GALILEI durch sein noch sehr mangelhaftes Fernrohr zwei scheinbar an ihm klebende lichte Körper, die nach einiger Vervollkommenung des Fernrohres eine Zeitlang als „Hantel“ gedeutet wurden, bis erst HUYGENS das

Fig. 671.

Fig. 670.



Saturnring erkannte (Fig. 67) achtet. — MAXWELL zeigte, dass starren Systeme sein können, die Monden, bestehen müssen (da ein wurde diese Theorie photomet

Noch anderthalb Jahrhunderte kannter Planeten auf die auch Durch das Teleskop fand HERSCHEL

1801 wurde der erste der Asteroiden an 500 bekannt sind, und die sämtlichen in dem Gürtel zwischen Mars und Jupiter sich bewegen, bis auf den 1897 entdeckten Eros, der im Perihel der Erde näher kommt als Mars. — Über die Entdeckung des Neptun (des äußersten bis jetzt bekannten Gliedes unseres Planetensystemes) durch LEVERRIER 1846 vergl. § 21.

wurde er als mehrfach geteilt betrachtet. — GRÜNDEN, dass diese Ringe keine gelassen kleinen Körpern, gleichsam der Ring bersten müßte; neuentdeckt optisch bestätigt).

pler und Galilei war die Zahl bekannter Planeten beschränkt. In der Neujahrsnacht (Ceres genannt), von denen jetzt

§ 184. Monde.

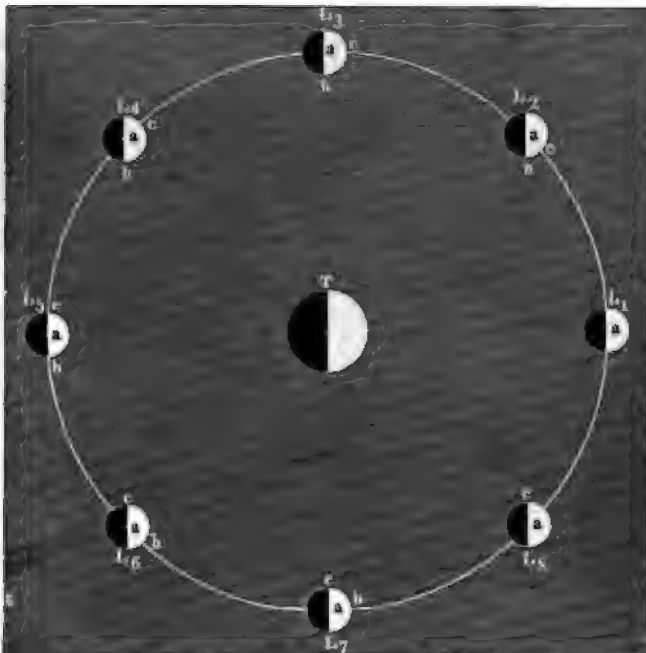
„Mond“ war bis zu GALILEIS Beobachtung der vier Begleiter des Jupiter und der nachmals entdeckten Saturn-, Mars-, Uranusmonde u. s. f. kein Gattungswort, sondern ein Eigennamen für den Begleiter der Erde. Hinsichtlich seiner hatte das kopernikanische System nichts an der Annahme der Alten zu ändern.

Die Beschreibung der Erscheinungen, die der Mond dem Beobachter auf der Erde darbietet, gliedert sich in die der Mondphasen und der Bewegungen des Mondes in Bezug auf den Fixsternhimmel. Wiederholende Beschreibung nach Fig. 672, die in ihr dargestellten „wirklichen“ Bewegungen und Beleuchtungen sind aus den im folgenden kurz geschilderten „scheinbaren“ abgeleitet:

Der Mond ist unsichtbar als Neumond, indem er dann zwischen Erde und Sonne steht und also der Erde die unbeleuchtete Seite zuwendet. Schon einen Tag später zeigt er sich kurz nach Sonnenuntergang nahe dem Westhorizont, indem er als schmale Sichel die konvexe Seite der Sonne zuwendet. Indem er binnen je einem Tage um rund 13° im Sinne WSO in Bezug auf den Fixsternhimmel nahe der Ekliptik (bis auf höchstens etwa 5° südlich oder nördlich

von ihr) fortrückt, legt er binnen einem **siderischen Monat** von $27\frac{1}{2}$ Tagen (genauer: $27^d 7^h 43^m 11,5^s$) einen Umlauf in Bezug auf den Himmel zurück und zeigt dabei in einem **synodischen Monat** von $29\frac{1}{2}$ Tagen (genauer: $29^d 12^h 44^m 2,8^s$) einen vollen Wechsel der

Fig. 672.



Phasen, indem er nach rund je einer Woche (die als siebentägige Periode zweifellos eben hierin ihren Ursprung hat) Neumond, erstes Viertel, Vollmond, letztes Viertel wird. — Erklärung des Zeitunterschiedes der beiderlei Monate analog der Uhrzeigeraufgabe (LA 219). LA 219.

Die hiermit nur in erster Annäherung beschriebene Bewegung des Mondes ist in Wahrheit eine überaus verwickelte; gleichwohl vermochte schon Hipparch diese Bewegungen in bewunderungswürdiger Annäherung zu beschreiben, indem er eine Bewegung ähnlich der der Sonne in der Ekliptik, aber längs einer Bahn, die gegen die Ekliptik um 5° geneigt ist, zu Grunde legte und dann die Abweichungen von dieser Bahn und deren fortwährende Veränderungen (infolge deren sie im ganzen ein dichtes Netzwerk um jene mittlere Bahn darstellt) in mehrere „Ungleichheiten“ auflöste. Heute verstehen wir alle diese und andere Abweichungen als durch das Newtonsche Gravitationsgesetz notwendig gefordert. Steht z. B. der Mond als Neumond in demjenigen Teil seiner Bahn, der am meisten, also um 5° , von der Ekliptik als scheinbarer Sonnenbahn absteht, so wird die Sonne den Mond in die gerade Linie Erde—Mond—Sonne hereinzuziehen suchen. Es werden also schon deshalb die „Knoten“ der Mondbahn längs der



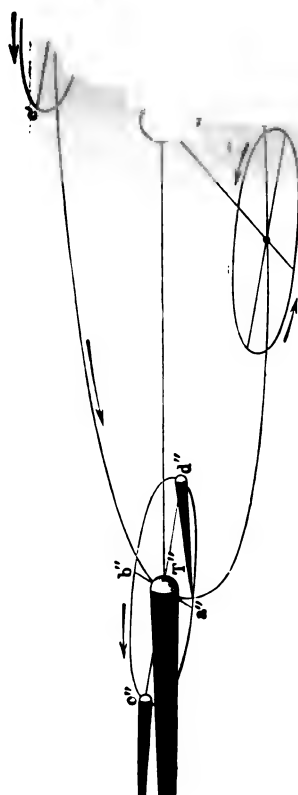
Ekliptik wandern müssen. Die genaueste Kenntnis der Lage dieser Knoten ist unentbehrlich für die Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse (Fig. 673), da diese eben nur dann eintreten, wenn der Mond den Knoten zur Zeit des Neumondes (Sonnenfinsternis), bzw. des Vollmondes (Mondfinsternis) passiert. (Daher auch der Name Ekliptik, d. h. Linie der Finsternisse, *ekliptikos*.) Eben deshalb können auch in einem Jahre nicht mehr als höchstens fünf Finsternisse stattfinden, und zwar folgt nicht selten binnen einem halben synodischen Monat auf die Sonnen- eine Mond- und umgekehrt.

Der Mond kehrt der Erde an immer „dieselbe Seite“ zu seiner Umdrehung (Rotation) eine zur Mondbahn normale ist also gleich der seines Um- (Translation, § 26) um die Erde. Aber die Umdrehung mit konstanter Geschwindigkeit erfolgt, der Umlauf damals dem I. und II. Keplerschen also in einer Ellipse und ungleich-

zeitig, so bekommen wir noch $7^{\circ} 53'$ auf jeder Seite der Mondscheibe mehr als nur die uns zugewendete Hälfte der Mondkugel zu sehen (Libration, und zwar „optische“ — hierzu noch die sehr kleine „physische“ Libration).

GALILEIS Entdeckung von vier Begleitern des Jupiter (Fig. 674 a. f. S.) gab das erste direkt beobachtete Beispiel dafür, daß auch um andere Körper als die Erde Gestirne umlaufen, und jene Beobachtungen waren deshalb ein überaus gewichtiges Argument zu Gunsten der von Kopernikus aufgestellten antigeozentrischen Hypothese. Erst 1891 wurde noch ein dem Jupiter sehr naher fünfter Begleiter beobachtet. — Mars hat zwei ganz kleine Monde, Saturn deren acht. Alle diese Monde oder Trabanten umkreisen ihren Hauptplaneten im Sinne WSO, also in demselben, der in allen Bewegungen des Planetensystems herrscht. Nur der Mond des Neptun zeigt überraschenderweise den entgegengesetzten Sinn des Umlaufes, und die vier Monde des

Fig. 673.

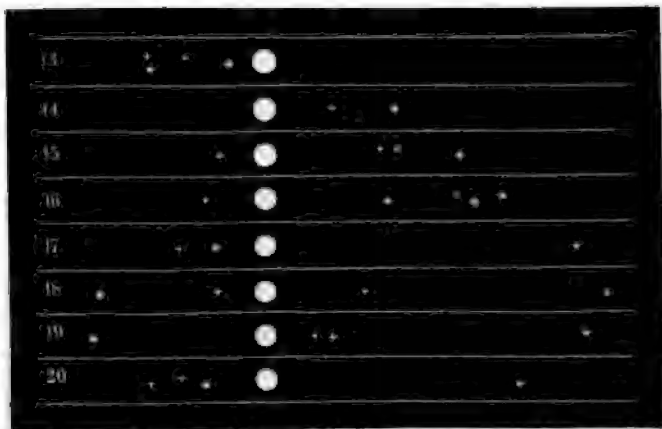


Uranus stellen einen Übergang hierzu dar, indem die Neigungen ihrer Bahnen etwa 98° betragen (— wichtig als Ausnahme von der der KANT-LAPLACESchen Theorie ursprünglich zu Grunde gelegten Tatsache des gemeinschaftlichen Umlaufsinnnes).

Fig. 674: Monde des Jupiter vom 13. bis 20. März 1872 täglich 10 Uhr abends.

- 1. Trabant.
- 2. Trabant.
- 3. Trabant.
- 4. Trabant.

(Am 14. März standen der 2. und 4. Trabant hinter, am 16. der 1. vor, am 17. der 1. hinter dem Jupiter.)



§. 185. Kometen, Sternschnuppen, Meteoriten.

Von jeher erregte das ziemlich seltene Schauspiel großer, lichtstarker Kometen allgemeine Aufmerksamkeit, ja Schrecken. Seit Erfindung lichtstarker Teleskope hat sich die Zahl der alljährlich entdeckten und beobachteten Kometen auf durchschnittlich 4–5 gesteigert.

Im Gegensatz zu den Planeten, welche sich alle nahe der Ekliptik halten, durchkreuzen die Kometen unser Sonnensystem nach allen Richtungen. Sie werden unterschieden in **periodische** und **nicht-periodische**; erstere beschreiben geschlossene Bahnen, nämlich (abgesehen von den für die Kometen oft sehr beträchtlichen Störungen, namentlich durch die größeren Planeten) Ellipsen; die nichtperiodischen bewegen sich in Parabeln und Hyperbeln. In den Brennpunkten aller dieser Kegelschnitte steht die Sonne als Zentralkörper, und es gelten überhaupt für sie die (für Parabel und Hyperbel erweiterten) Keplerschen Gesetze, wie NEWTON erkannt hat.

Das Aussehen der Kometen ist ein sehr mannigfaltiges; nicht alle sind, wie ihr Name es sagt, „Haarsterne“ (Schweifsterne), an denen sich deutlich ein Kern und ein Schweif aus weniger stark leuchtender Materie unterscheiden läßt; einiges über die physische Konstitution der Kometen im § 187. Unabhängig von den hierüber aufgestellten Hypothesen ist die Tatsache, daß bei den Kometen mit Schweifbildung diese am stärksten in der Nähe des Perihels zu sein pflegt und daß der Schweif von der Sonne meistens abgewendet ist (was die Hypothese elektrischer Abstossungen oder anderer elektromagnetischer Einwirkungen nahe legt). — Fig. 675 a. f. S.



Fig. 675. Donati's Komet. — Stellungen der Sonne am 27. September, 9. und 14. Oktober.

Meteore (Feuerkugeln, Boliden, Sternschnuppen) nennt man plötzlich aufleuchtende und unter sekunden- bis minutenlangem Nachleuchten ihrer Spur wieder verschwindende Himmelskörper. Von einzelnen ist ihr Niederfallen auf die Erde direkt beobachtet worden.

Als CHLADNI (der Entdecker der Klangfiguren, § 88) vor erst einem Jahrhundert behauptete, jene flüchtigen Lichterscheinungen rühren von Weltkörperchen her, die in der Atmosphäre der Erde glühend geworden seien, und die häufig an der Erdoberfläche oder einige Meter unter ihr vorgefundenen Eisenmassen von oft eigentümlicher krystallinischer Struktur seien solche kosmischen Körper, stieß diese Lehre auf härtesten Widerspruch. Auch direkt beobachtete Meteorfälle suchte man damals noch wegzudeuten. Gegenwärtig ist nicht nur der kosmische Ursprung dieser Körper außer Zweifel, sondern es fügt sich auch die Berechnung ihres Laufes vor dem Eindringen in die Atmosphäre ebenfalls den Keplerschen Gesetzen. — Insbesondere für Sternschnuppenschwärme, deren prächtigste der Laurentiusstrom (um den 12. bis 14. August) und der Leonidenschwarm (um den 15. November) sind, ist die Identität mit Kometen sichergestellt. — Für die Beobachtung einzelner Meteore ist den Astronomen die Mitwirkung gebildeter Laien erwünscht. Es sind namentlich die Orte, an welchen das Meteor aufleuchtet und verlöscht, durch Beachtung benachbarter Fixsterne im Gedächtnis zu behalten, sowie die Zeitpunkte jener Erscheinungen bezw. die Dauer der Sichtbarkeit. Sind solche Beobachtungen an zwei hinreichend weit entfernten Orten gemacht worden, so läßt sich daraus der Ort, bezw. aus mehreren Paaren solcher Beobachtungen die Bahn des Meteors berechnen.

C. Aus der physischen Astronomie.

§. 186. Körperlichkeit der Gestirne. — Geschwindigkeit des Sternenlichtes.

Geschichtliches. Die gesamte antike Astronomie und größtenteils auch noch die des Kopernikus und Kepler war eine wesentlich mathematische, nämlich geometrisch-phoronomische, indem die Beschreibungen der Bewegungen der himmlischen Lichter unabhängig blieben von den manchmal sehr abenteuerlichen Vorstellungen über deren physische Beschaffenheit. So war vielfach der Fixsternhimmel für eine krystallene Sphäre gehalten worden, durch deren Löcher ein ewiges Feuer, das Empyreum, hereinleuchte. Noch KOPERNIKUS hielt das Fixsternlicht für reflektiertes Sonnenlicht (wie wir heute nur mehr das Licht der Planeten und Monde und zum Teil der Kometen). Erst von GIORDANO BRUNO († 1600) wurde mit Entschiedenheit behauptet, daß alle Gestirne „Weltkörper“ seien. — Nicht nur im allgemeinen die Körperlichkeit der Gestirne, sondern die Einordnung namentlich ihres mechanischen (thermischen und optischen) Verhaltens unter die allgemeinen Gesetze der Physik, wurde über alle Zweifel erhoben erst durch die mit NEWTON beginnende Anwendung der Dynamik auf die Astronomie. — Im folgenden nur einige wenige Mittheilungen aus dem unerschöpflich reichen und reizvollen Gebiete der physischen Astronomie.

Da wir mit keinem einzigen Himmelskörper, auch dem uns nächsten, dem Mond nicht, in direkten Verkehr zu treten vermochten, so sind wir mit all unserem Wissen um die stoffliche Beschaffenheit der Himmelskörper auf die uns durch Strahlung zugesendete Energie angewiesen. Sie gibt sich uns zunächst kund als Sternenlicht; doch sind es seit der während der letzten zwei bis drei Jahrzehnte einen mächtigen Aufschwung nehmenden Himmelsphotographie keineswegs mehr nur die optisch, sondern auch die bloß chemisch wirksamen Strahlen, denen wir solche Aufschlüsse verdanken. (Was folgt daraus, daß z. B. Photographieen von Nebelflecken oft stark von sorgfältigen Zeichnungen nach dem Bilde im Fernrohr abweichen?) Hierzu kommen dann auch die Wärmestrahlen, welche uns freilich nur für die Sonnenstrahlung und nur mit feinsten Bolometern auch für die reflektierte Mondstrahlung, nicht aber für die Planeten und Fixsterne merkliche Wärmemengen anzeigen.

Alle diese Strahlen geben uns durch ihre Richtung über den Ort (freilich für weitaus die meisten nur in Winkel, nicht in Längenangaben § 182) und durch ihre Brechbarkeit über die Temperatur und die chemische Beschaffenheit der Himmelskörper (durch Spektralanalyse und Photometrie) Aufschlüsse.

Der Gedanke, daß wir von den Sternen fast nur durch ihr Licht wissen (und hieraus unmittelbar von manchen dunklen, z. B. vom Sirius-, vom Algol-Begleiter), gewinnt noch vertieftes physikalisches (ja erkenntnistheoretisches, Anh., Nr. 39) Interesse, wenn wir bedenken, daß manche von den Sternen, die wir direkt „sehen“, dennoch vielleicht gar nicht mehr existieren: dies mit Rücksicht auf die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit des Lichtes. Es mögen sogleich hier die beiden astronomischen Methoden (über die terrestrischen vergl. § 122) zur Bestimmung dieser Geschwindigkeit des Lichtes folgen:

Anh. 39.

1. OLAF RÖMER (1675) hatte zur Zeit der Opposition des Jupiter [Fig. 676, Stellung der Erde in *a*)] einige aufeinander folgende Verfinsterungen des innersten Jupitermondes beobachtet, und aus der hier immer gleichen Zwischenzeit von $42^h 28^m 36^s$ den Eintritt der Verfinsterungen für etwas mehr als ein halbes Jahr später, nämlich bis zur Zeit der Konjunktion des Jupiter mit der Sonne (Stellung

Fig. 676.



der Erde in *c*) voraus-
rungen um 986 Sekun-
war. RÖMER schloß, d-
legen des Erdbahndurchmesser-
angenommen, ergibt als kosmische L-
itgeschwindigkeit rund 40 000
Meilen per Sekunde = **300 000 km-sec⁻¹**.

den aber jetzt die Verfinste-
n später sichtbar, als erwartet
ei, die das Licht zum Zurück-

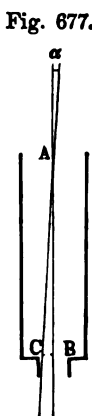
Dieser, als 40 Mill. Meilen

LA 222.

Die Verspätungen, bzw. Verfrühungen von einer Verfinsterung zur nächsten sind sehr klein sowohl in Opposition wie Konjunktion, da sich die Erde fast normal zur Geraden Jupiter — Erde — Sonne — Erde bewegt, dagegen am größten nahe den Quadraturen (LA 222). — RÖMERS Schlüsse auf eine endliche Geschwindigkeit des Lichtes waren zu ihrer Zeit so überraschend, daß sie allgemeinen Glauben erst fanden, als sie ein halbes Jahrhundert später von BRADLEY auf ganz davon unabhängigem Wege, nämlich dem der Aberration, bestätigt wurden.

2. BRADLEY (1727) bemühte sich durch feinste Messungen festzustellen, ob es Fixsterne mit meßbaren Parallaxen gebe (über die Bedeutung dieser Frage vergl. § 182). Er wählte hierfür einen Stern nahe dem Pol der Ekliptik (γ im Drachen), der dann binnen einem Erdjahr ein parallaktisches Abbild der Erdbahn WSONW im selben Sinne *onwso* hätte beschreiben müssen und zwar so, daß, wenn vier beliebige um je 90° voneinander abstehende Punkte der Erdbahn mit W, S, O, N bezeichnet werden, der Stern von W aus gesehen in *o*, von S aus gesehen in *n* u. s. f. hätte erscheinen müssen. In der Tat nun zeigte jener Stern zwar wirklich eine Bewegung im Sinne *wsonw*, wider Erwarten aber erschien er von W aus gesehen in *w*, von S aus gesehen in *s* u. s. w., also immer an den gerade entgegengesetzten Stellen der Bahn. Die Ursache der Erscheinung mußte also eine ganz andere sein als eine parallaktische. — Bradley geriet auf die richtige Erklärung, als er auf einem Schiffe fahrend den Wimpel eine Zwischenstellung zwischen der Richtung der Fahrt und der des Windes einnehmen sah: er nannte dann jene Abweichung des Fixsternlichtes jährliche **Aberration** und den Halbmesser jenes kleinen Kreises ($\alpha = 0^\circ 0' 21''$) den **Aberrationswinkel**.

Bradleys richtige und durch alle späteren Beobachtungen anderer Sterne bestätigte Erklärung (Sterne nahe der Ekliptik beschreiben nämlich nur schmale Ellipsen, deren große Halbachsen parallel der Ekliptik liegen und ebenfalls $0^{\circ} 0' 21''$ betragen) läßt sich auf mehrfache Art veranschaulichen; z. B.: Marschieren auf der Straße nahe hintereinander breite Soldatenkolonnen, so muß man, um zwischen ihnen hindurchzukommen, nicht normal zur Richtung der Straße, sondern unter einem schiefen Winkel hinübergehen. Desgleichen: Fiele ein Meteor vertikal auf ein Schiff, so daß es durch Deck und Unterdeck Löcher schlägt, so liegen diese nur beim ruhenden Schiff vertikal untereinander, nicht aber beim bewegten. Vergl. die schiefen Regenstreifen nach Fig. 23. — Wer bei vertikal fallendem Regen läuft, muß den Regenschirm schief vor sich halten. — Noch unmittelbarer: Ist das Fernrohr (Fig. 677) normal zur Ebene der Ekliptik auf den Stern gerichtet, so hat binnen der Zeit, die das Licht vom Objektiv bis zum Okular braucht, das Okular schon ein Stückchen der Erdbahn zurückgelegt. Da nun in dem Geschwindigkeitsdreieck CBA die Seite CB der Geschwindigkeit der Erde längs ihrer Bahn $c = 4$ Meilen-sec $^{-1}$ entspricht und da $\text{ctg } 0^{\circ} 0' 21'' \approx 10000$ ist, so ist die der Seite AB entsprechenden Geschwindigkeit $C = 40000$ Meilen-sec $^{-1}$.



Die hier nach zwei astronomischen Methoden bestimmte Lichtgeschwindigkeit, welche anderthalb Jahrhunderte später durch die beiden terrestrischen Methoden (§ 122) glänzend bestätigt wurde, gestattet es, von kosmischen Distanzen übersichtlichere Vorstellungen zu geben als durch die direkten Längenangaben. So braucht das Licht vom Mond auf die Erde $1\frac{1}{4}$ Sekunden, von der Sonne 8 Minuten, von dem uns nächsten Fixstern (α Centauri, § 182) 4,4 Jahre!

§. 187. Physikalische Eigenschaften der Planeten, Monde und Kometen.

Die Körperlichkeit des Mondes war schon dem Altertum bekannt und geläufig, da hier die wechselnde Gestalt der Lichtgrenze einen strengen Schluß auf seine Kugelgestalt zuließ. — Lange rätselhaft war die Natur der Mondflecken (die Namen „*mare imbrium*“, „*mare serenitatis*“ u. dergl. bedeuten nicht wirkliche „Meere“); sie sind seit der Entdeckung des Fernrohres zum Teil als die Schatten der Mondgebirge erkannt, zum Teil aus der verschiedenen Färbung, d. h. Reflexionsfähigkeit des Gesteines erklärt.

Auch an der Erdoberfläche mußten ja vom Weltraum aus z. B. Kreidefelsen heller erscheinen als Humus. — Gegenwärtig ist die Oberflächenbeschaffenheit des Mondes so eingehend erforscht, daß sich die „Selenographie“ eines fortgeschrittenen Zustandes erfreut als selbst mancher Teil der Geographie. Freilich gilt dies um so weniger von der der Erde für immer abgekehrten Seite des Mondes (§ 184); immerhin weiß man aber auch von dieser, daß sie z. B. nicht die Form etwa eines von der Erde weit wegragenden Stiles oder dergleichen haben und überhaupt nicht allzu weit von der der Halbkugel abweichen kann, da sich solche Abnormitäten durch pendelnde Bewegungen des ganzen Mondkörpers u. dergl. verraten müßten.

Da bei „Sternbedeckungen“ bis zum Augenblick des Verschwindens des Sternes hinter der Mondscheibe keine Brechung und Farbenänderung des Sternlichtes zu beobachten ist, müssen wir schliessen, dass der Mond entweder keine Atmosphäre oder nur eine unmerklich dünne besitze. Daraus ist weiter, dass er auch ebenso wenig Wasser besitzt; denn dieses müsste ins Licht alsbald verdunsten. Daher sind auch die während der je vierzehntägigen Einstrahlung seitens der Sonne und ebenso langen Ausstrahlung in den Weltraum an jedem Punkt der Mondoerfläche eintretenden Temperaturdifferenzen jedenfalls sehr beträchtlich; was ein weiterer Grund dafür ist, dass ein organisches Leben auch nur annähernd ähnlich dem irdischen auf dem Mond fehlen muss.

Über die Oberflächenbeschaffenheit der der Erde näheren Planeten geben uns die Fernrohre unserer Zeit reichlichen Aufschluss; hier nur wenige Beispiele:

An Mars sind seit langem die weissen Polarflecken beobachtet, welche zu derjenigen Zeit grösser werden, wann für den betreffenden Pol des Mars infolge seiner Rotation und Stellung der Achse zur Sonne Winter ist. Hiermit ist das Vorhandensein von Wasser auf dem Mars wahrscheinlich — und hiermit auch das eines organischen Lebens; dieses brauchte von dem der Erde nicht einmal wesentlich verschieden zu sein, da die Einstrahlung seitens der Sonne infolge des Verhältnisses der Abstände 1:1.5 nur im Verhältnis 1:2.25 geringer ist.

Die vieljährigen Beobachtungen SCHIAPARELLI haben höchst merkwürdige Zeichnungen der Marsoberfläche erkennen lassen. Auch hier spricht man von Kontinenten und Meeren, ohne dass hiermit die physische Beschaffenheit zweifellos richtig bezeichnet wäre, und überdies von Kanälen, die sich in Ausdehnungen von Tausenden von Kilometern durch die Kontinente hinziehen und mannigfach kreuzen. Die besonders überraschenden Verdoppelungen dieser Kanäle (welche zu abenteuerlichen Annahmen grossartiger Schleusenwerke u. dergl. geführt haben) lassen sich vielleicht als Beugungserscheinungen im Fernrohre erklären.

Jupiter zeigt schon beim direkten Anblick durch ein schwach vergrösserndes Fernrohr deutlich eine Abplattung, wie sie bei der Erde nur aus Meridiangradmessungen erschlossen werden kann.

Senkrecht gegen die hieraus zu erschliessende Rotationsachse verlaufen deutliche Streifen längs des Äquators und der Parallelkreise des Jupiter (ähnlich wie die verschiedene Bewölkung der Erde in den Tropen, Kalmen, gemäßigten Zonen u. s. w. der Erde vom Weltraum aus erscheinen müsste). Auffällig sind überdies einzelne Gebilde, wie der grosse ovale rote Fleck, vielleicht eine Art Wunde in der Rinde Jupiters, durch die Feurigflüssiges aus dem Inneren ausgetreten ist.

Über Saturn und seinen Ring vergl. § 184.

Wie schon die vorstehende Auswahl aus unserem sehr reichhaltig gewordenen Wissen über die physische Konstitution der Planeten zeigt, sind die Schwinkel und hiermit die linearen Grössen vieler von ihnen noch sehr wohl messbar (bisher unmessbar allerdings die meisten von den kleineren Planeten). Daher sind auch ihre Volumina bekannt und hieraus wieder zusammen mit den auf Grund des Gravitationsgesetzes erschlossenen Massen (§ 21) ihre mittleren Dichten. Eine Zusammenstellung einiger dieser Daten, zusammen mit denen für Sonne und Erdmond, in der Tafel auf der folgenden Seite:

Mittlere Abstände von der Sonne				Umlaufszeit		Masse		Volumen		Dichte	
in Millionen	geogr. Meilen	Kilo- meter	in Erd- weiten	wahre (siderische)	synodische	Erde = 1	Sonne = 1	Erde = 1	10 ¹² km ³	Erde = 1	Wasser = 1
Sonne . . .						324 439	1	1 283 700	1 390 600	0,25	1,4
Merkur . .	7,8	58	0,39	a d h — 88 —	a d h — 115 21	0,061	$\frac{1}{7\ 686\ 440}$	0,052	0,056 27	1,17	6,552
Venus . . .	14,6	108	0,72	— 225 —	1 218 16	0,787	$\frac{1}{412\ 150}$	0,975	1,056 1	0,81	4,536
Erde . . .	20,0	149	1,00	1=365 —	— — —	1	$\frac{1}{324\ 000}$	1	1,083 2	1	5,6
Mars . . .	30,6	227	1,52	1 322 —	2 48 23	0,105	$\frac{1}{3\ 100\ 000}$	0,147	0,159 2	0,71	3,976
Jupiter . .	104,7	777	5,20	11 315 —	1 33 15	909,816	$\frac{1}{1047}$	1279,412	1 386	0,24	1,344
Saturn . .	192,0	1424	9,54	29 167 —	1 12 20	91,919	$\frac{1}{3500}$	718,883	778,7	0,13	0,728
Uranus . .	386,0	2864	19,18	84 7 —	1 4 7	13,518	$\frac{1}{24\ 000}$	69,237	75	0,20	1,12
Neptun . .	604,7	4487	30,05	164 280 —	1 2 6	16,469	$\frac{1}{19\ 700}$	54,955	59,51	0,30	1,68
Erddmond .	—	—	—	27 ^d 7 ^h 49 ^m 11,5 ^s	29 ^d 12 ^h 44 ^m 2,9 ^s	$\frac{1}{80}$		$\frac{1}{50}$		$\frac{5}{8}$	

§ 188. Physikalische Eigenschaften der Fixsterne und Nebel.

Der längst zum Gemeingut gewordene Satz: **Alle Fixsterne sind Sonnen**, ähnlich dem Zentralkörper unseres Planetensystemes, hat sich seit der Erfindung der Spektralanalyse und ihrer Anwendung speziell auf die Untersuchung des Fixsternlichtes zu folgenden Bestimmungen vertieft: Die Fixsterne lassen sich nach ihren Spektren in natürliche Klassen bringen (die allerdings auch mancherlei Übergänge aufweisen), indem die folgenden nach VOGEL zugleich über das Stadium der Entwicklung (d. h. hier: Abkühlung und sonstige Energieverluste durch Strahlung in den leeren Weltraum) Aufschluss geben; nämlich:

Sterne der I. Klasse: Weiss (Sirius, Wega ...).

Im Spektrum sind alle, ausser dem violetten, brechenbaren Farben, in ähnlichem Stärkeverhältnis vertreten wie bei der Sonne. Die metallischen Absorptionslinien sind sehr schwach oder gar nicht zu sehen. Dagegen sind die Wasserstoff- und Heliumlinien sehr stark hervorgetreten; bei einigen noch zu I. Klasse gehörenden Sternen sind die Wasserstoff- und Heliumlinien besonders stark hervorgetreten; bei einigen zu II. Klasse gehörenden Sternen sind die Wasserstoff- und Heliumlinien besonders stark hervorgetreten.

Die Wasserstofflinien sind sehr breit und dunkel, die Heliumlinien sind sehr breit und dunkel. Die Wasserstofflinien sind sehr breit und dunkel, die Heliumlinien sind sehr breit und dunkel. Die Wasserstofflinien sind sehr breit und dunkel, die Heliumlinien sind sehr breit und dunkel.

Sterne der II. Klasse: Gelblich (Capella, Pollux, Arktur ...); zu ihnen gehört auch unsere Sonne.

Im Spektrum haben die brechenbaren Teile etwas geringere Intensität; die Metalllinien sind zahlreich und intensiv, die Wasserstofflinien weniger verbreitert. Diese Sterne glühen weniger intensiv als die der I. Klasse.

Sterne der III. Klasse: Sie sind rötlich (α Orionis, α Herculis...).

Im Spektrum überwiegen die weniger brechenbaren Farben, wie bei rotglühenden Körpern; verwaschene dunkle Absorptionsbänder weisen auf chemische Verbindungen hin; es herrscht also nicht mehr so hohe Temperatur, dass sofort Dissoziation einträte. — Die Unterklasse IIIb umfasst einige wenige rotgefärbte Sterne von geringerer Helligkeit (meist unter 6. Grösse), bei denen die Absorptionsbänder so breit sind, dass die Reste des kontinuierlichen Spektrums fast wie helle Linien erscheinen. Diese sind dem Ausglühen und Verlöschen nahe.

Es sind also die Sterne der III. Klasse als die „ältesten“, die der I. als die „jugendlichsten“ anzunehmen; wobei es sich natürlich nur um die Entwicklungsphasen je eines Sternes handelt, ohne dass zu schliessen wäre, es müssten durchschnittlich alle Sterne der I. Klasse seit kürzerer Zeit bestehen als die der III. — Einige Sterne der III. Klasse zeigen einen nichtperiodischen Lichtwechsel: sie mögen wie ein dem Erlöschen nahes Feuer noch manchmal aufflackern. — Die sogenannten „neuen Sterne“, welche manchmal binnen wenigen Tagen hohe Lichtstärken erreichen (so TYCHO BRAHE'S Stern, der 1572 von scharfen Augen sogar um die Mittagszeit gesehen werden konnte, der Stern im Fuhrmann 1892, der Stern im Perseus 1901), gehören sämtlich der II. Klasse an. Da die breiten, dunklen Wasserstofflinien noch von schmalen, hellen durchzogen sind, so ist zu

schließen, daß dem Absorptionsspektrum dieser Sonnensterne noch die Emissionsspektren heftiger Ausbrüche glühender Gase überlagert sind. Es mögen also solche sogenannte „neue“ Sterne in Wahrheit sehr alte sein, an denen die Erstarrungsrinde vom feurigflüssigen Inneren durchbrochen wurde, was mit heftigen Gasausbrüchen zusammentrifft. Noch wahrscheinlicher erfolgt das Erglühen als Folge des Zusammenstoßes der Sterne mit Wolken „kosmischen Staubes“. Solche neue Sterne verblassen manchmal sehr bald, manche lösen sich in glühende Gasbälle auf.

Die eigentlichen **Nebelflecke** erweisen sich durch ihr aus hellen Linien bestehendes Spektrum als glühende Gasmassen. Nur scheinbare Nebel sind dagegen diejenigen **Sternhaufen**, deren einzelne Glieder durch das Fernrohr nicht mehr voneinander unterscheidbar sind, die aber zusammen im Spektroskop eines der beschriebenen Fixsternspektren oder eine Übereinanderlagerung solcher zeigen.

Doppelsterne heißen zwei unter sehr kleinem Winkelabstand erscheinende Fixsterne. Sie werden unterschieden in bloß optische und physische; letztere als zusammengehörig daran zu erkennen, daß sie gemäß den Keplerschen Gesetzen umeinander kreisen (§ 21, II).

Auch drei-, vier- und mehrfache Fixsterne sind beobachtet; bei manchen weisen die verschiedenen Glieder eines solchen Systems verschiedene Farbe auf.

Veränderliche Sterne zeigen regelmässigen (periodischen) Lichtwechsel (so Algol in Perseus mit einer Periode von $2^d 21^h$), der bei manchen mit größter Wahrscheinlichkeit daraus zu erklären ist, daß um den helleren Stern ein dunkler Begleiter kreist (also analog zu unseren Sonnenfinsternissen).

Der alte Begriff des „Fixsternes“ als eines seine Stellung zu allen übrigen beibehaltenden Sternes (§ 188) ist durch mehrere der angeführten Tatsachen schon modifiziert; ja es kann vielmehr gegenwärtig gesagt werden, daß auch alle Fixsterne höchst wahrscheinlich in verschiedenen gegenseitigen Bewegungen begriffen sind (so daß z. B. nach 50 000 Jahren die sieben Sterne des großen Bären einen von dem heutigen wesentlich verschiedenen Gesamtanblick gewähren werden); und zwar können nicht nur die Bewegungen der Fixsterne normal zur Gesichtslinie direkt beobachtet werden (sie werden dargestellt durch Ermittlung ihrer jeweiligen Verbindungsstrecke und des „Positionswinkels“, den jene Strecke mit der Richtung des Himmelsäquators einschließt); sondern auch Bewegungen längs der Gesichtslinie zum und vom Auge weg verrät das Spektroskop durch Verschiebungen der Spektrallinien gegen das violette, bezw. rote Ende hin (gemäß dem Dopplerschen Prinzip vergl. § 91 und LA 157).

LA 157.

Es drängen sich angesichts dieser einst ungeahnten Erweiterungen unseres Wissens immer wieder neue Fragen auf: Erfolgen auch diese Bewegungen analog denen der Planeten um unsere Sonne, um einen oder um einige Zentralkörper? Ist die Anzahl dieser Körper eine für uns zählbare oder gar eine im strengen Sinne unendliche (ist also die Welt nicht nur dem Raum, sondern auch der ihn erfüllenden Materie nach unendlich? Bisher hat jede Steigerung der Leistungsfähigkeit unserer Fernrohre die Zahl sichtbarer Sterne noch erhöht). Im ganzen

stellen die kosmischen Massen mit ihren im Vergleich zur eigenen Größe bei weitem größeren Abständen dasselbe Gesamtbild im Größten dar, wie es uns von den Molekülen eines Gases (§ 83), den Atomen (§ 209 — und „Elektronen“, § 154) im Kleinsten machen. Dies legt auch den Gedanken nahe, daß es ab und zu zwischen den Weltkörpern Zusammenstöße geben werde, was in manchen Fällen ebenfalls eine Ursache des Aufleuchtens „neuer Sterne“ sein mag (neben den oben angeführten Hypothesen).

Für unser Wissen von den Anfängen der Entwicklungen ist es bedenklich, daß eine weit über den von vornherein wahrscheinlichen Durchschnitt gehende Zahl von Nebeln Spiralform aufweist, was auf besondere physikalische Bedingungen für die Verdichtung solcher Nebel zu flüssigen und festen Kernen (nach der Kant-Laplaceschen Hypothese) deuten mag. — Wie schon die Sternhaufen beweisen (da sie ebenfalls viel zu zahlreich und zu reich an einzelnen Gliedern sind, als daß sie sich als optische Zufälligkeiten erklären ließen), sind die Fixsternwelten in einzelne Systeme gegliedert, deren einem unsere Sonne zusammen mit der Milchstraße angehört. Innerhalb dieses Systemes besitzt unsere Sonne mit allen Planeten eine Geschwindigkeit (geschätzt auf 15 bis 50 km-sec⁻¹) in der Richtung gegen das Sternbild des Herkules hin; wie zum Teil daraus erschlossen werden kann, daß die Sterne des Herkules perspektivisch auseinander, die am entgegengesetzten Teil des Himmels liegenden zusammenrücken — viel auffälliger noch aber daraus, daß die um 90° von den beiden genannten Stellen des Himmels abliegenden Sterne eine gemeinschaftliche Eigenbewegung in parallelen Richtungen aufweisen (der ganze Komplex von Erscheinungen also ähnlich dem, daß die Bäume einer Allee, die wir durchfahren, vor uns auseinander-, hinter uns zusammenrücken, viel auffälliger noch aber die Bäume neben uns der Richtung der Fahrt entgegen vorüberzufliegen scheinen). Ob aber diese Bewegung des Sonnensystemes nur eine in der augenblicklichen Tangente der Bahn um einen Zentralkörper sei, wird sich erst nach Jahrhunderten erkennen lassen, wenn jener Zielpunkt nicht mehr Herkules sein, sondern sich gesetzmäßig am Himmel ändern sollte. — Ob schließlich der Fixsternhimmel als ganzer trotz der gegenseitigen Bewegungen seiner Teile im Weltraume ruhend oder in irgend einer Richtung mit irgend einer Geschwindigkeit sich bewegend anzunehmen sei, streift schon das philosophische

Anh. 41. Problem (Anh., Nr. 41), ob eine solche absolute Bewegung überhaupt denkbar sei; direkt erkennbar wird jene Richtung und Geschwindigkeit wohl niemals sein.

Aus der Meteorologie.

§ 189. Meteorologie. Wetterkunde und Klimatologie. — Meteorologische Elemente.

Was die gewöhnliche Sprache als „Wetter“, insbesondere als „schlechtes“ und „gutes Wetter“ bezeichnet, ist für den Nichtmeteorologen erschöpft einerseits durch das Bild von Regengüssen, Nafskälte, Sturm, anderseits von blauem Himmel, Sonnenschein, Windstille oder mäßiger Luftbewegung u. dergl. Von denjenigen Tatsachen und Begriffen, die für die gegenwärtige wissenschaftliche Meteorologie (nach Aristoteles: τὰ μετέωρα = die Dinge über der Erde) grundlegend sind, z. B. von barometrischen Minimis, von Cyklonen, aufsteigenden und hierbei sich abkühlenden Luftströmen, welche die Kondensation der Wasserdünste herbeiführen, weiß das Volk nichts. Da aber jene sinnenfälligen Erscheinungen nicht nur die Behaglichkeit des Alltagslebens wesentlich beeinflussen, sondern in der Ernte des Landmannes, in Verheerungen durch Hochwässer u. dergl. die empfindlichsten wirtschaftlichen Interessen berühren, so griff von jeher der Ungebildete und greift noch heute der sogenannte Gebildete zu den absonderlichsten Mitteln, sich das Wetter auf kürzere oder längere Zeit prophezeien zu lassen. So werden z. B. noch immer diejenigen Kalender weniger gekauft, in denen die Wetterprophezeiungen nach „KNAUERS hundertjährigem Kalender“ fehlen, die aber in Wahrheit unverändert aus dem Kalender vor sieben (!) Jahren abgeschrieben sind und sich auf die vorkopernikanische Ansicht von den sieben Planeten (darunter also auch Sonne und Mond) als „Jahresregenten“ gründen.

Die wissenschaftliche Meteorologie sieht in der Wetterprognose nur einen kleinen Teil ihrer Aufgabe und weiß ganz wohl, daß sie diese Aufgabe erst in einer vielleicht noch fernen Zukunft so wird lösen können, wie es die aufserwissenschaftlichen Bedürfnisse des Landwirtes, des Touristen u. s. f. wünschen. — Eine viel näher liegende Aufgabe als die Voraussage des Wetters bildet das Erklären schon eingetretener Erscheinungen. So wurde die auffallend anhaltende strenge Kälte im Winter 1838 zurückgeführt auf das ungewöhnlich hohe und ausgebreitete barometrische Maximum über Sibirien. Einzelne auffallende „Wetterstürze“ lassen sich befriedigend aus dem Herankommen einer barometrischen Depression erklären. Seit der Mitte des XIX. Jahrhunderts weiß man, daß das Wetter als Komplex der meteorologischen Elemente: Luftdruck, Temperatur, Feuchtigkeit, Windrichtung und Windstärke, Bewölkung, Niederschläge, bestimmt sei, sobald man nur von einem derselben, dem Luftdruck, die Verteilung über einem größeren Gebiete in der betreffenden Zeit kennt; deshalb dienen auch die Isobarenkarten (§ 190) als „Wetterkarten“.

Nebst dem Wetter ist es von den in das Bereich der Meteorologie fallenden Erscheinungskomplexen das Klima, an welchem das praktische Leben aufs stärkste interessiert ist. HANN definiert Klima als „die Gesamtheit der meteorologischen

Erscheinungen, welche den mittleren Zustand der Atmosphäre an irgend einer Stelle der Erdoberfläche charakterisieren. Was wir Witterung nennen, ist nur eine Phase, ein einzelner Akt aus der Aufeinanderfolge der Erscheinungen, dem voller, Jahr für Jahr mehr oder minder gleichartiger Ablauf das Klima eines Ortes bildet... Man sagt z. B.: Die Witterung in Mitteleuropa war sehr kalt im Dezember 1879 oder regnerisch im August 1880; hingegen: Das Klima von England ist im Dezember mild und feucht, obgleich auch dort der Dezember 1879 sehr kalt war“.

Wetterkunde und Klimatologie sind nur ein Teil der Meteorologie im weiteren Sinne, die gegenwärtig definiert wird als **Physik der Atmosphäre**. Aufgabe der Meteorologie im engeren Sinne ist es, „die einzelnen atmosphärischen Erscheinungen auf bekannte physikalische Gesetze zurückzuführen und den kausalen Zusammenhang in der Aufeinanderfolge der atmosphärischen Vorgänge aufdecken“.

Geschichtliches. Die Erfindung der Barometer und Thermometer im XVII. Jahrhundert wurde erst Anlaß zu systematischen Beobachtungen der entsprechenden meteorologischen Elemente. Das erste meteorologische Beobachtungsnetz wurde damals von Herzog Ferdinand von Toscana begründet, von da an wurde der Beobachtungsdienst meist von Privatleuten, Lehrern u. a. versehen. Die am weitesten, bis über 200 Jahre, zurückreichenden meteorologischen Beobachtungsreihen verdankt man den Sternwarten, die von je an hellem oder trübem Wetter wesentlich interessiert waren. Als die Bearbeitung und Veröffentlichung dieser Beobachtungen die Kräfte der Sternwarten zu übersteigen anfang, wurden eigene staatliche Zentralanstalten für Meteorologie begründet und in ihnen die Beobachtungen der einzelnen Stationen gesammelt und verarbeitet, an welchen alle oder die meisten der meteorologischen Elemente regelmäßig dreimal im Laufe des Tages, gewöhnlich um 7^h, 2^h, 9^h beobachtet werden. Solche Stationen besitzt Österreich an 500, Deutschland über 300, die Schweiz etwa 100 u. s. f. Einzelne sind besonders wertvoll für Witterungsprognosen und Sturmwarnungsdienst. Hervorragende Wichtigkeit haben neuestens die Gipfelstationen erlangt; von ihnen ist gegenwärtig die auf dem Sonnblick in den hohen Tauern (3105 m) die höchste, ständig bewohnte, die vermöge ihrer günstigen Lage und überraschenden Ergebnisse eine erste Stelle einnimmt. Hierzu kommen die Beobachtungen im Luftballon; so haben BERSON und SÜRING am 31. Juli 1901 die Höhe von 10500 m erreicht. Ferner werden unbemannte Registrierballons seit einigen Jahren nach einem zwischen zahlreichen Kulturstaaten vereinbarten Plane an je einem bestimmten Tage jedes Monats steigen gelassen. Über eine neueste wichtige Verbesserung solcher Ballons durch ASSMANN vergl. S. 637; einer erreichte im Mai 1902 25000 m Höhe. Hierzu kommen neuestens Aufstiege von Drachen ebenfalls mit Registrierinstrumenten. — Zu hoffen ist die Ausdehnung solcher Beobachtungen auf die Ozeane, denn der „gegenwärtige Zustand völliger Unkenntnis der Verhältnisse der Atmosphäre über dem Ozean, die bei der ganz abweichenden Erwärmung und Abkühlung des Wassers sehr verschieden sein müssen, ist beschämend und auf die Dauer unhaltbar“ (BEZOLD). —

Für die im folgenden eingehaltene Reihenfolge der Abschnitte war zunächst der äußere Umstand des Anschlusses an die Abschnitte Aeromechanik (hierru §§ 190, 191), Wärmelehre (hierzu §§ 192 bis 196) u. s. f. bestimmend. Diese

Reihenfolge entspricht aber auch im ganzen dem Vordringen von der Beschreibung der Erscheinungen selbst zu deren Erklärung; z. B.: Das Barometer zeigt uns die nach Ort und Zeit wechselnde Größe des Luftdruckes, das Thermometer die gleichfalls wechselnden Lufttemperaturen; umgekehrt sind aber diese Verschiedenheiten der Luftwärme die Ursachen der Luftströmungen; noch weiter zurückgehend finden wir jene Temperaturverschiedenheiten verursacht von der verschiedenen Einstrahlung seitens der Sonne, der Absorption in der Luft und im Erdboden (§ 196) u. s. f.

A. Aeromechanische Zustände und Vorgänge im Luftmeere an und über der Erdoberfläche.

§ 190. Aerostatische Verteilung des Luftdruckes zu je einem Zeitpunkte.

Denken wir uns in einem bestimmten Zeitpunkte, z. B. heute 7^h früh, allenthalben an und über der Erdoberfläche Barometerablesungen vorgenommen. Es würden sich dann von je einem Punkte, z. B. in 1000 m Meereshöhe über Wien, falls daselbst ein Luftdruck von 720 mm herrscht, in der Umgebung jenes Punktes weitere Punkte auffinden lassen, die ebenfalls 720 mm Druck haben; sie kommen aber im allgemeinen teils etwas höher, teils weniger hoch zu liegen als ersterer. So kann man sich in je einem bestimmten Zeitpunkte die ganze Erde von Flächen gleichen Druckes umgeben denken.

Wäre die Erde genau eine Kugel (ohne Berge und Täler) und ruhend (ohne Achsendrehung), ferner überall von gleicher Temperatur (ohne verschiedene Bestrahlung seitens der Sonne je nach Tages- und Jahreszeit und von gleicher spezifischer Wärme und Leitungsfähigkeit des Erdbodens und der Gewässer), so würde sich im Luftmeere ein Gleichgewichtszustand herstellen, vermöge dessen die Flächen gleichen Druckes zur Erde konzentrische Kugelflächen wären. In Wirklichkeit wird dieses einfachste Schema durch alle genannten Umstände zu verschiedenen Zeiten in verschiedenem Maße gestört, und die Flächen gleichen Druckes zeigen einerseits die mannigfachsten Ein- und Ausbiegungen (gegen den Erdmittelpunkt hin und von ihm weg), anderseits ändert sich die Gestalt dieser Flächen unaufhörlich, wie sich an dem immer wechselnden Barometerstande was immer für eines Ortes an und über der Erdoberfläche kundgibt. Sowohl ihre jeweilige Gestalt wie ihr Wandel von Tag zu Tag läßt sich entnehmen aus den **Isobarenkarten**, die von den meteorologischen Zentralanstalten nach den täglich um 7^h früh vorgenommenen, auf den Meeresspiegel reduzierten und noch im Laufe des Vormittags zu synoptischen Darstellungen vereinigten Ablesungen herausgegeben werden. Zum Verständnis solcher Karten folgendes:

a) Die Reduktion des Barometerstandes auf den Meeresspiegel und auf 0° C. — Statt der schematischen Formel (§ 46) für die

$$\text{barometrische Höhenmessung: } h_m - h_n = \frac{h}{-lg q} (lg b_m - lg b_n)$$

dient für einigermassen genaue wirkliche Anwendungen die

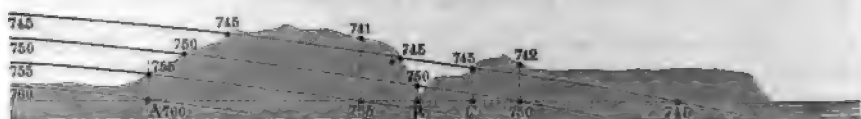
HALLEYSche Formel: $H = 18400 \left(1 + 2 \frac{t + t'}{1000} \right) (\lg v' - \lg b)$,

worin t und t' die Lufttemperaturen an dem unteren, bzw. oberen Beobachtungsorte, b und b' die auf 0°C reduzierten Barometerstände daselbst bedeuten.

Auf Grund solcher Formeln sind ein für allemal Tabellen berechnet, die angeben, daß, wenn z. B. an einer Station von bekannter Höhenlage H ein Barometerstand b' herrscht, der auf den Meeresspiegel reduzierte Barometerstand b ist.

b) Die Isobaren als Durchschnittslinien der Flächen gleichen Drucks mit dem Meeresspiegel. Denken wir uns drei benachbarte Punkte A, B, C der Landkarte, welche die Projektionen von Orten a, b, c der wirklichen Erdoberfläche auf den Meeresspiegel darstellt und in welche die Isobaren eingetragen sind (Fig. 678). Ist z. B.

Fig. 678.



in A der reduzierte Barometerstand 755, in B 750, in C 745 mm, so würden wir bei hinreichender vertikaler Erhebung über A wieder auf Stellen von 750, 745 mm treffen, von denen die Flächen gleichen Drucks gegen B , bzw. C hin abfallen. Denken wir uns dann umgekehrt wieder z. B. zwischen A und B eine Bodenerhebung, so wird auch diese von den Flächen gleichen Druckes geschnitten werden und so wieder an ihrer Oberfläche die allmähliche Abnahme des Druckes mit der Höhe zeigen.

Wo wir also auf einer Isobarenkarte, z. B. die geschlossene Linie um ein barometrisches Minimum, erblicken, sind die Flächen gleichen Druckes nach abwärts eingebogen und über einem Maximum nach aufwärts ausgebogen zu denken (veranschaulicht in Figg. 683, 684, S. 618).

c) Als eine Fläche gleichen Druckes, nämlich des Luftdruckes 0, ließe sich auch die „obere Grenze der Atmosphäre“ auffassen. Da aber wirkliche Barometerbeobachtungen in solchen Höhen wohl für immer unmöglich bleiben werden, so muß jener Begriff selbst erst noch auf Grund anderer Erscheinungen näher bestimmt werden. Wählt man hierzu die atmosphärische Strahlenbrechung (§ 197), so ergibt sich als Höhe der Atmosphäre etwa 80 km, indem die noch höheren Schichten so dünn sind, daß sie zu den Dämmerungserscheinungen nichts Merkliches beitragen. Dagegen zeigt das Aufleuchten von Meteoren, Sternschnuppen, die Höhe des Nordlichtes auch noch in 300 km genügend viel Luft, um das Glühen der Meteoriten durch

Reibung an der Luft, die Elektrolumineszenz u. dergl. möglich zu machen.

d) Die Kenntnis der tatsächlichen Lage und Veränderung der Flächen gleichen Druckes ist bisher zum überwiegenden Teile auf Schlüsse aus den täglichen dreimaligen Beobachtungen des Barometerstandes an der Erdoberfläche angewiesen. Zu ihnen kommen aber die Beobachtungen der Gipfelstationen, der Registrierballons und Drachenaufstiege. Dabei haben z. B. die Ballonfahrten gezeigt, daß nicht selten barometrische Maxima und Minima, die an der Erdoberfläche beobachtet worden waren, in etwas größeren Höhen unmerklich werden, welche Erfahrungen nun z. B. in der Reduktion des Barometerstandes auf den Meeresspiegel so zu berücksichtigen sind, daß manche Maxima nur ein Temperatureffekt der untersten Schichten darstellen.

e) Mittlere Verteilung des Luftdruckes: Am Äquator findet sich ein Gürtel niederen Druckes, in etwa 35° n. und s. Br. (Rofs-breiten) ein Gürtel hohen Druckes und in 60° Br. wieder niederer Druck, der von da zu den Polen wahrscheinlich zunimmt. — Von dem hiermit als örtlicher Durchschnitt gegebenen Schema sind die auffallendsten Abweichungen diese, daß im Sommer das Land niederen, das Meer hohen Luftdruck hat; umgekehrt im Winter.

Hierin zeigt sich ein deutlicher Einfluß der ungleichen Erwärmung auf den Luftdruck, die auch überhaupt jene Hebungen der Flächen gleichen Druckes bewirkt, von der dann weiter die Bildung der Zyklone und Antizyklone mit all ihren Folgen für trübes und heiteres Wetter u. s. f. abhängt; welche Abhängigkeiten aber erst im folgenden Abschnitte zu betrachten sind (§ 192 ff.).

Den Übergang von den bisher betrachteten aerostatischen zu den aerokinetischen Erscheinungen macht vor allem der

f) „tägliche und jährliche Gang des Luftdrucks“, wie er sich namentlich aus den Barogrammen selbstregistrierender Apparate, z. B. des RICHARDSEN, ergibt. Trotz der völligen Unregelmäßigkeit nämlich, welche eine längere Folge der wöchentlichen Barogramme zu zeigen scheint, fällt bei genauer Betrachtung namentlich zu Zeiten wenig veränderlichen, meist hohen Luftdruckes auf, daß oft drei, vier, fünf Tage nacheinander die Barometerkurven eine doppelte Welle darstellen mit einem tieferen Minimum um etwa 3^h nachmittags, einem weniger tiefen um 3^h früh, einem Maximum um 9^h abends und einem zweiten um 9^h vormittags. HANN hat gezeigt, daß auf der ganzen Erde der Gang des Luftdrucks sich aus zwei derartigen Wellen zusammensetzt (ähnlich wie solche Zusammensetzungen zwischen Wellen eines Grundtones und denen der Obertöne stattfinden, §§ 65, 90), und daß insbesondere die doppelte, meist auch größere Welle überall eine merkwürdige Gesetzmäßigkeit aufweise. Ihre Amplitude (welche am Äquator etwa 1 mm beträgt) nimmt regelmäßig mit der Breite und (proportional dem Luftdruck) mit der Seehöhe ab; die Eintrittszeit der Maxima fällt aber fast überall auf etwa $9^h 40^{min}$ vormittags und abends. — Inwiefern die Erwärmung der Luft und die dadurch bewirkte Drucksteigerung die Ursachen auch dieser Erscheinungen sind, vergl. § 196.

Während diese Veränderungen in der Luftdruckverteilung aber doch alle so allmählich erfolgen, daß sie nicht so sehr Bewegungs- als sozusagen veränder-

liche Gleichgewichtszustände darstellen, sind die auffälligsten Bewegungen in der Atmosphäre die Winde, Stürme, Orkane; sie bilden aber einen besonderen Fall der im engeren Sinne aerokinetischen Vorgänge Luftmeere, die sich unter die beiden Typen der Strömungen und Wirbelbewegungen (§ 42) verteilen.

§ 191. Strömungen und Wirbelbewegungen in der Luft

An dem sprichwörtlich „regellosen“ Wechseln in den Richtungen und Stärken der Winde zeigen sich doch schon der kunstlosen Beobachtung alsbald sehr fallende Regelmäßigkeiten: so das Umschlagen des Talwindes in Bergwind des Landwindes in Seewind und umgekehrt je nach der Tageszeit und der Jahreszeit die den Schiffen von jeher wichtigen Passatwinde. — Um die Mitte des XIX. Jahrhunderts unternahm es Dove, sämtliche Luftströmungen als Glieder einer großen Zirkulation der Atmosphäre über der ganzen



Fig. 679.
Windfahne mit Stärketafel.



Fig. 680. Robinsons Schalenkreuz.

kugel zu erklären; hiernach sollten aus dem Äquator und Polarstrom sich nicht nur die einförmigen Erscheinungen der Passate, sondern aus gegenseitigen Stauungen beider Ströme auch die wechselvollen Gänge in den mittleren und höheren Breiten erklären lassen. Seit den sechziger Jahren erkannte man durch das Studium der synoptischen Wetterkarten, vielmehr die über kleineren Bezirken herrschenden meteorischen Maxima und Minima überwiegend deutung für die Windrichtungen und die sonstigen Erscheinungen haben, und erst in den achtziger Jahren entwickelte W. v. SIEMENS Theorien darüber, wie auch diese Maxima und Minima mittelbar jener allgemeinen Zirkulation abhängen mögen.

Voraussetzung aller solcher Theorien ist die messende Beschreibung der an je einem Orte herrschenden Luftströmung; sie gliedert sich in die Angabe 1. der Windrichtung, 2. der Windstärke.

Die Windrichtung wird mittels der **Windfahne** (Fig. 679) angegeben, gewöhnlich nach den 16 Richtungen der Windrose (N, NNW, NW, WNW, W, WSW u. s. f., Ost wird durch E bezeichnet); für die Winde sind, z. B. unter den Schiffern, zahlreiche besondere Namen in Gebrauch (z. B. Scirocco, Maestral, Bora, Samum, Harmattan u. s. f.).

Die Windstärke wird gemessen mittels der **Anemometer** (Fig. 680); diese weisen für die zwölfstufige Skala (von Windstille bis Orkan) z. B. folgende Stärken aus: Wind (2—6) bis 15 m sec^{-1} , Sturm (7—11) bis 33 m sec^{-1} , Orkan bis 50 m sec^{-1} .

Die Erklärung des Eintretens und Fortbestehens von Winden bestimmter Richtung und Stärke ergibt sich aus zweierlei Kräften: 1. **Druckverschiedenheiten**, deren Maß das **Druckgefälle** (der Gradient) heißt; 2. die „**ablenkende Kraft der Erdrotation**“ (LA 109).

Zu 1. Daß zwischen zwei Stellen verschiedenen Druckes im Luftmeere ein Strömen von der Stelle höheren zu der Stelle niederen Druckes stattfindet, ist nur ein besonderer Fall des allgemeinen hydro- und aerodynamischen Hauptgesetzes (§ 49); und zwar ist zwischen Orten verschiedenen Barometerstandes nicht die verschiedene Spannkraft, sondern das Gewicht, also das Fallbestreben der Luft die überwiegende Ursache der Bewegung.

Als Einheit des **horizontalen Gradienten** ist angenommen die Verschiedenheit des Druckes um 1 mm Quecksilberdruck zwischen zwei im selben Niveau um 111 km (d. i. die Länge eines Äquatorgrades) voneinander abstehenden Orten. Einem solchen Gradienten entspricht dann eine Windgeschwindigkeit von 3 bis 5 m sec^{-1} . — Überdies mißt man den vertikalen Gradienten durch den Unterschied zwischen der Druckabnahme für je ein 1 m Höhe und dem Gewicht der entsprechenden Luftsäule.

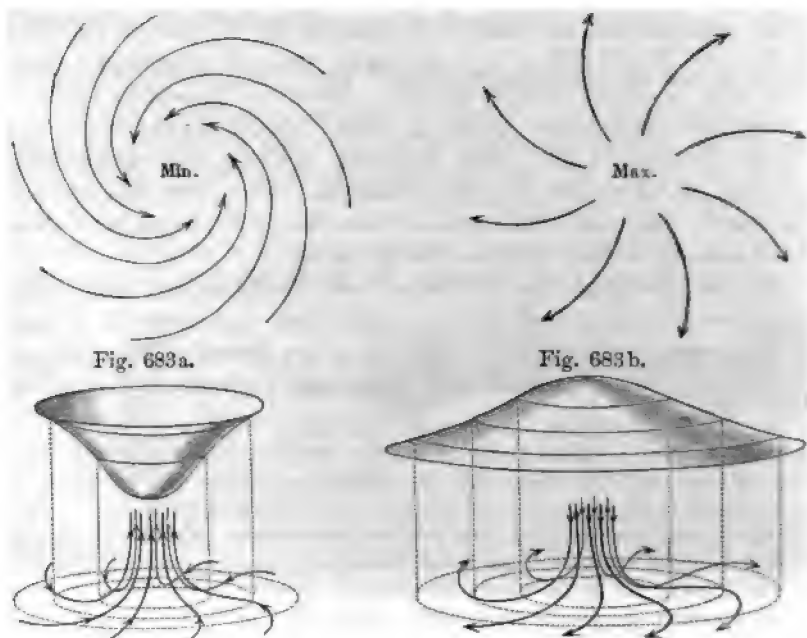
Zu 2. Während die Druckverschiedenheiten allein ein geradliniges Strömen der Luft von der Stelle höheren zur Stelle niederen Druckes bewirken würden, zeigen die Luftströmungen gesetzmäßige Ablenkungen von diesen geraden Linien, und zwar so, daß sie sich alle aus der relativen Bewegung der Luft gegen die Erde auf dieselbe Art erklären lassen wie die Drehung der Schwingungsebene des Foucaultschen Pendels (§ 34). Statt daß also z. B. die Luft gegen ein barometrisches Minimum radial hinströmt, umkreist sie es in dem aus Fig. 681 und Fig. 683 (a. f. S.) ersichtlichen Sinne und bildet eine **Zyklone** (im weiteren Sinne — von ihr zu unterscheiden „der Zyklon“ im engeren Sinne, s. u. Fig. 686). — Ebenso bildet die aus einem barometrischen Maximum abströmende Luft eine **Antizyklone**.

Zu diesen horizontalen Bewegungen (Luftwirbel mit vertikaler Achse) kommen aber noch vertikale Strömungen, und zwar so, daß über einem barometrischen Minimum ein vom Boden aus

aufsteigender, über einem Maximum ein zum Boden absteigender Strom eintritt (Figg. 683a und 683b).

Fig. 681.

Fig. 682.



Figg. 681 bis 683 b. Nördliche Erdhälfte.

Verfolgen wir überdies die in der Zyklone aufgestiegene Luft noch auf ihrem Rückwege nach abwärts, so erkennen wir in diesen Bewegungen im ganzen vertikale Wirbel mit horizontaler Achse.

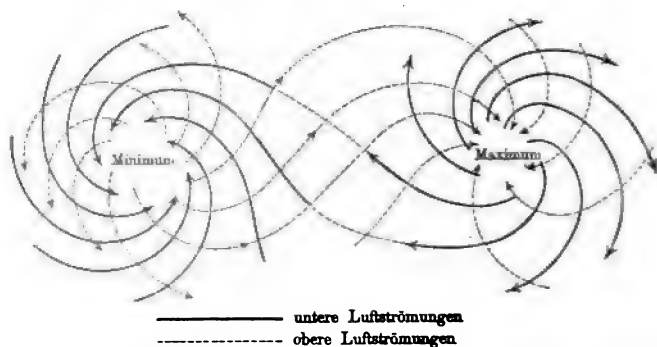


Fig. 684. Untere und obere Luftströmungen im barometrischen Maximum und Minimum der nördlichen Erdhälfte.

Als solche Wirbel im größten Maßstabe kann man auch den über dem Äquator aufsteigenden, gegen die höheren Breiten in den oberen Schichten der Atmosphäre abfließenden und von hier an der Erdoberfläche wieder zum Äquator zurückkehrenden Luftstrom ansehen (Fig. 684), wobei die (erst in § 196 näher zu

besprechende) stärkste Erwärmung der Erdkugel am Äquator die ganze Bewegung einleitet und unterhält. Zu ihrer näheren Beschreibung noch folgendes:

Da die Luft über dem Äquator wärmer und daher spezifisch leichter ist, bildet sie zunächst eine Art vertikaler Aufblähung, die dann horizontal gegen die Pole hin abfließt. (Nähere Erklärung aus der Hebung der Flächen gleichen Druckes, § 196.)

Schematisch hätte ein Luftteilchen über der Meeresfläche am Äquator eine vertikale Bewegung von höchstens der Dicke der Atmosphäre (80 km), dann eine horizontale längs des Meridians polwärts höchstens in der Länge des Meridianquadranten (40 000 km), und es würde schliesslich wieder zum Ausgangspunkte auf gleich langen Wegen zurückkehren. Daher müßte (insoweit beide Bewegungskomponenten gleiche Zeiten brauchen) die Geschwindigkeit in horizontaler Richtung in der Größenordnung 40 000:80, also etwa 500 mal so groß sein als die Geschwindigkeit der auf- und absteigenden Ströme. — Dieses Schema erleidet eine wesentliche Abänderung dadurch, daß jene Strömungen bei weitem nicht die ganzen Breiten, bezw. Höhen durchmessen und daß insbesondere von dem Gürtel hohen Druckes um den 35. Breitenkreis („Rofsbreiten“) nach beiden Seiten hin die Luft abströmt. Dieser Gürtel erklärt sich daraus, daß, weil mit wachsenden Breiten die Parallelkreise immer kürzer werden, in den mittleren Breiten die polwärts gerichtete Oberströmung sich staut und daher zum Teil senkt.

Indem ferner zu den vertikal und meridional gerichteten Bewegungen die Ablenkungen infolge Erdrotation hinzutreten (und zwar viel ausgiebiger bei den geschwinden meridionalen als den langsamen vertikalen Bewegungen), ist das ganze tatsächliche Windsystem in den Hauptzügen erklärt.

Fig. 685 läßt auch sofort erkennen, warum die von West gegen Ost gerichteten Oberströmungen durchschnittlich größere Geschwindigkeit haben als die von West gegen Ost gerichteten Unterströmungen. — Das allgemeine Schema ist nun aber überdies auf das mannigfachste abgeändert durch die Ungleichheiten der Erwärmung über den Meeren und Kontinenten und den hieraus sich ergebenden Ungleichheiten des Luftdruckes, worüber einiges noch in § 196.

Von der aeromechanischen Theorie ist nicht

nur diese Zirkulation und Wirbelbewegung der Atmosphäre im größten Maßstabe gefordert, sondern es gehören auch lokale Erscheinungen von Wirbel-

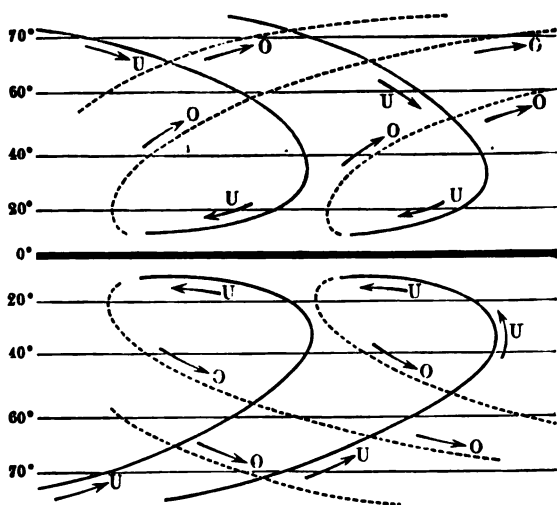


Fig. 685. Allgemeines Windsystem der Erde nach Oberbeck.

bewegungen noch zu den mächtigsten Naturereignissen. Luftwirbel zeigen sich schon in unseren Breiten manchmal als **Sand- und Wasserhosen** (Fig. 686), in den Tropen bilden sie die gefürchteten **Zyklone** (im engeren Sinne: die **Tromben**, **Tornados** und, wenn ihre horizontale Ausdehnung die vertikale übertrifft, **Teifune**). In der Erklärung der ungeheuren Geschwindigkeit und hiermit der verheerenden kinetischen Energie solcher Orkane ergibt sich zunächst die große Winkelgeschwindigkeit nahe der Achse des Zyklons einfach aus der Erhaltung der Bahngeschwindigkeit infolge der Trägheit bei immer kleiner

Fig. 686.



werdendem Bahnradius (nachzuahmen durch die Bewegung der Kugel beim Hemmungspendel, Fig. 74, S. 103, wenn sich dieses um den Stift herumschlingt). Hierzu kommt aber die sogenannte **Zentrifugalkraft**, welche die das **Zentrum** des Zyklons umkreisenden Luftteilchen auswärts schleudert, hierdurch die **Verdünnung** steigert, daher die Geschwindigkeit des Einströmens neuer Luft von **außen** und **unten** her noch vergrößert u. s. f. In der Tat wird bei den **Tromben** und **Tornados** die Zentrifugalkraft sogar größer als die einwärts gerichtete **Gradientkraft**; bei den Zyklonen unserer Breiten bleibt zwar die Zentrifugalkraft kleiner, aber sie ist es doch, die den Gebieten tiefen Druckes zu längerem Bestande **verhilft**, wiewohl die umgebende Luft sie auszufüllen sucht.

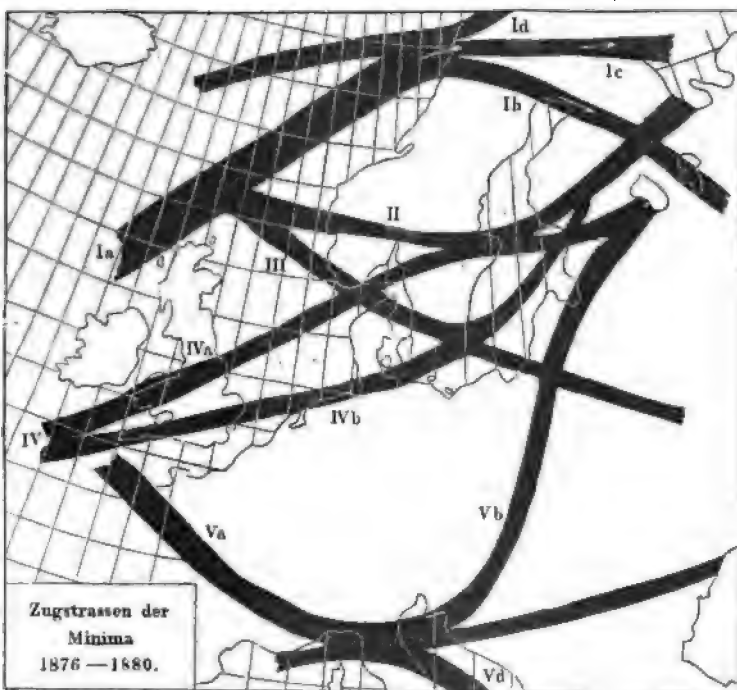
Die aus den Figg. 681 und 682 ersichtliche **Abhängigkeit** der **Windrichtung** von **Druckunterschied** und **Ablenkung** infolge der **Erdrotation** ist zusammenfassend ausgesprochen in **BUYS-BALLOTS Gesetz** (1857):

Wer auf der nördlichen Erdhalbkugel die Gegend niederen Druckes zur Linken etwas vorne hat, hat den Wind im Rücken.

Um hiernach angesichts einer für einen bestimmten Zeitpunkt aufgenommenen Isobarenkarte die Windrichtung in der nächsten Zeit (d. h. solange die Luftdruckverteilung dieselbe bleibt) für einen beliebigen Ort anzugeben oder vorausszusagen, denke man sich zwischen zwei Isobaren so Aufstellung nehmend, daß man die Linie niederen Druckes links etwas vor sich, die Linie höheren Druckes rechts etwas hinter sich hat: der Wind wird dann den Namen derjenigen Weltgegend führen, der man den Rücken zuwendet. Erprobung dieser Regel für verschiedene Punkte der Isobarenkarten (vergl. die Tafeln bei S. 654).

Zugstraßen barometrischer Minima. Bisher wurden die Luftströmungen unter der Voraussetzung untersucht, daß die Maxima und Minima eine gegebene Stellung zueinander einnehmen. Tatsächlich verschieben sich aber die Stellen jeweilig höchsten bzw. niedrigsten Druckes selbst über die Erdoberfläche hin, so daß also je ein Minimum sich wie ein selbständiges Gebilde längere Zeit hindurch erhält und fortbewegt (— ähnlich sieht man, wenn sich unter dem

Fig. 687.



Ruder Wasserwirbel gebildet haben, diese manchmal eine Strecke weit über das Wasser hinziehen; diese Tendenz, sich zu erhalten, kommt den Wirbeln und insbesondere Wirbelringen, § 42, aus den namentlich

durch THOMSON und HELMHOLTZ theoretisch erforschten Gründen zu). — Dabei ist es eine Eigentümlichkeit der Minima, daß sie bestimmte Zugstraßen einhalten, so daß, wenn z. B. vom Atlantischen Ozean her ein Minimum sich dem Nordwesten Europas genähert hat, man mit ziemlich großer Wahrscheinlichkeit voraussagen kann, welchen Weg es weiterhin nehmen werde.

Die in Fig. 688 a. v. S. dargestellten Zugstraßen hat VAN BEBBER aus langen Beobachtungen abgeleitet und sie weiterhin bestätigt gefunden; sie sind zu einem wichtigen Behelfe namentlich für die Sturmwarnungen an den Nordwestküsten Europas geworden.

Aus diesen und ähnlichen zusammenfassenden Erfahrungen über die Wechsel der Luftdruckverteilung zusammen mit Buys-Ballots Gesetz erklärt sich nun auch die seit langem bekannte Erfahrung, daß in unseren Gegenden (Mitteleuropa) auf Winde aus S solche aus SW, dann solche aus W, dann aus NW, N, NO, O, SO, S zu folgen pflegen, welche Erfahrungen DOVE in das nach ihm benannte (aber ähnlich auch schon von MARIOTTE und KANT aufgestellte) **Winddrechungsgesetz** zusammengefaßt hat, nach welchem die von einem und demselben Orte aus gezogenen Richtungslinien der (binnen einiger oder mehrerer Tage) aufeinander folgenden Winde sich im Sinne des Zeigers einer Uhr drehen, deren Zifferblatt wagerecht und nach oben gewendet ist. Denkt man sich nämlich über den nördlichen Teil einer Karte Europas die Fig. 681 von West gegen Ost hingeschoben, so streicht über einen Punkt in Mitteleuropa zuerst ein aus Süden kommender Luftstromfaden, dann ein aus Westen kommender u. s. w. hin.

Die bisher beschriebenen und zum Teil erklärten Tatsachen der Strömungen und Wirbelbewegungen in der Atmosphäre drängen aber zur Frage nach den weiter zurückliegenden Ursachen, vor allem der Ungleichheiten in der Luftdruckverteilung selbst, sodann nach dem Auftreten der Maxima und Minima u. s. f. Diese Ursachen liegen, wie für das Aufsteigen über dem Äquator, auch sonst durchweg in der ungleichen Erwärmung des Luftmeeres infolge ungleicher Einstrahlung seitens der Sonne und ungleicher Absorption in trockener und feuchter Luft am Festlande und in den Meeren. Einiges hierüber im nächstfolgenden Abschnitt.

B. Wärmeerscheinungen in der Atmosphäre. — Die Niederschläge im weitesten Sinne (Hydrometeore).

Vorbemerkung: Daß die Einstrahlung seitens der Sonne durch das Luftmeer der Erde und die Erwärmung der Erdoberfläche die erste Ursache aller unaufhörlichen Veränderungen im Luftmeere und der Verschiedenheiten ihrer Klimate sei, drängt sich schon vor jeder näheren quantitativen Untersuchung dieser Verhältnisse auf: wolkenloser Himmel laßt es bei Tage warm oder heiß (bei Nacht freilich infolge Ausstrahlung seitens der Erde in den Weltraum kühl oder kalt) werden: hoher Sonnenstand (im Sommer, am Äquator) bringt kräftigere Erwärmung als tiefer u. s. f. — Dennoch gehört die nähere Beschreibung der Schicksale, welche die Strahlen bei ihrem Durchgange von den obersten bis zu den untersten Schichten

der Luft und im Erdboden erfahren, speziell das Maß der Absorption der einzelnen Strahlengattungen, zu den schwierigsten und am spätesten gelösten Problemen der Meteorologie; dementsprechend sollen auch die in der Atmosphäre und in ihren verschiedenen Teilen vorfindlichen Wärmemengen bis zu ihrem letzten Ursprung aus den Sonnenstrahlen erst in § 196 zurückverfolgt werden.

Was uns in den Beobachtungen verhältnismäßig am unmittelbarsten gegeben ist, ist die **Lufttemperatur**. Von ihr, dem jeweiligen Druck und dem Feuchtigkeitsgehalt hängen dann die Durchsichtigkeit oder Trübung der Luft und die Niederschläge (im weiteren Sinne des Wortes, nämlich nicht nur Schnee und Regen, sondern auch Wolken, Nebel, also alle Kondensation des in klarer Luft gasförmigen und unsichtbaren Wassers) ab. Erst aus den Gesetzen des namentlich bei diesen Kondensationen eintretenden Wärmeverbrauches erklärt sich dann u. a. auch die Abnahme der Temperatur nach oben.

§ 192. Die Lufttemperatur.

Für die Feststellung des jeweiligen Wärmezustandes der Atmosphäre bilden die täglichen Thermometerablesungen, bzw. die Thermogramme selbstregistrierender Thermometer ebenso den Ausgangspunkt wie für den Luftdruck die Ablesungen des Barometerstandes. Hierbei sind durchweg Ablesungen „im Schatten“ (genauer: unter Ausschließung eines direkten Einflusses der Strahlung, Absorption und diffusen Reflexion, § 196) vorauszusetzen. Die Einzelbeobachtungen führen dann zu folgenden zusammenfassenden Beschreibungen:

1. **Täglicher Temperaturgang.** Fast überall zeigt die Lufttemperatur ein Minimum je nach Jahreszeit und Witterung zwischen 4^h und 8^h früh, hierauf ein rasches Ansteigen bis zum Maximum zwischen 2^h und 4^h nachmittags, von wo an sie allmählich und immer langsamer bis zu jenem Minimum wieder abnimmt. Dabei ist die Differenz zwischen dem höchsten und tiefsten Werte der Temperatur, die Amplitude, sehr groß bei hellem, sehr klein bei trübem Himmel, groß bei Orten im Innern eines Kontinents (besonders in engen Tälern), klein auf dem Ozean (und auf hohen Bergen); und die ganze Kurve dieses periodischen Temperaturwechsels liegt natürlich höher in der warmen, tiefer in der kalten Jahreszeit.

Aus diesen täglichen Thermometerablesungen lassen sich dann die Monatsmittel ableiten und aus diesen wieder als

2. **jährlicher Temperaturgang** die allbekannten Unterschiede hoher Temperatur im Sommer und in niederen Breiten, niedriger Temperatur im Winter und in hohen Breiten. Hierzu kommen im besonderen die sehr kleinen Amplituden des Seeklimas und die sehr großen des Landklimas; z. B. die das ganze Jahr nahezu konstante Temperatur auf der Insel Jaluit (6° n. Br., 169° östl. L. von Greenwich) und die bis zu 75° betragenden Temperaturkontraste zwischen Sommer und Winter in Nertschinsk (52° n. Br., 120° östl. L.). Der „Kältepol“ der Erde ist Werchojansk in Sibirien.

Wieder werden alle diese Verhältnisse aufs übersichtlichste dargestellt durch **Isothermenkarten**, welche nicht nur die Mittel für je ein Jahr, sondern für möglichst lange Reihen von Jahren darbieten. (Über die Darstellung durch „**Thermoisoplethen**“ vergl. LA 223.) Sind so die Mittel für einige Zentralstationen gewonnen, so genügen auch für Stationen in 100 km Abstand schon die Mittel von 12 Jahren, um nach besonderen Interpolationsmethoden die wahren Werte bis auf $0,1^{\circ}\text{C}$ genau zu erhalten. Werden nicht die Mittel für das ganze Jahr, sondern speziell für Januar und Juli eingetragen, so ergeben sich Sommer- und Winterisothermen (Isotheren und Isochimenen, Fig. 688).

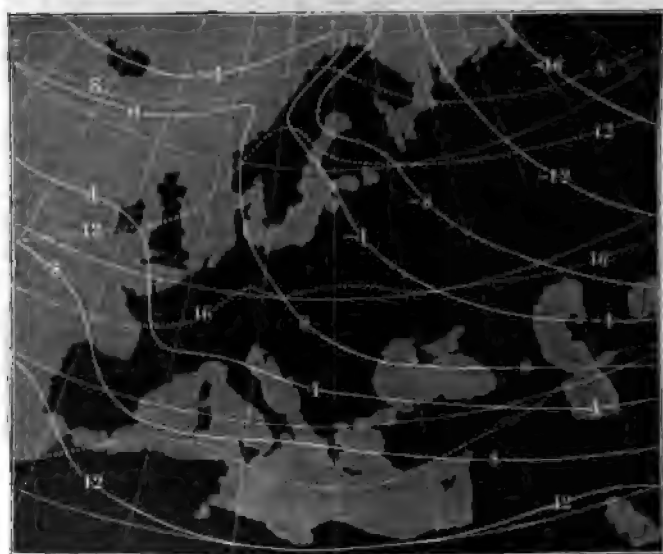


Fig. 688. Isothermen } von 4° zu 4°R (5° zu 5°C).
Isochimenen — }

Wären nun nicht die Ungleichheiten in der Verteilung von Festland und Meer, so müßten alle Isothermen Parallelkreise sein. Erheben wir uns ferner über verschiedene Punkte je eines Parallelkreises um 1000 m, 2000 m, 3000 m ..., so müßten auch hier überall gleiche Lufttemperaturen herrschen, die nach allbekannten Erfahrungen (— ihre Erklärung erst in §§ 195 und 196) nach oben immer niedriger sind. — Stellen wir uns zunächst unter dieser vereinfachenden Annahme wieder (ähnlich wie bei der Deutung der Isobaren als Durchschnittslinien der Flächen gleichen Druckes mit der Meeresoberfläche, § 190) über einem Orte A in der Meeresfläche am Äquator, B unter 30° n. Br., C unter 60° n. Br., z. B. die Jahresmittel von rund 25° , 20° , 0°C aufgetragen vor, so würde es bei hinreichender Erhebung über A auch hier Stellen von 20° und 0°C geben; diese Stellen liegen dann mit B und C in derselben Fläche gleicher Temperatur (— sie müßten unter jenen Annahmen Rotationsflächen um die Erdachse als Rotationsachse sein). Auch die höchst unregelmäßigen wirklichen Isothermen, die z. B. längs der Westküste von Skandinavien sich fast von Süd nach Nord (statt von Ost nach West) erstrecken, haben wir uns so als Durchschnitte der Flächen gleicher Temperatur mit der Erdoberfläche vorzustellen. — Wo

ie Fläche für 0° die Erdoberfläche schneidet, ist die **Schneegrenze**; und zwar es sowohl bei Durchschnitt eines größeren Ländergebietes, wie für einzelne Erhebungen, Bergketten oder Einzelberge, welche nur mit ihren Gipfeln durch die Fläche von 0° hindurchdringen. Die durchschnittliche Schneegrenze liegt in den Tropen höher als 5000 m und senkt sich etwa unter 60° n. Br. bis an den Meeresspiegel. [Veranschaulichung solcher Flächen gleicher Temperatur an dem Wärmezustande eines Zimmers, das nach starker Kälte durch einen eisernen Ofen rasch eheizt wird: das Thermometer (das hierbei vor direkter Strahlung zu schützen ist) wird in der Nähe des Ofens bald z. B. 20° in der Höhe von 2 m über dem Fußboden zeigen; in größerem Abstände vom Ofen werden die 20° erst in 3 m Höhe eintreten, und die kalte Schicht am Fußboden ist dicker fern vom Ofen als nahe bei ihm. Im ganzen werden sich also die Flächen gleicher Temperatur vom heißen Ofen weg erheben, oder: sie haben über dem Ofen eine Einbuchtung nach abwärts. Wird mit dem Heizen bald aufgehört, so daß nicht durch Luftzirkulation die Temperatur des ganzen Zimmers sich annähernd ausgeglichen hat, so nehmen alle Schichten allmählich wagerechte Lage an oder: die Flächen gleicher Temperatur werden parallel dem Fußboden und der Decke. — Hierbei bieten auch die Temperaturen verschiedener Orte des Zimmers das nächstliegende Beispiel einer offenbar richtungslosen Größe (also Skalengröße, nicht Vektorgröße); und die Schichtung der Flächen gleicher Temperatur gibt auch ein besonders anschauliches Vorbild für die der mechanischen, elektrischen Äquipotentialflächen.]

Von der Wärmeverteilung in vertikaler Richtung war von jeher bekannt, daß im ganzen die **Lufttemperatur nach der Höhe abnehme**; auf hohen Bergen ist es ja (wenn direkte Sonnenstrahlung durch einen Felsschatten, eine Wolke abgehalten wird) empfindlich kalt.

Genaueres über die Stärke der Temperaturabnahme haben erst die Ballonfahrten der allerletzten Jahre gelehrt (wogegen frühere, da die Thermometer nicht ausreichend gegen Sonnenstrahlung geschützt waren, Angaben lieferten, die sich oft als um 14° C zu hoch herausstellten). — Das Hauptergebnis ist:

Einer Steigung um je 100 m entspricht als **vertikaler Temperaturgradient** in einer ersten Schicht von 0 m bis etwa 4000 m Seehöhe eine Abnahme um rund $\frac{1}{2}^\circ$ C. — Der oberen Grenze der Wolken entspricht die sogenannte Störungsschicht von nur 100 bis 300 m Dicke, in der die Temperatur konstant bleibt. In der dritten Schicht von etwa 4000 m Seehöhe nähert sich die Abnahme einer Grenze von rund 1° C (und zwar von 4000 bis 7000 m Höhe um 0.66° C, von 7000 bis 9000 m um 0.81° C auf je 100 m Erhebung). — Jüngst (1902) wurde durch unbemannte Registrierballons in Höhen von 10 000 bis 15 000 m eine Wiederrücknahme der Temperatur und erst darüber hinaus eine Wiederabnahme festgestellt.

Dabei bleiben in größeren Höhen das jährliche Kälte- und Wärmemaximum beträchtlich hinter denen der Ebene (Januar, Juli) zurück. So wurde durch Registrierballons über Paris in 10 000 m Höhe als kältester Monat der März mit -53° C, als mindest kalter der August mit -44° C gefunden.

Was nun die Ursachen dieser Temperaturabnahme betrifft, so ist es eine regelmäßige Frage der Unkundigen, warum es denn nicht vielmehr gegen oben in immer wärmer werde, denn die höheren Luftschichten seien ja „der Sonne

näher? Auch wenn, wie diese Frage stillschweigend voraussetzt, die Lufttemperatur zweier Orte einfach von ihrem Abstände von der Sonne abhinge, wären im Vergleich zu dem ungeheuren Abstände der Sonne von der Erde alle Abstände innerhalb der Atmosphäre doch so verschwindend klein, daß dann überhaupt alle Teile der Atmosphäre nur unmerklich verschiedene Wärmegrade haben könnten. Wenn aber auch seit langem bekannt war, daß sich die Luft erst an der durch Absorption dunkler Strahlen erwärmten Erdoberfläche erwärme und daß diese Erwärmung nur zum geringsten Teile durch Wärmeleitung erfolge (da die Luft ein Schlechtleiter der Wärme), im überwiegenden Maße aber durch Fortführung in den Luftströmungen (Konvektion) erfolge, so blieb es hiermit doch noch unerklärt, warum in den unteren Schichten die Temperaturabnahme rund $\frac{1}{4}^{\circ}\text{C}$ per 100 m, in den oberen rund 1°C per 100 m Erhebung betrage. Der Umstand, daß diese Zahlen ganz dieselben sind wie die für die Abkühlung infolge Wärmeverbrauches von aufsteigenden Strömungen feuchter, bezw. trockener Luft, läßt erkennen, daß auch jene fehlende Erklärung erst durch Anwendung der mechanischen Wärmetheorie zu geben sei, von der die moderne Föhntheorie das typische Beispiel ist; § 195.

§ 193. Absolute und relative Feuchtigkeit. Hygrometer.

Der atmosphärischen Luft ist fast immer und überall außer den Bestandteilen „trockener Luft“ (Sauerstoff, Stickstoff, Argon u. s. w., vergl. Chemie, § 220) auch Wasser beigemengt, und zwar teils als unsichtbarer Wasserdampf, teils kondensiert, wobei dann die Tröpfchen als die im folgenden Paragraphen zu besprechenden Gebilde: Nebel, Wolken u. s. w. sichtbar werden. Im vorliegenden Paragraphen ist unter „Wassergehalt“ der Luft der an Wasserdampf (Dunst im wissenschaftlichen Sinne, nicht im vorwissenschaftlichen, § 77, I) verstanden. — Auf die Begriffe des mit Dampf gesättigten bezw. nicht gesättigten Raumes (kürzer auch: gesättigter und ungesättigter Dampf, § 77, III) gründen sich folgende meteorologische Maßbestimmungen:

1. Als **absolute Feuchtigkeit** der Luft bezeichnet man die Anzahl Gramm gasförmigen Wassers per Kubikmeter des Gemenges von Luft und Dunst. Sie geht von geringen Mengen bis etwa 25 g.

Um diesen Wassergehalt zu bestimmen, läßt man ein bestimmtes Volumen Luft durch Chlorkalziumröhren streichen, die vor- und nachher gewogen werden, den Luftstrom unterhält ein „Aspirator“ (oder eine Wasserluftpumpe).

2. Als **relative Feuchtigkeit** der Luft bezeichnet man das in Prozenten auszudrückende Verhältnis des absoluten Wassergehaltes zu derjenigen Menge Wasserdampf, die bei dem gegebenen Druck und der gegebenen Temperatur als gesättigter Dampf sich erhalten könnte.

Diese beiden Begriffe sind zur vollständigen Beschreibung des Feuchtigkeitszustandes der Luft notwendig und theoretisch ansreichend. Doch sind außer ihnen praktisch noch folgende Begriffe im Gebrauch: 3. Der **Dampfdruck**; er gibt in Millimetern Quecksilberhöhe bei gegebener Temperatur die absolute Feuchtigkeit (wie 1) an. 4. Das **Sättigungsdefizit**, d. i. die absolute Feuchtigkeit, die noch zu der in einem Kubikmeter vorhandenen hinzukommen müßte, damit der Raum mit Wasserdunst gesättigt wäre. 5. Der **Taupunkt**, d. i. die Temperatur, auf die

i gegebener relativer Feuchtigkeit der Raum abgekühlt werden müßte, damit Sättigung eintrete.

Hygrometer und Psychrometer geben nach verschiedenen Methoden mittelbar die relative Feuchtigkeit an.

DANIELLS Hygrometer, das je nach der Feuchtigkeit Betauung einer zum Teil vergoldeten Kugel zeigt, ist gegenwärtig weniger verwendet als

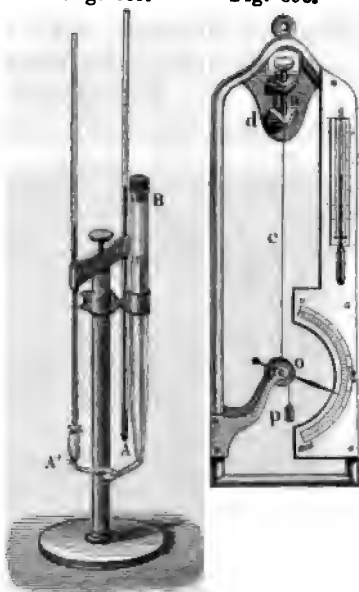
AUGUSTS Psychrometer (Fig. 689); dieses besteht aus zwei gleichen Thermometern, deren eines *A'* (mittels einer mit *B* aus mit Wasser getränkten Hülle) geschützt erhalten wird und daher „Nasstemperatur“, also tieferen Stand als das trockene Thermometer *A* anzeigt. Dieser Temperaturunterschied wird nur gering sein, wenn die äußere Luft der Sättigung schon sehr nahe war.

Gegenwärtig ist das verlässlichste Instrument für die Angabe der Feuchtigkeit ASSMANS Aspirationspsychrometer (Fig. 697); ist darauf auch in § 196 näher zurückzukommen, weil sein erster Zweck die Abhaltung des störenden Einflusses der Wärmestrahlung auf die Bestimmung der Lufttemperatur ist).

Nach dem Vorbilde der primitiven Schönfelds Schlechtwetteranzeiger, in denen eine bei feuchter Luft sich zusammenziehende, bei trockener Luft sich verlängernde Darmsaite eine Scheibe mit Figürchen in Bewegung setzt, sind die Haarhygrometer (Fig. 690) von SAUSSURE, KOPPE, LAMBRECHT eingerichtet; in diesen setzen hygroskopische Stoffe (Haare, die Grannen des Storchschnabels ...) Zeiger oder Schreibstifte (so beim selbstregistrierenden Hygrographen von RICHARD) in Bewegung, welche direkt die relative Feuchtigkeit angeben.

Fig. 689.

Fig. 690.



§ 194. Nebel, Wolken, Regen, Schnee, Hagel, Tau, Reif.

Wird infolge Abnahme der Temperatur (oder Zunahme des Druckes) bei der relativen Feuchtigkeit von 100 Proz. erreichte Sättigungspunkt der Luft überschritten, so scheiden sich die über diese 100 Proz. hinausgehenden Wassermengen in Form von Tröpfchen aus (indem die für die Tröpfchenbildung nach AITKEN ebenfalls wesentliche Bedingung fester Kondensationskerne, § 7, IV b, in der atmosphärischen Luft fast immer und überall erfüllt ist).

Solange die bei Kondensation des atmosphärischen Wasserdunstes sich bildenden Tröpfchen hinreichend klein sind, bilden sie zusammen mit der zwischen sie eingebetteten feuchten Luft die **Wolke**, die für einen innerhalb der Wolke selbst befindlichen Beschauer sich als **Nebel** darstellt (gleichviel, ob dieser nahe dem Erdboden oder auf einer

Bergspitze oder im freien Luftmeer sich befindet; Durchquerung von Wolken mittels des Luftballons). Bei reichlicher Ausscheidung vereinigen sich die Tröpfchen zu größeren Tropfen, die als **Regen** niederfallen (Sprühregen bis Platzregen, Wolkenbruch; Strichregen, Landregen...). — In einer Temperatur unter 0° C bilden sich entweder Eiskristalle, so in den Cirruswolken (siehe unten), im **Schnee** (wo die Schneeflocken aus lockeren, die Graupeln aus dichter geballten Kristallen bestehen); oder das Wasser bleibt unterkaltet, worin eine Teilbedingung der Eisregen und des Hagels liegt.

Nach dem äußeren Anblick werden **Feder-, Haufen-, Schichten- und Regenwolken** unterschieden (Fig. 691).

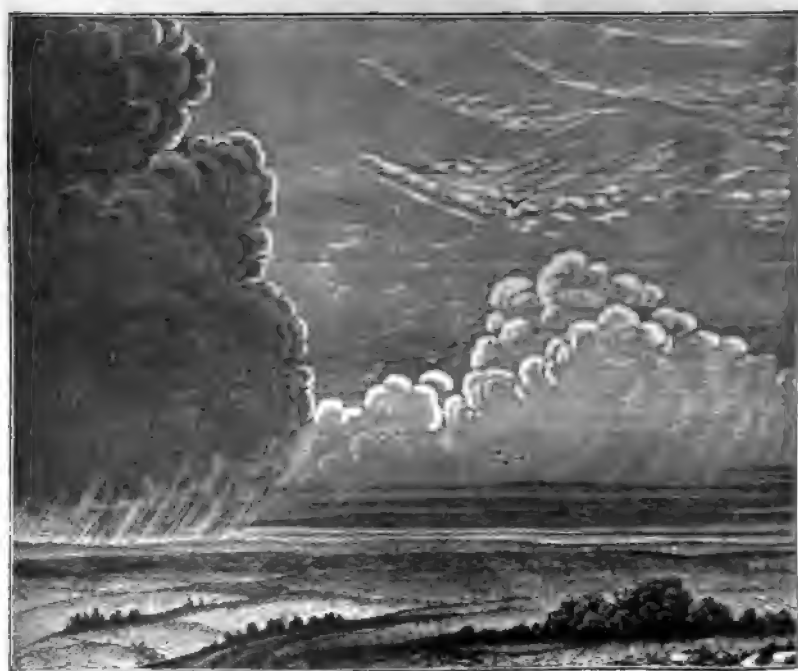


Fig. 691. Schichtwolke (stratus, 1 Vogel), Federwolke (cirrus, 2 Vögel), Haufenwolke (cumulus, 3 Vögel), Regenwolke (nimbus, 4 Vögel).

Diesen durch HOWARD aufgestellten und durch GOETHE populär gemachten vier Typen werden noch sechs andere Kombinationen (z. B. Cirrocumulus = Schäfchenwolke, Cumulonimbus = dunkle massige Gewitterwolke u. s. f.) zugesellt. — Diese deskriptiven Einteilungen sind deshalb nicht ohne wissenschaftlichen Wert, weil sie im ganzen Großen auch wesentlichen Unterschieden in der Art der Entstehung der Wolken entsprechen. Da deren Gesetze in einem noch vor zwanzig Jahrhunderten kaum geahnten innigen Zusammenhange mit den Gesetzen der mechanischen Wärmetheorie stehen, seien sie im folgenden Paragraphen besonders besprochen. Hier noch einiges von dem rein beschreibenden Tatsachenmaterial, das

zum Teil erst durch die Registrierballons während der jüngsten Jahre gewonnen wurde und durch das die Forderungen jener Theorie glänzend bestätigt wurden:

Den verschiedenen Formen der Wolken entsprechen die wesentlich verschiedenen durchschnittlichen Höhen, die mit der geographischen Breite und mit der Jahreszeit verschieden sind. Folgende Höhen ergaben sich aus trigonometrischen Messungen seitens je zweier Beobachter an den Enden einer bestimmten Standlinie: 50 bis 1000 m Stratus, 1000 bis 4000 m Stratocumulus, Cumulus, Cumulonimbus, Nimbus, 4000 bis 6000 m Altostratus, Altocumulus, 6000 bis 8000 m Cirrocumulus, 8000 bis 10 000 m Cirrus, Cirrostratus.

Im Sommer und in wärmeren Gegenden sind die durchschnittlichen Höhen größer, im Winter und in kälteren Gegenden geringer.

Man ist nach dem äußeren Anblick gewohnt, die Wolke als ein Gebilde zu betrachten, das eine selbständige Masse darstellt und in der Luft schwimmend deren Bewegung im ganzen mitmacht. Um dabei zu erklären, warum die Wasserteilchen der Wolke nicht sinken, nahm man lange Zeit an, daß sie nicht Tröpfchen, sondern Bläschen bilden, und sprach so von „Nebelbläschen“; doch wurde diese Annahme namentlich durch Beugungsversuche von KIRSSLING widerlegt. In der Tat sind denn auch die meisten Wolken nicht in der Weise bleibende Gebilde wie je eine Masse, sondern wie je eine Welle (vergl. § 60, über den Gegensatz zwischen Massenbewegungen und Wellenbewegungen). Es kann sich nämlich eine Wolke an der Unterseite auflösen, indem die sinkenden Tröpfchen in wärmere Schichten gelangen und an der oberen Seite sich neue bilden, indem dort Kondensation an den kälteren Schichten eintritt. Auch zeigen sich im Gebirge Wolken, die scheinbar unbeweglich an Bergen hängen, wiewohl sie von heftigem Stürme durchbraust sind.

Geradezu als **Wogenwolken** oder **Wolkenwogen** bezeichnet HELMHOLTZ jene regelmäßigen Wolkenstreifen, von denen die Cirruswolken die kürzeste Wellenlänge (bis etwa 200 m), die als böiges Wetter auffälligen Wechsel von hellem Himmel und Regengüssen Wellen bis 15 und 30 km Länge darstellen (über den Grundgedanken von HELMHOLTZ' Erklärung dieser Erscheinungen vergl. folg. Paragraphen). In der Tat wurde einige Jahre nach Helmholtz' Tode (1894) bei einer Ballonfahrt am Boden eine kalte ruhende Luftschicht von 2° , in etwa 200 m Höhe eine Temperatur von 9.2° und eine Windstärke beobachtet, die den Ballon mit 12.5 m sec^{-1} dahintrieb. Senkrecht zur Fahrtrichtung zeigten sich dicht über der Erdoberfläche parallele Nebelrollen, deren 15 längs 7.5 km gezählt wurden. Die beobachtete Wellenlänge von 640 m stimmte sehr gut mit den nach Helmholtz' Gleichungen berechneten Wellenlängen.

Zur Bestimmung der Niederschlagsmengen dienen die **Regenmesser**: kubizierte Gefäße mit Einlaßöffnungen von bestimmtem Querschnitt (Fig. 692).

Verschiedene Orte haben sehr verschiedene Jahresmittel der Niederschlagsmenge.

Die größte wurde in Cherapunje in Bengalen beobachtet, nämlich als zehnjähriges Mittel 14.8 m, d. h. wenn über einer bestimmten wagerechten Fläche alles Abfließen und Abdunsten des gefallenen Regens (und Zufliessen von seitwärts) abgehalten worden wäre, hätte sich binnen einem Jahre eine Wasserschicht von 14.8 m Höhe angesammelt. An

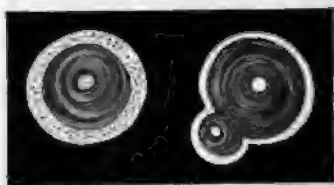
Fig. 692.



einem Junitage fielen dort sogar 1.04 m. Dagegen gibt es fast niederschlagslose Zonen, so die Reifbreiten (um 35° n. und s. Br.). Die Erklärung dieser großen Verschiedenheiten liegt in dem Vorherrschen niederen bzw. hohen Barometerstandes; einiges darüber im folgenden § 195.

An der Erscheinung des Hagels fordern mehrere Einzelheiten Erklärung: so die häufig schichtenförmige Struktur (Fig. 693), das lange Verweilen der Hagelkörner in der Luft trotz ihrer oft beträchtlichen

Fig. 693.



Größe (bis zu der von Tauben- und Hühnereiern, ja von mehr als 1 kg), die starken elektrischen Begleiterscheinungen.

Eine allseits befriedigende Theorie der Hagelbildung gibt es noch nicht; Beiträge zu ihr sind jedenfalls die Unterkaltung des Wassers (§ 76), aus der sich dann das Gefrieren binnen sehr kurzer Zeit erklärt; ferner sehr rasch aufsteigende Luftströme, was im Einklange ist mit den großen Mengen kondensierten Wassers, und häufig auch absteigende Ströme, also Luftwirbel mit horizontalen Achsen. — Das öfters wiederholte Auf- und Absteigen durch mehr und weniger warme und wasserreiche Luftschichten würde dann das lange Verweilen und die Schichtung erklären (— beides hat VOLTA aus entgegengesetzten Ladungen von Wolken zu erklären versucht, zwischen denen die sich bildenden Hagelkörner hin und her geworfen werden). — Neuestens versucht man wieder (mit nicht unbestrittenem Erfolg) der Bildung schwerer Hagelwolken durch „Wetterschiessen“ vorzubeugen.

Tau und Reif. Nach hellen Nächten zeigt sich morgens die Pflanzendecke im Sommer mit **Tau**, im Winter mit **Reif** bedeckt. Dieser kann nicht in der Weise wie Regen und Schnee aus der Luft auf die Erdoberfläche herabgefallen sein, sondern hat sich aus der die festen Körper an der Erdoberfläche unmittelbar umgebenden Luft an ihnen kondensiert. Bedingung hierfür ist, daß diese Körper durch Ausstrahlung in den Weltraum ihre Temperatur unter den Taupunkt erniedrigt haben, was eben nur bei unbedecktem Himmel möglich ist, wogegen eine Wolken-(oder auch eine künstlich erzeugte Rauch-)decke die Strahlen wieder zur Erde zurückwirft.

Diese Theorie der Tau- und Reifbildung hat WELLS gegeben, und sie ist insoweit noch gegenwärtig anerkannt. Dagegen wurde die weitere Annahme von Wells, daß das zu kondensierende Wasser allein aus der Luft stamme, durch die Beobachtung von AITKEN widerlegt, daß Steine bei Taubildung nicht oben, sondern an der Unterseite nass waren, der Wasserdampf also auch aus dem Boden stamme. Insbesondere sind es die Pflanzen, die während der Nacht Wasser aus dem Boden aufnehmen und an die benachbarten Luftschichten abgeben. So wurde auch gezeigt, daß namentlich über bewachsenem Boden im Innern von umgestürzten Gefäßen sich reichlich Tau ausscheidet.

Durchschnittlich beträgt die Taubildung des ganzen Jahres nur 1 Proz. der Regenmenge. — Viel ausgiebiger ist häufig der Reif; er setzt sich als **Rauhreif** oft in dichten Klumpen an die Bäume an. Da er infolge der großen Absorptions-

flüchtiger viel Ammoniak aus der Luft aufnimmt, dürfte er im Pflanzenleben von wesentlicher Bedeutung sein.

§ 195. Erklärung einiger Luftströmungs- und Niederschlagserscheinungen aus der mechanischen Wärmetheorie.

Nach älteren Theorien (so von HUTTON, die sich vom Ende des XVIII. bis Ende des XIX. Jahrhunderts erhielt) sollte die Bildung aller Niederschläge im weiteren Sinne (sowohl Nebel, Wolken, wie Regen) durch die Mischung ungleich warmer mit Wasserdämpfen gesättigter Luftmengen bedingt sein. Warum aus solchen Mischungen sich aber höchstens leichte Wolkenbildungen, keineswegs ausgiebige Regen erklären lassen, vergl. LA 224.

LA 224.

Die seit etwa zwei Jahrzehnten ausgebildete und angenommene Theorie der Niederschlagsbildung baut die Erklärung wesentlich auf die mechanische Wärmetheorie, namentlich auf die mechanische Arbeit, die von aufsteigenden und dabei sich abkühlenden Luftströmungen zu leisten ist. Diese Theorie wurde von HANN zuerst im Hinblick auf die auffallende Erscheinung des Föhns der Alpen entwickelt. Man hatte bis dahin diesen heißen, trockenen Wind für als aus der Sahara kommend erklärt; doch wies HANN darauf hin, daß der Föhn gerade im Sommer, wo von der Sahara die heißeste Luft aufsteigt, in den Alpen nur ausnahmsweise beobachtet wird. Überdies wurden Winde ganz ähnlichen Charakters an vielen Orten, zum Teil auch als von Norden kommend, beobachtet. Das Gemeinschaftliche ist vielmehr, daß ein feuchter Wind über die eine Seite (Luvseite) eines Gebirges emporgetrieben wird, wobei er sich um so mehr kalt und naß zeigt, je höher er steigt, worauf er dann an der Rückseite des Gebirges (Leeseite, Windschattenseite) um so mehr warm und trocken wird, je tiefer er herabgesunken ist. Da dieses Föhnphänomen und seine gegenwärtige Erklärung ein typisches Beispiel einer meteorologischen Beschreibung und Erklärung gibt, so soll im folgenden zuerst etwas eingehender die Beschreibung und erst dann die erklärende Theorie folgen.

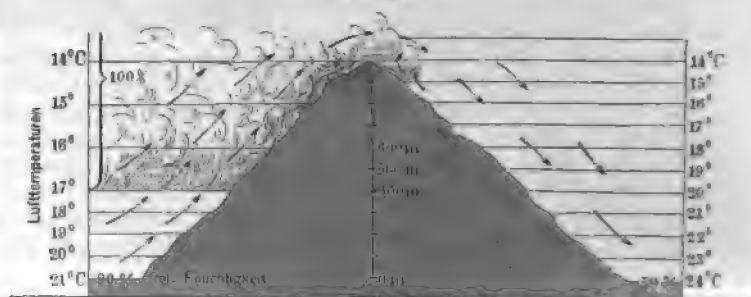
Föhn heist der heiße, trockene Wind, der in der Regel im Frühjahr und Herbst von dem Hauptkamme der Alpen in die nordwärts von ihm gelegenen Täler herabstreicht und in einzelnen hierfür günstig gelegenen Tälern (z. B. von Innsbruck) zu großer Stärke anwächst. Über dem Kamme (z. B. des Brenner) lagern Wolkenschleier, die sich später zur Föhnmauer verdichten. Der Wind beginnt mit einzelnen Stößen, nimmt rasch an Temperatur und Geschwindigkeit zu und steigert sich manchmal bis zum Orkan. Hitze und Trockenheit bewirken Ausdörren alles Holzwerkes (so daß die Herdfeuer gelöscht werden müssen), bei vielen Menschen Übelbefinden; im Frühjahr schmilzt der Schnee rasch weg. Diese Wirkungen erstrecken sich bis ins Alpenvorland.

Die Erklärung der Hitze und Trockenheit ergibt sich so: Beim Emporsteigen des feuchten Windes an der Südseite des Gebirges entgegen dem Widerstande der darüber lagernden Luft wird mechanische Arbeit verbraucht, die Luft kühlt sich ab (wie beim „Blasen“ mit gespitzten Lippen — im Gegensatz zum warmen „Hauch“).

und in bestimmter Höhe erreichen die Wasserdünste den Kondensationspunkt. — Ist dann bis zur Höhe des Gebirgskammes das Wasser in Regengüssen herausgefallen, so wird durch das Gewicht der herabsinkenden Luft mechanische Arbeit geleistet, die Luft erhitzt sich (wie im pneumatischen Feuerzeug) und zeigt nun, da ohnedies die absolute Feuchtigkeit geringer geworden ist, eine noch um so geringere relative Feuchtigkeit.

Diese Erklärung stimmt nicht nur in diesen ihren allgemeinen Zügen, sondern auch in den numerischen Werten mit den durch die mechanische Theorie des Wasserdampfes geforderten quantitativen Daten (LA 225) mit den Beobachtungen und Messungen. Die schematische Fig. 694 stellt die Vorgänge beim Übersteigen aus

Fig. 694.



nur 1000 m über die Talsole (0 m) sich erhebenden Gebirgskammes dar. Ein Luftstrom, der im Tale 21° C und 80 Proz. relative Feuchtigkeit hat, d. i. 12,2 g Wasserdampf in 1 kg Luft, wogegen erst bei 15 g Sättigung stattfindet, kühlt sich bei der durch die Berglehne erzwungenen Emporsteigung um je 100 m Hebung um fast genau 1° C ab. Bei 400 m haben daher Luft und Wasserdunst nur mehr 17° C, was für jene absolute Feuchtigkeit der Sättigungspunkt ist. Indem nun bei weiterem Emporsteigen das sich kondensierende Wasser durch seine freiwerdende Dampfwärme einen Beitrag zu der die Hebearbeit verrichtenden Wärme liefert, kommt erst auf rund 200 m Hebung eine weitere Temperaturerniedrigung von 1° C. Deshalb ist auf der Kammhöhe von 1000 m die Temperatur auf 14° gesunken. Da bei dieser Temperatur die absolute Feuchtigkeit nur noch 10,5 g Wasserdampf in 1 kg Luft beträgt, so müssen aus den über 400 m sich ballenden Wolken $12,2 - 10,5 = 1,7$ g Wasser als Regengut herausfallen. — Jenseits der Kammhöhe entspricht wieder einem Sinken um nur 100 m eine Erwärmung um 1° C, welche Zahl beim Sinken in erster Annäherung sowohl für gesättigte wie ungesättigte (auch ganz trockene) Luft gilt. Der Wind hat daher beim Eintreffen im ursprünglichen Niveau 24° C (gegen 21° C) und die relative Feuchtigkeit von 59 Proz. (gegen 80 Proz.) erreicht. — Wäre die Kammhöhe des Gebirges 2500 m, so würden die 24° C auf 32° zunehmen, die 59 Proz. relative Feuchtigkeit auf 27 Proz. abnehmen.

Die hier an dem besonderen Beispiele des Föhns durchgeführten quantitativen Betrachtungen leiten nun auch zur Antwort auf die viel allgemeinere und schon der alltäglichen Erfahrung sich aufdrängende Frage:

Warum entspricht in der Regel hohem Barometerstande helles, tiefem Barometerstande trübes Wetter? — Antw.: Die in ein barometrisches Minimum von aufsen (in erster Annäherung radial, genauer spiralig) einströmende Luft bildet über der Stelle geringen Druckes einen aufsteigenden Strom (vergl. Fig. 683, S. 618). Infolge des Verrichtens mechanischer Arbeit unter Wärmeverbrauch wird die Luft kühler (und zwar dies viel ausgiebiger als blofs infolge Berührung mit den höheren und dabei kälteren Schichten); und dieser Abkühlung entspricht Kondensation, d. h. zunächst Trübung, dann Nebel- und Wolkenbildung, endlich Regen.

Dagegen bildet die Luft, ehe sie von einem barometrischen Maximum (oder auch von ausgebreiteten Stellen hohen Druckes) nach aufsen hin abströmt, zuerst absteigende Ströme, die infolge der hierbei gewonnenen und sich in Wärme umsetzenden mechanischen Arbeit Temperaturerhöhung und Entwölkung bewirken.

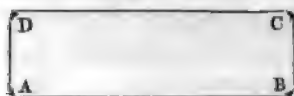
Diese zuerst nur theoretisch erschlossenen Beziehungen konnten von HANN durch Beobachtungen auf dem Sonnblick besonders im Winter bestätigt werden, indem in diesen Höhen wirklich der Luftstrom der Zyklone kalt, der der Antizyklone verhältnismässig warm ist. Auch die neuesten Ballon- und Drachenbeobachtungen haben dies glänzend bestätigt.

Ferner sind in der Tat die Gürtel hohen Druckes in etwa 35° nördlicher wie südlicher Breite zugleich die Regionen des fast immer klaren Himmels. — Umgekehrt erklärt sich das regnerische Klima z. B. von Salzburg daraus, dafs die herrschenden Westwinde ungehindert über die bayrische Ebene streichen und dann an dem unvermittelt aus der Ebene sich erhebenden Hochgebirge emporzusteigen gezwungen sind. — Ferner: Dem Hochgebirgstouristen ist die Erscheinung geläufig, dafs früh morgens Himmel und Berge wolkenlos sind und schon kurz nach Bestrahlung durch die Sonne über einzelnen Gipfeln sich unscheinbare Wölkchen zeigen, die sich alsbald zu dichten Wolkenhauben vergröfsern. Wenn hier die bei Erwärmung durch die Sonne aufsteigenden Ströme so bald zum Anfang von Kondensationen führen konnten, mufs die Luft dem Sättigungspunkte nahe gewesen sein. — Ebenso: Nach bekannten Wetterregeln zeigt es gutes Wetter an, wenn sich die „Herbstnebel senken“, dagegen schlechtes, wenn sie „steigen“ und sich in einzelnen Wolkenfetzen am Himmel festzusetzen scheinen; dies infolge aufsteigender, jenes infolge absteigender Luftströme. — Ebenso: Um Sonnenuntergang klärt sich sehr häufig der Himmel: denn das Aufsteigen der Luft hört auf und es beginnt eine absteigende Strömung, die mehr Wärme entwickelt, als von den Wolken aus der um die Abendzeit ohnedies schwächeren Sonnenstrahlung aufgenommen worden wäre.

Als umfassende Anwendungen des in diesem § erläuterten Zusammenhanges zwischen Erwärmung und Abkühlung auf Grund der mechanischen Wärmetheorie werden im folgenden § die früher nur mangelhaft aus Strahlung, Absorption und Konvektion erklärte Temperaturabnahme mit der Höhe und die paradoxe Erscheinung der Temperaturumkehr erörtert werden. Dagegen ergibt sich schon jetzt ebenfalls als Anwendung jenes Prinzips die Antwort auf die noch weiter zurückgehende Frage: Wenn fast alle Veränderungen des Wetters von dem Wechsel der barometrischen Maxima und Minima abhängen — woher

kommt dann dieser Wechsel der Maxima und Minima selbst? Hierauf antwortet folgende Hypothese von der Ausbildung barometrischer Maxima und Minima (nach Egon OPPOLZER): Haben zwei nicht allzu entfernte Orte *A* und *B* (Fig. 695) anfänglich einen nur wenig verschiedenen Luftdruck, und zwar etwa über *A* ein schwaches relatives Maximum, über *B* ein schwaches Minimum, so tritt ein absteigender Strom *DA* und ein aufsteigender *BC* ein; also zusammen mit den Strömen von *A* nach *B*, von *C* nach *D*, eine Zirkulation, falls nur die je

Fig. 695.



kleinen Druckunterschiede bedingenden Kräfte in der Regel selbst wieder Temperaturunterschiede, so fortbestehen. Wäre dabei die Luft überall trocken, so entspräche dem Absteigen wie Aufsteigen um je 100 m eine Erwärmung bzw. Abkühlung um je 1° C. Ist aber die Luft, wie in der Regel, feucht, so entspricht zwar dem Absteigen über *A* um 100 m noch immer ein Erwärmen um 1°, dagegen dem Aufsteigen über *B* um 100 m nur ein Abkühlen um $\frac{1}{4}$ °. Da also die über *A* sinkende Luft wärmer und somit weniger dicht ist als die über *B* steigende, so werden von *A* aus durch denselben Querschnitt nach *B* hin allmählich immer kleinere Luftmengen abfließen als von *B* über *CD* nach *A* zufließen. Somit wird über *A* eine Anhäufung von Luft, ein barometrisches Maximum, eine Anticyklone entstehen, über *B* ein Defizit an Luft, ein Minimum, eine Cyklone.

Hiermit ist also das Anwachsen zu großen Druckdifferenzen aus anfänglich kleinen erklärt. Diese anfänglich kleinen Differenzen selbst werden sich in der Regel erklären als die „Hebungen bzw. Senkungen der Flächen gleichen Druckes“, die ihrerseits wieder durch Temperaturunterschiede verursacht sind, wie im folgenden Paragraphen, II., gezeigt wird.

§ 196. Einstrahlung seitens der Sonne. Absorption und diffuse Reflexion in der Luft und im Erdboden. Die Sonnenwärme als bewegende Kraft in der Atmosphäre.

Da die Energie, die sich in den atmosphärischen Erscheinungen, insbesondere in der lebendigen Kraft der Luftströmungen, der Dampfwärme der verdunsteten Wassermengen, der Erwärmung des Erdbodens und der Luft äußert, fast ganz der Einstrahlung seitens der Sonne auf die Erde zu verdanken ist, so erhebt sich vor allem die Frage nach der Menge der in das Luftmeer der Erde eindringenden Energie; das Maß hierfür bildet die

Solarkonstante; sie ist definiert als die Anzahl Kalorien, die an der oberen Grenze der Atmosphäre durch 1 cm² bei senkrechter Einstrahlung per Minute hindurchgeht; sie beträgt nach LANGLEY etwa 3 Cal. — Bei solcher Einstrahlung würde binnen einem Jahre eine 50 m dicke Eisdecke auf der Erde (oder ein 200 m dicker Eishimmel um die Sonne als Mittelpunkt mit der Erdweite

LA 226.

= 20 000 000 Meilen als Halbmesser) abschmelzen. LA 226.

Die Ermittlung dieser Größe ist mit mannigfachen Schwierigkeiten verbunden, denn sie kann nur erschlossen werden aus den auf dem Grunde des Luftmeeres (oder in geringen Erhebungen über der Erdoberfläche) eintreffenden Energiemengen. Diese Menge wird gemessen mittels des Pyrheliometers.

696, in welchem eine berufste Platte vv alle einfallenden Strahlen (oder doch durch Korrekturen zu ermittelnden Betrag von ihnen) absorbiert und

Fig. 696.

ärme umsetzt, so daß die das Innere

Apparates erfüllende Wassermenge um

bestimmten Temperaturbetrag erwärmt

— Daß die Strahlen auf vv normal

fallen sind, läßt sich leicht kontrollieren,

1 auf der Platte dd ein konzentrischer

ten von vv sich zeigen muß. — Wenn

t zu werden pflegt, das Pyrheliometer

die Menge der Wärmestrahlung der

an, so ist also dies nur in dem Sinne

g, in dem überhaupt von „strahlender

me“ die Rede sein kann: nämlich daß

nergie der Strahlen erst nach der Ab-

tion im Ruß als Wärme auftritt. — Um

aus den Angaben des Pyrheliometers

anderer „Aktinometer“ = Strahlungs-

r, unter denen die neueren „Bolo-

r“ Temperaturunterschiede

erab zu 1 Milliontel Centi-

anzeigen) auf die Solar-

ante schließen zu können,

1 bedenken, daß von den

e Atmosphäre gelangenden

len jedenfalls ein bestimmter

1 durch Absorption, und zwar sehr

g in der Luft, viel mehr in dem

eigengemengten Wasserdampf und der

nsäure zurückgehalten wird. Ein ein-

s Mittel, diesen Betrag zu schätzen,

die Messung bei verschiedenen hohen

enständen dar, indem bei dem Stande der Sonne im Zenit die kürzeste,

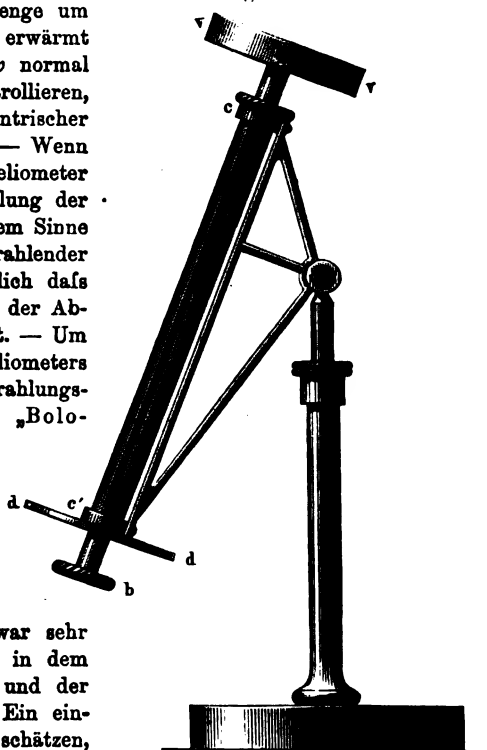
em Stande im Horizont die längste Strecke von den Sonnenstrahlen in der

ülle zurückzulegen ist. Um was also das Aktinometer bei niederem Stande

er Wärme aufweist, das entfällt auf die größere Absorption längs der

ren Strecke. Nach **POUILLET** entspricht einer Sonnenhöhe von 10° nur $\frac{1}{4}$ der

ahlung von der Sonne im Zenit.

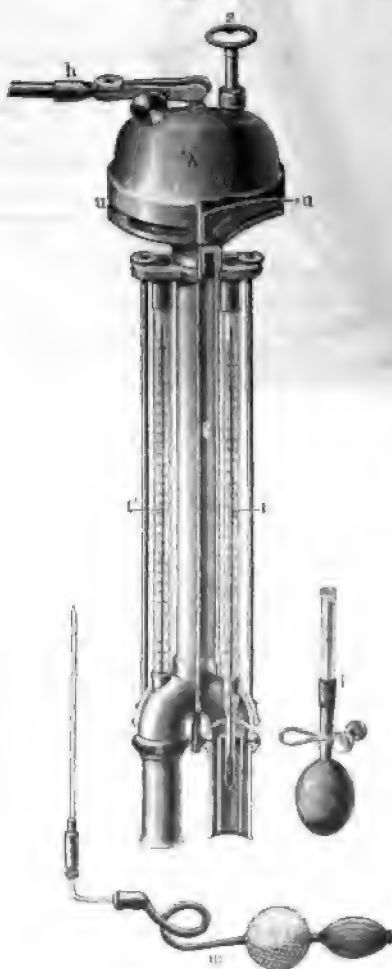


LANGLEY schätzt aus Messungen in verschiedenen Seehöhen die Strahlungs-
ie, die in der Atmosphäre auch unter den günstigsten Bedingungen zurück-
ten wird, auf $\frac{1}{4}$ der eingestrahnten. Diese Schätzungen gründen sich auf
sorgfältige Unterscheidung der verschiedenen Qualitäten von Strahlen,
der Lage der ihnen entsprechenden Linien im sichtbaren, im ultraroten und
ltravioletten Teil des Spektrums, bzw. den zugehörigen Wellenlängen, wie
is Fig. 417, S. 376 und Tafel V, ersichtlich ist. Denn nur wenn darauf Rück-
genommen wird, daß langwellige Strahlen vollständiger durch die
sphäre gehen als die kurzwelligen (wofür die nächstliegende Erfahrung
ötliche Färbung der tiefstehenden Sonne ist), kann zu der durch
ktinometer nachgewiesenen Strahlung noch ein kleinerer Betrag langwelliger,
röfserer kurzwelliger Strahlen zugerechnet werden, die auf dem Wege von

der oberen bis zu der unteren Grenze der Atmosphäre **absorbiert** oder auch **reflektiert** (kurz: **diffundiert**) worden sind. — Die numerischen Bestimmungen der Solarkonstante sind noch nicht einmal so genau, daß man eine merklich größere Einstrahlung im Perihel (1. Januar) als im Aphel (2. Juli) hätte direkt nachrechnen können; ebenso wenig einen Einfluß der Sonnenflecken.

Dagegen folgt aus der Größe der Einstrahlung sofort die der Ausstrahlung aus der Sonnenoberfläche (unter der Annahme, daß sich zwischen Sonne und Erdatmosphäre kein absorbierender Stoff finde). Man schätzt gegenwärtig die durch 1 cm² der Sonnenoberfläche per Minute ausgesendete Energie auf 150 000 Cal. und hieraus die Temperatur an der Sonnenoberfläche auf

Fig. 697.



etwa **6700° C** (vorausgesetzt, daß die Emissionsvermögen der Sonne nicht wesentlich geringer sei als das der Kohle oder des Rußes; mit Rücksicht auf die Absorption und Diffusion in den Gasen der Sonne ist die Temperatur des flüssigen oder festen Kernes der Sonne auf Hunderttausende von Graden geschätzt worden).

Insoweit bekannt ist, wie große Mengen von jeder Strahlenart einerseits in die Atmosphäre eindringen und wieviel von ihnen andererseits in diese und an der unteren Grenze des Luftmeeres durch die verschiedenen hier befindlichen Stoffe (Luft, Wasserdampf, Meeresflächen, die verschiedenen Gesteinsarten des Bodens, Pflanzenwuchs) **absorbiert** und **reflektiert** werden, läßt sich hieraus und aus den durch die Astronomie bekannten Einfallswinkeln und der Dauer der Bestrahlung für jeden Punkt an und über der Erdoberfläche die aus der Sonnenstrahlung hervorgehende **Wärmemenge** berechnen. — Von allem diesen Umständen abhängig ist sodann der auf die Sonnenstrahlung zurückzuführende **Wärmegrad** je einer bestimmten Stelle der Atmosphäre; dieser ist es, der kurz als Lufttemperatur bezeichnet wird, deren tatsächliche Verteilung nach

geographischer Breite, Höhenlage, Tages- und Jahreszeit in § 192 beschrieben worden ist.

Wie fremd der vorwissenschaftlichen Auffassung die hier gebotenen Unterscheidungen sind, zeigt die landläufige Gegenüberstellung einer „Temperatur in der Sonne“ gegen die „Temperatur im Schatten“. Entgegen der Denk- und Sprechweise der Nichtphysiker ist es nämlich überhaupt „ganz unrichtig, von einer Temperatur in der Sonne zu sprechen, denn die Luft hat hier die gleiche Temperatur wie im Schatten. Vielmehr zeigt das Thermometer, das von der Sonne bestrahlt wird, unrichtig, nämlich zu hoch, aber je nach der Glassorte in verschiedenem Maße“. Die Aufgabe einer richtigen Bestimmung der Lufttemperatur unabhängig von der Bestrahlung wurde erst durch ASSMANN'S Thermometer (Fig. 697) gelöst, das als Aspirationspsychrometer bezeichnet wird, weil in ihm mittels eines Uhrwerkes ein Luftstrom von etwa 3 m sec^{-1} hergestellt wird, und weil mit dem trockenen Thermometer auch ein befeuchtetes (ähnlich wie in AUGUST'S Psychrometer, Fig. 689) verbunden ist. Indem die Thermometergefäße von zwei blank polierten Metallröhren umgeben sind, von denen schon die äußere sich infolge starker Reflexion sogar bei direkter Bestrahlung nur wenig erwärmt, wird die Lufttemperatur, gleichviel ob „in der Sonne“ oder im Schatten, bis auf $\frac{1}{10}^{\circ} \text{C}$ genau angegeben. Erst mit diesem Instrumente konnten unter anderem die in § 193 mitgeteilten Gesetze der Temperaturabnahme (oder -zunahme) mit der Höhe bei Fahrten mit bemannten Ballons einwurfsfrei ermittelt werden. Speziell bei unbemannten Registrierballons wird neuestens für den Luftstrom durch das sinnreiche Mittel gesorgt, daß der Ballon aus sehr dehnbarem Gummi hergestellt ist, sich also in höheren Schichten stärker ausdehnt und so überall eine beträchtliche, nahezu gleichförmige Steiggeschwindigkeit hat; das Thermometer ist ebenfalls in zwei blank polierte Metallröhren eingeschlossen, durch die beim Steigen der Luftstrom von oben nach unten — und wenn der Ballon geplatzt ist und der Registrierapparat mittels Fallschirmes sinkt, von unten nach oben hindurchstreift. —

Die den Erdboden treffenden und schon in seinen obersten Schichten absorbierten Strahlen erwärmen infolge von Wärmeleitung auch die tieferen Schichten. Indem dann der Boden bei klarem Himmel seine Wärme wieder in den Weltraum ausstrahlt, wäre zunächst Gleichheit der Ein- und Ausstrahlung für die Zeit der Äquinoktien, ein Überschuss an Wärme für das Sommerhalbjahr (März—September), eine Abkühlung unter das Jahresmittel für das Winterhalbjahr (September—März) zu erwarten. Bekanntlich verschiebt sich aber das Wärmemaximum von der Zeit des Sommersolstitiums bis gegen Juli oder August (Hundstage, so vom „Hundsstern“, d. i. Sirius, benannt, der um diese Zeit wieder vor der Sonne aufgeht), das Kältemaximum vom Dezember in den Januar (weshalb auch der Beginn der astronomischen Jahreszeiten später angesetzt wird, nämlich z. B. auf den 21. Juni nicht die Mitte, sondern der Anfang des Sommers). Diese zeitliche Verschiebung erklärt sich aus der allmählichen Anhäufung der täglichen Überschüsse an Einstrahlung gegen die Ausstrahlung im Sommerhalbjahr, umgekehrt im Winterhalbjahr.

Das Eindringen der Wärme in den Boden erfolgt dabei so langsam, daß in 3 m Tiefe das dem Juli entsprechende Wärmemaximum der Lufttemperatur erst im September, in 6 m Tiefe gar erst im November sich zeigt. Es hat also diese

„Wärmewelle“ eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von nur $1\frac{1}{2}$ m per Monat. In einer Tiefe von etwa 15 m ist ein jährlicher Wechsel der Temperatur überhaupt nicht mehr nachzuweisen und daher um so weniger der tägliche. Selbst in Kellern von mäßiger Tiefe scheint es zusammen mit dem subjektiven Wärmekontrast im Sommer kalt, im Winter warm.

Von jener Tiefe abwärts zeigt sich eine Temperatursteigerung von etwa 1° pro 100 m, die auf hohe Temperaturen des Erdinnern hinweist und zur Annahme eines feurig flüssigen Zustandes des ganzen Erdkörpers mit Ausnahme einer verhältnismäßig ganz dünnen Kruste geführt hat. Doch sind bei den hiesigen bezüglichen Hypothesen nicht die ungeheuren Drucke zu vergessen, die die Verflüssigung aufhalten können — umgekehrt aber freilich auch schon für sich allein ohne hohe Temperaturen feste Körper verflüssigen können. — Unabhängig von solchen Hypothesen läßt sich sagen, daß die Temperatur an der Oberfläche der Erde durch das heiße Erdinnere nicht merklich beeinflusst wird (bis auf die heißen Quellen und Vulkane), wie eben jene fast ganz der Ein- und Ausstrahlung seitens der Sonne folgenden Temperaturen der obersten Erdschichten beweisen.

Um den Nachweis vollständig zu machen, daß die in der Atmosphäre befindlichen Wärmemengen wirklich fast ganz der Sonnenstrahlung zu verdanken sind, haben wir nebst der unteren Begrenzung des Luftmeeres durch die Erdoberfläche auch deren obere in Betracht zu ziehen, d. h. den angrenzenden „leeren Weltraum“, nämlich:

Als „Temperatur des Weltraumes“, d. h. des „leeren“ (nur vom Äther erfüllten) Raumes nahm man früher etwa -140° an. Gegenwärtig wird dem leeren Weltraum der absolute Nullpunkt der Temperatur zugeschrieben (wobei festzuhalten bleibt, daß diese Verwendung der Zahl -273° nur eine fiktive ist, § 74). Dies heißt aber nur, daß der Raum für sich ohne ihn erfüllenden Stoff natürlich auch keine Temperatur hat, was aber nicht hindert, daß ein an irgend eine Stelle des Raumes gebrachter Körper gemäß der Einstrahlung von seitens der ihm näheren Gestirne und vermöge seines Absorptionsvermögens beliebig hohe Temperaturen annehmen kann. Tatsächlich haben aber aktinometrische Messungen sogar von seitens des uns nächsten Gestirnes, des Mondes, eine uns kaum merkliche, von seitens der Planeten und der Fixsterne gar keine merkliche Einstrahlung ergeben, die sich als „Wärmestrahlung“ verriet. — Dies ein Grund dafür, daß speziell für meteorologische Zwecke im vorliegenden Abschnitte die Wärmestrahlung von der im nächsten Abschnitte zu behandelnden Lichtstrahlung abgetrennt werden konnte — unbeschadet der Wesensgleichheit von beiderlei Strahlen (§ 118).

Nach diesen tatsächlichen Feststellungen über die Herkunft des Wärmeinhaltes der Atmosphäre lassen sich nun auch seine näheren und ferneren meteorologischen Wirkungen im Zusammenhang verstehen. Als Ergänzung der in den vorausgegangenen Paragraphen schon größtenteils beschriebenen Erscheinungen noch folgende Erklärungen:

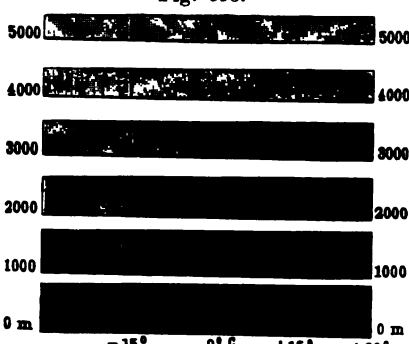
1. Die Hebung der Flächen gleichen Druckes bei Erwärmung der Luft (§ 190): Ist an einem Orte M in der Höhe h m über der Erdoberfläche der augenblickliche Barometerstand b cm und wird die unter M befindliche Luft erwärmt, so dehnt sie sich aus, und es muß sich ein Teil dieser Luft über diesen Punkt M erheben, so daß hier der Druck von b auf $(b + \beta)$ cm wächst. Umgekehrt bei Temperaturabnahme.

Die Beträge der Hebung bzw. Senkung sind aus folgender Tabelle und der entsprechenden graphischen Darstellung ersichtlich:

Luftdruck in verschiedenen Höhen bei verschiedenen Temperaturen:

Fig. 698.

Höhe	-15° C	0° C	+15° C	30° C
m	mm	mm	mm	mm
10 000	176	193	209	224
5 000	380	395	410	424
4 000	439	453	466	479
3 000	505	517	528	539
2 000	581	590	598	606
1 000	665	670	675	679
500	711	713	715	718
0	760	760	760	760



Aus dieser allgemeinen Abhängigkeit zwischen Wärme- und Luftdruckverteilung erklärt sich ferner:

2. Im Sommer hat das Land niederen, das Meer hohen Luftdruck; denn es ist im Sommer das Festland durchschnittlich wärmer als das Meer. Es fließt also die Luft gleichsam über die Flächen gleichen Druckes vom Festland gegen das Meer hin ab. Somit kommen zu den aus dem allgemeinen Zirkulationssystem der Luft über der ganzen Erdoberfläche (Fig. 685, S. 619) hervorgehenden Winden (den Passaten u. s. w.) noch mehr oder minder regelmäßige **Land- und Seewinde**. Im kleineren Maßstabe entsprechen solche auch schon dem täglichen Wechsel von Tag und Nacht, der auf dem Festlande selbst wieder den Wechsel der **Berg- und Talwinde** zur Folge hat.

Der in den Begriffen **Land- und Seeklima** festgehaltene Gegensatz betrifft zunächst die verhältnismäßig großen Temperaturgegensätze (Amplituden) über dem Festlande, die geringen über dem Meere. Diese wieder erklären sich vorwiegend aus der hohen spezifischen Wärme des Wassers im Vergleich zu der des Erdbodens (§ 72), ferner aber auch daraus, daß noch große Wärmemengen zur Verdunstung des Meerwassers in Anspruch genommen werden (wie auch in kleinerem Maßstabe auf dem Festlande ein stärkerer Wärmeverbrauch und daher kleinere Temperaturunterschiede über bewaldetem als über nacktem Boden statthaben). Auch dringen die Sonnenstrahlen in das Wasser noch ein, während sie am Boden nur die Oberfläche treffen.

Von wohltätigster Folge für die Wärmeökonomie der Erde ist das Dichtigkeitsmaximum des Wassers (rund 4° C, § 73) oberhalb seines Gefrierpunktes (0° C). Denn wenn bei Herannahen des Winters die Luft und das Wasser z. B. eines Teiches sich an der Oberfläche auf 6°, 5°, 4° abgekühlt hat, so sinkt die kältere oberste Schicht in dem übrigen spezifisch leichteren Wasser unter. Kühlt sich aber später die Luft auf 3°, 2°, 1°, 0° und unter 0° ab, so nimmt nur mehr die oberste Schicht diese niederen Temperaturen an und alles tiefer gelegene Wasser behält so lange 4° C, bis ohne Strömungen, bloß durch die viel langsamere

Wärmeleitung (von unten nach oben), weitere Abkühlung (von oben gegen unten) eintritt. Insbesondere schwimmt eine Eisdecke und schützt als Schlechtleiter die Wärme das Wasser und die in ihnen lebenden Organismen für längere Zeit. —

3. Auch die im § 190 geschilderte Regelmäßigkeit im täglichen Gange des Barometers, wie sie sich bei Zerlegung in Sinuskurven ergibt, läßt sich schließlich aus den durch die Sonnenstrahlung herbeigeführten „Schwingungen der Atmosphäre“ erklären. Da die Lufthülle der Erde eine begrenzte Masse hat, so muß jede Störung ihres Gleichgewichtes Schwingungen, ähnlich denen der Luft in einer Pfeife (§ 89), anregen, und zwar im allgemeinen mehrere Teil-schwingungen. Nach MARGULES hat nun eine der mit den Dimensionen der Erdhülle verträgliche Schwingung eine Schwingungsdauer von 11,94^h, also sehr annähernd gleich der Dauer eines halben Tages; nach dem Doppelten dieser Zeit aber bringt die Sonnenstrahlung infolge des Wechsels von Tag und Nacht in der That immer wieder neue Impulse zu Bewegungen in der Atmosphäre hervor, so daß also die Kugelhülle der Erde auf diese ganztägigen Impulse gestimmt ist. — Ähnliche Erklärungen konnten auch schon für andere regelmäßige Gänge des Barometers gegeben werden.

4. Die Erscheinung der *Föhnwind* Tatsache, daß im Winter schönes Wetter erwarten mo kaltes und nebliges Wetter

So wurden in den ungewohnten Winter 1879/80 und 1880/81 in Klagenfurt — 13° C, auf dem un- höher gelegenen Obir — 1,2° C beobachtet; ebenso in Ischl — 7,3° C, auf 1310 m höheren Schafberge + 0,5° C. — Die Erklärung ist folgende: Der hohe Barometerstand führt zwar auch in der Ebene zuerst klaren Himmel herbei, und es erfolgt nachts starke Ausstrahlung gegen den Weltraum, die durch die viel kürzere Einstrahlung bei Tage ersetzt wird. Daher erfolgt Abkühlung des Bodens, und es bildet sich eine Nebelschicht, die, wenn sie auch nur 50 bis 100 m dick ist, schon die weitere Einstrahlung verhindert, infolgedessen der Boden und die angrenzende Luft noch immer weiter sich abkühlen und die Dicke der Nebelschicht wächst. Der gleichmäßig hohe Barometerstand läßt es auch nicht zu Winden kommen, die die Wolkendecke vertreiben würden: daher das gleichmäßig trübe, kalte Wetter. Von den höher gelegenen Berggipfeln dagegen fließt die ebenfalls abgekühlte Luft in die Taler ab, und es kommt dort die dem hohen Barometerstande, den absteigenden Luftströmen und der Einstrahlung entsprechende, über dem Monatsmittel liegende Temperatur zur Geltung.

C. Aus der meteorologischen Optik.

Das in die Lufthülle der Erde eindringende Licht der Sonne und Sterne sowie auch die von irdischen Körpern ausgehenden Lichtstrahlen erfahren durch Brechung eine Änderung der Richtung; ferner durch Diffusion und Absorption eine Änderung der Farbe, so z. B. im Morgen- und Abendrot, im Blau ferner Berge. — Zu den prachtvollsten Lichterscheinungen gehören ferner die Regenbogen, die ein Glied derjenigen Reihe von Dispersions- und Beugungserscheinungen bilden, der auch die Hufe, Ringe u. dergl. angehören.

§ 197. Astronomische und terrestrische Strahlenbrechung. Luftspiegelungen.

Die atmosphärische Strahlenbrechung bewirkt, daß die scheinbare Höhe jedes Gestirnes über dem Horizonte größer ist als

Fig. 699.

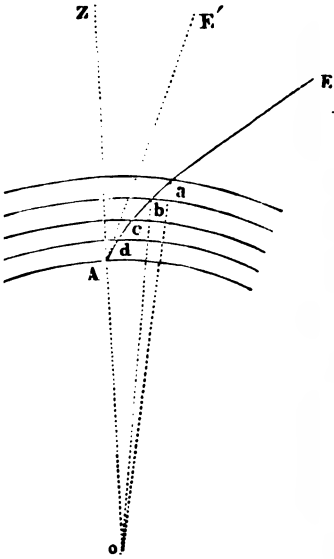


Fig. 700.

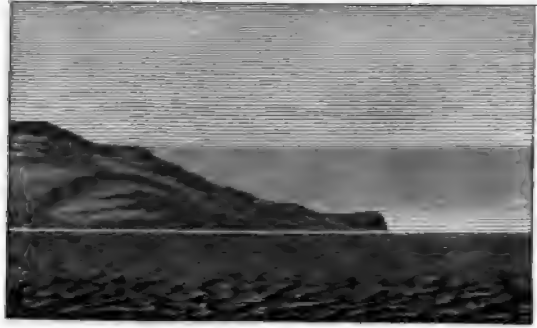
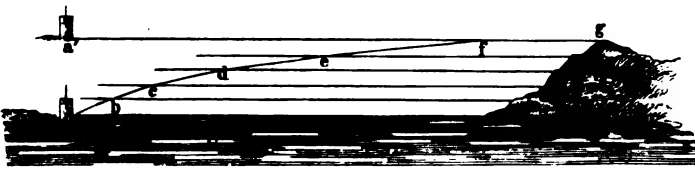


Fig. 701.



seine wirkliche Höhe, und zwar beträgt der Unterschied am Horizont etwa $\frac{1}{2}^\circ$ (so daß, wenn z. B. der untere Rand der untergehenden Sonne den Horizont zu berühren scheint, in Wahrheit der obere Rand soeben untergeht). Nur für das Zenit ist die Ablenkung gleich Null.

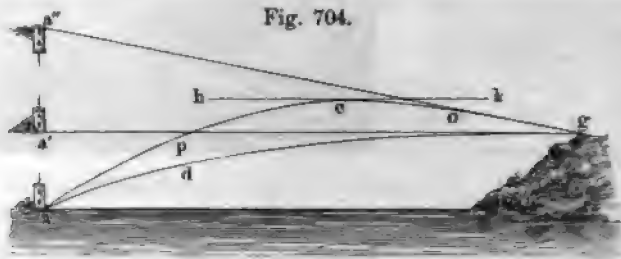
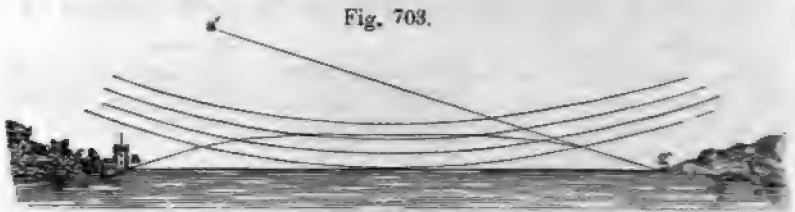
Fig. 702.



Die Erklärung dieser Tatsachen liegt in der Abnahme der mechanischen und damit auch optischen Dichte der Luft nach oben bei normaler Schichtung der Luft. Dringt also von einem Stern (Fig. 699) ein Strahl in die obersten und von hier aus in dichtere Schichten der Atmosphäre, so wird er überall zum

Höfler, Physik.

Einfallslot gebrochen, und das Stück des Lichtstrahls unmittelbar vor dem Auge ist steiler als der Strahl bei seinem Ausgehen vom Sterne. Bei allen astronomischen Beobachtungen, aber auch bei genauen trigonometrischen Messungen von Bergeshöhen, muß auf diese Strahlenbrechung (deren quantitative Gesetze sehr verwickelt sind) Rücksicht genommen werden.



Mannigfache Abänderungen der Strahlenbrechung in der Atmosphäre infolge anormaler Schichtung führen zu Luftspiegelungen (*Fata morgana*, Kimmung, Figg. 700, 701). So treten nach Figg. 702–704 an anormal erhitzten Luftschichten verschiedene Ablenkungen, auch totale Reflexion ein.

§ 198. Helligkeit und Farbe des Himmels, Morgen- und Abendrot, Dämmerung.

Hätte die Erde keine Atmosphäre (oder würde diese gar kein Licht reflektieren, diffundieren und absorbieren), so müßte, auch wenn die Sonne über dem Horizonte ist, der Beobachter sogleich neben der hellen Sonnenscheibe sein übriges Gesichtsfeld schwarz (nämlich in seinem Augenschwarz, psych. Anh., Nr. 44) sehen — so wie wir die Sterne bei Nacht sehen, während sie sonst durch den Kontrast gegen das grelle Sonnenlicht unbemerkt werden.

Das helle **Blau** des Tageshimmels (und das Schwarzblau des Nachthimmels) rühren von unregelmäßig reflektiertem (kürzer: diffundiertem) Lichte der Sonne (bzw. der Sterne) her.

Warum die Farbe des Himmels gerade die blaue ist, hat man auf verschiedene Arten zu erklären versucht. So hatte EULER angenommen, die Luft sei in derselben Weise blau wie ein blaues Glas (oder wie Wasser in hinreichend dicken Schichten): diese Hypothese schließt sich aber dadurch aus, daß Sonne, Mond und Sterne bläulich erscheinen müßten (wie z. B. weißes Papier durch blaues Glas betrachtet). Eine andere Hypothese nahm Beugungserscheinungen an. — Die einfachste Erklärung ist die von Lord RAYLEIGH, wonach die blauen und violetten Strahlen als die kurzwelligsten der diffusen Reflexion am meisten

unterworfen sind und also in dem uns von der Luft zugestrahnten Sonnenlichte überwiegen müssen. — Für diese Hypothese spricht auch, daß das Himmelslicht wie alles diffuse reflektierte Licht polarisiert ist (mit Ausnahme dreier „neutraler“ Stellen am Himmel in bestimmten Winkelabständen von der Sonne).

Im großen wird aus der verschiedenen Diffusion und Absorption lang- und kurzwelliger Strahlen auch erklärlich, warum die klare Luft in den der Erde nächsten Schichten in so hohem Maße diatherman ist: da die diffundierende Wirkung der Luft in den obersten Schichten beginnt, so sind die Strahlen, die bis an den Boden des Luftmeeres gelangen, fast aller derjenigen Bestandteile schon beraubt, die ihnen die Luft entziehen kann (sowie z. B. Sonnenstrahlen, die durch blaues Glas gegangen sind, beim Durchgang durch weiteres gleichfarbiges Glas nur mehr sehr wenig geschwächt werden).

Morgen- und Abendrot und die gelbe bis rote Färbung der dem Horizonte nahestehenden Sonne selbst erklären sich daraus, daß die Luft, namentlich die an Dunst und Staub reichere der tieferen Schichten, weniger von den lang- als den kurzwelligen Strahlen absorbiert.

Hieraus erklärt sich unter anderem, warum für Leuchttürme Petroleumlicht (neuestens Bremerlicht) dem bläulichweißen elektrischen Bogenlichte vorgezogen wird: die gelblichen Strahlen bleiben auf weitere Entfernungen sichtbar als die anfänglich helleren des an kurzwelligen reichen Bogenlichtes.

Schon vor Beginn des Morgenrotes und nach Aufhören des Abendrotes herrscht noch **Dämmerung**, nämlich solange die Sonne höchstens 16 bis 18° unter dem Horizonte steht und durch irdische Strahlenbrechung noch höhere Schichten des Luftmeeres für uns beleuchtet erscheinen.

Je nachdem die Tagesbahn der Sonne große Winkel wie in den Tropen oder kleine wie in den Polargegenden mit dem Horizonte einschließt, dauert die Dämmerung kurz oder lang. Schon in unseren Breiten ist in klaren Hochsommernächten selbst um Mitternacht noch ein Lichtschein in der Nordgegend zu bemerken. Mitternachtssonne am Polarkreis. Auch die halbjährige Nacht an den Polen wird um mehrere Tage abgekürzt, da die Sonne infolge der astronomischen Strahlenbrechung schon über dem Horizonte zu sein scheint, wenn sie in Wirklichkeit noch unter dem Horizonte ist. Auch geht dem Erscheinen der Sonne eine mehrwöchentliche Dämmerung vorher.

§ 199. Höfe und Ringe um Mond und Sonne. Regenbogen.

Nur bei ganz klarer Luft erstreckt sich das tiefe Blau des Nachthimmels merklich gleichartig bis ganz nahe an die leuchtende Mondscheibe heran; viel häufiger zeigt sich der Mond von einem weißlichen Scheine umgeben, welcher von kondensiertem Wasserdunst herrührt. Der Volksmund sagt dann: „Der Mond hat einen Hof“, und man deutet ihn bei größerer Stärke und bestimmtem Aussehen mit Recht als Vorzeichen schlechten Wetters. — Die Meteorologen unterscheiden von diesem **Lichtschein**, der vom Mond weg allmählich schwächer wird, die eigentlichen **Höfe** (Fig. 705 a. f. S.), nämlich Kreise (oder bei ungleicher Bewölkung nur Teile von solchen), in deren Mitte der Mond steht und die stets außen rot gesäumt sind. — Gerade umgekehrt ist die Färbung bei den **Ringen** (*Halos*), die

innen rot und außen bläulich sind; sie stellen Maxima der Lichtstärke in gewissen Bogenabständen vom Monde dar, nämlich von 22° , 45° , 90° . Überdies treten mehr oder minder deutlich manchmal an den Enden des durch den Mond gelegten

Fig. 705.



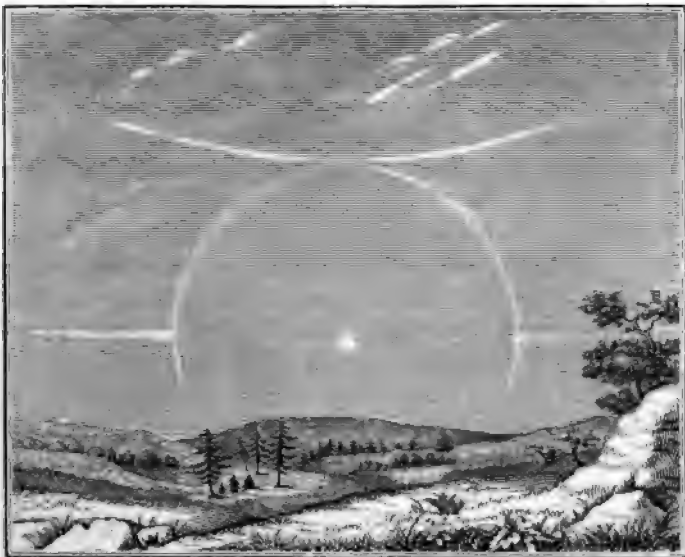
wagerechten (auch lotrechten) Durchmessers dieser Ringe Anschwellungen von größerer Lichtintensität auf (bei besonders günstiger Entwicklung der Erscheinung als **Nebenmonde** bezeichnet), an welche sich dann noch Lichtbogen, die gegen den Mond konkav sind, anschließen können.

Alle diese Erscheinungen treten in gleichen Winkelabständen auch um die Sonne herum auf, wo sie wegen der größeren Lichtstärke noch intensiver sind (Fig. 706) und nur deshalb häufiger übersehen werden, da man selten gegen die Sonne zu blicken pflegt.

Zur Erklärung zunächst des Lichtscheines ohne Maxima haben wir uns vorzustellen, daß die vom Monde her parallel einfallenden Lichtstrahlen an den Dunsteilchen abgelenkt werden (worauf im allgemeinen Reflexion, Diffusion, Brechung und Beugung beteiligt sein werden). Je ein Teilchen sendet dabei am meisten Licht nach der ursprünglichen Richtung der Strahlen aus und von da aus mit wachsendem Winkel allmählich immer weniger Licht. Trifft dann einer dieser Strahlen das Auge O (Fig. 707a), so sieht dieses in gleichem Winkelabstand den Himmel neben dem Monde in entsprechender Helligkeit. Bei überall gleich-

mäßiger Trübung der Luft tragen also alle Teilchen auf den Kegelflächen mit dem Scheitel O zum Lichtschein bei.

Fig. 706.



Um ferner die Lichtmaxima der Höfe und Ringe zu erklären, müssen wir annehmen, daß von den das Licht zerstreuen Teilchen nach bestimmten Richtungen Lichtstrahlen in dichterem Scharung (Fig. 707b) weggehen als nach den übrigen. Diese Bedingung

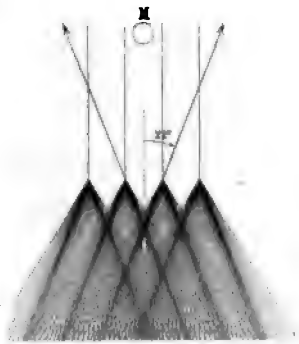
ist wirklich vor allem dann erfüllt, wenn jene Teilchen Eiskristalle sind; wie denn auch die Höfe meistens in Cirruswolken auftreten. Da sich diese Kristalle auf regelmäßige sechsseitige Prismen zurückführen lassen, so schließt eine Seitenfläche mit der zweitnächstfolgenden einen brechenden Winkel von 60° ein, welchem Winkel für den Brechungsindex des Eises ein Minimum der Ablenkung von 22° entspricht. Dabei werden

zwar die Kristalle alle erdenklichen Lagen gegen Mond und Auge haben, und daher wird von den meisten das dichtest weggehende Strahlenbüschel nicht ins Auge gelangen; wohl aber z. B. von Kristallen mit wagerechter Längsachse unter und über der Mondscheibe, desgleichen rechts und links von ihr bei vertikaler Achse. Allgemein werden also wieder alle diejenigen Eiskristalle wirksam sein, welche in einer Kegelfläche liegen, deren Scheitel das Auge ist; Kegellachse ist die vom Auge zum Mond gezogene

Fig. 707 a.



Fig. 707 b.



Gerade, der halbe Öffnungswinkel (zwischen Achse und je einer Seitenlinie) beträgt 22° ; alle Längsachsen der Kristalle liegen normal zur Kegelachse.

Auch für den großen Hof und für die selteneren Begleiterscheinungen (Nebensonnen u. dergl.) hat sich ähnlich die alle Größenverhältnisse wiedergebende Erklärung aus den optischen Gesetzen ableiten lassen. — Die im vorigen nur nach den allgemeinsten Zügen gegebene Beschreibung und Erklärung wird im folgenden noch etwas näher ausgeführt für die prachtvollste dieser Erscheinungen, den

Regenbogen. Zur Beschreibung: Wendet man einem Regenbogen das Gesicht zu, so hat man die Sonne im Rücken, d. h. der Winkelabstand des Regenbogens von der Sonne ist größer als 90° (während er bei den Höfen und Ringen kleiner als 90° war). Bei günstiger Stellung des Beschauers, z. B. gegenüber einem zerstäubenden Wasserfalle, Springbrunnen, kann man sehen, daß der Schatten des Kopfes in der Mitte des Bogens liegt, daß also der Mittelpunkt eines Regenbogens der „Gegenpunkt“ der Sonne ist. Von diesem Punkte aus gemessen hat der Hauptregenbogen bis zum inneren violetten Rande einen Halbmesser von etwa 40° , bis zum äußeren roten Rande etwa 42° . Hierauf folgt ein häufig auffallend dunkler Streifen, der außen durch den Nebenregenbogen begrenzt ist, dessen innerer roter Saum etwa 51° , dessen äußerer violetter Rand 54° Öffnung hat. — Der Regenbogen erscheint überhaupt

Fig. 708.

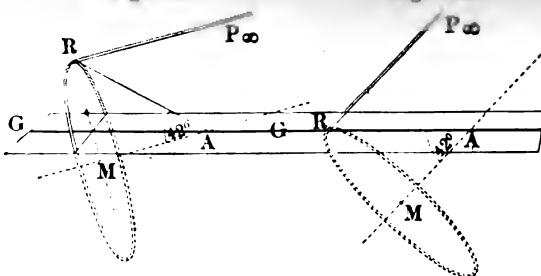


Fig. 709.

rund, weil an ihm diejenigen Tropfen beteiligt sind, welche auf einer Kegelfläche liegen, deren Scheitel das Auge, deren Achse die vom Auge in der Richtung der Sonnenstrahlen gezogene Gerade ist und deren Öff-

nungswinkel für verschiedene Farben die angegebenen Größen haben. In erster Annäherung zeigen die Regenbogen die Farbenfolge des Spektrums (daher oft „Regenbogenfarben“ = Spektralfarben). — Größe des über dem Horizonte erscheinenden Bogens je nach dem Sonnenstand; vergl. Figg. 708 und 709.

Genaue Beschreibung (nach PERNTER): „Keineswegs sieht ein Regenbogen aus wie der andere. In den häufigsten Fällen sieht man kein Blau, in anderen findet sich kein eigentliches reines Rot; von den Farbenabstufungen fehlt dunkelblau fast immer. Desgleichen ist die Breite der einzelnen Farben bei verschiedenen Regenbogen sehr verschieden. Einmal ist das Gelb von fast verschwindender Breite und Grün und Violett sehr breit, ein andermal ist Gelb und Grün sehr breit und Rot und Violett sehr schmal, hier und da ist Blau kaum zu sehen, dann ist es wieder fast dominierend. Auch in Bezug auf die Ver-

theilung der Intensität bemerkt man einen bedeutenden Wechsel. Besonders auffallend ist es dann, zu sehen, daß wiederholt, ja häufig, die hellleuchtendste Stelle auf den Anfang des Violetts fällt. Eine weitere Veränderlichkeit, die dem Auge sehr deutlich auffällt, zeigt der Regenbogen in seiner Breite, indem nicht nur die Breite der einzelnen Farben, sondern die des ganzen Regenbogens bald größer, bald kleiner sich zeigt. Es tritt dann ferne eine Erscheinung auf, welche beim Regenbogen sehr aufgefallen ist; es sind dies die sekundären Bogen, welche besonders häufig an den Hauptregenbogen sich vom Violett ab nach innen anschließen, aber auch beim Nebenregenbogen, auch wieder vom Violett ab, nach außen, zuweilen zu sehen sind. Die Erscheinung dieser sekundären Bogen ist ebenfalls sehr veränderlich. Man sieht bald deren mehrere — es sind schon sechs beobachtet worden —, bald nur einen und dann wieder keinen. Ihre Farben sind ebenfalls sehr veränderlich; am häufigsten bestehen dieselben nur aus Grün und Rosa, es kommt aber auch vor, daß man Gelb, Grün und Purpur oder gar Gelb, Grün, Blau und Rosa zu sehen bekommt. Man erinnert sich bei ihrer Erscheinung unwillkürlich an die zweiten und dritten Ringe bei den kleinen Höfen. Doch tritt beim Regenbogen zuweilen der Fall auf, daß zwischen dem Regenbogen und den sekundären Bogen ein farbloser dunkler Zwischenraum sich befindet. Die Erscheinung der sekundären Bogen ist nichts weniger als eine seltene Zufälligkeit, sondern sie tritt beim Hauptregenbogen so häufig auf, daß man es als Zufälligkeit anzusehen hat, wenn sie fehlen. — Endlich erscheint auch zuweilen der weiße Regenbogen. Man sieht denselben entweder bei Regen im Mondschein (Mondregenbogen) oder auf von der Sonne beschienenen Nebeln. Der Mondregenbogen erscheint übrigens unter günstigen Umständen auch schwach gefärbt. Im zweiten Falle (bei Nebeln) haben wir es mit einem echten weißen Regenbogen zu tun; man sollte ihn eigentlich Nebelbogen nennen. Er wird auf Bergen oder an den Küsten der Meere, besonders der nördlichen, öfters gesehen. Man sieht dann einen glänzenden weißen Bogen, welcher außen gelblichen oder orangeroten, innen bläulichen bis violetten Hauch als Begrenzung zeigt. Zuweilen bemerkt man, durch einen dunklen Zwischenraum getrennt, einen sekundären Bogen, in welchem aber dann die Farbenfolge umgekehrt ist, indem sich an den dunklen Zwischenraum ein bläulicher Saum anschließt und das zweite Rot den sekundären Bogen nach innen abschließt.“ —

Die Erklärung der Regenbogen ergibt sich, indem wir zunächst aus den Gesetzen der Reflexion, Brechung und Dispersion den Gang der Sonnenstrahlen in einem Regentropfen (den wir hierbei zuerst als eine Wasserkugel von nicht zu kleinem Halbmesser annehmen) durch Rechnung ableiten und die Ergebnisse dieser Rechnung mit den wirklich beobachteten Erscheinungen vergleichen. Erst insoweit die Rechnung und die Beobachtung nicht übereinstimmt, werden diese Abweichungen durch Rücksicht auf die Beugungserscheinungen (namentlich bei kleinen Tropfen) zu erklären sein. Die Erklärung gliedert sich in folgende Schritte 1—5:

- ### 1. Ist SA (Fig. 710)

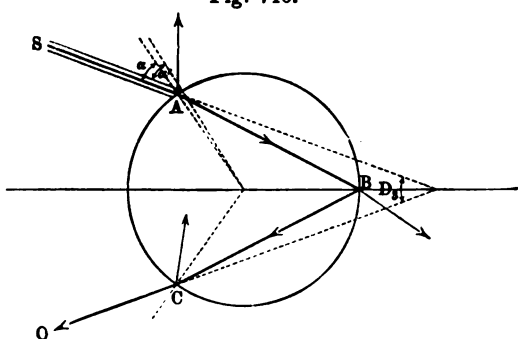


Fig. 710.

die Richtung des auf den Tropfen unter dem Einfallswinkel α fallenden Strahles, so wird er bei A gespalten in einen reflektierten und einen gebrochenen Strahl; der gebrochene Strahl wird bei B wieder gespalten, sein reflektierter Anteil bei C abermals u. s. f. Jeder der so aus dem Tropfen austretenden Anteile schließt mit dem ursprünglichen Strahle einen Ablenkungswinkel D ein, welcher von dem Winkel α , dem Brechungsquotienten n und der Anzahl der Spaltungen abhängig ist.

2. Der Hauptregenbogen entsteht durch dreimal gespaltenen Strahlen (gebrochen bei A , reflektiert bei B , gebrochen nach CO ;

1.A 227. für diesen Strahl ist $D_1 = 4\beta - 2\alpha$; LA 227).

3. Denken wir uns für sämtliche von der Sonne auf die Oberfläche des Tropfens fallenden parallelen und unter verschiedenen Einfallswinkeln α eindringenden Strahlen die Winkel D konstruiert oder berechnet (DESCARTES, 1636), so ergibt sich die dichteste Scharung beim Austritte für diejenigen Strahlen, welche bei einem Punkte A_0 eingetreten waren, für dessen Einfallswinkel α_0 die

1.A 227. Maximumbedingung (LA 227) $\sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$ erfüllt ist. Z. B. Für $n = \frac{4}{3}$,

also für die orangegelben Strahlen zwischen den Fraunhoferschen Linien C und D , ist $\sin \alpha = \sqrt{\frac{20}{27}}$, $\alpha = 59^\circ 23' 29''$; daher erscheinen nur die Tropfen, welche diesen Winkel von 42° mit der Sehachse des Bogens einschließen, mit orangegelb. Für die Farben, denen $n \approx \frac{4}{3}$ entspricht, ist $\alpha \approx 42^\circ$.

4. Der Nebenregenbogen entsteht durch viermal gespaltenen Strahlen (gebrochen, reflektiert, reflektiert, gebrochen). Infolgedessen ist er lichtschwächer als der Hauptregenbogen. — Dafs der Kreisring zwischen Haupt- und Nebenregenbogen dunkler erscheint als die Regenwand innerhalb des Haupt- und außerhalb des Nebenregenbogens, erklärt sich daraus, dafs die Strahlen des Hauptregenbogens ein Maximum, die des Nebenregenbogens ein Minimum der Ablenkung erfahren haben und wir daher von jenem Streifen gar kein Licht erhalten, das durch Brechung in die Tropfen übergegangen war, sondern nur Licht, das an deren Oberfläche reflektiert worden ist, wogegen die Tropfen außerhalb der beiden Bogen uns beiderlei Licht zusenden.

5. Indem die aus 1 und 2 durch Deduktion gefundenen Gröfsen und Farbenfolgen zwar in erster Annäherung dem wirklichen Anblick des Regenbogens entsprechen, aber doch die feineren Unterschiede obiger Beschreibung noch unerklärt lassen, zog AIRY (1836) zur Erklärung dieser restlichen Erscheinungen die Interferenzen des gebeugten Lichtes heran, welche zwischen den dichtest gescharten austretenden Strahlen stattfinden. In der Tat erinnern die sekundären Bogen mit ihrem Wechsel von Rosa und Grün an die Farben, welche z. B. feinbestäubtes Glas zeigt. Die weissen Bogen erklären sich daraus, dafs sie bei den verhältnismäfsig kleinsten Regentröpfchen auftreten, wobei Licht aller Wellenlängen zur Interferenz kommt. Damit solche Beugungserscheinungen nicht merklich eintreten, also der Regenbogen der DESCARTESschen Theorie entsprechen müßten, wie die AIRYSche Theorie zeigt, die Tropfen bis mindestens 4 mm Durchmesser haben; solche Tropfen aber behalten während des Fallens kaum mehr die

1.A 228. Kugelgestalt ungestört bei (LA 228).

Die beschriebenen Erscheinungen lassen sich auch künstlich nachahmen. So hatte schon ANTONIO DE DOMINIS (1611) bemerkt, daß eine mit Wasser gefüllte Glaskugel in bestimmten Stellungen zum Auge die „Regenbogenfarben“ zeigte, und daraus die Kreisform des Regenbogens abgeleitet. (Auch ARISTOTELES hatte diese Seite der Erscheinung schon richtig erklärt.) Stellt man eine solche Kugel in den durch den Fensterladen in das verdunkelte Zimmer eintretenden Lichtzylinder, so zeigt sich an dem Fensterladen ein farbiger Kreis, und zwar ebenfalls rot außen, violett innen; wodurch unterscheidet sich gleichwohl diese objektive Erscheinung von dem nur subjektiv wahrnehmbaren Regenbogen? Werden an die Stelle des Prismas eines Spektralapparates zylindrische Glasstäbe, bezw. Glasfäden von 4 mm bis 0,05 mm Dicke gestellt, so lassen sich an ihnen sowohl die durch die Descartessche Brechungs-, wie die durch die Airysche Beugungstheorie geforderten Farbenerscheinungen beobachten.

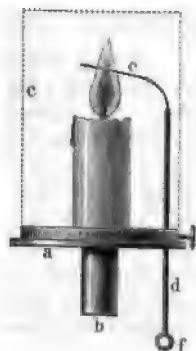
D. Elektrische Erscheinungen der Atmosphäre.

Geschichtliches. Die vielfach verbreitete Meinung, als sei FRANKLIN der erste gewesen, der Blitz und Donner als dem elektrischen Funken und dem begleitenden Geräusch ähnlich erkannt habe, ist insofern nicht ganz zutreffend, als vielmehr schon Dr. WALL, der 1698 an einem großen geriebenen Harzzylinder die ersten lebhaften elektrischen Funken beobachtete, sie sogleich mit Blitz und Donner verglich. Doch war hiermit nicht etwa die elektrische Natur der Gewitter erkannt, denn Blitz und Donner waren seit ARISTOTELES für Explosionserscheinungen gehalten worden, die von der Entzündung brennbarer Dünste (nach späteren Meinungen von „Donnerkeilen“, von fallenden Meteorsteinen) herrühren sollten. Erst 1746 verglich WINKLER in klarer Weise die Gewittererscheinungen mit den kräftigen Funken der soeben erfundenen Leydener Flasche. FRANKLIN machte 1749 den Vorschlag zu den Versuchen mit Drachen an leitenden, isoliert gehaltenen Schnüren zur Prüfung des elektrischen Zustandes der Atmosphäre, und er führte diese Versuche wirklich aus (19. Oktober 1752, nachdem es im selben Jahr von einigen anderen geschehen war). Bei der Wiederholung von FRANKLINS Drachenversuchen fand RICHMANN (der Entdecker des Gesetzes über Mischtemperaturen, § 72) seinen Tod. — Die Einrichtung der Blitzableiter, von FRANKLIN 1765 erfunden, in Europa zuerst ausgeführt vom Pfarrer DIVISCH in Mähren, war die praktische Frucht jener Versuche; doch scheint schon im Altertum die schützende Wirkung von Obeliskien, hohen Bäumen . . . als Tatsache, wenn auch ohne Einsicht in die Ursachen, bekannt gewesen zu sein.

LEMONNIER entdeckte (1752), daß nicht nur bei herannahenden Gewittern, sondern auch bei wolkenlosem Himmel durch die Drachen elektrische Entladungen nachgewiesen werden können, und er stellte regelmäßige Beobachtungen hierüber an. VOLTA befestigte auf einer hohen Stange eine Kerze, von deren Flamme ein isolierter Draht zu einem Elektroskop führte, dessen Wandung zur Erde abgeleitet war (Vorbild zu FRANZ EXNERS Versuch; folgender §).

Gegenwärtig bilden die Grundlage für die Erforschung der elektrischen Zustände der Atmosphäre, kurz „Luftelektrizität“ genannt, solche Versuche bei

Fig. 711.



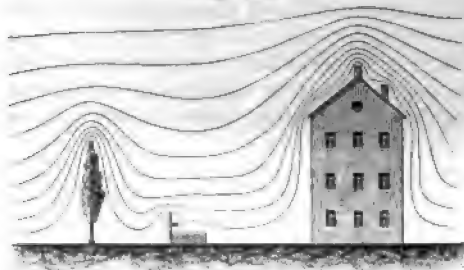
klarem ruhigen Wetter („Schönwetterelektrizität“), wogegen die Gewitter als Störungen des normalen Zustandes aufzufassen sind.

§ 200. Elektrische Potentiale der Erde und ihrer Atmosphäre.

FRANZ EXNERS Versuche: Wird die Flamme des VOLTaschen Versuches in verschiedene Abstände von der Erdoberfläche gebracht und an einem nach Volt geeichten Elektrometer (Fig. 131, S. 409) die Potentialdifferenz zwischen dem Ort der Flamme und des Elektroskops (das seinerseits das Potential der Erde hat) abgelesen, so ergibt sich das Potentialgefälle per Meter Höhendifferenz als sehr abhängig von der geographischen Breite, von der Jahres- und Tageszeit (jährlicher, täglicher Gang), dem Gehalt an Feuchtigkeit und Staub und (nach ELSTER und GEITEL) von den ultravioletten Strahlen der Sonne.

So fand EXNER in Ceylon als Jahresmittel 58 Volt per Meter, ELSTER und GEITEL fanden in Wolfenbüttel 220 Volt per Meter, und zwar als Minimum 102 im

Fig. 712.



Juni bis zu einem Maximum 470 im Dezember. Als allgemeines Mittel sind etwa 130 Volt per Meter bei schönem Wetter anzunehmen, und zwar so, daß den der Erde näheren Punkte die kleinere (vergleichsweise negative) dem um 1 m höher gelegenen Punkte ein um 130 Volt höheres (positives) Potential entspricht. Hiernach wären an der als eben gedachten Erde die Niveaulinien wagrechte Ebenen, an der als kugelförmig gedachten Erde konzentrische Kugelflächen. Schon die kleineren Unebenheiten des Bodens und um so mehr Gebäude (Häuser, Türme . . .), Berge und Täler bewirken mannigfache Deformationen dieser Niveaulinien (Fig. 712); über eine völlige Veränderung der normalen Ladungsverhältnisse insbesondere durch Gewitterwolken im folgenden § 201.

Beträgt das Potentialgefälle der „Schönwetterelektrizität“ nächst der Oberfläche der als leitende Kugel angenommenen Erde zu einer bestimmten Zeit 1410 Volt per Meter, so ergibt sich daraus eine negative Ladung der Erdoberfläche mit einem Oberflächenpotential $V = 9$ Milliarden Volt (LA 229). Dieser Berechnung liegt aber die Annahme zu Grunde, daß eine solche negative Ladung der Erde der einzige Sitz elektrischer Kräfte an und über der Erdoberfläche sei. Es müßten dann die Niveaulinien für Potentiale gleicher Differenz (wie bei je einem Punkte oder je einer homogenen Kugelschale) nach oben immer weiter auseinanderweichen, d. h. das Potentialgefälle gegen oben immer kleiner werden; doch wäre diese Abnahme des Gefälles nur eine sehr geringe wegen der Kleinheit der Höhenunterschiede im Vergleich zum Erdradius. Statt dessen aber haben neueste Ballonfahrten das Potentialgefälle in den höchsten Schichten sehr als nahezu Null erwiesen. Dies würde es wahrscheinlich machen, daß die Atmosphäre selbst eine positive Ladung besitze, die gleich ist der sicher verhal-

enen negativen Ladung der Erde (die aber in diesem Falle nicht mehr den oben berechneten ungeheuren Wert hätte).

Angesichts dieser bisherigen Unsicherheiten in der Beschreibung des tatsächlichen elektrischen Zustandes des Erdbodens und der Atmosphäre ist um so weniger schon eine sichere Erklärung möglich, woher diese Ladungen kommen. Nach ELSTER und GERTEL ist hieran wesentlich einerseits die ultraviolette Strahlung beteiligt, die nach Versuchen die negativ geladenen Bestandteile des Erdbodens zu entladen vermag und so den „täglichen Gang der Schönwetterelektricität“ bedingt. Andererseits ist es nach der neuesten Ionentheorie wahrscheinlich die ionisierte Luft (d. i. solche, die Sauerstoff- und Stickstoffatome, die keinen geschlossenen Sauerstoff- und Stickstoffmolekülen angehören und als Träger freier elektrischer Ladungen sich bewegen, § 154, S. 502), die auch die räumliche Trennung der luftelektrischen Ladungen erklärlich machen würde. — Diese Ionenhypothese wird dann noch weiter ins Einzelne ausgebildet durch die allerneueste Elektronentheorie (§ 154, S. 508).

§ 201. Gewitter, Blitzableiter. — Polarlichter.

Zwei Gruppen von Erscheinungen sind es, die zusammen als Gewitter bezeichnet werden: 1. Die starke Wolken- und Niederschlagsbildung, oft von heftigen Stürmen begleitet. 2. Die elektrischen Entladungen unter Blitz und Donner.

Ihrer Entstehung nach unterscheidet man Wärmegewitter (die nach BEZOLD Wirbel mit horizontaler Achse sind) und Wirbelgewitter (Wirbel mit vertikaler Achse vergl. § 191).

Zu dieser Unterscheidung führte namentlich die synoptische Darstellung des Fortschreitens ganzer „Gewitterfronten“ über größere Länderteile. Die Isobaren zeigen dann oft V-förmige Ausbuchtungen („Gewittersäcke“, Fig. 713). —

Ferner zeigen die Barogramme selbstregistrierender Apparate oft ein als „Gewitternase“ bezeichnetes plötzliches Ansteigen (danach auch oft wieder sprunghaftes Sinken) des Luftdruckes bei Eintritt des Gewitters, so in Fig. 714 (a. f. S.). Namentlich letztere Erscheinung steht damit im Einklange, daß eine starke Depression sehr rasches Einstürmen und Aufsteigen von Luftströmen und hiermit die mächtige

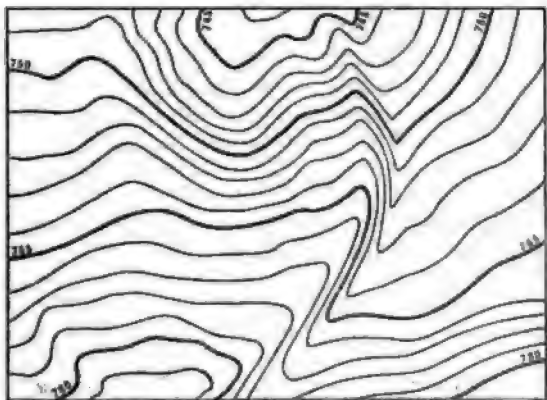


Fig. 713. Böenlinien in den Isobaren vom 27. August 1890.

Wolkenbildung zu ihrer nächsten Veranlassung hat. — Speziell bei Wärmegewittern, wie wir sie nach drückender Hitze erwarten, wird der absolute Feuchtigkeitsgehalt der Luft ein sehr großer sein, was die folgenden starken Niederschläge begreiflich macht. In der Erklärung weiter zurückgehend finden wir

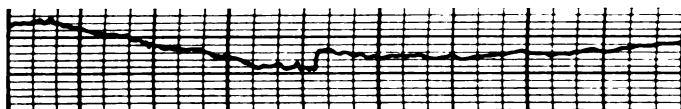


Fig. 714. Barogramm zur Zeit des schweren Hagelwetters in Wien am 7. Juni

Sommer im Binnenlande erfüllt zu sein. — Die Wirbelge-
 „begleiten die zentralen Teile tieferer wohl ausgebildeter Depress-
 bei unruhigem, trübem Wetter vorzugsweise dort auf, wo die
 zu besonders tiefen entwickeln, namentlich auf dem Meere bis an

Für die Erklärung der elektrischen Erscheinun-
 witter bildet den Ausgangspunkt die Beobachtung, daß d-
 Anordnung der luftelektrischen Niveauflächen des he-
 durch die aufsteigenden Ströme der feuchten Luft und
 densierenden Wasserdämpfe in hohem Grade gestört ist
 durchschnittliche Gefälle von etwa 130 Volt per Meter är
 Nahen von Gewitterwolken bis 7000 Volt per Meter und
 EXNER). — Die Gewitterwolken weisen meistens (nic
 gative Ladung auf; das aus diesen Wolken an die
 Wasser zeigt bald positive, bald negative Ladung.

Für die weitere Erklärung, woher die großen Ladungsgra-
 mengen bei Gewittern kommen, treten zu den Unsicherheiten der
 die Schönwetterelektrizität noch die weiteren Fragen: Haben
 geladenen Erdboden aufsteigenden Wasserdämpfe die Fähigkeit,
 durch Konvektion bis zur Wolkenbildung mit sich zu nehmen (
 Oder wirkt die negativ geladene Erde durch Influenz auf
 fallenden Wassertropfen, so daß die an deren Oberseite wegstär-
 Tröpfchen selbst freie negative Ladung annehmen (so nach ELSTER
 Leichter zu erklären als die Herkunft der Ladungsmengen schie-
 Ladungsgrade: Denn da die großen Tropfen bei Gewitterregen je

Die häufigste Form der Blitze ist die eines großen vielfach verästelten elektrischen Funkens (nicht mit den herkömmlich angenommenen scharfen Ecken); Fadenblitze, Fig. 715; Kugelblitze. — Wetterleuchten. — Donner (vgl. Fig. 335, § 94).

Blitzableiter vermögen bis zu gewissen Potenzialdifferenzen dem Einschlagen vorzubeugen, indem sie das plötzliche Ausgleichen zwischen entgegengesetzten Ladungen von Haus und Wolke ein allmähliches durch „Spitzenwirkung“ (§ 133) stattfindet.

Insoweit also ist die Bezeichnung „Auffangstange“ nicht ganz zutreffend. Kommt es bei allzu rasch anwachsender Potenzialdifferenz doch zum Einschlagen, so findet der Ausgleich zwischen Wolke und Erde in der verhältnismäßig gut leitenden Fadenverbindung, nicht in den minder gut leitenden, entzündeten Teilen des Hauses selbst statt. — Man pflegte früher bei der Schätzung des Wirkungsbereiches eines Blitzableiters (dass den Raum eines Kegels schütze, dessen Basisradius etwa die Doppelte der Höhe der Spitze über dem Erdboden sei) sich auf elektrostatische Betrachtungen der ruhenden Niveaus zu beschränken. Doch weiß man jetzt aus theoretischen Gründen und direkten Erfahrungen, dass es sich bei den Blitzen meistens um rasche oszillierende Entladungen handelt (woraus man z. B. auch das Aussehen der Fadenblitze erklärt), für die die Gesetze von Wechselströmen hoher Frequenz anzuwenden sind. Die Stromstärke wurde dabei bis auf 32 000 Amp. geschätzt.



Fig. 715. Fadenblitz.

Eine besondere Gruppe von Erscheinungen der atmosphärischen Elektrizität bilden die **Polarlichter** (Nordlicht in den nördlichen Breiten; auch noch in mittleren Breiten, z. B. von Wien, Rom, wird manchmal ein feuerscheinartiges Licht nahe dem Nordhorizonte bemerkt).

In seiner vollen Entwicklung zeigt das Nordlicht ein dunkles Kreissegment am Horizont, über das sich teils ruhende, teils rasch bewegte Bögen erheben; ferner Vorhangartige Lichtgebilde u. dergl., deren Höhe über dem Erdboden zu 50 bis 60 km (ausnahmsweise 5 km) gemessen wurde.

Die Polarlichter stehen in keinem Zusammenhange mit elektrischen Gewittern im gewöhnlichen Sinne, wohl aber mit den erdmagnetischen Gewittern (§ 146). Denfalls gehören sie unter die Erscheinungen der Elektrolumineszenz; nach neuerer Hypothese sind sie ein Fall von Kathodenstrahlung, die die hohen, sehr verdünnten Schichten der Atmosphäre zur Lumineszenz erregt.

§ 202. Zusammenfassung. — Wetterprognose.

Überblicken wir die bisher entwickelten theoretischen Gesetze und Regeln der Physik der Atmosphäre in der besonderen praktischen Absicht der **Wetterprognose**, so stellen sich als die gegenwärtig wichtigsten Behelfe einrichten die folgenden heraus:

Ostwind (als vom asiatischen Kontinent herkommend, wo vorhanden und jedenfalls nicht viel neues aufgenommen wurde) he dem Westwind das geradezu als „Westwetter“ bezeichnete regnerische, windige. Damit aber solche Schlüsse aus dem An karten geeignete hohe Wahrscheinlichkeit haben, ist Rücksicht zu

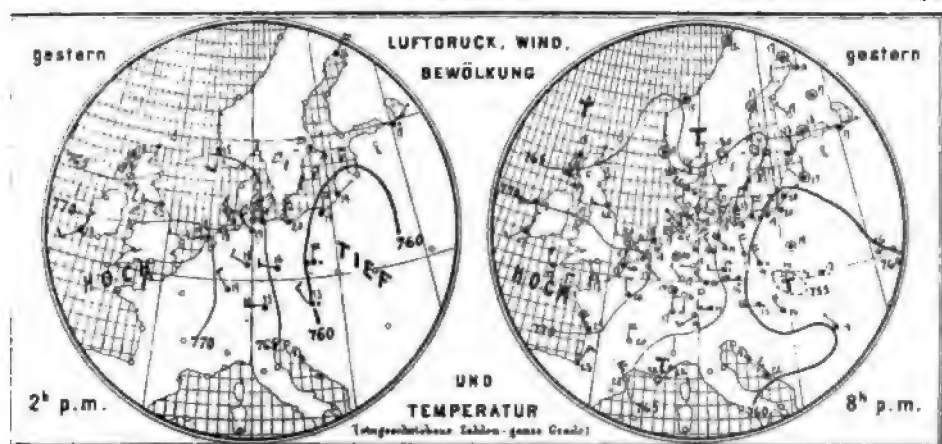
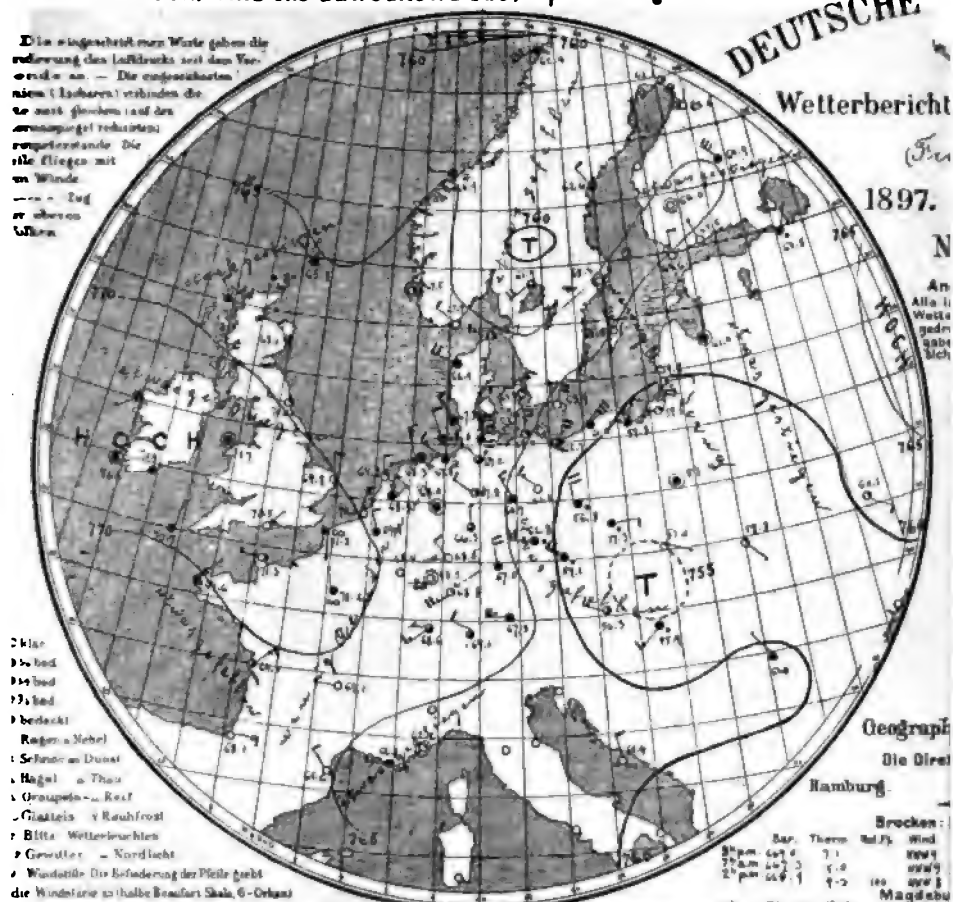
2. die Zugstraßen der Minima. Immerhin gibt es deren auf etwa 24 Stunden mit einiger Wahrscheinlichkeit voraussel bestimmtes Minimum einen bestimmten Weg einschlagen werde. ist die Zugrichtung West—Ost und die durchschnittliche Geschwin 7 bis 8 m per sec doch so vorherrschend, daß man z. B. in Wie liches Wetter erwarten kann, wie es gestern am Bodensee geherr

3. Jedenfalls kann aus einer vereinzelter Barometer kein Schlufs auf das bevorstehende Wetter gezogen und insofer nicht in der noch fast allgemein vermeinten Weise als „Wetter werden. Denn der an einem Ort zu einer Zeit herrschende Druc eine Teilbedingung aus dem ganzen Komplex von vorwiegend aeron aerothermischen Erscheinungen, die zusammen das „Wetter“ bil auf längeres und starkes Fallen des Barometers brauchen nicht 1 folgen, so u. a., falls jenes nicht dem Vorüberziehen eines wirklich sondern nur einer Art Furche tiefen Druckes entsprach; ferner noch tieferer, im Osten hoher Barometerstand herrscht. Ebenso : hohem Barometerstand anhaltend trübes Wetter in den Niederung in mäfsiger Höhe über der Nebelschicht) entsprechen aus der in § Ursache der „Temperaturumkehr“. Überdies mag ein Minimum auch nur bis in zu geringe Höhen sich erstrecken (wie neuestens B wiederholt direkt gezeigt haben), um die typischen Folgen nach Aus allen diesen Gründen sind auch die häufig zu vernehmend „Unverlässlichkeit des Barometers“ nur die Anzeichen für das Nicht wahren und einzigen Aufgabe, der Angabe des Luftdruckes.

4. Auch zahlreiche populäre Anzeichen guten und schlechten sich als mit Teilursachen eines solchen zusammenhängend heraus. der Hühneraugen, rheumatischer Glieder u. dergl. weisen zunächst

Tafel XII.

a. LUFTDRUCK, WIND UND BEWÖLKUNG um 8, resp. 7 Uhr Morgens.

**Landregen u**

SEEWARTE.

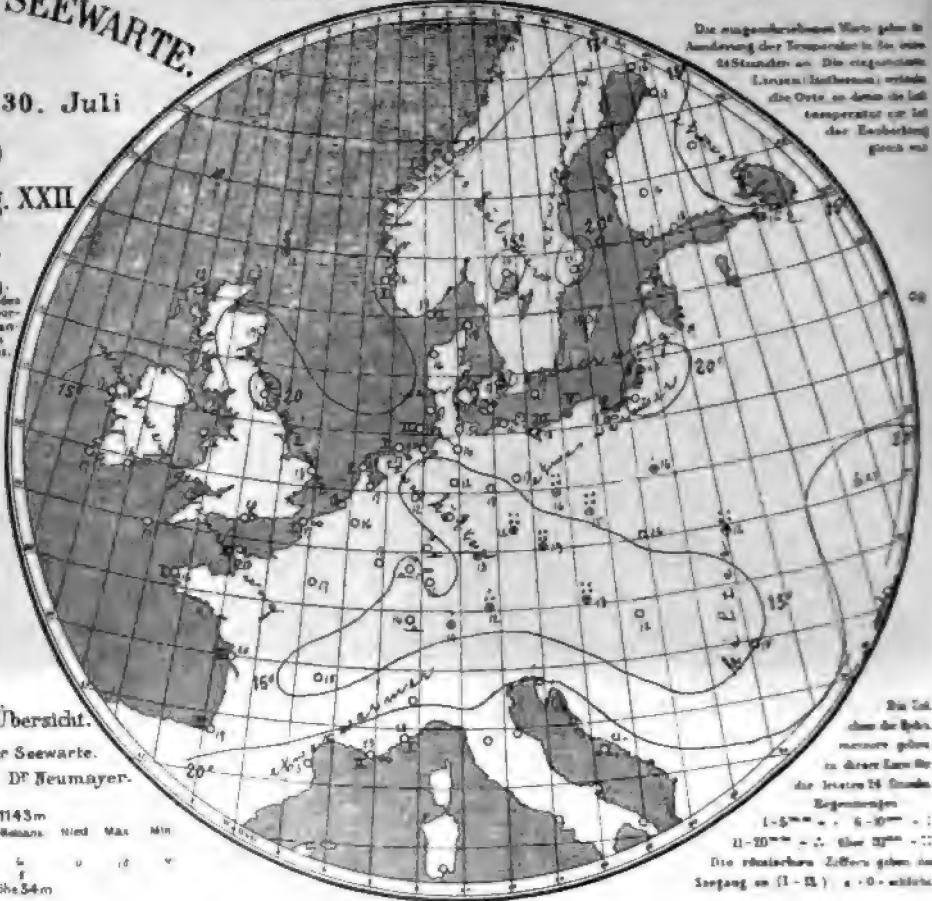
am 30. Juli

g. XXII.
1.

W. 113 m.
Höhe des
Meeres vor
dem
Ufer.

b. TEMPERATUR, NIEDERSCHLAG, SEEGANG 8, resp. 7 Uhr Morgens.

Die eingekreisten Werte geben die
Aenderung der Temperatur in den
24 Stunden an. Die eingekreisten
Werte (in Kreisen) zeigen
die Orte, an denen die Luft-
temperatur um 1°
der Seehöhe
gestiegen ist.



Übersicht.
der Seewarte.
Dr. Neumayer.

1143 m.
Höhe des
Meeres vor
dem
Ufer.

Die
Temperatur
dieser Orte
gibt die
Temperatur
an, die in
den letzten 24
Stunden
bestanden hat.
Die römischen
Ziffern geben die
Seehöhe an (1-11) 1-11 m. Höhe.

Allgemeine Übersicht der Witterung am 30. Juli, 8 (7) Uhr Morgens.

Zwischen Hochdruckgebieten über dem Inneren Rußlands und der Westhälfte des Eilands, und
der Luftdruck über dem baltischen Meer und Nordfrankreich, 110 mm übersteigend, am ge-
sten ist, liegt eine umfangreiche Depression zwischen der Ostsee und dem Schwarzen Meer.
Der schwachen, im Osten mäßigen bis starken, westlichen bis nördlichen Winde ist das
Wetter in Deutschland im Süden mehrfach heiter, sonst meist trübe, die Morgen-tempe-
raturen liegen außer im Nordosten unter der Normale; im Osten und im Süden
fiel Regen, in Chemnitz 22, Grimberg 36 Breslau 56 mm. Auch Nordsee und Ostsee starke
Kypfelle, Wind 11, See 17, Land 11 mm.

Aussichten für die Witterung des 31. Juli in

- Nordwestdeutschland Etwas kühleres Wetter mit zunehmender Bewölkung und mäßigen nördlichen
Winden, stellenweise Regen.
- Ostdeutschland Veränderliches, meist kühles Wetter mit Regenfällen und vorwiegend schwachen
Lufbewegungen.
- Süddeutschland Wie Ostdeutschland.

Abth. III. F. V. Köppen

Überschwemmung.

in Hamburg ausgegebenen Sturmwarnungen von hoher Wahrscheinlichkeit, indem diese Gegenden die Einbruchsstelle der in überwiegender Zahl von Nordwesten herkommenden Minima bilden. Dagegen können z. B. in einzelnen Gebirgstälern sich die herkömmlichen Wetterregeln geradezu umkehren, z. B. Westwind schönes Wetter anzeigen, falls er eigentlich ein durch Gebirgsvorsprünge abgelenkter Ostwind ist. — So erweist sich auch der bei manchen theoretisch Ungebildeten aus langer Erfahrung geschärfte Blick für Wetteranzeichen als an die Scholle der Heimat gebunden. Auch unter den wissenschaftlichen Regeln sind viele der z. B. von ABERCROMBY für England aufgestellten für den Kontinent schon nicht mehr anwendbar.

6. Durchschnittlich weisen die wissenschaftlichen Prognosen etwas über 80 Proz. Treffer auf gegenüber 50 Proz., die jede willkürliche, also nur zufällig eintreffende Regel für sich geltend machen kann. Dabei macht diese Prognose bisher nur Anspruch darauf, etwa 24 Stunden voraus zu gelten (wogegen es bekanntlich die unwissenschaftlichen, dafür aber um so populäreren Prognosen auf Monate, Jahre, ja nach dem noch allgemein verbreiteten Knauerschen „Hundert-jährigen Kalender“ auf Jahrhunderte hinaus wagen). Es ist also bisher eine wesentliche praktische Forderung an den „Witterungsdienst“, durch schnellste Ausarbeitung und Beförderung der Depeschen es anzustreben, daß die Prognosen noch am Abend desselben Tages an die Beteiligten (z. B. Landwirte, die ihre Arbeiten für den nächsten Tag danach einzurichten wünschen) gelangen.

Im ganzen bleibt für die gerechte Würdigung des bisher an Prognosen schon Geleisteten zu bedenken: Die physikalischen Grundgesetze (Abhängigkeit der Luftbewegungen von Druckdifferenzen und der Erdrotation, Abhängigkeit der Kondensation von Druck und Temperatur u. s. w.), durch die das Wetter notwendig und ausreichend bestimmt ist, sind uns schon jetzt wohl in allem Wesentlichen bekannt. Nur ihre Anwendung gestaltet sich infolge der zahlreichen Teilbedingungen (z. B. Abhängigkeit von der Bodengestaltung je eines Ortes und Zusammenwirken der ganzen Umgebung) sehr verwickelt. Da nun aber sowohl die Mittel der mathematischen Analyse solcher Erscheinungen, wie der empirischen Erforschung des jeweiligen tatsächlichen Zustandes der Atmosphäre an möglichst vielen Orten an und über dem Festlande und dem Meere während der jüngsten Jahrzehnte und Jahre sich in rascher Folge vermehrt haben, so ist die Hoffnung auf immer genauere Anpassung der theoretischen Meteorologie an das praktische Bedürfnis des großen Publikums berechtigt. Vorbedingung für das Verständnis des schon Geleisteten und für tätige Mitarbeit an dem noch zu Leistenden ist die Ausbreitung gediegener meteorologischer Kenntnisse und Fertigkeiten in möglichst weiten Kreisen der Gebildeten.

Aus der Chemie.

A. Vorversuche und Vorbegriffe.

In den folgenden Versuchsgruppen I, II, III, IV, V (Versuche I bis II) werden vorgeführt:

- a) einige **Grundstoffe** (Wasserstoff . . .) und **Verbindungen** (Schwefeleisen, Wässer, Säuren, Salze),
- b) die drei Haupt- **Verbindungsarten**: **Synthesen** (Verbindungen), **Analysen** (Zerlegen), **Substitutionen**.

§ 203. Gruppe I: Eisen und Schwefel.

r. Schwefel. — Chemische Synthese).

Versuch 1a: Es werden 4 g pulverisierter Schwefel (bzw. 4 g Eisenpulver) mit 1 g Eisen gemengt. Erwärmen wir die Mischung an einer Stelle, so wird es hier schwarz und gerät bei stärkerem Erwärmen ins Glühen, das nun durch die ganze Stoffmenge fortschreitet. Das Gewicht nimmt während des Vorganges weder zu noch ab (vorausgesetzt, daß nicht etwas Schwefel verbrennt oder verdampft). Wir sagen: Schwefel und Eisen haben sich miteinander **chemisch verbunden** und bilden nun die **chemische Verbindung** „Schwefeleisen“, einen schwarzgrauen, spröden Stoff.

In dem „mechanischen Gemenge“ (dem graugrünen Pulver) konnten wir mit freiem Auge oder doch mit dem Vergrößerungsglas die einzelnen Schwefel- und Eisenteilehen an der gelben, bzw. grauen Farbe, dem Metallglanz u. s. w. unterscheiden; im Schwefeleisen ist das selbst bei stärkster Vergrößerung nicht mehr möglich. Auch können wir aus dem Gemenge den Schwefel durch „Schlämmen“ mit Wasser oder Lösen in Schwefelkohlenstoff, das Eisen durch den Magnet wieder (mehr oder minder vollständig) absondern, nicht aber aus dem pulverisierten Schwefeleisen.

Den eigentlich charakteristischen Unterschied zwischen mechanischem Gemenge und chemischer Verbindung aber lehren uns erst folgende „Gegenversuche“: **Versuch 1b:** Wir mengen wieder Eisen- und Schwefelpulver in Gewichtsverhältnisse 7:4, setzen aber einmal einen Überschufs Eisen, ein andermal einen Überschufs Schwefel zu: Das Glühen tritt nun minder lebhaft oder gar nicht ein, und aus dem nach längerem Erhitzen gewonnenen Stoff läßt sich der Überschufs von Eisen, bzw. von Schwefel durch dieselben „mechanischen“ Mittel wie beide einzelne Stoffe aus dem Gemenge absondern, wogegen gerade wieder 7 G.-T. (lies: Gewichtsteile) Eisen und 4 G.-T. Schwefel zum chemischen

Verbinden gleichsam einander ausgewählt haben. — So geben Versuch und Gegenversuch ein erstes Beispiel für folgende zwei Grundgesetze aller chemischen Verbindungen:

I. Das Gewicht einer chemischen Verbindung ist gleich der Summe der Gewichte der verbundenen Stoffe (Gesetz der Erhaltung der Stoffmenge oder Masse, CAVENDISH 1781, LAVOISIER 1782).

II. Zwei (oder mehrere) Stoffe verbinden sich chemisch nur dann vollständig, wenn sie in bestimmten festen Gewichtsverhältnissen stehen (Gesetz der konstanten Gewichtsverhältnisse, WENZEL 1777).

Versuch 2: Ähnlich wie im Versuch 1, nur unter etwas minder lebhaftem Glühen, verbinden sich 63 G.-T. **Kupfer** mit 32 G.-T. Schwefel zu „Schwefelkupfer“.

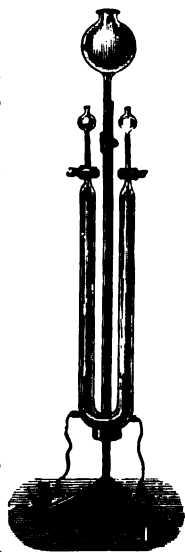
Wie das Gewichtsverhältnis 7:4 für das Verbinden von Eisen und Schwefel charakteristisch ist, so für das Verbinden von Kupfer und Schwefel das Verhältnis 63:32. Geben wir beiden Verhältnissen gleiche Hinterglieder ($7:4 = 56:32$), so ergeben sich folgende Verhältniszahlen: für **Eisen 56**; für **Kupfer 63**, für **Schwefel 32**, welche wir noch bei mancherlei Versuchen (z. B. Versuche V) als für die drei genannten Stoffe bedeutungsvoll erkennen werden.

§ 204. Gruppe II: Wasser, Wasserstoff, Sauerstoff. — Chemische Zerlegung (Zersetzung, Analyse).

Versuch 3: Gefäß und Röhren eines „Wasserzersetzungapparates“ (Fig. 716; vergl. auch Fig. 719, den mittleren der drei Apparate) werden mit „angesäuertem Wasser“ (einer Mischung von etwa 10 Raumteilen Wasser auf 1 Raumteil Schwefelsäure) gefüllt. Solange ein elektrischer Strom durch das Gemisch geht, steigen von den Platinplatten des Apparates Gasbläschen in die Röhren auf. Das eine Gas, der **Wasserstoff**, ist entzündbar (bei hinreichend großen Mengen sehen wir eine schwach leuchtende, bläuliche Flamme); das andere Gas, der **Sauerstoff**, ist nicht selbst brennbar, entfacht aber einen bloß glimmenden Span. — Da nach längerer Zeit die Menge des Wassers, nicht aber die der Schwefelsäure sich vermindert zeigt, so schliessen wir, daß Wasserstoff und Sauerstoff (wenigstens mittelbar) dem Wasser entnommen seien, und wir sagen: Das Wasser ist (durch einen sekundären elektrolytischen Vorgang, § 154) **chemisch zersetzt** worden in Wasserstoff und Sauerstoff.

Vergleichen wir während der Zersetzung beliebig oft die Volumina der ausgeschiedenen Gase, so finden wir, daß sich die **Volumina von Wasserstoff und Sauer-**

Fig. 716.



stoff verhalten wie 2:1¹⁾. — Aus dem Verhältnis der spezifischen Gewichte beider Gase 1:16 (§ 46) ergibt sich für die absoluten Gewichte, daß im Wasser Wasserstoff und Sauerstoff verbunden sind im Gewichtsverhältnisse 2:16 = 1:8. In je 18 g¹⁾ sind also 2 g Wasserstoff und 16 g Sauerstoff.

Fig. 717.



Versuch 4: Hat man beide Gase in einem und demselben Gefäße („Eudiometer“ Fig. 717) aufgefangen, so bilden sie ein Gemenge, welches „Knallgas“ heißt. Wenn es entzündet mit Explosion verbrannt, so geben 2 Liter Wasserstoffgas und 1 Liter Sauerstoffgas zusammen 2 Liter des Gemenges Knallgas, nach der Verbrennung aber nur 2 Liter Wasserdampf ausgesetzt, daß alle Volumina bei gleicher Temperatur, z. B. 100° C und gleichem Druck gemessen werden). Ein Überschuß von Wasserstoff oder von Sauerstoff bleibt unverbrannt. (VOLTA 1779.)

Dies ist ein erstes Beispiel dafür, daß die chemischen Grundgesetze in Bezug auf die Gewichts- und Volumensmengen, welche für alle tropfbaren, gasförmigen Stoffe gelten, für alle noch insbesondere das folgende der Verbrennungsmenge kommt:

III. Zwei (oder mehrere) Gase verbinden sich nach bestimmten einfachen Volumsverhältnissen (Gesetz der konstanten kleinzahligen Volumsverhältnisse, GAY-LUSSAC 1808.)

§ 205. Gruppe III: Natrium und Ätznatron. — Chemische Ersetzung (Austausch, Substitution). — Basen.

Natrium ist ein Metall, das so weich ist, daß es mit dem Messer geschnitten werden kann. Die Schnittfläche ist silberweiß, wird sehr bald mattgrau (infolge chemischer Verbindungen, die das Natrium mit Bestandteilen der Luft [Sauerstoff, Wasserdampf, Kohlensäure] eingeht; es muß daher unter Steinöl oder Vaselineöl aufbewahrt werden). Natrium hat ein kleineres spezifisches Gewicht als Wasser. Schon in äußerst kleinen Mengen färbt es nichtleuchtende Flammen nach

¹⁾ Namentlich zu Beginn der Zersetzung beträgt das Volumen des Sauerstoffes weniger als die Hälfte von dem des Wasserstoffes; denn der Sauerstoff wird vom Natrium stärker absorbiert als der Wasserstoff, auch vermindert sich das Volumen von einem Teil des Sauerstoffes durch Bildung von Ozon (§ 214). Das Verhältnis 2:1 erweist sich als genau, wenn die Gase durch Erhitzen des Wassers u. s. f. vollständig gesammelt werden.

Versuch 5: Hält man einen mit Wasser gefüllten Zylinder mit der offenen Seite in ein mit Wasser gefülltes Gefäß und bringt in den Zylinder ein Stückchen Natrium (höchstens erbsengroß, Vorsicht!), so steigt es im Wasser des Zylinders auf; dabei bedeckt es sich mit einer weißen Kruste und verschwindet alsbald ganz; während dieser Zeit sinkt das Wasser im Zylinder. Das erzeugte Gas erkennt man (z. B. durch Anzünden) als Wasserstoff. In dem übrig gebliebenen Wasser ist ein ätzender Stoff gelöst, der Ätznatron heißt; seine wässrige Lösung heißt Natronlauge (Laugenessenz). — Man sagt: Das Natrium hat einen Teil vom Wasserstoff des Wassers chemisch ersetzt und bildet mit dem Reste des Wassers Ätznatron.

Um 1 g Wasserstoff (beachte Volumen und spezifisches Gewicht!) aus dem Wasser auszuschcheiden, muß man 23 g Natrium zu 18 g Wasser bringen; dabei erhält man nebst dem 1 g Wasserstoff noch 40 g Ätznatron. Es besteht also wieder Gleichheit der Gewichte vor und nach der Substitution: $23 + 18 = 1 + 40$.

Versuch 6: Bringt man etwas von der Ätznatronlösung zwischen die Fingerspitzen, so fühlt sich deren Haut glatt und weich an — weil sie durch den ätzenden Stoff aufgelöst wird. Auch sehr verdünnte Lösung schmeckt noch „laugenhaft“. Gerötete Lackmustinktur (Lackmuspapier) wird durch Ätznatron wieder blau gefärbt. Stoffe, welche diese Eigenschaften zeigen, heißen Basen.

§ 206. Gruppe IV: Schweflige Säure und Schwefelsäure. — Säuren.

Versuch 7: Beim Brennen des Schwefels entwickelt sich ein Gas von stechendem Geruche, das Rosen, befeuchtetes Stroh... zu bleichen vermag; vom Wasser wird es stark absorbiert, wobei es sich mit einem Teile desselben zu schwefliger Säure verbindet.

Versuch 8: Die englische Schwefelsäure, eine wasserhelle (die Nordhäuser Schwefelsäure, das „Vitriolöl“, eine bräunliche) ölige Flüssigkeit vom spez. Gew. 1,9, schwärzt (verkohlt) Holz, Zucker . . ., indem sie diesen organischen Stoffen Wasserstoff und Sauerstoff entzieht. (Aus gleichem Grunde erzeugt sie auf der Haut Brandwunden.)

Schweflige Säure und Schwefelsäure schmecken auch in starker Verdünnung sauer und färben blaue Lackmustinktur rot. Stoffe, welche diese Eigenschaften zeigen, heißen Säuren.

§ 207. Gruppe V: Eisenvitriol, Kupfervitriol. — Salze.

Versuch 9: Werden Eisenspäne mit verdünnter Schwefelsäure übergossen (Fig. 718 a. f. S.), so entwickelt sich ein Gas, das wir (z. B. durch Anzünden — Vorsicht!) als Wasserstoff erkennen. Die rückständige

Flüssigkeit gibt, eingedampft, Krystalle von Eisenvitriol, einem grünen Salz.

Versuch 10: Kupferhammerschlag (Kupferoxyd), ein schwarzes Pulver, gibt, mit der farblosen verdünnten Schwefelsäure leicht erwärmt,



Fig. 718.

eine schöne blaue Lösung eines anderen Salzes: Kupfervitriol.

Versuch 11: Halten wir die blanke Messerklinge in Kupfervitriollösung, so nimmt sie sogleich die Farbe des Kupfers an. — Setzen wir eine Kupfervitriollösung Eisenspäne zu, so nimmt sie mehr und mehr die Farbe einer Eisenvitriollösung an, und statt des Eisens finden wir einen Bodensatz von Kupferpulver.

Damit bei Versuch 10 müssen 56 g Eisen zu 98 g Eisenvitriol bilden. (Beachte: $60 + 38 = 98$, 2.)

Bei Versuch 10 müssen 79 g Kupferoxyd zu 98 g Schwefelsäure gebracht werden, damit sie 159 g Kupfervitriol geben.

Bei Versuch 11 werden in 159 g Kupfervitriol 63 g Kupfer durch 56 g Eisen ersetzt, und es bilden sich wieder 152 g Eisenvitriol. — Vergl. Versuch 1 und 2.

Geschichtliches. — In vorgeschichtliche Zeit reicht zurück die Kenntnis mehrerer Stoffe, die wir heute für Grundstoffe halten, so Gold, Silber, Kupfer, Eisen, Zinn, Schwefel, Diamant, Kohle (Kohlenstoff) . . . ; ferner Verbindungen: Wasser, Essig, Kochsalz . . . Von künstlich einzuleitenden chemischen Vorgängen verstanden schon die alten Ägypter mittels Eisen das Kupfer aus natürlichen Kupfersulfatlösungen zu fällen, die Phönizier das Quecksilber aus Zinnober abzuscheiden, aus Quarzsand und Soda Glas herzustellen; Kalkbrennen, Kalklösen u. s. f. Der Araber GEBER (Dschabir um 700 n. Chr.) liefs Quecksilber mit Schwefel sich zu Zinnober verbinden, gewann durch Rösten von Salpeter Salpetersäure, auch kannte er schon die Salzsäure. Das Nordhäuseröl (die braune Schwefelsäure) wurde von alters her durch Rösten von Eisenvitriol gewonnen. In diesen Säuren löste man verschiedene Metalle, so in der Salpetersäure sogar das „edle“ Silber im Königswasser, einem Gemisch von Salpetersäure und Salzsäure, auch das Gold. — Die Alchimisten (Alchimie, arabisch kemi = Ägypten, das schwarze Land, daher „schwarze Kunst“) waren ganz besonders bemüht, Gold durch Synthese anderer Stoffe herzustellen — zwar ein vergebliches Unternehmen, weil bis heute Gold noch nicht zerlegt ist und daher auch nicht zusammensetzbar, also als Grundstoff gilt; was aber nicht hinderte, dafs gerade durch die immer wieder neuen Versuche die Menge der chemischen Einzelkenntnisse ausgiebig zunahm. — Von den heute allerwichtigsten Elementen wurde der Wasserstoff schon von THEOPHRASTUS

Wasserstoff ausgeschieden werden, acht werden, wobei sich 152 g Eisenvitriol bilden.

PARACELsus (um 1550) als eine bei der Lösung von Metallen in Säuren auftretende „brennbare Luft“ bemerkt. Sauerstoff entwickelten **SCHÉELE** und **PRIESTLEY** fast gleichzeitig (1774), aber unabhängig voneinander aus rotem Quecksilberoxyd: ferner **SCHÉELE** (1774) aus Salzsäure und Braunstein das Chlor. Der Stickstoff war schon früher durch den Botaniker **RUTHERFORD** dadurch entdeckt worden, daß die Luft durch Verbrennenlassen von Kohle und Beseitigung des Kohlendioxyds mittels Kalkwasser von dem das Brennen unterhaltenden Teile (dem Sauerstoff) befreit wurde. — Die „vier Elemente: Erde, Wasser, Luft, Feuer“ (deren Vierzahl die Alten aus den Gegensätzen „Kalt — Warm, Trocken — Feucht“ ableiten zu können glaubten) erinnern uns noch heute, welch weiten Weg die wissenschaftliche Begriffsbildung der Chemie zu durchmessen hatte.

B. Chemische Hypothesen und Theorien.

§ 208. Grundstoffe, einfache Stoffe, chemische Elemente.

Wenn wir Schwefeleisen, Wasser . . . als „zusammengesetzte“ Stoffe bezeichnen, so ist dies insofern Ausdruck beobachtbarer Tatsachen, als wir das Schwefeleisen aus zwei, in vielen ihrer Eigenschaften ganz verschiedenen Stoffen haben hervorgehen sehen; desgleichen das Wasser, und letzteres auch wieder in zwei Stoffe, Sauerstoff und Wasserstoff, zerlegen können. Immerhin geht aber auch schon diese Auffassung über das rein Tatsächliche insofern hinaus, als wir freilich nicht direkt wissen können, ob z. B. der Wasserstoff und der Sauerstoff, nachdem sie sich verbunden haben, jeder für sich noch dieselben Eigenschaften hat, wie wenn sie sich nicht verbunden hätten, und ob also Wasserstoff und Sauerstoff als solche wirklich noch im Wasser enthalten seien. Insofern bildet schon die Annahme, daß es überhaupt Stoffe gebe, welche innerhalb und außerhalb ihrer Verbindungen unveränderliche Elemente der Materie darstellen, eine Hypothese, die aber von der gegenwärtigen Chemie fast ganz allgemein und meist wie selbstverständlich angenommen ist.

Für die erfahrungsmäßige Erforschung der Zusammengesetztheit oder Nichtzusammengesetztheit der Stoffe ist die erste Frage, ob sich aus einem gegebenen Stoffe durch irgendwelche (mechanische, thermische, elektrische . . .) Mittel Stoffe abscheiden lassen, die von dem gegebenen Stoffe und untereinander sich durch einige Eigenschaften unterscheiden (denn in allen Eigenschaften unterscheidet sich kein Paar von Stoffen).

Als **Grundstoffe, chemisch einfache Stoffe** oder **Elemente** werden solche Stoffe bezeichnet, die man bisher weder aus anderen Stoffen zusammensetzen noch in solche zu zerlegen vermocht hat.

Diese Definition beansprucht für jeden Zeitpunkt der wissenschaftlichen Entwicklung nur relative Giltigkeit, indem es niemals ausgeschlossen ist, daß bei einem Stoffe, welcher sich „bisher“ nicht hat zerlegen lassen, dies früher oder später gelingen werde. So hatte Wasser fast selbstverständlich als ein Grundstoff gegolten, bis **CAVENDISH** (1781) das Verbrennungsprodukt von Wasserstoff und Sauerstoff als Wasser erkannte (wogegen noch **VOLTA**, 1779, erwartet hatte, aus dem Wasserstoff werde „ein Säuretropfen“, aus dem Sauerstoff „ein erdiger Staub“ werden). Sogar alle Säuren und Basen hatte man vor **LAVOISIER** für Grundstoffe gehalten; desgleichen vor **DAVY** (1807) die basischen Oxyde Kali, Natron . . .

Immerhin wird die Wahrscheinlichkeit, daß ein Stoff, welcher den bisherigen Methoden der Zerlegung widerstanden hat, auch wirklich ein unzerlegbarer Stoff sei, um so größer, je mannigfaltiger diese Methoden selbst gewesen sind. Über die gegenwärtig (1903) bekannten Elemente vergl. die Tafel § 211 A.C.

§ 209. Die Atomhypothese.

Sobald einmal die Annahme gemacht ist, daß bei und nach der Vereinigung zweier oder mehrerer Stoffe zu einer chemischen Verbindung diese Stoffe nicht zerstört, sondern nur in der Verbindung als das erhalten, was sie vor dem Verbinden gewesen waren, ist die weitere Vorstellung nahe, sich jede Verbindung aus ungleichartigen „chemisch kleinsten Teilen“ oder Atomen bestehend zu denken. Diese Atome sind definiert als die nur mehr durch chemische Mittel voneinander zu trennenden Teilchen der „mechanisch kleinsten Teile“ oder Moleküle (§ 57) der Körper. Chemische Verbindungen bestehen aus gleichartigen Molekülen, aus einer chemischen Gemenge aus ungleichartigen Molekülen. — Alle Atome eines Grundstoffes, z. B. Eisen, weichen voneinander völlig gleichartig ab, sind also von gleicher Masse, gleichen Kräften, gleichem chemischen Verhalten. Dieser Begriff sich aber nicht durch, sondern bloß relativ ist, siehe unten). In der Natur kommen mehr oder minder verschiedene Typen von Grundstoffen gefunden worden, welche sich z. B. bei Kalium und Calcium zeigen. — Diese Atom-Hypothese (entwickelt von DALTON 1805 in die chemischen Schritte des XIX. Jahrhunderts über) ist die Grundlage der Erforschung chemischer Tatsachen und unter der Leitung dieser Hypothese gemacht worden. Die hauptsächlichsten Tatsachen, welche sich als notwendige Folge dieser Hypothese verstehen lassen und die daher umgekehrt auch als ihre (sie mehr oder weniger wahrscheinlich machenden) empirischen Stützen zu gelten haben, sind namentlich die folgenden:

1. Das Gesetz der Erhaltung der Stoffmenge (des Gewichtes und der Masse, § 203, Gesetz I): Denn wenn die Atome unveränderlich sind, in was immer für chemische Verbindungen sie eingehen, und jedem Atom ein bestimmtes absolutes Gewicht zukommt, so muß auch das absolute Gewicht der Verbindung gleich der Summe der absoluten Gewichte der Bestandteile sein; wie ja allgemein das Gewicht eines aus mehreren Körpern irgendwie zusammengesetzten Körpers gleich der Summe von deren Gewichten ist.

2. Das Gesetz der konstanten Gewichtsverhältnisse (§ 203, Gesetz II): Denn stellen wir uns z. B. vor, daß die Atomgewichte von Eisen und Schwefel sich verhalten wie $p:q$ und Schwefeleisen dadurch entsteht, daß sich x Atome Eisen mit y Atomen Schwefel zu je einem Molekül Schwefeleisen verbinden, in welchem die Gewichte von Eisen und Schwefel sich verhalten wie $xp:yq$, so werden auch in jeder endlichen Menge Schwefeleisen Gewichtsmengen von Schwefel und Eisen sich verhalten wie $xp:yq$.

Beobachtbare Tatsache ist hier nur, daß $xp:yq = 7:4$. Wie groß dagegen die Anzahlen x und y und daher auch die Gewichte p und q sind, ist hieraus nicht zu entnehmen. Erst wenn unter allen denkbaren Annahmen die einfachste gemacht wird, daß nämlich je ein Atom Eisen und ein Atom Schwefel zu einem Molekül Schwefeleisen verbinden (also $x = 1, y = 1$), wäre hiermit angenommen, daß $p:q = 7:4$. Wieder aber ist hiermit noch gar nichts über gesagt, welche jedenfalls äußerst kleine Gewichtseinheit diesen Maßzahlen 7 und 4 zu Grunde liegt, d. h. wieviel Trilliontel Gramm etwa wirklich ein Schwefel-, bzw. Eisenatom enthalten würde.

So ungezwungen sich übrigens die beiden tatsächlichen Gesetze I und II erklären, wenn wir die Atomhypothese annehmen, so gering wäre doch das Bedürfnis, nur allein schon um dieser zwei Gesetze willen gerade eine atomistische Struktur der Materie anzunehmen. — Die Hauptstütze dagegen findet diese Hypothese in dem von DALTON entdeckten Gesetz der „multiplen Proportionen“, welches eine Ergänzung und Erweiterung des Gesetzes der konstanten Gewichtsverhältnisse (keineswegs einen Widerspruch gegen dieses Gesetz) enthält. Ein Beispiel für die in diesem Gesetz zusammengefaßten Tatsachen bilden die zweierlei Verbindungen von Eisen und Schwefel, nämlich einerseits die bei dem Versuch I, 1 sich ergebende Verbindung nach dem Gewichtsverhältnisse Eisen:Schwefel = 7:4, anderseits die in der Natur sehr häufig (als Pyrit, Schwefelkies . . .) vorkommende Verbindung nach dem Gewichtsverhältnisse Eisen:Schwefel = 7:8. — Ein anderes Beispiel bildet neben der Verbindung von Wasserstoff und Sauerstoff zu Wasser (1:8) das Wasserstoffsuperoxyd (1:16). — Ein drittes, besonders lehrreiches Beispiel bieten die fünf Verbindungen von Stickstoff und Sauerstoff, nämlich:

7 Gew.-T. Stickstoff	+	4 Gew.-T. Sauerstoff	geben	11 Gew.-T. Stickstoffmonoxyd
7 „	„	+ 8 „	„	15 „ Stickstoffdioxyd
7 „	„	+ 12 „	„	19 „ Stickstofftrioxyd
7 „	„	+ 16 „	„	23 „ Stickstofftetraoxyd
7 „	„	+ 20 „	„	27 „ Stickstoffpentoxyd

Vorausgesetzt bei allen solchen Unterscheidungen mehrerer Verbindungen derselben zwei (oder mehrerer) Grundstoffe ist, daß, wenn die zwei- oder mehrerlei Verbindungen miteinander gemischt vorkommen (wie es bei Legierungen, § 213, häufig geschieht), sie aus dem Gemenge durch mechanische oder chemische Mittel ausgesondert werden können.

Es ergibt sich sonach als von Hypothesen, insbesondere von der Atomhypothese zunächst noch ganz frei folgender Ausdruck für das

3. Gesetz der multiplen Proportionen: Dieselben zwei (oder mehreren) Stoffe können nicht nur je eine, sondern auch mehrere chemische Verbindungen eingehen; die bestimmten festen Gewichtsverhältnisse hierbei stehen dann selbst wieder in ganzzahligen (und zwar meist kleinzahligen) Verhältnissen zueinander.

Für diese Tatsache erlaubt sodann die Atomtheorie eine völlig ungezwungene Erklärung, indem wir z. B. annehmen, daß sich je 1 Atom Stickstoff mit je 1, 2, 3, 4, 5 Atomen Sauerstoff verbinden; doch bleibt es daneben zunächst auch möglich, daß je 2 (— was auch in den Formeln $N_2O_1 \dots N_2O_5$ als das Richtige

gleichwertig) sind dann auch noch folgende Sätze:

b) **Die absoluten Gewichte je eines Molekels** (chemisch einfacher oder zusammengesetzter, nicht gemengter) **verhalten sich wie die Normalgewichte** (§ 211) dieser Gase. Denn diese Normalgewichte verhalten sich absoluten Gewichte gleicher Volumina, diese absoluten Gewichte ganzen Volummengen aber wie die Gewichte der in gleicher Anzahl vorhandenen Moleküle. — (In welcher Weise die Molekulargewichte den Normalgewichten nicht proportional, sondern gleich setzt, siehe unten 5.)

c) **Die mittleren Abstände der Moleküle sind ein und dasselbe für alle Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur.** einzelnen Moleküle als sehr klein gegen diese Abstände angesehen. In praktischer Ausdrucksweise werden überdies nicht selten

d) **„die Moleküle aller Gase gleich groß“** genannt, d. h. der ganze Raum, welchen eine Gasmenge einnimmt, dividiert durch die Anzahl der Moleküle selbst als „Größe eines Moleküls“ bezeichnet wird; gemeint ist, daß dieser Raum gleichsam der durchschnittliche Abstand eines der Moleküle sei. — Die späteren Ermittlungen der wirklichen Größen und deren wirklicher mittlerer Abstände voneinander haben gezeigt, daß in der Tat diese gegen jene sehr groß sind (§§ 57, 83).

Diese ganz nach Belieben in den Formen a), b), c), d) ausgedrückte Hypothese wurde zuerst 1811 von AVOGADRO und unabhängig von AMPÈRE aufgestellt. Sie mußte zunächst sehr willkürlich und künstlich sein, ja zu jener Zeit die absolute Zahl N der Moleküle in je 1 Liter Sauerstoff, Wasserdampf, Kohlendioxyd, Knallgas, Luft u. s. w. unbekannt war. In der Tat war auch Avogadros Hypothese durch Jahrzehnte hindurch bis man von ganz anderer Seite, nämlich der um die Mitte des 19. Jahrhunderts ausgebildeten kinetischen Gashypothese, auf die nämliche

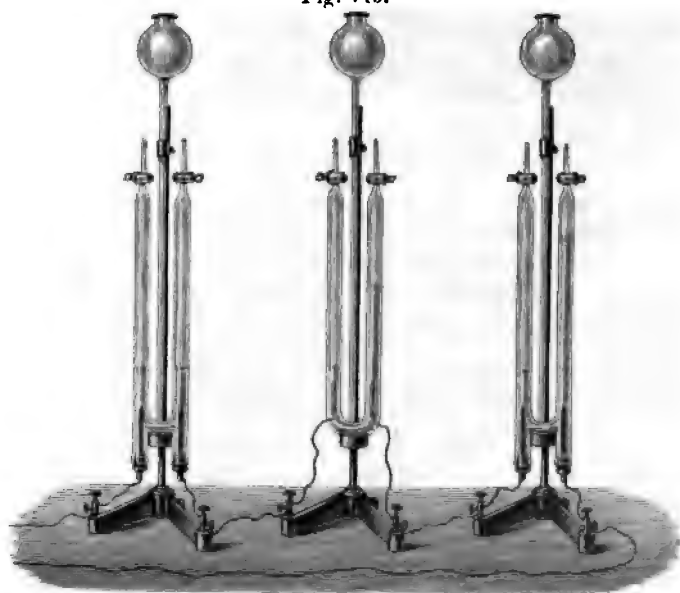
4. Das aeromechanisch-aerothermische Gesetz GAY-LUSSACS der Gleichheit der Ausdehnungs- und Spannungskoeffizienten für alle Gase unabhängig von ihrer sonstigen mechanischen und chemischen Verschiedenheit (§ 74).

5. Das chemische Gesetz der konstanten und kleinzahligen Volumverhältnisse (ebenfalls von GAY-LUSSAC, 1806 bis 1808).

Von diesem Gesetz gaben ein erstes Beispiel die Volumverhältnisse bei der Zersetzung des Wassers in Wasserstoff und Sauerstoff, bzw. bei der Verbrennung des Knallgases zu Wasser (§ 209, Versuch II, 3, 4): diese Verhältnisse sind durch Fig. 720 symbolisch dargestellt, wobei die gleich großen Quadrate z. B. je ein Liter der Gase bei gleichem Volumen und gleicher Temperatur darstellen mögen. An dieser Tatsache fordern also eine Erklärung heraus die folgenden merkwürdigen einfachen Gesetzmäßigkeiten: Erstens, daß die ohne Rückstand zu verbindenden Gasmengen vor dem Verbinden das kleinzahlige Volumverhältnis 2:1 haben; zweitens, daß zu dem Volumen $2 + 1 = 3$ des Gemenges auch das nach dem Verbinden eingenommene Volumen das kleinzahlige Verhältnis 3:2 aufweist. — Hierzu kommt aber drittens, daß die durch Fig. 716 dargestellte Analyse, bzw. Synthese des Wassers selbst wieder ein mittleres Glied darstellt zwischen den analogen Vorgängen mit Salzsäure und Ammoniak nach folgenden

Versuchen: Die drei elektrolytischen Doppelröhren (nach HOFMANN) sind gefüllt mit Salzsäure, angesäuertem Wasser und Ammoniak.

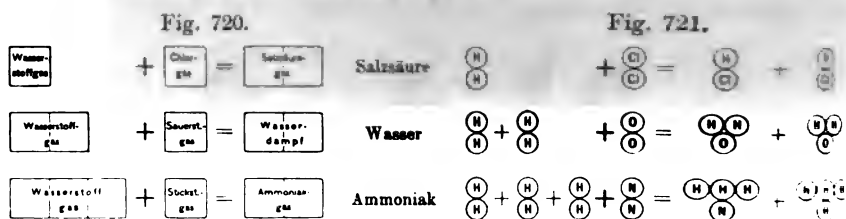
Fig. 719.



Werden sie dann a) einzeln in je einem Stromkreis von hinreichender Stärke und „Spannung“ geschaltet, so scheiden sich aus je einer der Flüssigkeiten die Gase in den Verhältnissen 1:1, bzw. 2:1, bzw. 3:1

aus. Werden sie aber b) gleichzeitig („hintereinander“, Fig. 719, a. v. S.) geschaltet, so kommt zu dieser Gesetzmäßigkeit noch die weitere, daß binnen gleichen Zeiten aus allen drei Flüssigkeiten gleiche Mengen Wasserstoff abgesondert werden, so daß sich also die anderen Gase im Volumverhältnisse $1:1\frac{1}{2}:1\frac{1}{3}$ ausscheiden.

Auf Grund dieser volumetrischen Tatsache läge es nun freilich näher, nur für Wasserstoff und Chlor gleiche Molekühlzahlen anzunehmen, als auch für Sauerstoff und Stickstoff mit ihren weniger einfachen Volumverhältnissen. Wird gleichwohl Avogadro's Hypothese für alle drei (wie für die übrigen Gase) angenommen, so verlangt sie weiter, daß wir uns nicht nur die Moleküle der zusammengesetzten Gase aus mehr als einem Atom bestehend denken, sondern auch je ein Molekül der einfachen Gase Wasserstoff, Chlor, Sauerstoff, Stickstoff schon aus je zwei Atomen bestehend. (Nur bei wenigen Stoffen, Quecksilber, Zink, Cadmium, ferner Argon und Helium, sind Molekül und Atom identisch, d. h. das Molekül besteht nicht aus mehreren Atomen, sondern in einem Atom: bei diesen Stoffen weist nämlich nichts auf eine Volumsverminderung beim Verbinden hin. — Übrigens scheinen auch bei den meisten mehratomigen Metallen die Moleküle bei hinreichend hohen Temperaturen in die einzelnen Atome zerfallen zu werden.) So treten dann an Stelle der noch die Tatsachen selbst darstellenden Symbole Fig. 720 die folgenden Bilder für die Umlagerung der Atome je eines Moleküls zu neuen Molekülen, Fig. 721:



Wenn hier die Atome geradezu als Kügelchen dargestellt sind, die in den Molekülen aneinander kleben, so entspricht diese räumliche Vorstellung aller Wahrscheinlichkeit nach nur sehr teilweise der Wirklichkeit. Vielmehr sprechen bestimmte Tatsachen (vergl. namentlich CLAUSIUS' Theorie der Elektrolyse, § 57) dafür, daß auch die Atome innerhalb eines Moleküls noch ebenso in relativer Bewegung sind, wie die Moleküle ihrerseits in Bezug aufeinander infolge der Wärmebewegung. Auch können, wie schon § 57 erwähnt, die Atome vielleicht nicht voneinander getrennte Körperchen, sondern Wirbelringe (Schwingungsknoten . . .) innerhalb einer vielleicht stetig zusammenhängenden Materie sein. —

Weitere Tatsachen, welche für die Atomhypothese als solche und speziell dafür sprechen, daß auch die Moleküle von Grundstoffen in der Regel noch aus mehr als einem, meist aus zwei Atomen bestehen:

6. Die **allotropen Modifikationen**, in welchen zahlreiche Grundstoffe vorkommen, so Sauerstoff als gewöhnlicher Sauerstoff O_2 und Ozon O_3 ; der gelblichweiße (krystallinische), giftige Phosphor und der rote („amorphe“), ungiftige Phosphor; Schwefel (§ 218), Kohlenstoff (§ 221).

Die Annahme, daß z. B. die beiden Arten des Sauerstoffs die Molekularformeln O_2 und O_3 haben, stützt sich auf die Tatsache, daß beim Übergang des

ozonfreien Sauerstoffs in reines Ozon eine Volumverminderung eintritt, so daß die gleiche Gewichtsmenge ozonisierten Sauerstoffs zum gewöhnlichen das Volumverhältnis 3:2 aufweist.

Nach dem Vorbilde der allotropen Modifikationen ließe sich sogar denken, daß zunächst auch die Atome des Wasserstoffs schon Zusammensetzungen irgend einer, vielleicht sogar sehr großen Zahl von „Uratomen“ seien. Schon Prout hat zu Anfang des XIX. Jahrhunderts eine solche Vermutung ausgesprochen. Wäre diese Zahl für Wasserstoff z. B. 1000, so wäre dann Stickstoff, dessen Atomgewicht das 14fache von dem des Wasserstoffs ist, als aus 14000, Sauerstoff als aus 16000 solchen Uratomen bestehend zu denken — kurz, sämtliche Grundstoffe wären eigentlich nur allotrope Modifikationen jenes einen Urstoffes. (Es wäre dann auch Hoffnung, auch die heutigen „Grundstoffe“ künftig ineinander überzuführen, als z. B. doch auch „Gold zu machen“. — Über neueste Ausgestaltungen jener Vermutung durch die Hypothese von den Elektronen vergl. § 154.)

Auch darin sah man einen Wahrscheinlichkeitsgrund für diese Hypothese, daß die Atomgewichte von Stickstoff, Sauerstoff, Natrium u. s. f. ganzzahlige Vielfache vom Atomgewicht des Wasserstoffs zu sein schienen. Genauere Bestimmungen haben dann freilich gezeigt, daß Stickstoff nicht 14, sondern 13,94, Sauerstoff nicht 16, sondern 15,88, Natrium nicht 23, sondern 22,88 als Atomgewicht haben: da aber diese Abweichungen doch verhältnismäßig sehr klein sind, könnte man sie etwa ähnlich auslegen wie die Abweichungen vom idealen Mariotteschen Gesetz, die man aus den Störungen der Gleichförmigkeit der molekularen Bewegung infolge der zwischen den Molekülen auftretenden Anziehungskräfte erklärt.

7. Die zusammengesetzten Radikale. In sehr zahlreichen Verbindungen finden sich Atomgruppen, die nachweislich aus verschiedenen Grundstoffen bestehen, z. B. Hydroxyl HO , Ammonium $= \text{NH}_4$ (§ 220), Cyan $= \text{CN}$ (§ 216), und die doch bei Synthesen und Substitutionen, zum Teil auch bei Analysen sich annähernd ebenso unveränderlich zeigen wie die Atome von Grundstoffen.

8. Isomerie und 9. Polymerie. Es gibt Verbindungen, die in ihren Eigenschaften und Reaktionen sich mehr oder weniger verschieden verhalten und doch aus den gleichen Grundstoffen in gleichen Gewichtsverhältnissen bestehen. Je nachdem überdies die Molekulargewichte solcher Verbindungen gleich oder aber verschieden sind, heißen sie **isomer** bzw. **polymer**.

Isomer sind z. B. die 16 Unterarten des Traubenzuckers, welche alle dieselbe empirische Formel $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$, aber verschiedene Strukturformeln haben; vergl. § 222.

Polymer sind z. B. die Verbindungen: Äthylen C_2H_4 , Propylen C_3H_6 , Butylen C_4H_8 , Amylen C_5H_{10} u. s. w.

Diese Tatsachen gleicher prozentualer Zusammensetzung und dennoch verschiedenen chemischen Verhaltens wären nicht zu verstehen, wenn man die an der Verbindung beteiligten Mengen der einzelnen Grundstoffe als stetige, homogene, isotrope Stoffe in gleichartiger Mischung und Durchdringung annähme. Dagegen erklären sich diese Tatsachen ganz ungezwungen, wenn angenommen wird, daß bei Isomerie gleich viele Atome, bei Polymerie gleiche Vielfache von Atomen derselben Stoffe in verschiedener Aneinanderlagerung vorhanden seien. —

Daß Avogadros Hypothese (nach 5) dazu nötigt, auch die Moleküle chemisch einfacher Stoffe noch als aus Atomen zusammengesetzt anzunehmen (wie

oben nach Fig. 721), während ursprünglich die Atomhypothese doch nur dazu angedacht worden war, um verständlich zu machen, warum sich aus einem nicht mechanisch gemengten, homogenen Körper noch chemisch verschiedene Körper aussondern lassen, könnte als ein Wahrscheinlichkeitsgrund gegen Avogadro's Hypothese angeführt werden. — Es gibt aber tatsächlich auch

10. Unterschiede im Verhalten eines Grundstoffes *in statu nascendi* (d. h. während der Entwicklung aus seinen Verbindungen) und demselben Stoffe sozusagen im fertigen, abgeschlossenen Zustande: dort suchte das einzelne Atom noch einen oder einige Genossen, hier hat es diese in einem oder mehreren gleichartigen oder ungleichartigen Atomen gefunden.

Sauerstoff und Wasserstoff z. B. können, zu Knallgas gemengt, beliebig lang unverbunden (oder doch ohne B... her Mengen von Wasser) erhalten bleiben; erst durch beträchtlich... Temperatur wird die Verbindung eingeleitet. Wenn dagegen z. B. $\text{CaO} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{CaSO}_4 + \text{H}_2\text{O}$ (§ 207, Versuch V, 10 — ... in vielen anderen Reaktionen) einerseits das O des Kupferoxyds, andererseits das H, der Schwefelsäure ausgetrieben werden, so treten sie nicht zu... mgt, sondern sogleich zu Wasser verbunden auf. —

Auch ein sehr allgemeines... Gewinn erwächst aus der Annahme der mehratomigen Moleküle... n: daß nämlich alle chemischen Vorgänge in einem Austausch... bestehen; d. h. also nicht nur diejenigen Vorgänge, welche sich... als Substitutionen darstellen, sondern auch die Analysen und... sind im Grunde Substitutionen. Beispiele hierfür in Fig. 721, ferner aus Formeln im § 211.

Während mehrere der vorstehenden theoretischen Grundgesetze sich auf den gasförmigen Zustand beziehen, gilt

11. Dulong-Petits Regel für Elemente in festem Zustande: Die auf ein Verbindungsgewicht bezogene spezifische Wärme, ist für alle solche Stoffe gleich groß, nämlich etwa 6 cal., oder: Das Produkt aus Atomwärme und Atomgewicht ist konstant.

Diese Regel gilt nicht ausnahmslos; sie wurde anfänglich vorwiegend für Metalle ausgesprochen, gilt aber für alle festen Elemente, deren Verbindungsgewicht nicht kleiner als 30 ist. Elemente unterhalb dieser Grenze haben kleinere Atomwärmen.

§ 210. Wertigkeit (Valenz) und Verwandtschaft (Affinität).

Man nennt Chlor einwertig, Sauerstoff zweiwertig, Stickstoff dreiwertig im Hinblick auf ihr tatsächliches volumetrisches Verhalten zum Wasserstoff, wie es durch Fig. 720 symbolisch dargestellt ist, und das wir (indem wir die Symbole von rechts gegen links lesen) auch so beschreiben können. Aus je 2 Vol. Salzsäuregas, Wasserdampf, Ammoniakgas lassen sich ausscheiden je 1, 2, 3 Vol. Wasserstoff (und je 1 Vol. Chlor, Sauerstoff, Stickstoff). — Diesen Stoffen schließt sich der Kohlenstoff als vierwertig an, indem aus je 2 Vol. leichtem Kohlenwasserstoffgas (Methan) 4 Vol. Wasserstoff ausscheiden (wobei dann allerdings der übrig bleibende Kohlenstoff nicht ebenfalls als Gas darstellbar ist). — Es stellen insofern die vier Verbindungen

I. Chlorwasserstoff, II. Wasser, III. Ammoniak, IV. Methan

vier Typen dar, welchen sich auch die übrigen Verbindungen (allerdings mit gewissen Ausnahmen, infolge davon z. B. Chlor bald ein-, bald drei-, fünfwertig angenommen werden muß, worauf hier nicht eingegangen werden kann) haben einreihen lassen. — Unter Heranziehung der Atomhypothese wird definiert:

Ein Stoff ist **ein-, bzw. zwei-, drei-, vierwertig**, wenn ein Atom von ihm entweder mit 1, bzw. 2, 3, 4 Atomen Wasserstoff oder ebenso vielen Atomen eines anderen schon als einwertig erkannten Stoffes (z. B. Chlor) sich zu verbinden oder diese Atome in einer Verbindung zu ersetzen vermag.

Beispiele hierzu im folgenden Paragraphen und im ganzen Abschnitt C. — Für dieses verschiedene Verhalten der Grundstoffe gegeneinander fehlt es noch an einer eigentlichen physikalischen Erklärung. Es ist nur als symbolisch aufzufassen, wenn man sich etwa von einem Kohlenstoffatom nach vier Richtungen (entsprechend den vom Mittelpunkt eines regulären Tetraeders gegen seine vier Ecken gezogenen Geraden) Anziehungskräfte von größerer Stärke oder dergleichen ausgehend denkt. — Dagegen ist folgendes wieder eine durchgreifende Erfahrung:

Es verbinden sich im allgemeinen zwei Elemente um so lieber (sie haben größere **chemische Verwandtschaft** oder **Affinität**), je mehr sie in ihren gesamten Eigenschaften einander unähnlich sind (z. B. Sauerstoff und Kalium); sie ersetzen sich aber um so leichter in Verbindungen, je ähnlicher sie einander sind (z. B. Kalium und Natrium).

Die Größe der **chemischen Affinität** zweier Stoffe ist übrigens nicht einfach zu messen, und namentlich ist sie nicht zu verwechseln mit der Größe der **chemischen Energie**, welche z. B. bei der Verbindung einer gegebenen Gewichtsmenge Kalium mit dem zugehörigen Sauerstoff als **Verbrennungswärme** erzeugt (genauer: aus der potentiellen chemischen Energie in die aktuelle Wärmeenergie übergeführt) wird. Sagt man z. B., von zwei Säuren sei die eine „stärker“, genauer: sie habe „eine größere Verwandtschaft“ zum Zink oder zu einem anderen bestimmten Metall, so ist hiermit zunächst gemeint, daß sich das Zink in der stärkeren Säure geschwinder auflöst als in der schwächeren. Diese chemische Geschwindigkeit aber ist wieder nicht nur von der potentiellen chemischen Energie beider Stoffe in Bezug aufeinander, sondern auch von dem Grade der Konzentration der Säure nach einem nicht einfachen Gesetze („Gesetz der Massenwirkung“) abhängig.

§ 211. Chemische Namen, Formeln und Gleichungen.

1. Wiewohl eine Anzahl von Stoffen, mit welchen sich der Chemiker wissenschaftlich beschäftigt, auch dem gewöhnlichen Leben bekannt ist und in der Verkehrssprache herkömmliche Namen besitzt (Lauge, Essig, Scheidewasser, Kalk, gebrannter Kalk, gelöschter Kalk, Gips, Vitriolöl u. s. w.), so haben sich doch diese Bezeichnungen als für die chemische Wissenschaft nicht völlig brauchbar erwiesen, und es werden in ihr diese Trivialnamen nur nebenher noch manchmal verwendet. — Auch die chemische Terminologie selbst hat mannig-

fache Änderungen erlebt mit fortschreitender Erkenntnis der Tatsachen und mit dem sie begleitenden allmählichen Wandel der chemischen Theorie. Die gegenwärtigen chemischen Termini deuten sowohl die in einer Verbindung enthaltenen Grundstoffe mehr oder weniger vollständig an, wie auch die Art ihrer Zusammensetzung und überdies die Hauptklassen der Verbindungen, zu welchen ein bestimmter Stoff gehört. So hatte z. B. der Name „Lauge“ nur die basischen Eigenschaften (und die starke Konzentration der Lösung) erkennen lassen; der Name „Ätznatron“ schon, daß es speziell eine Base des Natriums sei; der gegenwärtige Name Natriumhydroxyd aber besagt, daß in dem Stoffe Natrium, Hydrogenium (Wasserstoff) und Oxygenium (Sauerstoff) enthalten sei. — Der Name Eisensulfid bezeichnet eine Verbindung von Eisen und Schwefel, Eisensulfat das aus der Schwefelsäure hervorgegangene Eisensalz. Näheres über diese Terminologie im ganzen Abschnitt C.

2. Noch kürzer und zugleich quantitativ vollständiger als durch den wissenschaftlichen Terminus wird je ein Stoff bezeichnet durch seine Molekularformel; z. B. Natriumhydroxyd = NaHO , Wasser = Wasserstoffoxyd = H_2O (Wasserstoffsperoxyd = H_2O_2), Schwefel-eisen = Eisensulfid = FeS , Eisenvitriol = Eisensulfat = Fe_2SO_4 . Hierbei bedeuten die einzelnen Buchstaben nicht nur die Qualität des betrachteten Grundstoffes, sondern je ein Atom; die einem Buchstaben angehängten Indices bedeuten die Anzahl der gleichartigen Atome innerhalb eines Moleküles, die ganze Formel je ein Molekül, ein diesem Molekülzeichen vorgesetzter Koeffizient die Anzahl der Moleküle.

3. Durch die chemischen Gleichungen endlich werden chemische Vorgänge bezeichnet, daß links vom Gleichheitszeichen die Stoffe vor, rechts die nach dem Vorgang zu stehen kommen.

Es bedeutet also z. B.

$2\text{H}_2 + \text{O}_2 = 2\text{H}_2\text{O}$ die Synthese von Wasserst. u. Sauerst. zu Wasser (Versuch 4).
 $2\text{H}_2\text{O} = 2\text{H}_2 + \text{O}_2$ die Analyse des Wassers in Wasserst. u. Sauerst. (Versuch 3).
 $\text{Na}_2 + 2\text{H}_2\text{O} = \text{H}_2 + 2\text{NaHO}$ die Substitution des Natriums für einen Teil des Wasserstoffs im Wasser und „Freiwerden“ des Wasserstoffes (Versuch 5).

Außerlich genommen ist es ein Mittel zur Kontrolle einer chemischen Gleichung, daß die Summen der Atomzahlen für je einen Stoff vor und hinter dem Gleichheitszeichen dieselben sein müssen; denn dies ist nur ein anderer Ausdruck der Atomhypothese selbst, nach welcher ja während eines chemischen Vorganges weder Atome verloren gehen noch aus nichts hinzukommen können. — Die eigentliche sachliche Frage angesichts jeder chemischen Formel und jeder chemischen Gleichung ist aber die, woher man weiß, daß gerade so und so viele Atome je eines Grundstoffes in jedem Molekül vorhanden seien und daß sich gerade so und so viel Moleküle an dem Vorgange beteiligen. In der Tat haben im Verlaufe der Entwicklung der Chemie die Formeln für die nämlichen Stoffe und die Gleichungen für die nämlichen Vorgänge wiederholt sehr verschiedene Gestalt angenommen. So schrieb man lange Zeit Wasser HO , statt wie jetzt H_2O und dergleichen mehr. — Die Entscheidung, welche Formel für einen bestimmten Stoff, bezw. Vorgang die angemessenste sei, stützt sich auf folgende zwei Reihen von tatsächlichen Grundlagen: Erstens die Verbindungs-

gewichte (Äquivalenzgewichte), die demselben Stoffe bei den Reaktionen gegen möglichst mannigfaltige andere Stoffe zukommen (z. B. Schwefel 32, Eisen 56, Kupfer 63, § 203, Versuch 1 und 2). Zweitens die **Volumverhältnisse** (§ 204, Versuch 4), wenn die in die Reaktion eintretenden, bezw. aus ihr hervorgehenden Stoffe als Gase gemessen sind (oder wenn auf ihren Gasezustand geschlossen werden kann). — In der Sprache der Molekular- und Atomhypothese führen dann diese Tatsachen zu folgenden Begriffen und Regeln:

A. Als Molekulargewichte werden die Normalgewichte der Stoffe gewählt. Als diese Normalgewichte gelten bei allen Stoffen, die als Gase oder Dämpfe bekannt sind, ihre **Gas- oder Dampfdichten**, und zwar am bequemsten ihre bezüglichen Dichten in Bezug auf ein fingiertes Normalgas, dessen Dichte $\frac{1}{32}$ von der des Sauerstoffes ist.

1. Der Grund dieser Wahl ist folgender: Lange Zeit hatte man, da Wasserstoff nicht nur unter allen Gasen die kleinste Dichte (oder größte spezifische Spannung, § 215) hat, sondern auch in Verbindungen den verhältnismäßig kleinsten Gewichtsanteil darstellt (sogar in solchen, in denen mehrere Atome Wasserstoff auf ein Atom eines anderen Stoffes kommen, z. B. in CH_4) als chemische relative Gewichtseinheit „1 Atom Wasserstoff, $\text{H} = 1$ “ benutzt. Auf Grund der Tatsachen, die dafür sprechen, sich eine Molekel Wasserstoff als aus 2 Atomen bestehend zu denken, war dann das Molekulargewicht des Wasserstoffes $\text{H}_2 = 2$. Indem ferner auf Grund der volumetrischen Tatsachen, die in Fig. 720 und Fig. 721 symbolisiert sind, 1 Mol. Wasser als aus 2 Atomen Wasserstoff und 1 Atom Sauerstoff bestehend gedacht und deshalb durch H_2O bezeichnet wurde, war das Atomgewicht des Sauerstoffs $\text{O} = 16$ zu schreiben. Dies aber nur so lange, als man glaubte, die Dichte des Sauerstoffs sei das genau 16fache von der des Wasserstoffs. Als sich aber herausstellte, daß das numerische Verhältnis genauer $1,00:15,88 = 1,008:16,000$ sei, empfahl es sich, als grundlegende Zahl die für das Atom Sauerstoff $\text{O} = 16$ zu wählen und somit $\text{H} = 1,008$ zu setzen; denn von vielen Stoffen sind direkte Verbindungen mit Sauerstoff, aber nur von viel weniger Stoffen direkte Verbindungen mit Wasserstoff bekannt. — Da nun überdies auch die kleinste Menge frei vorkommenden Sauerstoffs die der Molekel $\text{O}_2 = 32$ ist, so empfiehlt es sich nach OSTWALD, als fingiertes Normalgas eines von der Dichte 1, d. i. also von $\frac{1}{32}$ der Dichte des Sauerstoffs allen übrigen Angaben zu Grunde zu legen.

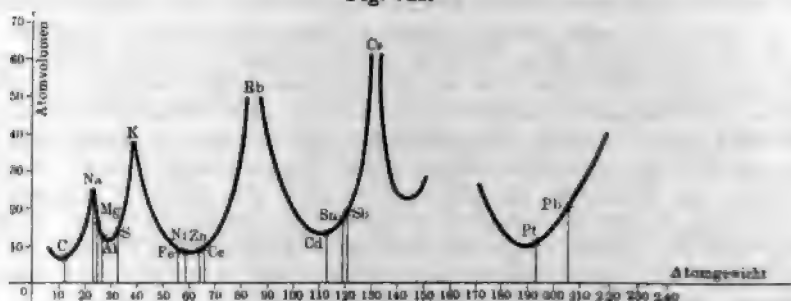
2. Auch von flüssigen und festen Körpern, welche sich nicht vergasen lassen, läßt sich auf das Molekulargewicht aus dem osmotischen Drucke von Lösungen dieser Stoffe schließen, weil nach VAN 'T HOFF der osmotische Druck sich ganz analog dem Gasdruck verhält (§ 56).

3. Auch aus Gefrierpunktserniedrigungen und Siedepunkterhöhungen solcher Lösungen (und anderen Erscheinungen der Molekularphysik) wurden ähnliche Schlüsse gezogen.

B. Die Atomgewichte ergeben sich meistens erst aus den Molekulargewichten und zwar wieder 1. am unmittelbarsten, wenn sowohl die Stoffe vor und nach dem Verbinden Gase sind (oder wenn wenigstens z. B. die Verbindung und ein Bestandteil Gase sind, wie im Beispiel des Methan CH_4 , § 210). — 2. Für feste Grundstoffe mit Atomgewichten über 30 hilft DULONG-PETITS Regel über die Atomgewichtszahlen entscheiden.

Natürliches, periodisches System der Elemente. — Überblickt man sämtliche bekannten Grundstoffe nach den direkt wahrnehmbaren Eigenschaften (spezifisches Gewicht, spezifische Wärme, Aggregatzustand bei Normaltemperatur u. s. f.) sowie nach der hypothetischen Eigenschaft des Atomgewichts, so scheinen sie auf den ersten Blick ein regelloses Zusammensein dieser verschiedenen Eigenschaften darzubieten. Ordnet man sie aber nach einer dieser Eigenschaften — u. zw. hat sich als gleichsam unabhängige veränderliche Größe am meisten das Atomgewicht bewährt —, so zeigen die übrigen Eigen-

Fig. 722.



schaften innere Zusammengehörigkeit, teils der Ähnlichkeit, teils des Kontrastes, womit sich die ganze Mannigfaltigkeit mehr oder minder deutlich in Familien, Gattungen und Arten gliedert.

„Fast alle Eigenschaften der Elemente stehen in näherem Zusammenhang mit dem Atomgewicht; sie sind Funktionen, u. zw. periodische Funktionen der Größe des Atomgewichts“ (LOTHAR MEYER). Besonders deutlich erweist sich die Dichtigkeit, die die Stoffe im festen Aggregatzustande haben als eine periodische Funktion des Atomgewichts, indem sie mit steigendem Atomgewicht ziemlich regelmäßig ab- und zunimmt. Am übersichtlichsten läßt sich diese Abhängigkeit darstellen, wenn man nicht die Dichtigkeit selbst, sondern das Atomvolumen, d. i. das Verhältnis des Atomgewichts zur Dichtigkeit, als abhängige Veränderliche einführt, wie dies in Fig. 722 durch die Ordinaten dargestellt ist; z. B. das Atomgewicht des Lithiums $\text{Li} = 7,01$; die Dichtigkeit dieses Metalls ist $D = 0,59$, also das Atomvolumen $V = \frac{7,01}{0,59} = 11,9$ (d. h. 7,01 g erfüllen 11,9 cm^3); ebenso Kohlenstoff $\text{C} = 12$, $V = 3,6$; Natrium $\text{Na} = 23$, $V = 33,7$; Kalium 39, $V = 45,4$; Eisen $\text{Fe} = 56$, $V = 7,2$. Daß hiermit, wie MENDELEJEFF, LOTHAR MEYER u. a. erkannten, ein „natürliches System der Elemente“ gewonnen ist, zeigt sich daraus, daß mehrfach in den absteigenden Ästen der Kurve metallische (elektropositive), in den aufsteigenden metalloide (elektronegative) Stoffe zu liegen kommen (ähnliche Beziehungen zur Leicht- und Schwerflüchtigkeit u. dergl.).

MENDELEJEFF hat aus der Stellung der Lücken im periodischen System sogar einzelne später entdeckte Elemente (Gallium, Scandium . . .) ihren Eigenschaften nach voraussagen vermocht!

Elemente und ihre internationalen Atomgewichte 1903.

Name (und Wertigkeit) Elementes	Zeichen	Atomgewicht bezogen auf		Name des Elementes	Zeichen	Atomgewicht bezogen auf	
		O = 16	H = 1			O = 16	H = 1
Aluminium . . .	Al	27.1	26,9	Nickel	Ni	58.7	58,3
Antimon	Sb	120.2	119,3	Niobium	Nb	94	93,3
.	A	39.9	39,6	Osmium	Os	191	189,6
.	As	75.0	74,4	Palladium	Pd	106.5	106,7
Baryum	Ba	137.4	136,4	Phosphor(III)[V]	P	31.0	30,77
Bismut	Be	9.1	9,08	Platin	Pt	194.8	193,3
.	Pb	206.9	205,35	Praseodym	Pr	140.5	139,4
.	B	11	10,9	Quecksilber (I)	Hg	200.0	198,5
.	Br	79.96	79,36	Radium	Ra	225	223,3
.	Cd	112.4	111,6	Rhodium	Rh	103.0	102,2
.	Cs	133	132	Rubidium	Rb	85.4	84,8
.	Ca	40.1 ± 40	39,8	Ruthenium	Ru	101.7	100,9
.	Ce	140	139	Samarium	Sa	150	148,9
.	Cl	35.45 ± 35.5	35,18	Sauerstoff (II)	O	16.00	15,83
.	Cr	52.1	51,7	Scandium	Sc	44.1	43,8
.	Fe	55.9 ± 56	55,5	Schwefel	S	32.06 ± 32	31,83
.	Er	166	164,8	Selen	Se	79.2	78,6
.	F	19	18,9	Silber	Ag	107.93	107,12
.	Gd	156	155	Silicium	Si	28.4	28,2
.	Ga	70	69,5	Stickstoff (III)	N	14.04 ± 14	13,93
.	Ge	72.5	71,9	Strontium	Sr	87.6	86,94
.	Au	197.2	196,7	Tantal	Ta	183	181,6
.	He	4	4	Tellur	Te	127.6	126,6
.	In	114	113,1	Terbium	Tb	160	158,8
.	Ir	193.0	191,5	Thallium	Tl	204.1	202,6
.	J	126.85	125,90	Thorium	Th	232.5	230,8
.	K	39.15 ± 39	38,86	Thulium	Tu	171	169,7
.	Co	59.0	58,56	Titan	Ti	48.1	47,7
.	C	12.00	11,91	Uran	U	238.5	236,7
.	Kr	81.8	81,2	Vanadin	V	51.2	50,8
.	Cu	63.6	63,1	Wasserstoff (I)	H	1.008	1,000
.	La	138.9	137,9	Wismut	Bi	208.5	206,9
.	Li	7.03	6,98	Wolfram	W	184.0	182,6
.	Mg	24.36	24,18	Xenon	X	128	127
.	Mn	55.0	54,6	Ytterbium	Yb	173.0	171,7
.	Mo	96.0	95,3	Yttrium	Y	89.0	88,3
.	Na	23.05 ± 23	22,88	Zink	Zn	65.4	64,9
.	Nd	143.6	142,5	Zinn	Sn	119.0	118,1
.	Ne	20	19,9	Zirkonium	Zr	90.6	89,9

Anmerkung: Die 1900 eingesetzte internationale Atomgewichtskommission legte sich Ende 1902 auf obige „internationale Atomgewichte“ (die für $H = 1$ werden jetzt als didaktische Atomgewichte bezeichnet). Die vom Anfänger prägenden Zahlen sind im Druck hervorgehoben; auch die Wertigkeit ist bei den in römischen Ziffern beigesetzt.

§. 212. Beziehungen zwischen Physik und Chemie.

Die Chemie pflegt definiert zu werden als „die Lehre von den stofflichen Veränderungen der Körper“, wogegen innerhalb einer rein physikalischen Erscheinung „an einem Körper nicht sein Stoff, sondern nur ein kleinerer oder größerer Teil seiner Eigenschaften sich verändern“. Gemeint ist hiermit, daß, wenn z. B. ein eiserner Schlüssel erwärmt und abgekühlt, magnetisch und unmagnetisch gemacht, mit Licht verschiedener Farben beleuchtet, durch Anschlagen zum Klingen gebracht, wenn er verbogen, zerbrochen wird u. s. w., er bei allen diesen Vorgängen immer noch „derselbe Stoff“, nämlich Eisen, bleibt; wogegen sich bei der Verbindung von Eisen mit Schwefel ein „neuer Stoff“, Schwefeleisen, bildet. Hierbei ist aber festzuhalten, daß wir auch von den Stoffen nur durch ihre Eigenschaften wissen können. (Vergl. über den Unterschied des Gebrauches der Wörter „Körper“ und „Stoff“ § 16, S. 60.) In der Tat charakterisiert ja auch der Chemiker jeden einzelnen Stoff nur durch die möglichst vollständige Reihe seiner physikalischen Eigenschaften, von diesen namentlich: **Aggregatzustand** bei Normaldruck (76 cm) und Normaltemperatur (0° C, oder „Zimmertemperatur“ zwischen 10° und 20° C); **Schmelz- und Siedepunkte** (kritische Temperatur und kritischer Druck vergl. § 77); **spezifisches Gewicht** (bei Gasen relative Dichte gegen das „Normalgas“, § 46, bzw. gegen Wasserstoff oder Luft); **Löslichkeit** in verschiedenen Flüssigkeiten bei verschiedenen Temperaturen; **Farbe, Geschmack, Geruch** (genauer: Verhalten zum normalen Sehorgan bei normaler Beleuchtung, meist im diffusen Tageslicht — namentlich aber auch das spektrale Verhalten, § 115; ebenso: Verhalten zum normalen Geruchs- und Geschmacksorgan u. s. f.); sonstiges optisches, elektrisches, magnetisches Verhalten u. s. f.). — Umgekehrt interessiert es den Physiker bei sehr vielen seiner Untersuchungen, ob der Stoff, mit welchem er es zu tun hat, „chemisch rein“ ist (z. B. bei spezifischen Wärmen, spezifischen Leitungswiderständen für Wärmeströme und elektrische Ströme u. s. f.). — Zwar tragen trotz dieses Ineinandergreifens physikalischer und chemischer Betrachtung auch heute noch z. B. die Arbeiten eines physikalischen Laboratoriums im ganzen ein anderes Gepräge als die eines chemischen (durch dessen beiderseitige vollständige Charakteristik dann erst der tatsächliche „Unterschied zwischen Physik und Chemie“ erschöpfend zu bestimmen wäre); doch hat namentlich in neuester Zeit gegenüber den ausschließlich physikalischen, bzw. chemischen Forschungsgegenständen und Methoden immer mehr an Umfang gewonnen das Grenzgebiet „**physikalische Chemie**“. Dieses hat schon innerhalb der mechanischen Eigenschaften engen Anschluß an die „Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen“ (Kap. V, S. 196): namentlich hängt die Krystallform mit der chemischen Zusammensetzung so eng zusammen, daß Stoffe gleichen chemischen Aufbaues auch dieselbe Krystallstruktur haben (isomorph sind); z. B. die verschiedenen Alaune, welche sich bei gleichem Anteil der Schwefelsäure durch verschiedene Metalle (Kali-alaun, Chromalaun ...) unterscheiden; deshalb auch u. a. ein Mutterkrystall aus einem dieser Stoffe in einer Lösung des anderen ungestört weiter krystallisiert. — Ferner zeigen Ausströmungs- und Diffusionsgeschwindigkeiten, innere Reibung einen gesetzmäßigen Zusammenhang mit der chemischen Zusammensetzung der Gase und tropfbaren Flüssigkeiten, desgl. der osmotische Druck, die Kontraktion mancher Mischungen (z. B. Alkohol und Wasser) u. s. f.

Innerhalb der Wärmelehre hängen die Dampfdichten, Schmelz- und Siedepunkte mit dem Molekulargewicht, die spezifischen Wärmen mit

dem Atomgewicht der Elemente zusammen. Es bilden diese Erscheinungen, sowie namentlich die Verbindungswärmen (und die bei Zersetzungen, namentlich Dissoziationen verbrauchten Wärmemengen) das beinahe schon selbständig gewordene Gebiet der „Thermochemie“.

Ferner hängt die Lichtbrechung, Emission, Absorption (vergl. über die Lage der Spektrallinien bei verschiedenen Stoffen, § 115), das optische Drehungsvermögen (§ 129) mit der chemischen Zusammensetzung eng zusammen. Ähnlich „Elektrochemie“, §§ 152, 153. — Entsprechend diesem Ineinandergreifen zahlreicher Erscheinungsgebiete der physikalischen und chemischen Seite erfahren auch die Molekular- und Atomtheorien beider Disziplinen fortgesetzte Weiterbildung durcheinander.

C. Einige Grundstoffe und deren Verbindungen.

Vorbemerkung 1. Um die Mitteilung dessen, was wir von den einzelnen Grundstoffen wissen, einigermaßen einheitlich zu gestalten, werde von jedem Stoffe, soweit er nicht schon in der Natur rein vorkommt, zuerst eine der bequemsten Laboratoriumsmethoden für eine Darstellung besprochen. Sodann Aufzählung der ihn definierenden und charakterisierenden Eigenschaften (vergl. vorigen Paragraph), wobei zunächst stillschweigend, gewöhnlicher Druck und gewöhnliche Temperatur vorausgesetzt sind, namentlich wenn der Stoff kurzweg als gasförmig, flüssig oder fest bezeichnet wird. Sodann die wichtigsten Arten seines Vorkommens in Gemengen und Verbindungen; unter ihnen namentlich diejenigen, die die übrigen Methoden seiner Darstellung geben. Hierauf seine Reaktionen gegen andere Stoffe und endlich seine Bedeutung im Haushalte der Natur und seine technischen Anwendungen.

Vorbemerkung 2. Als die oberste Einteilung aller Grundstoffe hat sich die in **Metalle** und **Nichtmetalle** bewährt, wiewohl es zwischen beiden keine scharfe Grenze gibt. Wiewohl die Zahl der Metalle viel größer ist als die der Nichtmetalle, so sind doch ihre Eigenschaften und ihr Verhalten im ganzen ähnlicher als die der untereinander fast keine durchgehenden gemeinschaftlichen Eigenschaften aufweisenden Nichtmetalle (weshalb auch diese nur durch den negativen Namen zusammengefaßt werden).

a) Einige Metalle.

§ 213. Metalle.

Die Haupteigenschaften, um derentwillen die lange bekannten Stoffe Gold, Silber, Eisen, Kupfer, Blei, ... aber auch die spät entdeckten (weil nur künstlich aus ihren Verbindungen darstellbaren) Kalium, Natrium, Aluminium ... in die eine Klasse der **Metalle** zusammengefaßt wurden, sind 1. das „metallische Aussehen“, welche optische Eigenschaft zurückgeht auf Undurchsichtigkeit und starke Reflexion (weshalb umgekehrt bei totaler Reflexion auch eine Grenzfläche von Luft und Wasser silberglänzend erscheint, § 104). 2. Hohe Leitungsfähigkeit für Wärme und Elektrizität. 3. Geschmeidigkeit (daher Eignung zur Bearbeitung durch Hämmern, Walzen ..., bei einem Teile auch durch Schweißen, Löten ...). Doch sind einige Metalle überhaupt spröde (z. B. Antimon ...),

andere je nach der Bearbeitung (z. B. glas harter Stahl ...). — Schon eine spezifische chemische Gemeinsamkeit der meisten Metalle ist es, daß sie vorwiegend basische (die Nichtmetalle dagegen meist saure) Oxyde bilden.

Hauptsächlich nach dem spezifischen Gewicht und der Art ihrer chemischen Reaktionen werden unterschieden

Leichtmetalle (relative Dichte gegen Wasser $\frac{1}{4}$ bis 4)	Alkalimetalle: Kalium, Natrium, Lithium... Metalle der alkalischen Erden: Baryum, Strontium, Calcium.
	Erdmetalle: Aluminium, Thallium...
Schwermetalle (relative Dichte gegen Wasser 7 bis 22)	Unedle Metalle: Eisen, Kupfer, Blei...
	Edelmetalle: Gold, Platin (Silber)...

Die uralte Bezeichnung „edel“ verdanken Gold und Silber zunächst ihrer schönen Farbe, dem starken Glanz, dem „warmen Griff“ (infolge der hohen Leitungsfähigkeit nehmen sie von der berührenden Hand schnell Wärme auf und infolge der geringen spezifischen Wärme erhöht sich dabei der Wärmegrad beträchtlich); insbesondere wertvoll machte sie aber ihre „Beständigkeit“ in Feuer und feuchter Luft, was wir jetzt als geringe Affinität, namentlich zum Sauerstoff verstehen (ebendeshalb nennt man die ebenfalls chemisch sehr indifferenten Gase Argon und Helium auch „Edelgase“, § 220). Gegenwärtig zählt man zu den Edelmetallen Gold, Platin (und einige seltene Metalle Iridium, Palladium u. s. w.); das Silber reihen manche in die „Zinngruppe“, das halbedle Quecksilber mit Zink in die „Magnesiumgruppe“. — Während die Edelmetalle, aber auch einige der anderen Schwermetalle in der Natur „gediegen“, d. h. unverbunden vorkommen, oder sich doch, künstlich aus Verbindungen abgeschieden, mehr oder minder „blank“ durch längere Zeit erhalten lassen, haben im Gegenteil die Leichtmetalle und unter ihnen wieder am meisten die Alkalimetalle sehr große Affinität zu den Nichtmetallen. Sie bilden das den Nichtmetallen entgegengesetzte Ende der Reihe von Grundstoffen in Bezug auf die Größe der zwischen ihnen bestehenden Affinitäten. In dieser Beziehung kann als das „metallischste Metall“ das Kalium bezeichnet werden, da es noch lebhaftere Reaktionen als Natrium zeigt (z. B. auf Wasser entzündet es sich sofort und verbrennt unter violetter Flamme, wogegen das Natrium sich erst entzündet, wenn es z. B. auf ein Flöckchen Papier gelegt, am Umherschleifen auf dem Wasser und hiermit an der Wärmeabgabe gehindert ist).

Legierungen. Solange Metalle technische Verwendung finden, pflegt man verschiedene Metalle zusammenzuschmelzen („Bronzezeitalter“ vor dem „Eisenzeitalter“ ...), z. B. Gold durch einen Zusatz von Kupfer härter zu machen u. s. w. Häufig hat eine Legierung bedeutend größere Härte als jedes der vereinigten Metalle für sich; desgleichen häufig viel niedrigere Schmelzpunkte (Roses Metallgemisch schmilzt bei 94°C).

Für die theoretische Chemie entsteht die Frage, ob solche Legierungen mechanische Gemenge oder chemische Verbindungen seien. Für die erste Annahme scheint zu sprechen, daß die zu vereinigenden Metalle in beliebigen Gewichtsverhältnissen zusammengebracht werden können; für die letztere Annahme spricht, daß nicht selten die Vereinigung (z. B. von Natrium und Queck-

silber zu Natriumamalgam, § 220) von starker Wärmeentwicklung begleitet ist. Die beiden Tatsachenreihen lassen sich miteinander in Einklang bringen durch die Annahme, daß dieselben zwei Metalle *A* und *B* nach dem Gesetz der multiplen Proportionen chemische Verbindungen nach verschiedenen ganzzahligen Verhältnissen miteinander eingehen und diese Verbindungen sich dann in beliebigen Verhältnissen mechanisch mischen können.

Die Verarbeitung gediegen vorkommender Metalle, die Gewinnung der Reinelemente aus Erzen und die Herstellung von Legierungen reichen zum Teil bis in die vorhistorischen Anfänge der Zivilisation zurück. Die ältesten hüttenmännischen Leistungen verstehen wir heute als Abscheidung der Metalle aus ihren Verbindungen mit Sauerstoff, Schwefel u. dergl. — Hochofenprozesse, Bessemer-Verfahren. — Einiges über die neueste Elektrometallurgie § 169.

b) Einige Nichtmetalle.

§ 214. Sauerstoff (Oxygenium, O = 16, Wertigkeit = II).

Versuch: Darstellung aus Kaliumchlorat, einem weissen Salze, das in einer Retorte erhitzt wird und dabei den ganzen Sauerstoff abgibt.

Der gewöhnliche (nicht ozonisierte) Sauerstoff ist ein farb-, geruch-, geschmackloses Gas, dessen Dichte etwas gröfser ist als die der Luft; man kann ihn daher kurze Zeit in einem nach oben offenen Gefäfse erhalten.

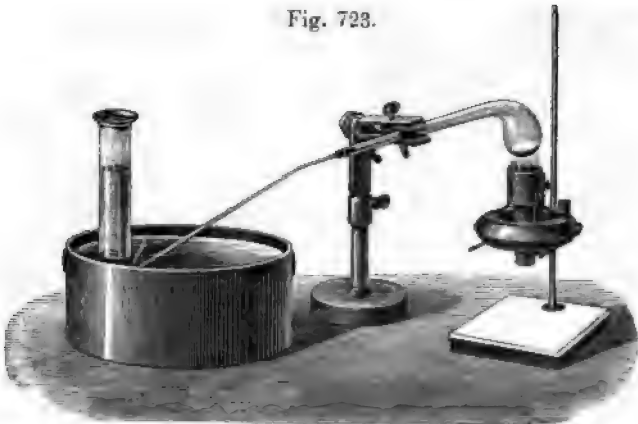
Der Normalsiedepunkt des Sauerstoffs ist -182°C , seine kritische Temperatur 119°C , der kritische Druck 50,8 Atmosphären.

Sauerstoff geht mit allen Grundstoffen (Fluor ausgenommen) Verbindungen ein; mehr als die Hälfte vom Gewicht der Erdrinde ist Sauerstoff.

Sauerstoff ist das einzige Gas, das die Atmung (§ 225), und das wichtigste (nicht das einzige), das die Verbrennung unterhält.

Methoden der Darstellung: 1. Elektrolyse des Wassers, § 154; und zwar ist die Wasserzersetzung unter Zusatz von Ätzkali (KHO) die zur fabrikmäßigen Herstellung des Sauerstoffs seit kurzem meist verwendete Methode. — 2. Aus Kaliumchlorat: $2\text{KClO}_3 = (2\text{KCl} + 2\text{O}_2) = 2\text{KCl} + 3\text{O}_2$. — 3. Aus Silberoxyd (oder aus rotem Quecksilberoxyd), das man in einer kleinen Retorte erhitzt, wobei der ganze Sauerstoff entweicht und

Fig. 723.



metallisches Silber (Quecksilber) sich abscheidet. — 4. Aus Braunstein (Mangandioxyd, MnO_2), den man in eisernen Retorten bis zum Rotglühen erhitzt und es dabei einen Teil seines Sauerstoffs abgibt: $3MnO_2 = Mn_2O_3 + O_2$. — 5. Mit Baryumoxyd (BaO), das bei Erhöhung der Temperatur aus der Luft noch Sauerstoff aufnimmt (BaO_2) und bei noch weiterer Erhöhung ihn wieder abgibt, so daß man mittels einer endlichen Menge BaO durch wechselndes Steigen- und Sinkenlassen der Temperatur beliebig große Mengen O aus der Luft gewinnen kann. — 6. Da aus der „flüssigen Luft“ (siehe unten) der Stickstoff rascher in die umgebende Luft diffundiert als der Sauerstoff, so ist auch dies eine der technisch verwerteten Methoden zur Gewinnung eines sauerstoffreichen Gemenges. — 7. Auch Pflanzenteile, namentlich frische grüne Blätter, geben, unter kohlen säurehaltiges Wasser gebracht und dem Sonnenlichte ausgesetzt, Sauerstoff ab.

Versuche: In reinem Sauerstoff verbrennt Schwefel mit tiefblauer lebhafter Flamme, Phosphor unter blendendem Glanz, Kohle hell leuchtend ohne Flamme, ein glimmender Holzspan entfacht sich zur Flamme, erhitztes Natrium verbrennt mit hellgelber Flamme, eine stählerne Uhrfeder, an deren einem Ende ein Feuerschwamm glimmt, verbrennt unter hellem Funkensprühen.

Wie das Verbrennen so ist auch das Atmen in reinem Sauerstoff ein viel intensiveres, im übrigen aber gleichartig mit dem in atmosphärischer Luft; eben dies weist darauf hin, daß die atmosphärische Luft ein Gemenge aus Sauerstoff und chemisch indifferenten Gasen (Stickstoff, Argon, Helium u. s. f.) sei. Näheres hierüber im Zusammenhange mit der Chemie des Stickstoffs, § 220.

Ozon = O_3 (im Gegensatz zu gewöhnlichem Sauerstoff O_2). Das Gas macht sich durch seinen Geruch bemerklich in der Nähe einer elektrischen Funkenstrecke in Luft; ein noch empfindlicheres Reagens ist Jodkaliumkleister, der sich in ozonisierter Luft sogleich blau oder braun färbt.

Daß Ozon O_3 , gewöhnlicher Sauerstoff O_2 , vergl. § 209. — Durch starke Abkühlung läßt sich Ozon vom begleitenden gewöhnlichen Sauerstoff befreien und wird als kräftigstes Oxydationsmittel fabrikmäßig hergestellt und verwendet.

Die Verbindungen des Sauerstoffs mit Grundstoffen heißen **Oxyde** (über saure, indifferente und basische vergl. § 217). Der Vorgang des Verbindens heißt **Oxydieren**, das Entziehen des Sauerstoffs **Desoxydieren** oder **Reduzieren**. Reduktionsmittel sind Wasserstoff, Kohle, Phosphor u. s. f.

Geschichtliches. Von allen einzelnen Entdeckungen auf dem Gebiete der Chemie hat die tiefstgehende Revolution aller theoretischen Vorstellungen von chemischen Vorgängen die Erforschung des (zuerst durch PRIESTLEY dargestellten) Sauerstoffs und seiner Verbindungen durch LAVOISIER bewirkt. — Die ganze zu einzelnen Erfahrungen reiche Chemie des XVIII. Jahrhunderts war beherrscht gewesen durch STAHL'S (1680 bis 1734) Theorie des „Phlogiston“ ($\varphi\lambda\omicron\gamma\iota\sigma\tau\omicron\varsigma$, verbrannt; $\varphi\lambda\omicron\varsigma$, die Flamme). Zunächst stellen sich STAHL'S Annahme eines Phlogiston und LAVOISIER'S Annahme eines Sauerstoffs als zwei verschiedene, ja einander in bestimmter Weise entgegengesetzte Deutungen des nämlichen Kreises von Tatsachen dar, z. B. folgender: Das metallische Eisen geht an der Luft in den erdigen Eisenrost über. Von weißglühendem Eisen blättert sich unter dem Hammer der zwar nicht erdige, aber auch nicht mehr eigentlich metallische Hammerschlag ab. Das metallische Zink verbrennt zur flockigen „Zinkasche“, was auf den ersten

Blick erinnert an das Verbrennen des Holzes zu Holzasche. Diese Vorgänge nun, welche wir heute mit Lavoisier nur mehr als Verbindungen, nämlich der Metalle mit dem Sauerstoff, denken zu müssen überzeugt sind (z. B. Eisenrost = Eisen *plus* Sauerstoff, Zinkasche = Zink *plus* Sauerstoff), hatte Stahl gerade umgekehrt als Zerlegungen (nämlich den Eisenrost als Eisen *minus* Phlogiston, die Zinkasche als Zink *minus* Phlogiston u. s. f.) aufgefaßt. Wiewohl wir diese Auffassung heute nicht mehr teilen, hat doch Stahls Auffassung dadurch, daß sie eine große Zahl von Erscheinungen einheitlich zu überschauen gestattete, wie Lavoisiers entgegengesetzte einheitliche Auffassung der Chemie des XVIII. Jahrhunderts im Vergleiche zu allen vorausgegangenen chemischen Einzelkenntnissen zum erstenmal ein eigentlich systematisch-wissenschaftliches Gepräge gegeben; und tatsächlich sahen sich alle großen Entdecker jener Zeit, CAVENDISH, PRIESTLEY, SCHEELÉ . . ., bei ihren Entdeckungen durch die von ihnen angenommene STAHLsche Theorie nichts weniger als gehindert. Daß wir heute nichtsdestoweniger uns durchaus gegen STAHL und für LAVOISIER entschieden haben, liegt in der bei weitem größeren Ungezwungenheit der Annahme, daß der Sauerstoff nur ein „Stoff“ wie alle anderen sei, weil tatsächlich, wenn z. B. eine bestimmte Gewichtsmenge Zink in Zinkasche übergeht, hierbei das Gewicht größer wird, also ein Stoff von positivem Gewicht hat aufgenommen werden müssen, während Stahls Auffassung das Phlogiston als einen Stoff von negativem Gewicht anzunehmen nötigen würde, wie wir seinesgleichen sonst nicht kennen (das Mitwirken eines Auftriebes umgebender Luft u. dergl., aus welchem z. B. wir das „Leichterwerden“ eines gefüllten Luftballons erklären, läßt sich bei Lavoisiers Versuchen ausschließen; in der Tat muß z. B. bei Versuchen über die Verbrennung von Phosphor in einem verschlossenen Ballon mit Sauerstoff oder atmosphärischer Luft abgewartet werden, bis die erwärmten und daher aufsteigenden Luftströme die Wägung nicht mehr stören). — Es bleibt auch gegenwärtig noch eine lehrreiche Übung, die tatsächlichen Vorgänge statt nach der Theorie von Lavoisier nach der von Stahl zu deuten und zu benennen. Z. B. aus den Gleichungen Eisenrost = Eisen + Sauerstoff und: Eisenrost = Eisen — Phlogiston folgt weiter: „Sauerstoff ist negatives Phlogiston“ (oder „Phlogiston ist negativer Sauerstoff“). Was könnten die modernsten Vertreter dieser These oder Definition gegen das Argument einwenden: „Sauerstoff läßt sich für sich darstellen, Phlogiston nicht“? — Vergl. die analoge Umdeutbarkeit mancher Wärmevorgänge in „Kältevorgänge“; aber auch, warum wir doch nur von Kalorien, nicht von „Frigorien“ sprechen; desgleichen, warum man vom Begriffe des „Luftdruckes“ wohl nie mehr zu Galileis Begriff einer „Kraft des Vakuums“, § 44, zurückkehren wird). Was wir heute „Metalloxyde“ nennen, hatte Stahl „dephlogistische Metalle“ genannt. (Inwiefern ist die Bezeichnung „Zinkasche“ nicht analog zu deuten wie „Holzasche“?) — Das Chlor gewann SCHEELÉ aus der Salzsäure (HCl), indem er ihr durch den sauerstoffreichen Braunstein (MnO_2) den Wasserstoff entziehen ließ, weshalb man noch lange das Chlor nicht für einen Grundstoff, sondern für „oxydierte Salzsäure“ hielt; Scheele selbst aber hatte gemeint, daß er die „Salzsäure dephlogistiert“ habe. — Wir drücken heute Kohle, Kohlenoxyd, Kohlendioxyd aus durch C, CO, CO_2 , von welchen drei Stoffen C am meisten, CO weniger, CO_2 gar nicht brennbar ist. Dagegen war nach Stahls Theorie CO eine halb, CO_2 eine ganz dephlogistierte Kohle.

Daß übrigens Lavoisier trotz seiner glücklichen Theorie über viele chemische Einzelheiten noch anders dachte als wir, bezeugen die Beispiele, daß er Licht und Wärme zu den chemischen Grundstoffen zählte, die wir heute überhaupt nicht

mehr für Stoffe halten; daß er auch Kali und Natron unter dem Namen Alkalien noch für Grundstoffe hielt, wogegen er von Kalkerde, Tonerde, Baryterde wenigstens vermutete, daß sie nicht Grundstoffe seien. Von den heute bekannten an 50 Metallen kannte Lavoisier nur 17.

§ 215. Wasserstoff (Hydrogenium, $H = 1$, Wertigkeit = 1).

Darstellung aus einer Säure (Schwefelsäure, Salzsäure, nicht Salpetersäure) mittels eines Metalles (Zink, Eisen, nicht Kupfer, *Versuche* § 204).

Wasserstoff ist ein farb-, geruch-, geschmackloses Gas; seine Dichte ist die kleinste unter allen Grundstoffen und Verbindungen.

Der Normalsiedepunkt ist $252^{\circ}C$, die niederste erreichte Temperatur $257^{\circ}C$, der kritische Druck 15 Atmosphären (§ 77). — Ob es gelungen sei, festen Wasserstoff (bei raschem Verdunstenlassen von flüssigem) herzustellen, ist noch nicht ganz sicher; es wurde bei einzelnen Versuchen ein weißer schaumiger Stoff beobachtet, bei anderen ein bläulicher Strahl, der unter klirrendem Geräusch den Steinboden traf.

Wasserstoff kommt in der Natur rein vor (als Exhalation von Vulkanen, als „ewiges Feuer“, glühend in den Protuberanzen der Sonne, absorbiert von Metallen); in Verbindung mit Sauerstoff im Wasser (siehe unten), mit Kohlenstoff in zahlreichen Kohlenwasserstoffen, überhaupt in zahllosen organischen Verbindungen; in allen Säuren (§ 217).

Methoden der Darstellung: I. Aus Wasser 1. durch Elektrolyse (über die Berechtigung des Ausdruckes „Wasserzersetzung“ vergl. § 154); 2. mittels Natrium (§ 204, Versuch 3); 3. indem man Wasserdämpfe über glühendes Eisen (Kupfer) leitet, wobei sich der ganze Sauerstoff mit dem Eisen verbindet und der ganze Wasserstoff frei wird. — II. Aus Säuren (siehe oben).

Wasserstoff pflegte anfangs unter den Nichtmetallen genannt zu werden. Später wurde er unter die Metalle gezählt, da er 1. oft durch Metalle in Verbindungen ersetzt wird und 2. sich besonders gern mit Nichtmetallen verbindet. Am zutreffendsten aber ist es, ihm eine Stellung zwischen den Nichtmetallen und Metallen anzuweisen und zwar näher den letzteren, da zwar sein Superoxyd H_2O_2 basische Eigenschaften zeigt, seine häufigste Verbindung Wasser H_2O aber nur ein indifferentes Oxyd ist. Auch hat der feste Wasserstoff nach obigen Versuchen nicht das erwartete metallische Aussehen gezeigt.

Wiederholender Überblick über die vielen auszeichnenden Eigenschaften des **Wassers**: Lösungsfähigkeit für sehr viele Stoffe, sehr hohe spezifische Wärme, Abweichung vom Ausdehnungsgesetz (Dichtigkeitsmaximum bei $4^{\circ}C$), sehr hoher elektrischer Leitungswiderstand; etwa vier Fünftel der Erdoberfläche sind mit Wasser bedeckt. Bedeutung für das organische Leben. Hygienisches über die verschiedenen Arten des Wassers: hartes, weiches, Quell-, Brunnen-, Fluß-, Regenwasser.

Versuche: Bildung von Wasser bei Verbrennen von trockenem Wasserstoff in trockenem Sauerstoff (Luft); Brennen von Sauerstoff in Wasserstoff (Vorsicht!), richtiger Verbinden von Wasserstoff und Sauerstoff unter Feuererscheinung zu Wasser. — Reduktion von Kupferoxyd durch Wasserstoff; $2CuO + 2H_2 = Cu_2 + 2H_2O$.

§ 216. Chlor (Cl = 35,5, Wertigkeit = I). — Die Halogene.

Der bekannteste von den Stoffen, welche Chlor enthalten, ist das **Kochsalz**. Aus dem Kochsalz wurde schon von GEBER (um 700 n. Chr.) durch Erwärmen mit Schwefelsäure das **Salzsäuregas** gewonnen. Dieses Gas wird von Wasser gierig absorbiert und gibt wässrige **Salzsäure** (welche aber auch als wohlfeiles Nebenprodukt u. a. bei der Sodaerzeugung entsteht). — Erst aus der Salzsäure gewann dann SCHÉELE das **Chlorgas**, das in der Natur nirgends unverbunden vorkommt, weil es insbesondere zu den Metallen große Verwandtschaft hat.

Chlor ist im Normalzustande ein Gas von grüngelber Farbe (daher der Name *χλωρός*, grün) und stechendem Geruch. Seine Dichte ist 35,5 in Bezug auf Wasserstoff, 2,5 in Bezug auf Luft, 2,3 in Bezug auf Sauerstoff. Bei 0°C wird es durch 3,7at zu einer öligen Flüssigkeit von 1,56 Dichte in Bezug auf Wasser. — Das Chlorgas zerstört organische Stoffe, in geringen Mengen eingeatmet bringt es Entzündung der Schleimhäute, bei größeren Mengen Bluthusten hervor. Es dient als Bleich- und Desinfektionsmittel (Chlorkalk).

Diese Vorgänge erklären sich aus der großen Verwandtschaft von Cl zu H: Meistens wirkt Chlor in der Weise auf organische Verbindungen, daß es sich mit einem oder mehreren H-Atomen verbindet, und daß an deren Stelle ebensoviele Cl-Atome treten. Indem überdies der frei werdende Sauerstoff *in statu nascendi* kräftig oxydierend auf die Verbindungen des Tier- und Pflanzenkörpers wirkt, ist das „Bleichen durch Chlor“ eigentlich ein Farbloswerden der Farbstoffe durch Aufnahme von Sauerstoff. Insofern ist die Endwirkung dieselbe wie bei der Rasenbleiche, wo ebenfalls die befeuchtete Leinwand unter Einwirkung des Sonnenlichtes durch den aus dem Wasser an die Farbstoffe übergehenden Sauerstoff entfärbt wird.

Das Chlor gibt, mit gleichem Volumen Wasserstoff gemengt, Chlorknallgas, welches entzündet, aber auch schon im directen Sonnenlicht oder Magnesiumlicht, unter heftiger (sehr gefährlicher!) Explosion in **Chlorwasserstoffgas** übergeht.

Im Chlorgas verbrennt erhitztes Natrium zu **Kochsalz**, Antimonpulver entzündet sich.

Schon im § 214, Ende, wurde der theoretischen Schwierigkeiten gedacht, welche der Auffassung des Chlors als eines Grundstoffes entgegenstanden. — Heute stellt sich uns der Zusammenhang der angeführten Stoffe und ihrer Reaktionen so dar:

1. Darstellung von Salzsäure: $2\text{NaCl} + \text{H}_2\text{SO}_4 = 2\text{HCl} + \text{Na}_2\text{SO}_4$.

2. Darstellung von Chlor: $4\text{HCl} + \text{MnO}_2 = \text{Cl}_2 + \text{MnCl}_2 + 2\text{H}_2\text{O}$.

Hier ist bei 2. durch das Oxydationsmittel MnO_2 das HCl vom H befreit worden. — Auch wenn man 3. dem NaCl und H_2SO_4 des Vorganges 1. noch MnO_2 zusetzt, erhält man Cl.

Jod, Brom, Fluor. — Dem Kochsalz vielfach ähnlich sind diejenigen Stoffe, welche als **Jodkalium, Jodnatrium, Bromkalium, Bromnatrium** ... im Handel vorkommen (und strenger als Kalium-

jodid, Natriumbromid ... bezeichnet werden). Aus ihnen lassen sich (ganz ähnlich wie bei Versuch 2 das Chlor) das **Jod** als ein veilchenblaues (*iōdós*, veilchenartig), das **Brom** als braunes, heftig stinkendes (*βρωμός*, Gestank) Gas ausscheiden. — Jod sublimiert leicht zu festen Schüppchen, Brom kondensiert sich zu einer braunen Flüssigkeit.

Dem Cl, J, Br reiht sich das **Fluor**, Fl, an, welches, weil es fast alle Stoffe heftig angreift, erst seit kurzem aus seinen Verbindungen ausgeschieden und als dem Chlor ähnlich erwiesen wurde.

Die verbreitetste Fluorverbindung ist der Flussspat = Calciumfluorid, CaF₂. Aus ihm wird durch Übergießen mit Schwefelsäure die Flußsäure gewonnen, welche schon seit etwa 250 Jahren zum Glasätzen verwendet wird.

Chlor, Brom, Jod, Fluor heißen **Salzbildner** oder **Halogene**, weil sie mit Metallen Verbindungen bilden. Die Verbindungen Chlorwasserstoff HCl, Jodwasserstoff HJ, Bromwasserstoff HBr, Fluorwasserstoff HF, heißen **Haloidsäuren**.

Dem Cl, J, Br, Fl ähnlich wie auch das „zusammengesetzte Radical“ Cyan (Cy = CN, § 209, Pkt. 7) KCy (Cyankalium).

§ 217. Säuren und Salze. — Basen.

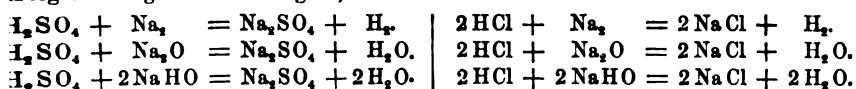
Das Wort „Säure“ weist in der wissenschaftlichen Bedeutung auf eine einzige Eigenschaft zahlreicher Stoffe hin, nämlich „sauer“ zu schmecken, wie Essig, auch noch sehr verdünnte Salze, Salpetersäure u. s. w. Der Begriff dagegen, welcher gegenwärtig mit dem Namen „Säure“ verbunden wird, enthält jenes Merkmal „sauer“ überhaupt nicht mehr, indem z. B. auch die (unbeständige) Verbindung H₂SiO₄ als „Kieselsäure“ bezeichnet wird, wiewohl sie als in der Speichelflüssigkeit unlöslich, überhaupt nicht schmeckt. Die wissenschaftlichen Gründe, welche zu diesem Begriffswandel unter Festhaltung des alten Namens geführt haben, liegen in Erfahrungen folgender Art: Neben der Eigenschaft, sauer zu schmecken, welche die am längsten bekannten Säuren haben, ist ihnen auch die Fähigkeit gemeinsam, mit Metallen, Metalloxyden und Basen Stoffe von der Art des Eisen-, Kupfer-, Zinkvitriols, des Kali-, Natronsalpeters u. s. w. zu bilden, die ihrerseits wieder wegen auffälliger Ähnlichkeiten mit dem Kochsalz unter die Bezeichnung „Salze“ zusammengefaßt wurden.

Noch zu Lavoisiers Zeit hielt man für einen gemeinschaftlichen und charakteristischen Bestandteil aller dieser Säuren und Salze den Sauerstoff (dieser hatte ja ebendeshalb seine Bezeichnung „Sauer-Stoff“ erhalten, welche schon im Hinblick auf die basischen und indifferenten Oxyde keineswegs glücklich ist). Durch die Entdeckung nun, daß gerade in dem bekanntesten aller Salze, dem Kochsalz NaCl, überhaupt gar kein Sauerstoff vorkommt und daß auch das Salzsäuregas HCl gar keinen Sauerstoff enthält und dennoch mit einem Metall, z. B. Na, zusammen unmittelbar jenes Kochsalz wiedergibt, wurde die Aufmerksamkeit viel mehr auf den Wasserstoff als den allen Säuren gemeinschaftlichen Bestandteil gelenkt (so daß also viel mehr dieser den Namen „Sauerstoff“ verdient hätte, zumal er dem Wasser nicht charakteristischer ist als O; natürlich ist aber an eine völlige Umnennung kaum mehr zu denken). So gelangte man zu den beiden folgenden miteinander zusammenhängenden Definitionen:

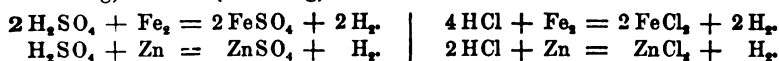
Säuren sind Verbindungen, in welchen der Wasserstoff durch ein Metall oder metallähnliches Radikal ersetzbar ist.

Salze sind Verbindungen, welche aus einer Säure hervorgehen, indem ihr Wasserstoff durch ein Metall oder metallähnliches Radikal ersetzt wird.

Je nachdem die Säure eine Sauerstoffsäure (H_2SO_4 , HNO_3 . . .) oder eine Haloidsäure (HCl , HFl . . .) ist und je nachdem ihr das Metall entweder als reines Metall (Na . . .) oder als basisches Oxyd (Na_2O . . .) oder als Base (NaHO . . .) zugesetzt werden kann, ergeben sich sechserlei Vorgänge nach folgenden Mustern (wobei praktisch zu beachten ist, daß z. B. beim Einführen von Natriummetall in die Salz- oder Schwefelsäure die Verbindung mit explosionsartiger Heftigkeit vor sich geht):



Ähnlich statt des einwertigen (zweiatomigen) Na , die zweiwertigen Metalle Fe (zweiatomig) und Zn (eiatomig):



Man beachte, in welchen Fällen neben dem Salz Wasserstoff und in welchen dagegen Wasser auftritt. — Wieso erweist sich also gegenüber den neuen Begriffsbestimmungen von Säure und Salz die alte Definition: „Ein Salz ist die Verbindung einer Säure und einer Base“ als zu eng? — Auch die häufig auszeichnende Definition: „Chemische Verbindungen, welche durch „Neutralisieren“ einer Säure mittels eines Metalles, eines basischen Oxydes oder einer Base entstehen, heißen Salze“ ist nicht allgemein genug. Es sind nämlich war die angeführten Beispiele solche, in welchen das entstehende Salz weder die saure Reaktion (Röten der blauen Lackmustinktur) noch die „basische Reaktion“ (gerötete Lackmustinktur wieder bläuen) zeigt, also „neutral“ ist. Es gibt aber auch „saure Salze“; so zeigt z. B. schon CuSO_4 saure Reaktion was man sich daraus begreiflich machen kann, daß CuO eine „schwache“ Base, H_2SO_4 eine „starke“ Säure ist). Insbesondere verbleibt dem Salz etwas von den sauren Eigenschaften, wenn nicht der ganze, sondern nur ein Teil des Wasserstoffs durch das Metall ersetzt wird. So ist das Glaubersalz, Na_2SO_4 , neutrales Natriumsulfat (ältere Bezeichnung: „einfachschwefelsaures Natron“), dagegen ist NaHSO_4 , Natriumhydrosulfat, ein saures Salz (ältere Bezeichnung: „doppeltschwefelsaures Natron“). — Ähnlich die noch immer verbreitete Bezeichnung „doppeltkohlensaures Natron“ (§ 221).

§ 218. Schwefel (Sulfur, S = 32, Wertigkeit = II).

Schwefel ist gelb, durchscheinend, spröde, in Wasser und Weingeist unlöslich, im Schwefelkohlenstoff löslich. Er schmilzt bei 111°C (und bildet eine hellbraune Flüssigkeit, die beim stärkeren Erhitzen dunkelrotbraun wird; bei 250° ist er dickflüssig, bei 400° wieder dünnflüssig), bei 450°C siedet er. Werden die Schwefeldämpfe rasch abgekühlt, so sublimieren sie zu Schwefelblumen (Reinigung des Schwefels). —

so daß also Schwefel in dreierlei **allotropen Modifikationen** die rhombische Form ist stabil.

Das bei der Verbrennung von Schwefel in trockener Versuch 7) oder in reinem Sauerstoff (§ 214) sich bei **Schwefeldioxyd**, SO_2 (oft fälschlich „Schwefeldampf“ ihm gehen hervor nach den Gleichungen $\text{SO}_2 + \text{O} = \text{trioxyd}$, und $\text{SO}_2 + \text{H}_2\text{O} = \text{H}_2\text{SO}_4$ **englische Schwefelsäure**

Versuch: Eine große Glasflasche oder ein Kolben von etw. Volumen wird mit dem Gemenge von etwa zwei Volumteilen Volumteil O gefüllt (was sich bei Verwendung zweier gleicher W. der Durchgangsgeschwindigkeit der Gasblasen schätzen läßt). für sich aufeinander nicht chemisch ein; wird aber in einer Platin- oder Nickeldrahtnetz locker gestopfter Platinasbest mit über der Bunsenflamme schwach erhitzt und in das Gasgemenge bilden sich (durch „katalytische“ Einwirkung des in die Verbindung eingehenden Platins) sogleich dichte Nebel von SO_3 , die, wenn waren, in dem dicht verschlossenen Gefäß nach einiger Zeit an Krystalle sich absetzen. Dabei tritt Volumverminderung ein, w. Druckverminderung in einem angesetzten Manometerrohr zeigt dann H_2O in das Gefäß gebracht, so bildet sich H_2SO_4 (wie s. Lösung von BaCl_2 , Baryumchlorid, zeigen läßt, das auf H_2SO_4 scheidung eines weißen Niederschlages von BaSO_4 reagiert) „Kontaktverfahren“ wird gegenwärtig schon ein größerer Teil technische Betriebe wichtigen H_2SO_4 fabrikmäßig hergestellt als Salpetersäureverfahren (§ 220).

Schwefelwasserstoffgas entwickelt sich bei **Ü** Schwefeleisen mit Schwefelsäure: $\text{FeS} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{FeS}$

Wird H_2S durch Lösungen von Metallsalzen geleitet, so „Fällungen“ charakteristische Farben an (Zinksulfid weiß, Kadm. gelb, Kupfersulfid schwarz) und es bildet somit dieses Gas ein

§ 219. Phosphor (P = 31, Wertigkeit = III oder V).

Phosphor kommt in zwei allotropen Modifikationen vor: Der **weiße** (gelbliche) Phosphor ist durchscheinend, aus Lösungen (z. B. in **Schwefelkohlenstoff**) krystallisierend. Seine Entzündungstemperatur in reinem Sauerstoff ist 45°C ; auch in gewöhnlicher Luft entzündet er sich schon bei der durch schwaches Reiben eintretenden Temperaturerhöhung (er muß daher unter Wasser im Dunkeln aufbewahrt und als sehr giftig überhaupt mit großer Vorsicht behandelt werden). — Der **rote** (schwärzliche) Phosphor ist erst bei viel höherer Temperatur entzündlich und nicht giftig; er zeigt nur Spuren von Krystallisation (daher oft als amorph bezeichnet).

Über das Leuchten des Phosphors im Dunkeln, von dem er seinen Namen hat, das aber nicht eigentliche Phosphoreszenz, sondern Chemilumineszenz ist, vergl. § 121. — Phosphor wird aus dem Calciumphosphat der Tierknochen gewonnen. Mit Sauerstoff gibt er Phosphorpentoxyd, P_2O_5 , und dieses mit Wasser Phosphorsäure. — Die 1835 erfundenen Phosphorzündhölzchen (eine zu ihrer Zeit sehr lebhaft begrüßte Neuerung) haben als Köpfchen Gemische des gelben Phosphors mit Braunstein u. dergl. und Klebemittel. — Bei den „schwedischen Zündhölzchen“ ist der ungiftige rote Phosphor in den Reibflächen verwendet, wogegen die Köpfchen aus Kaliumchlorat und Schwefelantimon bestehen.

§ 220. Stickstoff (Nitrogenium, N = 14, Wertigkeit = III).

Stickstoff ist ein farb-, geruch- und geschmackloses Gas von etwas kleinerer Dichte als Luft, von der es etwa vier Fünftel ausmacht (siehe unten). Er kann das Atmen (und Verbrennen) nicht unterhalten, ist jedoch nicht giftig, überhaupt chemisch sehr indifferent. — Stickstoff kommt in vielen Verbindungen, namentlich auch in organischen Stoffen, mit Sauerstoff, Wasserstoff und Kohlenstoff verbunden, vor (über stickstoffhaltige Lebensmittel vergl. § 225).

Von den in § 209 genannten fünf Verbindungen des Stickstoffs mit Sauerstoff gibt N_2O , mit Wasser die **Salpetersäure** ($\text{N}_2\text{O}_5 + \text{H}_2\text{O} = 2\text{HNO}_3$); diese ist eine farblose (gelbliche), sehr sauerstoffreiche Säure und wirkt als Oxydationsmittel. (So wird nach einem älteren Verfahren, als das nach § 218, um H_2SO_4 im großen zu erzeugen, S zu SO_2 verbrannt, dieses zusammen mit Wasserdampf und Luft in Bleiklammern geleitet, in denen eine begrenzte Menge HNO_3 abwechselnd O abgibt und die Stickoxyde sich wieder durch O aus der Luft zu HNO_3 ergänzen.) Ebenfalls sehr sauerstoffreich sind die Salze des HNO_3 , nämlich **Kallsalpeter** (KNO_3 , Verwendung im Schießpulver) und **Natronsalpeter** (NaNO_3 , Chilesalpeter), aus welchem man HNO_3 durch Erwärmen mit Schwefelsäure und Abkühlen der Dämpfe gewinnt: $\text{NaNO}_3 + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{HNaSO}_4 + \text{HNO}_3$.

Gießt man HNO_3 über Kupfer- oder Zinnspäne, so steigen dichte Wolken eines gelbbraunen, auf die Atmungswerkzeuge sehr zerstörend einwirkenden Gases auf: es ist **Untersalpetersäuregas**, NO . Es entwickelt sich auch z. B. in geschlossenen Bunsenelementen.

das Gemenge schon bei gewöhnlicher Temperatur jenen Geruch, der von der im Handel als „Salmiakgeist“ stark basischen Flüssigkeit her bekannt ist. Er ist Ammoniakgas.



Versuch 2: In je einem hohen Probierzylinder Tropfen Salmiakgeist, bzw. Salzsäure herumgeschwenkt (auch erwärmt); werden die Gläser mit den Mündungen gebracht, so bilden sich dicke Nebel von Salmiakkrystallen.



Der Bau der Formel NH_4Cl entspricht dem von NaCl . Da auch Salze chemisch ähnliches Verhalten zeigen, so liegt die Vermutung, das zusammengesetzte Radikal „Ammonium“ sich wie das des Grundstoffes Na verhalten wird. Diese Erwartung bestätigt sich.

Versuch 3: Wir legen auf 1 bis 2 cm³ Quecksilber erbsengroße Stücke Natrium, die, sobald eine frische Schnittfläche mit dem Quecksilber in Berührung kommt, sich mit ihm unter Feuererscheinung zu Natriumamalgam verbinden. Diese teigigen oder harten Brocken der Legierung lösen sich, wenn wir sie mit einer konzentrierten Lösung von NH_4Cl in Wasser setzen, zum 10- bis 20fachen ihres Volumens an: der neue Stoff ist ein Natriumamalgam, d. h. an Stelle des Metalles Na im Natriumamalgam tritt das ammoniumartige Radikal NH_4 getreten (das ausgeschiedene Na verbindet sich mit dem Salmiak zu NaCl). — Das Ammoniumamalgam selbst zerfällt wieder unter Ausscheidung von Ammoniak, NH_3 , und Wasserstoff. Die Lösung des Kochsalzes in Wasser und Quecksilber zurückbleibt.

Näheres zur Chemie der atmosphärischen Luft. Hauptbestandteile der Luft sind fast überall und immer Stickstoff auf 21 Volumteile Sauerstoff (also 79 : 21).

lenen eines als identisch mit dem schon früher auf der Sonne aufgefundenen und deshalb Helium (§ 115) genannten, befunden wurde; andere wurden als Xenon, Neon, Krypton bezeichnet.

Die fast nie fehlenden Beimengungen von Wasserdampf, Kohlendioxyd und Ammoniak sind von größter Bedeutung für die Rolle der Luft im organischen Leben und insbesondere auch in vielen hygienischen Rücksichten.

Über den Wassergehalt, der bis zu etwa 4% Volum vorkommt, vergl. § 194.

Der Gehalt an Kohlendioxyd CO₂ (Kohlensäure) beträgt im Mittel nur etwa 0,03% des gesamten Luftvolumens. Wegen der Zersetzung von CO₂ unter Einfluß des Sonnenlichtes (§ 225) findet sich bei Tag weniger CO₂ als bei Nacht. In Großstädten ist der CO₂-Gehalt größer als auf dem Lande; z. B. in London bei Nebelwetter 0,14%. Steigt er, z. B. im Schulzimmer, auf 0,5%, so tritt Übelbefinden der in solcher Luft Atmenden ein. (Dies rührt aber hauptsächlich von den Nebenprodukten der Atmung, „Anthropotoxin“, her. Mischt man der Luft 0,5% reine CO₂ bei, so treten noch keine Beschwerden ein.)

Viel geringer sind noch die Mengen von Ammoniak, das sich bei Zersetzung organischer Stoffe bildet; ferner Ozon (auf 1 m³ nur 0,04 mg) und verschiedene Säuren. Die Meinung, daß Waldluft viel mehr Ozon enthalte als andere, hat sich als irrig erwiesen.

Außer diesen gasförmigen Bestandteilen sind die zusammenfassend als Staub bezeichneten festen Teile mehrfach bedeutsam.

Auch in „sehr guter Luft“ auf dem Lande und an der Meeresküste kommen auf 1 cm³ noch mehrere tausend Staubteilchen; in Edinburgh bei trübem Wetter 250000 pro cm³; in einem Zimmer, wo 426000 pro cm³ gezählt worden waren, steigerte sich die Zahl auf 46,10⁶, nachdem 4 Gasflammen zwei Stunden lang gebrannt hatten; die Zahl der Staubteilchen, die ein Zigarrettenraucher in einem Zuge aussendet, werden auf 4,10⁶ geschätzt. (Die Zählung der Staubteilchen gelang AITKEN, indem er die zu untersuchende Luft mit Wasserdampf sättigte und hierdurch jedes Staubteilchen zu einem Kondensationskern machte, worauf dann die Zahl der Tröpfchen unter dem Mikroskop direkt zu ermitteln war.)

Beschaffenheit und Herkunft der einzelnen Staubteilchen ist sehr verschieden: viele sind anorganisch, dem Erdboden der näheren und fernerer Umgebung entstammend, dazu vulkanischer und kosmischer Staub (dieser z. B. nach dem Ausbruch des Krakatau 1883, vielleicht auch nach dem Ausbruch des Mont Pelée 1902 sich im Nebelglühen der Atmosphäre bemerkbar machend). Nicht so groß ist im allgemeinen die Zahl der organischen Staubteilchen, unter ihnen wieder lebensfähige Keime (Bakterien). Es wurden in Paris in 1 m³ Luft 5400 Bakterien, zu gleicher Zeit auf dem Lande nur 300 gezählt.

§ 221. Kohlenstoff (Carbonium, C = 12, Wertigkeit = IV).

Kohlenstoff kommt in drei allotropen Modifikationen vor: 1. als Diamant, 2. als Graphit — diese beiden krystallinisch; 3. als amorpher Kohlenstoff oder kurz Kohle.

Bekanntlich sind diese drei Stoffe bei gewöhnlicher Temperatur fest, bleiben es auch bei sehr hoher Temperatur; erst seit kurzem nimmt man



Fig. 724.

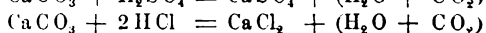
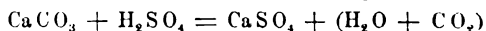
Temperatur des elektrischen Lichtbogens 3000 bis 3500° C als Temperatur des Erweichens und Verdampfens von Kohlenstoff an. — bei viel geringeren Temperaturen dagegen brennen alle drei Formen des Kohlenstoffs mit Sauerstoff zu Gasen, und zwar bei reichlichem Zutritt von O zu Kohlendioxyd, O₂ bei spärlichem O zu dem sehr giftigen Kohlenoxyd, CO.

Folgender Cyklus von Versuchen soll die Lehre die Eigenschaften des CO₂ näher beleuchten und zeige seinen Zusammenhang mit (ungebranntem, gebranntem, gelöschtem) Kalk.

Versuch 1: Aus ungebranntem Kalk (Kalkstein, Marmor, Kreide) wird schwach saure Kohlendioxyd durch stärkere Säure ausgetrieben (Fig. 724).

Mit Wasser gibt Kohlendioxyd Kohlensäure; $\text{H}_2\text{O} + \text{CO}_2 = \text{H}_2\text{CO}_3$

Da $\text{CO}_2 = \text{H}_2\text{CO}_3 - \text{H}_2\text{O}$, so nennt man Kohlendioxyd auch Kohlenanhydrid, häufig aber auch selbst noch Kohlensäure (entsprechend dem Sprachgebrauch, nach dem z. B. SO_2 als Schwefelsäure bezeichnet wurde). Eigentliche Kohlensäure, H_2CO_3 , ist nicht für sich rein darstellbar, sondern die natürlichen und künstlichen Säuerlinge sind nur Lösungen von H_2CO_3 in überschüssigem Wasser; wollte man dieses Wasser beseitigen, so würde H_2CO_3 wieder zerfallen in CO_2 und H_2O . Somit deuten in den folgenden Formeln die Klammern () einen mehr oder minder vollständigen Zerfall an:



Ähnlich aus „doppelt kohlensaurem Natron“:



Wasserfreies und kondensiertes CO_2 ist gegenwärtig in Stahlbomben zu haben, indem für dessen Herstellung eine ganze Kohlensäureindustrie entsteht (Verhütung saurer Gärung des Bieres, Löschapparate). Zahlreiche Verflüssigungen mit flüssiger und fester Kohlensäure (Kohlensäureschnee . . .).

Versuch 2: Aus dem im Kalkofen erhitzten Kalkstein entsteht CO_2 , worauf gebrannter Kalk, CaO , zurückbleibt.

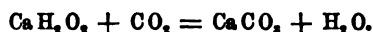
Somit Kalkbrennen: $\text{CaCO}_3 = \text{CaO} + \text{CO}_2$. — Kennt man die Atomgewichte von Ca, C, O, so ergeben sich die Molekulargewichte $\text{CaO} = 40 + 16 = 56$, $\text{CO}_2 = 12 + 2 \cdot 16 = 44$. Es entwickeln sich also aus 100 g ungebrannten Kalk 56 g gebrannter Kalk und 44 g Kohlendioxyd.

Das dem basischen Oxyd CaO zu Grunde liegende Metall **Calcium** (in reinem Zustande weiß, etwas verunreinigt, messinggelb) ist noch immer sehr schwer darzustellen; es ist zweiwertig. Der Kalkstein ist also aufzufassen als das Calciumsalz der Kohlensäure, indem in H_2CO_3 die zwei Atome H₂ ersetzt sind durch

Versuch 3: Einige Stücke gebrannten Kalkes benetzen wir mit Wasser. Er erhitzt sich und zerfällt zu einem trockenen Pulver von „gelöschtem Kalk“, woraus wir schliessen, daß er das Wasser chemisch aufgenommen habe. — Bei Zusatz von mehr und mehr destilliertem Wasser erhalten wir Kalkbrei, endlich farbloses „Kalkwasser“; dieses zeigt stark basische Eigenschaften.

Kalklösen: $\text{CaO} + \text{H}_2\text{O} = \text{CaH}_2\text{O}_2$ (gelöschter Kalk = Calciumhydroxyd. Zeige auch durch Vergleich von CaH_2O_2 mit $2\text{NaHO} = \text{Na}_2\text{H}_2\text{O}_2$, daß Ca zweiwertig sei; desgl. durch Vergleichung von CaO und Na_2O).

Versuch 4: Leiten wir in klares Kalkwasser wieder Kohlendioxyd, so trübt sich jenes; nach einiger Zeit krystallisieren aus dem Gemische Nadeln eines Stoffes, der wieder dieselbe chemische Zusammensetzung zeigt wie der Kalkstein.



Haben wir klares Kalkwasser aus 56 g gebranntem Kalk hergestellt, und fangen wir in diesem alles CO_2 auf, welches bei Versuch 2 entweicht, so erhalten wir als Niederschlag wieder 100 g Kalkstein.

§ 222. Aus der Chemie der Kohlenstoffverbindungen.

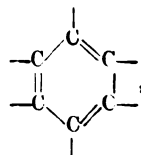
In den Organismen (den lebenden Tier- und Pflanzenkörpern) wird eine unermesslich große Zahl der verschiedensten chemischen Verbindungen erzeugt, und aus diesen werden durch Analysen, Synthesen und Substitutionen täglich noch neue Verbindungen künstlich hergestellt. Z. B. Essigsäure, Buttersäure, Milchsäure, Stearinsäure, Äther, Kaffein, Holzfaser, Stärkemehl, Gummi, Zucker, Harze, Eiweiß, Käsestoff . . .

Da nun im Gegensatze zu diesen Verbindungen viele Grundstoffe (z. B. alle gediegen vorkommenden Metalle) und viele Verbindungen (z. B. Ätznatron, Schwefelsäure — abgesehen von den kleinen Mengen, in denen sogar diese als Ausscheidungsprodukte von Muscheln vorkommt), soweit wir ihre Entstehung zurückverfolgen können, nichts mit irgend einem Lebensprozeß zu tun haben, so nahm man einen Gegensatz von organischen und anorganischen Verbindungen an und unterschied demgemäß überhaupt als die zwei Hauptteile der Chemie die „anorganische“ und die „organische Chemie“ (welche Unterscheidung zum Teil auch heute noch in einer mehr oder weniger durchgreifenden Verschiedenheit der zur Verwendung kommenden Methoden rein praktischen Rückhalt findet). Die Kluft aber, welche zwischen unorganischen und organischen Verbindungen zu bestehen schien, wurde zuerst durch WÖHLER (1829) insofern überbrückt, als er einen Stoff (Harnstoff), der bisher nur als ein Ausscheidungsprodukt des tierischen Organismus bekannt gewesen war, aus einem unorganischen Stoffe (Ammoniumcyanat) herstellte. Seither ist die Synthese von früher als „organisch“ bezeichneten Verbindungen aus Grundstoffen und anorganischen Verbindungen in unzähligen Fällen gelungen.

Da alle Verbindungen, welche man einst für ausschließlich organisch gehalten hatte, das gemeinsame haben, daß in ihnen Kohlenstoff eine wesentliche Rolle spielt, so bezeichnet man heute das Gebiet der früheren „organischen Chemie“ als „Chemie der Kohlenstoffverbindungen“. In diesen Teil der Chemie gehört also auch der Inhalt des ganzen vorigen Paragraphen, z. B. auch die Darstellung von Kohlendioxyd aus Kalkstein mittels Schwefelsäure u. dergl., also Stoffe und Vorgänge, die man früher ganz der anorganischen Chemie zugewiesen hatte.

Die unermessliche Mannigfaltigkeit von Verbindungen des Kohlenstoffes erklärt sich vor allem schon aus der Vierwertigkeit dieses Stoffes, welche im Zustandekommen von Molekülen mit viel mehr Atomen, als sie bei ein-, zwei- und dreiwertigen Stoffen vorkommen, erwarten lassen. So haben z. B. die Moleküle gewisser Verbindungen, die in der Nervensubstanz vorkommen, die empirischen Formeln Cerebrin, $C_{27}H_{55}NO$; Sphingolipin, $C_{44}H_{99}NSO_5$; Hühnereiweiß ist $C_{204}H_{323}N_{55}O_{68}S_2$ (Molekulargewicht 76640) (16118). — Noch weit fruchtbarer ist der Umstand, daß sich Kohlenstoffatome nicht nur untereinander bald nur mit je einer, bald mit zwei oder drei (im Kohlenstoffmolekül C_2 auch mit allen vier) Wertigkeiten vermögen dann selbständig zu binden; und einzelne frei bleibende Wertigkeiten dann wieder einzelne Kohlenstoffatome u. dergl. zu verbinden. Die theoretische Erforschung aller dieser teils wirklich vorkommenden, teils vorhin zu ersinnenden Verbindungen richtet sich überall insbesondere darauf, nicht mit den rein empirischen Molekularformeln, wie die vier oben (und die in § 209 bei Isomerie und Polymerie) angeführten, sich zu begnügen, sondern die Struktur solcher Moleküle auf typische Gruppierungen kleinerer Atomketten (ungeschlossenen und geschlossenen) zurückzuführen. So erkannte KÉKULÉ als eine in verschiedenen Verbindungen

wiederkehrende Atomgruppe den Benzolkern:



bei welchem die

einfachen, bzw. Doppelstriche die einander bindenden Wertigkeiten darstellen, so daß in jedem Kohlenstoffatom noch eine Wertigkeit frei bleibt, welche dann durch einwertige Elemente oder durch einwertige Radikale abgesättigt werden können. Dagegen liegen offene Ketten von C-Atomen bei der Fettsäurereihe und bei den Olefinen (Propylen, Butylen, Äthylen . . .) vor. Bei der ersteren sind an den Eckgliedern drei Wertigkeiten, an den übrigen zwei Wertigkeiten frei, welche durch Wasserstoffatome oder andere einwertige Atome oder Radikale abgesättigt

sind. Z. B. Butan; empirisch C_4H_{10} ; Strukturformel

$$\begin{array}{ccccccc} & H & H & H & H & & \\ & | & | & | & | & & \\ H & -C & -C & -C & -C & -H & \\ & | & | & | & | & & \\ & H & H & H & H & & \end{array}$$

haben allgemein die Formel C_nH_{2n+2} . Bei den Olefinen ist ein Paar Kohlenstoffatome durch zwei Wertigkeiten verbunden. — Beim Acetylen C_2H_2 sind zwei

Kohlenstoffatome mit je drei Wertigkeiten verbunden, mithin noch zwei Wertigkeiten frei, bzw. durch Wasserstoff abgesättigt. Empirisch C_2H_2 ; Strukturformel $H-C\equiv C-H$.

§. 223. Gärungen.

Sehr viele Kohlenstoffverbindungen erleiden scheinbar „von selbst“, in Wahrheit aber durch die Einwirkung bestimmter niedriger Lebewesen (Spaltpilze, Sprosspilze) einen Zerfall in minder hochatomige Verbindungen (z. B. Zucker in Alkohol und Kohlendioxyd, Eiweiß in Ammoniak, Schwefelwasserstoff und Kohlendioxyd); je nach diesen Zerfallstoffen unterscheidet man insbesondere die sogenannte **geistige, saure, faulige Gärung**. Alle diese Vorgänge treten nur innerhalb bestimmter Temperaturgrenzen auf (Einkühlen, Dörren von Fleisch).

Geistige Gärung, durch welche aus wässrigen Lösungen von Traubenzucker, zunächst dem Traubensaft, unter Entwicklung von Kohlendioxyd alkoholhaltige Flüssigkeiten werden, stellen in der Hauptsache einen Zerfall des **Traubenzuckers** ($C_6H_{12}O_6$) in Kohlendioxyd (CO_2) und **Alkohol** (C_2H_5O) dar. Gärungserreger sind hier Sprosspilze, welche jederzeit im gepressten Traubensaft sich schon vorfinden, indem sie aus der Luft auf die Oberfläche der Traube gelangt waren. — Wenn Flüssigkeiten, die **Rohrzucker** ($C_{12}H_{22}O_{11}$) enthalten, ebenfalls in geistige Gärung übergehen, so findet vorher eine Umsetzung des Rohrzuckers in Traubenzucker statt. — Bei Körpern, welche, wie Kartoffeln und Gerste, **Stärkemehl** enthalten (Formel: $C_6H_{10}O_5 \cdot x$, wo $x > 1$, übrigens nicht näher bekannt ist), wird dieses zuerst durch die Diastase (einen Stoff, der beim Keimen der Gerste entsteht und sich auch in der Kartoffel findet) zuerst in Zucker übergeführt, der dann wieder den z. B. im Kartoffelbranntwein und Bier vorkommenden Alkohol liefert. Die bis ins feinste gehenden Unterschiede, z. B. verschiedener Biersorten, sind wesentlich mitbedingt durch die Varietäten der die Gärung einleitenden Sprosspilze.

Saure Gärung. Alkoholhaltige Flüssigkeiten (gewässerter Branntwein, Bier, Wein . . .) werden bei längerem Stehen an der Luft sauer. Es hat sich hier der Alkohol durch Aufnahme von Sauerstoff in **Essig** verwandelt, aber auch dies nur unter Mitwirkung von Bakterien, welche meistens schon durch die Luft zugeführt werden.

Bei der Schnellfabrikation träufelt verdünnter Weingeist über Hobelspäne und dergleichen, die mit Essig getränkt sind und der Luft reichlich Zutritt gewähren.

Faulige Gärung (Fäulnis). Beim Zerfall von Muskel-, Käsestoff, Schleim u. dergl. rührt der bekannte Fäulnisgeruch her von Ammoniak, Schwefel- und Phosphorwasserstoff u. s. f. Bedingungen der Fäulnis sind: Aufhören des Lebens in den faulenden Organen, Vorhandensein von Wasser, Zutritt der Luft, eine Temperatur zwischen 0° und $100^\circ C$. Dementsprechend Mittel, die Fäulnis zu verhindern (Konserven, Aufbewahrung von Tieren im Alkohol u. s. f.).

§. 224. Wärmeentwicklung und Wärmeverbrauch bei chemischen Vorgängen.

Das **Verbrennen** im technischen Sinne, als Verbindung des in unseren Brennmaterialien (Holz, Steinkohle, Steinöl, Leuchtgas...) enthaltenen Kohlenstoffs und Wasserstoffs mit dem Sauerstoff der Luft zu CO_2 und H_2O , ist nur ein besonderer Fall von chemischem Verbinden unter Wärmeentwicklung, die bei hohen Graden auch von Lichtentwicklung begleitet ist.

Wenn auch die Verbrennung, z. B. einer bestimmten Menge Kohle im reinen Sauerstoff, höhere Wärmegrade (und hiermit glänzendere Lichterscheinungen) liefert als in der atmosphärischen Luft, so sind doch die erzeugten Wärmemengen genau gleich; durch sie muß im zweiten Fall auch der Stickstoff mit erwärmt werden. — In dem erweiterten Wortes „Verbrennen“, nach welchem nur die Wärmemenge, nicht abgemessen wird, und also auch nicht das Leuchtgasprozeß der Tiere als eine Verbrennung bezeichnet (vergl.

Als **Verbrennungswärme** einer **Stoffe** (Grundstoffe, Verbindungen oder Gemenge) in Bezug auf Sauerstoff wird die bei Verbindung von je 1 g entwickelte Anzahl von Kalorien bezeichnet. Folgende Zahlen gelten für Kohle zu CO 2440, C zu CO_2 8140.

Zwei noch nicht verbundene Atome besitzen eine potentieller Energie versehen zu denken, wie der noch nicht der Erde bis zur Berührung nahe gekommene Stein in Bezug auf die Energie der Lage besitzt. Wir können uns geradezu das Verbrennen als ein Zusammenfahren der einander chemisch verwandten Atome vorstellen unter dem Bilde des zur Erde stürzenden Steines oder Wasserfalles.

Das **Entzünden** eines brennbaren Stoffes (allgemeiner: das Einleiten der Verbindung zweier Stoffe) ist zu vergleichen der den Stein zum Fallen veranlassenden „Auslösung“ (Öffnen einer Schleuse...). Meistens erfolgt dieses Entzünden durch Erhöhen der Temperatur des einen Körpers an einer eng begrenzten Stelle bis zur „**Entzündungstemperatur**“ (für Phosphor schon bei 44° , bei Schwefel 270°). Die durch das Verbrennen der entzündeten Teile erzeugte Wärme erhöht die angrenzenden auf die Entzündungstemperatur u. s. w. — Das „**Explodieren**“ des Knallgases besteht darin, daß durch die ganze Gasmenge sehr rasch die Verbrennung sich fortpflanzt, wodurch plötzlich sehr große Hitze und infolgedessen eine starke Ausdehnung des Knallgases und des sich entwickelnden Wasserdampfes eintritt, dem alsbald eine entsprechend große Abkühlung und ein Zusammenstürzen der auseinander getriebenen Luftmassen folgt. Im Schießpulver, das aus etwa 1 G. T. Kohle, 1 T. Schwefel und 6 T. Kaliumsalpeter besteht, gibt letzterer so viel Sauerstoff ab, daß ebenfalls eine sehr rasche Verbrennung erfolgt. — Bei manchen Explosivstoffen findet nicht ein Sichverbinden, sondern vielmehr ein jähes Auseinanderfahren der nur lose verbundenen Atome statt, z. B. bei NCl , (Chlorstickstoff).

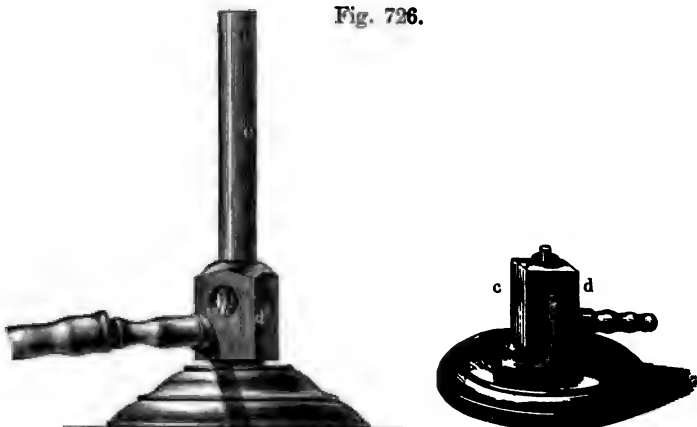
Flamme. In einer Kerzenflamme lassen sich deutlich folgende Teile unterscheiden (Fig. 725): 1. Die Mitte bildet ein kegelförmiger

dunkler Raum, in dem keine Verbrennung stattfindet; denn von den sich dort ansammelnden Gasen wird die Luft abgehalten. 2. Diesen dunklen Kegel hüllt ein stark leuchtender Teil ein. In diesem Raume

Fig. 725.



Fig. 726.



wird nämlich aus dem Kohlenwasserstoff ein Teil des Kohlenstoffes ausgeschieden und durch die hohe Temperatur des verbrennenden Wasserstoffes zum hellen Glühen gebracht. 3. In der äußeren Schicht werden diese glühenden Kohlentelchen, weil hinreichend viel Luft von außen Zutreten kann, vollständig verbrannt. Diese Hülle ist nur schwach leuchtend. 4. Zu unterst befindet sich ein blauer Mantel von verbrennendem Kohlenoxydgase. — Bunsenbrenner (Fig. 726); Auerbrenner.

Allgemeiner bezeichnet man als „Flammen“ teils die während des Verbrennens selbstleuchtenden Gase oder doch solche heiße (weniger oder nicht selbstleuchtenden) Gasmassen, in denen feste Körperteilchen glühen; ob der eine oder der andere Vorgang stattfindet, verrät sich in der Spektralanalyse; die Kerzenflamme zeigt überwiegend das kontinuierliche Spektrum des glühenden festen Kohlenstoffes.

Die ökonomische Anwendung der Verbrennung (Heiztechnik) hat außer den rein thermochemischen Größen der Verbrennungswärmen noch zahlreiche Rücksichten zu nehmen auf die jeweilig zweckmäßigste Zufuhr der Luft, den Abzug der Verbrennungsgase, wobei diese auch noch möglichst viel von ihrer Wärme an die zu heizenden Körper abzugeben haben u. s. f.

§ 225. Chemische Vorgänge bei Atmung und Ernährung.

Die chemischen Vorgänge, welche sich im lebenden tierischen, bzw. pflanzlichen Organismus abspielen, sind, auf die einfachsten Schemata gebracht, **Oxydation** und **Desoxydation**; nämlich:

I. Dem tierischen Körper werden als Nahrungsmittel teils **stickstoffhaltige** Stoffe (Fleisch, Milch, Käse, Eier, Hülsenfrüchte ...)

zugeführt, welche vorwiegend dem Aufbau des Körpers (Muskeln, Blut . . .) dienen, teils (ganz oder annähernd) stickstofffreie Stoffe (Stärkemehl, Zucker, der hauptsächlich nach die Fette . . .). Daneben Sauerstoff vorwiegend aus Kohlenstoff und Wasserstoff bestehenden Stoffe werden ebenfalls in den Geweben aufgespeichert und es findet in diesen durch den in das Blut aufgenommenen Sauerstoff eine Oxydation statt; es wird **Kohlendioxyd** und Wasserdampf (nebst dem unveränderten Stickstoff der eingeatmeten Luft) ausgeatmet. — Die bei dieser Oxydation produzierte Energie tritt teils als Körperwärme, teils als physiologisch-chemische Energie der Muskeln, Nerven u. s. w. auf. Zum überwiegenden Teil also sind es diese stickstofffreien Nahrungsmittel, welchen der Organismus seine „Kraft“ (im Sinne der Arbeitsleistung = Energie) verdankt.

Geschichtliches: Noch dem 17. als eine weiter nicht erklärliche (Lebense-) Wärme) gegolten. Dafs sich kalischen und chemischen Gesetzen seinen berühmten Wärmeversuch, das Wasser auch erwärmer¹ entwickelte Wärme direkt; und durch die Pferdekraft, ROBERT MAYER'S war gerade in der Physiologie und Chemismus der Ernährung, die Sprache des Gesetzes der Erhaltung der Arbeit.

MAYER fand nämlich bei einem Aderlasse, den er als Schiffsarzt unter den Tropen vorzunehmen hatte, dafs dort das venöse Blut röter, d. h. dem arteriellen ähnlicher sei als in kälteren Gegenden. Er erklärte dies richtig daraus, dafs, weil der Leib in warmer Umgebung weniger Wärme abgibt, auch ein geringerer chemischer Umsatz zur Ersetzung dieser Wärme erforderlich sei. In der Tat spüren Europäer in den Tropen ihren Appetit sich vermindern. Umgekehrt bedürfen die Bewohner der kalten Zone zu ihrer Ernährung bedeutender Mengen von Tran u. dergl.

Das Vorstehende bezieht sich zunächst auf die früher so genannten „Warmblütler“ (Menschen, Säugetiere, Vögel) jetzt homoiotherme: ihre Bluttemperatur ist von der der Umgebung unabhängig, indem sie durch die jeweilige Anpassung der Nahrungszufuhr eine Art Selbstregulierung erfährt. Dagegen ist die Körpertemperatur meist nur um wenige Grade über der jeweiligen Temperatur der Umgebung bei den poikilothermen Tieren (früher „Kaltblütler“ genannt; was aber jedenfalls unpassend ist, weil z. B. Krokodile in den heißen Zonen eine Bluttemperatur bis 30° C. und darüber aufweisen); bei diesen mischen sich venöses und arterielles Blut im Herzen, was bei homoiothermen nicht der Fall ist.

II. Dem pflanzlichen Körper werden als Nahrungsstoffe teils Salze, Ammoniak . . . aus den Bestandteilen des Bodens (einschließlich Düngers), teils das durch die Spaltöffnungen der Blätter aus der Luft aufgenommene **Kohlendioxyd** zugeführt und assimiliert. Das CO₂ wird unter Einwirkung des Sonnenlichtes in den chlorophyllhaltigen Zellen zerlegt in Kohlenstoff, welcher einen Hauptbeitrag

17. Jahrhundert hatte die tierische Wärmeabgabe (,calor innatus“ = angeborene Wärme) diesen Wärme ganz nach physikalischen Gesetzen schon RUMFORD ein, indem er die Wärme beim Bohren (§ 81) bemerkte, er hätte ihm die durch Verbrennen des Heus statt das Heu durch die Pferde freisetzen zu lassen. — Für das Gelingen zwischen Wärmeproduktion und Wärmeabgabe die Anlässe zur ganz allgemeinen Aussprache des Gesetzes der Erhaltung der Arbeit.

zum Aufbau der Pflanze liefert (Kohlenlager), und in Sauerstoff, welcher von den Blättern ausgeschieden wird.

Nach neueren Entdeckungen gibt es neben diesem Prozess, welcher in der Aufnahme von CO_2 und Ausscheidung von O der tierischen Atmung entgegengesetzt ist, auch eine dieser ganz analoge und auch mit Wärme-produktion verbundene „Pflanzenatmung“, indem z. B. keimende Samen und manche blühende Pflanzen O aufnehmen und unter beträchtlicher Wärme-entwicklung CO_2 ausscheiden.

III. Das tierische und pflanzliche Leben ergänzen einander also sowohl in den aufgenommenen und abzugebenden Stoffen, wie in der hierbei produzierten und verbrauchten Energie.

Durch eine Art Selbststeuerung im größten Maßstabe ist einer übermäßigen Ausbreitung des einen „Reiches“ auf Kosten des anderen vorgebeugt, nämlich: Denken wir uns, es sei zu irgend einer Zeit durch irgend welche Umstände a) die Menge der Pflanzen beträchtlich größer als gegenwärtig, die Menge der Tiere aber dieselbe. Hierdurch sind dann die Existenzbedingungen für die Pflanzen verschlechtert, indem ihre größere Menge sich in dieselbe Menge Nahrungsmittel aus dem Boden, in das Kohlendioxyd und das Sonnenlicht teilen müßte; die Existenzbedingungen der Tiere sind aber verbessert, indem an den vermehrten Pflanzen zunächst die Pflanzenfresser und an diesen wieder die Fleischfresser vermehrte Nahrung und überdies mehr durch die Pflanzen ausgetatmeten Sauerstoff vorfinden. — Wäre dagegen b) die Menge der Tiere beträchtlich größer als gegenwärtig, die Menge der Pflanzen aber dieselbe, so würden wieder die Nahrungsmittel für die Tiere im ganzen geringer sein und überdies mehr Kohlendioxyd und weniger Sauerstoff in der Luft vorhanden sein. — Diese schematische Betrachtung ist indes nur auf geschichtliche, nicht auf geologische Zeiträume anwendbar, indem z. B. tatsächlich einst die Menge des Kohlendioxyds viel größer als jetzt gewesen sein dürfte, woraus sich dann die durch die Kohlenlager bezeugte Üppigkeit des damaligen Pflanzenwuchses zum Teil erklärt.

Neben dem festen Kapital von Stoffen, vor allem **Kohlenstoff**, aus welchem das immer sich erneuernde Wechselspiel tierischen und pflanzlichen Lebens erhält, empfängt aber die Erde in Form des **Sonnenlichtes** einen immer sich erneuernden Zuschuß von Energie, und zwar zunächst aktueller Energie, welche dann namentlich in den Kohlenlagern als potentielle Energie aufgespeichert bleibt. Wenn nachmals die Erde die aus der Verbrennung dieser Kohle wieder entwickelte aktuelle Energie durch Strahlung in den Weltraum wieder verliert, so war doch die chemisch wirksame Energie der Sonnenstrahlen eine höhere Form der Energie gewesen als die ausgestrahlte Wärme — so daß auch schon unter diesem weit ausschauenden Gesichtspunkte Sparsamkeit mit den vor allem in Form von Kohle aufgespeicherten Energieschätzen naturwissenschaftlich geboten erscheint.



—

11

Anhang.

A. Zusätze aus der angewandten Mathematik.

1. Maße und Messen.

Jeder mathematischen Größenangabe muß ein Zählen oder ein Messen vorausgegangen sein. Wir „zählen“ gesonderte (diskrete) Dinge oder Vorgänge; z. B. Pendelschläge, Elemente einer Batterie... Wir „messen“ stetige (kontinuierliche) Größen; z. B. Raumstrecken, Flächen- und Rauminhalte, Zeitstrecken, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, mechanische Kräfte, Lichtstärken, Stromstärken u. s. w.

Das Ergebnis einer einfachen Zählung gliedert sich einerseits in die **Anzahl** (dargestellt durch eine für sich „unbenannte“ ganze, positive Zahl), andererseits in die **Gattung** (Art) des Gezählten oder die „**Benennung**“; z. B. 60 Pendelschläge. — Ebenso gliedert sich auch die Angabe jedes Meßergebnisses in die der **Maßzahl** und die der **Maßeinheit**¹⁾; z. B. 60 Sekunden.

„Zählen“ und „Messen“ sind daher nicht rein koordinierte Begriffe — schon weil der Begriff der „Maßzahl“ dem der „Zahl“ (namentlich wenn der Zahlbegriff „erweitert“ wird durch den der gebrochenen, irrationalen . . . Zahlen) nicht beigeordnet (koordiniert), sondern untergeordnet ist.

Alles Messen ist teils ein direktes, teils ein indirektes. — **Direkt** messen wir eine Raumstrecke, indem wir an ihr die am Maßstabe verzeichnete Längeneinheit wiederholt auftragen (etwa mittels des Zirkels; oder häufiger: indem wir einen in solcher Weise mittels des Zirkels oder mittels der Teilmaschine ein für allemal hergestellten Maßstab an die zu messende Strecke anlegen).

Wir messen eine Zeitstrecke direkt, indem wir die in sie fallende Anzahl Pendelschläge einer guten Uhr zählen.

¹⁾ In diesem Buche werden (gemäß dem immer mehr durchgreifenden Gebrauche) die Maßzahlen, soweit sie allgemeine Zahlen (nicht numerische Spezialwerte) sind, durch *Kursiv*, die Maßeinheiten durch Antiqua-Lettern dargestellt. Z. B. *sem*, *bem*², *mg* (lies m Gramm, vergl. S. 62, Anm.), *mg* Dyn.

Massen dagegen messen wir schon **indirekt**, indem wir sie auf guten Wage ins Gleichgewicht bringen mit einer bestimmten Anzahl von Gewichtskörpern.

Die in diesen drei Beispielen angeführten Größen sind gegenwärtigen Physik als **Grundgrößen** gewählt: **Raum-, Zeitstrecken, Massen**; u. zw. als Einheiten das Centimeter, Sekunde, das Gramm¹⁾.

Indirekt messen wir ferner z. B. eine Geschwindigkeit, wir aus den Maßzahlen des bei einer Bewegung zurückgelegten und der zum Zurücklegen gebrauchten Zeit die Maßzahl der Geschwindigkeit durch Division (nach der Formel $c = \frac{s}{t}$, § 4) ableiten.

Temperatursteigerung messen wir indirekt durch die Verlängerung eines Quecksilberfadens im Thermometer.

Im Gegensatz zu den drei Grundgrößen nennt man alle übrigen physikalischen Größen, insoweit sie durch die drei Grundgrößen ausgedrückt werden können, **abgeleitete Größen**.

Wie in den Anfangsgründen der Rechenkunst gelehrt wird, kann jede Größe nur durch Größen **gleicher Art** zahlenmäßig ausgedrückt bzw. gemessen werden. So wie sich also eine Länge nur durch eine Länge, eine Zeit nur durch eine Zeit messen läßt, kann auch eine Geschwindigkeit nur durch eine Geschwindigkeit, eine Temperatursteigerung nur durch eine Temperatursteigerung u. s. w. gemessen werden. Speziell die Maßeinheit für jede Art von Größe, gleichviel ob sie eine Grundgröße oder eine abgeleitete Größe ist, muß also eine **bestimmte Größe gleicher Art** sein. Z. B. Geschwindigkeitseinheit kann (nicht etwa eine beliebige, sondern) nur eine bestimmte Geschwindigkeit sein; ebenso wie z. B. Flächeneinheit nur eine bestimmte Fläche sein kann. Diesem Prinzip widerspricht es nicht, daß sich z. B. die Fläche eines Rechtecks berechnen läßt aus der Länge der Grundlinie und die Länge der Höhe, wobei die Maßzahl gleich ist dem Produkt der Maßzahlen beider Strecken. Nur indirekt werden durch das Centimeter Längeneinheit auch die Flächen und Volumina gemessen, indem die bequeme Flächeneinheit das Quadratcentimeter, die bequemste Volumeinheit das Kubikcentimeter ist. — Es ist aber zu bemerken, daß logisch nichts im Wege steht, z. B. als Flächeneinheit einen Streifen von 3 cm Länge und $\frac{1}{2}$ cm Breite zu wählen, nur würden dann die Flächeninhaltsformeln komplizierter werden, z. B. die Fläche eines Rechtecks nicht mehr $f = gh \text{ cm}^2$, sondern $f' = \frac{1}{2}gh$ in anderen Flächeneinheiten hätte. — Hierbei ist der Zusammenhang von Centimeter, Quadratcentimeter, Kubikcentimeter vorbildlich für das aus Zweckmäßigkeitsgründen gewählte C-G-S-System.

¹⁾ Man pflegt dieses System das Centimeter-Gramm-Sekunden-System (C-G-S-System) zu nennen. — Wir haben in diesem Buche die Reihenfolge der drei Einheiten abgeändert in Centimeter-Sekunden-Gramm (daher C-S-G-System), weil zwischen diesen drei Wissenschaften das Verhältnis besteht, daß die zweite von der ersten, bzw. den vorausgenannten abhängig, die vorausgenannte aber von den vorausgenannten unabhängig ist.

gründen in der Physik immer mehr durchdringende (und in der Lehre von den physikalischen Dimensionen, Nr. 6, 7, systematisch durchgeführte) Prinzip, die **Einheiten ungleichartiger Größen in möglichst einfache numerische Beziehungen zu einander zu bringen.**

Natürliche und konventionelle Maße (Urmaße, Etalons, Prototyp-einheiten). Lesen wir, daß eine im Altertum gemessene Strecke eine bestimmte Anzahl „Stadien“ betragen, ein Körper so und soviel „Pfund“ gewogen habe, so sind diese Maßangaben für uns fast unverständlich, da uns jene Maßeinheiten nur sehr unvollkommen bekannt sind. Von Fuß, Elle oder dergleichen können wir uns annähernd Vorstellungen machen, da diese Maße nach der durchschnittlichen Größe derjenigen menschlichen Gliedmaßen, nach denen sie benannt sind, in freilich sehr mangelhafter Weise festgesetzt waren.

Es bestand daher seit langem der Wunsch, Urmaße zu gewinnen, das wären solche, deren bloße Definition schon gestatten sollte, die Einheiten immer wieder neu in absolut genauen Kopien herzustellen. Namentlich bei der Einführung des metrischen Maßes und Gewichtes hoffte man im Erdmeridianquadranten eine solche Grundgröße gewählt zu haben, nach der das Meter und nach diesem wieder das Kilogramm als Masse von 1 dm³ Kubikdecimeter Wasser definiert und angefertigt wurden. Warum diese Erwartung für Längeneinheit und Masseneinheit sich nicht erfüllt hat, vergleiche Nr. 3 und 5. Ebenso ist die je nach der Umdrehungszeit der Erde definierte Zeiteinheit kein Urmaß, denn diese Umdrehungszeit kann sich im Laufe der Jahrtausende merklich ändern.

Ein wirkliches Urmaß besitzt von den Größen der Mathematik und der Physik nur der Winkel, nämlich im **vollen Winkel**.

Es wird deshalb das Winkelmaß schon im folgenden Paragraphen noch vor den physikalischen Grundgrößen Raum, Zeit, Masse behandelt, um so die Unabhängigkeit des Winkelmaßes von denen aller übrigen Arten von Größen (und somit auch vom C-S-G-System) schon äußerlich anzudeuten. wogegen z. B. schon die Zeitmessung ganz von der Winkelmessung an den Zifferblättern der Uhren und den Teilkreisen der astronomischen Instrumente abhängig ist.

Zu den wichtigsten und zum Teil schwierigsten Aufgaben der messenden Physik gehören 1. die Herstellung der **Normalkörper** für Längen, Massen, elektrische Leitungswiderstände u. s. f. (Etalons im weitesten Sinne oder Maßprototype), sowie ihre Aufbewahrung unter Abhaltung aller schädlich verändernden Einflüsse; 2. die Einrichtung der **Messapparate** aller Art (Nonien, Ablesefernrohre, Uhren u. s. f.); 3. deren Handhabung im eigentlichen **Messverfahren**; 4. die Anbringung der nötigen **Korrekturen** (z. B. für die Verlängerung der Maßstäbe bei Erwärmung, für den Auftrieb der Gewichtskörper in Luft . . . und dergleichen mehr).

Trotz aller auf die Messvorrichtungen und Messverfahren der Physik verwendeten Sorgfalt bleibt zwischen ihnen und den Größenbestimmungen der reinen Mathematik folgender grundsätzlicher Unterschied, ja Gegensatz unvermeidlich: In der Mathematik als solcher wird von vornherein angenommen, daß die in die Rechnung eingehenden Größen durch streng gleiche Einheiten ausgedrückt seien. Durch welche tatsächlich ausführbare Operationen man sich dieser Gleichheit

vergewissert, bleibt für den Mathematiker als solchen außer Betracht; ja er kann sich in seinen Operationen sogar dadurch nicht beirren, daß er weiß, eine Gleichheit zwischen was immer für Größen, z. B. zwei angeblichen Centimen sei praktisch niemals herzustellen, und falls sie zufällig einmal ohne Zutun hergestellt wäre, nicht einmal als Gleichheit zu erkennen, d. h. von Anh. 40. unmerklichen Verschiedenheit (psychol. Anh. Nr. 40) zu unterscheiden.

Der Physiker dagegen sinnt auf die erdenklich vollkommensten praktischen Mittel, sich zu versichern, daß die auch von ihm zunächst angenommene Gleichheiten möglichst verwirklicht seien, d. h., daß die seinen Rechnungen Grunde gelegten Größen den entsprechenden Größen der „Etalons“ unmittelbar oder mittelbar mit möglichster Annäherung gleich sind. Er weiß dabei freilich, daß bei jeder Messung „Fehler“ unvermeidlich sind; aber durch wiederholte Messung derselben Größe und durch Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung weiß er den wahrscheinlichsten Wert der direkt oder indirekt gemessenen Größe und die wahrscheinliche Größe des begangenen Fehlers zu ermitteln („Fehlertheorie“; vergl. Nr. 15, 21, Angaben des „wahrscheinlichen Fehlers“ z. B. Nr. 3, 5; § 21, VI.). —

Im folgenden sollen einige besondere Meßapparate, namentlich für drei Grundgrößen und für die mit ihnen am nächsten zusammenhängenden Größen, z. B. für Krümmung, und ihre Handhabung kurz beschrieben werden, andere, wie die Apparate zu Temperatur-, Strommessungen u. dgl., kommen allenthalben innerhalb des Lehrganges zur Sprache, da sie selbst wichtige Anwendungen der physikalischen Gesetze darstellen.

In Nr. 21 dieses Anhanges überblicken wir dann die Grundsätze, nach denen sich der Physiker bei der mathematischen Verarbeitung seiner Messungsergebnisse fast immer bloß annähernder Rechnungen bedient.

2. Messung von Winkeln.

Einheit für ebene Winkel ist der Winkelgrad ($1^\circ = \frac{1}{360}$

vollen Winkels; kleinere Einheiten sind $\frac{1^\circ}{60} = 1'$; $\frac{1'}{60} = 1''$.

Man bemerke, daß die Zeichen ' " für Winkelminuten und Winkelsekunden vorbehalten bleiben, und daß zum Unterschied von ihnen die Zeitminuten und Zeits Sekunden durch min, sec bezeichnet werden. (Über die Messung von Winkeln in „Stunden“, „Zeitminuten“ und „Zeitsekunden“ vergl. Astronomie § 1.)

Wie man sieht, ist also die natürliche Winkleinheit schon der volle Winkel selbst; und es bildet ein wichtiges Axiom der Geometrie, daß zwei vollen Winkel gleich sind (— was zusammen mit der Definition des rechten Winkels als vierten Teiles eines vollen das 10. Euklidische „Axiom“ gibt: „Zwei rechten Winkel sind einander gleich“). — Für die weit in das Altertum zurückreichende Unterteilung des vollen Winkels in 360° Grade waren wohl namentlich zwei Gründe maßgebend: Erstens der astronomische, daß die Sonne im vollen Umkreis der Ekliptik in annähernd 360 gleichen täglichen „Schritten“ (gradus) zurücklegt, welche Annäherung auch dem noch jetzt gebräuchlichen kalendarischen Jahre zu 360 Tagen entspricht. Zweitens der arithmetische Umstand, daß 360 sehr viele ganzzahlige Divisoren hat: nämlich 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 45, 60, 72, 90, 120, 180. — Trotzdem ist das

die Zahl 360 gegründete Gradmaß nur ein willkürliches. Deshalb konnte z. B. zur Zeit der Einführung des Metermaßes der Vorschlag gemacht werden, den vollen Winkel in 400 gleiche Teile zu teilen, den rechten also in 100 etwas kleinere „Grade“ zu zerlegen; doch hat sich dieses Maß nicht eingebürgert. Mehr Aussicht hat es, den rechten Winkel wie bisher in 90 Grade zu teilen, sich aber dann der Dezimalteilung dieses alten Grades zu bedienen, statt der Angabe von Winkelminuten und Winkelsekunden. Bis jetzt ist diese Dezimalteilung noch wenig namentlich an den Teilkreisen astronomischer Instrumente gebräuchlich; durch ihre allgemeine Einführung würde sich die Einrichtung und der Gebrauch der logarithmisch-trigonometrischen Tafeln wesentlich einfacher gestalten.

In der wissenschaftlichen Geometrie und auch in der Mechanik bedient man sich meist überhaupt nicht des Gradmaßes, sondern des absoluten Winkelmaßes. In diesem ist die absolute **Winkel-einheit** (1 a. WE oder kürzer WE) derjenige Centriwinkel, dessen zugehöriger Bogen gleich lang ist dem Radius. Verglichen mit dem Gradmaß ist 1 a. WE $= \frac{360^\circ}{2\pi} = 57^\circ 17' 44,8''$.

Dafs also 1 a. WE etwas kleiner als 60° sei, prägt sich sofort aus der Überlegung ein, dafs für den Centriwinkel 60° dem Radius nicht der Bogen, sondern die Sehne gleich ist. Der genaue Wert ergibt sich aus der Bedingung, dafs für den vollen Winkel der zum Radius r cm gehörige Bogen $2\pi r$ cm, also 2π mal so lang als der Radius ist. Derjenige Winkel also, dessen Bogen gleich dem Radius ist, mufs 2π mal so klein als der volle Winkel von 360° sein. Man präge sich hiernach folgende zu einander gehörige Angaben ein:

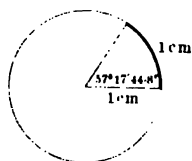
$$\begin{array}{ccccccc} 360^\circ, & 180^\circ, & 90^\circ, & 60^\circ, 57^\circ 17' 44,8'', & 45^\circ, 30^\circ, & 1^\circ \\ 2\pi = 6,28 \dots, & \pi = 3,14 \dots, & \frac{\pi}{2} = 1,57 \dots, & \frac{\pi}{3}, & 1, & \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{180} \text{ a. WE.} \end{array}$$

Allgemein: Sind für einen beliebigen Winkel die Maßzahlen im Gradmaß n , im absoluten Winkelmaß φ , also $n^\circ = \varphi$ a. WE, so besteht die Beziehung $n^\circ : 360^\circ = \varphi : 2\pi$; somit $\varphi = \frac{2\pi}{360} n$ oder

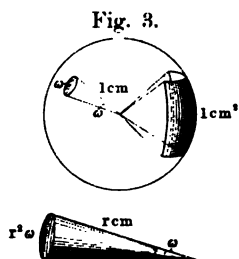
$$\varphi = \frac{\pi}{180} n \text{ und } n = \frac{180}{\pi} \varphi.$$

Sowohl das Gradmaß wie das absolute Winkelmaß sind völlig unabhängig vom gewählten Längenmaß; Transporteure mit kleinem, grossem Radius. — Die Maßzahlen der Winkel im absoluten Maß gewinnen aber eine besonders einfache übersichtliche Deutung, wenn wir sie auf den „Einheitskreis“, d. i. den Kreis mit dem Radius 1 cm beziehen. Dann tritt nämlich an Stelle obiger vom Centimeter unabhängigen Definition die folgende: 1 a. WE ist derjenige Centriwinkel im Einheitskreise, dessen zugehöriger Bogen 1 cm lang ist (Fig. 1). Einem Winkel von φ a. WE entspricht eine Bogenlänge von φ cm. (Vergleichung des absoluten Winkelmaßes mit den goniometrischen Funktionen [s. u. Nr. 18]; Wiewohl nämlich die goniometrischen Funktionen gegenwärtig nicht mehr als Strecken, sondern als reine Verhältniszahlen definiert zu werden pflegen, empfiehlt es sich doch.

Fig. 1.



Räumliche Winkel. Sowie der Umfang des Kreises vom Halbmesser 1 cm das Maß 2π des vollen ebenen Winkels, so gibt die Oberfläche der Kugel vom Halbmesser 1 cm das Maß 4π des vollen räumlichen Winkels (Fig. 3). — Sowie $l = r\varphi$ die Länge des Bogens im Kreise vom Halbmesser r zum Centriwinkel von φ absoluten Einheiten des ebenen Winkels ist, so ist $f = r^2\omega$ der Flächeninhalt des Teiles einer Kugeloberfläche vom Halbmesser r , der aus der ganzen Oberfläche durch einen räumlichen Winkel von ω absoluten Einheiten des räumlichen Winkels herausgeschnitten wird (Anwendung in LA 48).



3. Messung von Raumstrecken.

Einheit der Raumstrecke (allgemeiner: der räumlichen Abstände, meistens kurz: **Längeneinheit LE**) ist im C-S-G-System das **Centimeter** (cm) = $\frac{1}{100}$ Meter (m). — Es sind 10 cm = 1 dm, 100 cm = 1 m; 1000 m = 1 km; $\frac{1}{1000}$ m = 1 mm; $\frac{1}{1000}$ mm = 1 μ (1 Mikron); $\frac{1}{1000000}$ mm = $\frac{1}{1000}$ μ = 1 $\mu\mu$ (z. B. gebräuchlich bei Wellenlängen des Lichtes, Tafel V bei S. 363).

Das **Meter** ist definiert als der Abstand zweier Striche an dem internationalen Meterprototyp, d. i. einem Platin-Iridiumstab, den die 1889 in Paris tagende internationale Meterkonferenz auswählte, mit der Bezeichnung \mathfrak{M} versah, und der seither im Keller des internationalen Bureaus (im Park von St. Cloud bei Paris) verwahrt wird.

Diesem seit 1889 geltenden Begriffe des Meters (und ebenso des Kilogramms, Anhang Nr. 5) ist eine 99 Jahre umfassende Entwicklung vorausgegangen. Im Jahre 1790 hatte die französische Nationalversammlung eine Kommission (*Commission des poids et mesures*) eingesetzt, der LAPLACE, LAGRANGE, BORDA, LAVOISIER u. A. angehörten. Diese Kommission wählte 1791 als Längeneinheit den zehnmillionsten Teil des durch die Pariser Sternwarte gehenden Erdmeridianquadranten (erste Definition des „Meter“). Behufs Messung des Quadranten wurde von 1792 bis 1798 der Meridianbogen zwischen Dünkirchen und Montjoux bei Barcelona trigonometrisch vermessen. Als direkt, nämlich mittels eines Toisenmaßstabes gemessene Basis diente der Abstand zweier Punkte, die in eingemauerten Kupferzylindern eingraviert waren. Dieser Abstand betrug 6075,900 069 Toisen (die direkt gemessenen Winkel des ersten Dreiecks waren $63^{\circ} 43' 34,08''$, $75^{\circ} 33' 29,81''$, $40^{\circ} 36' 56,81''$; ihre Summe geht über 180° um $0,70''$, den durch die Rücksicht auf die Erdkrümmung verlangten „sphärischen Exzeß“, hinaus). Der ganze trigonometrisch gemessene Bogen betrug 551 583,6 Toisen (bei einem Meridianbogen von $9^{\circ} 40' 24,24''$). Hieraus wurde unter der Annahme, daß die Abplattung der Erde $\frac{1}{324}$ sei, auf eine Länge jenes Meridianquadranten von 5 130 740 Toisen geschlossen und im Jahre 1800 hiernach die Länge des neuen Maßes so festgestellt: 1 Meter = 0,513 074 Toise (— 1 Toise war etwa 1 Klafter im damaligen Maße). — Es wurde sodann ein Stab aus Platin von 0,4 cm Dicke, 2,5 cm Breite, an dem der Abstand der kugelig abgerundeten Ecken genau jener

berechneten Länge gleich sein sollte, angefertigt und als **Archivmeter** bezeichnet, weil er in den Pariser Staatsarchiven verwahrt wurde.

Einige Jahrzehnte später machte **BESSEL** darauf aufmerksam, daß das definierte und angefertigte Meter keineswegs ein Urmaß (in dem Sinne von Anh. 1. Nr. 1), sondern begrifflich und sachlich abhängig sei von dem individuellen Toisenmaßstabe, der zur Messung jener trigonometrischen Base gedient hatte. Auch beträgt nach **BESSEL**s Berechnungen auf Grund eines anderen Wertes der Abplattung der Erde (die man gegenwärtig zu $\frac{1}{234}$ annimmt) die Länge des Meridians nicht das 10⁷fache, sondern das 10 000 856 fache der Länge des Archivmeters (— dieser war also um 0,0856 mm, d. i. um etwa Haarsendicke kürzer, als seiner Definition nach beabsichtigt war).

Nach neuerlichen jahrzehntelangen Verhandlungen und Vorarbeiten wurde dann 1889 30 neue Meterstäbe aus einer Legierung von 90 Proz. Platin und 10 Proz. Iridium (die sehr hart und sehr vollkommen zu polieren ist) hergestellt.

Fig. 4.



Dem Querschnitt dieser Stäbe wurde die Form von Fig. 4 (natürliche GröÙe) gegeben, da bei dieser überhaupt nur geringe Verbiegungen eintreten, für die dann ab die neutrale Schicht ist (§ 51), die sich bei Verbiegungen weder verlängert noch verkürzt. Die Stäbe wurden annähernd 102 cm lang gemacht und auf der Fläche ab ein der Länge des Archivmeters um 1800 möglichst genau gleicher Abstand als „1 Meter“ durch feine Endstriche markiert. Bei nachherigen wiederholten Ver-

gleichungen dieser neuen Meterdistanz zeigte sie sich bei einem der 30 Meterstäbe (M_6) von der des Archivmeters auch bei genauester mikroskopischer Prüfung nicht mehr merklich verschieden. Dieser Stab bekam die Bezeichnung \mathfrak{M} und bildet das neue **internationale Prototyp des Meters**. — Die übrigen Meterstäbe wurden unter die an der Kommission beteiligten Staaten verlost; z. B. Österreich erhielt die Meter M_{13} und M_{19} , welche gegen \mathfrak{M} um 0,0009 mm bzw. 0,0011 mm zu lang befunden wurden. (Aus einer großen Zahl von Messungen ergab sich, daß diese Abweichungen einen wahrscheinlichen Fehler $\pm 0,0002$ mm haben, d. h. die wahre Länge der Stäbe beträgt noch um 0,0002 mm mehr oder weniger, mit einer Wahrscheinlichkeit 1:1400. Dieser Unterschied wäre auch durch die schärfsten Mikroskope kaum mehr zu beobachten.) — Da die Länge des Meters auch von der Temperatur abhängig ist und nicht alle Thermometer völlig gleiche Temperaturen zeigen (§ 73), so wurden jeder der Meterkopien zwei bestimmte Quecksilberthermometer beigegeben, nach denen die Reduktion auf die Temperatur des schmelzenden Eises zu vollziehen ist.

Es ist festzuhalten, daß trotz der Unterschiede in den Längen der 30 nationalen Meter von dem einen internationalen Meter nicht etwa nun die einzelnen Staaten etwas verschiedene Längeneinheiten besitzen, sondern für alle gemeinsam ist 1 LE die Länge des eingangs definierten internationalen Meterprototyps; die bekannten Unterschiede der nationalen Meter werden bei feinsten Messungen in Rechnung gebracht. Für die allermeisten Zwecke aber bleiben diese Unterschiede ohnedies ganz außer Betracht. Für die dem jeweiligen Zwecke angemessene Genauigkeit der in den Handel kommenden Maßstäbe sorgen die behördlichen Eichungskommissionen.

Der Durchführung genauer Längenmessungen dienen mannigfaltige Apparate und Nebenvorrichtungen, z. B. Kathetometer, Fühlhebel, Nonien und Mikrometerschrauben.

Fig. 5 zeigt die Anwendung des **Kathetometers** z. B. zur Ablesung der Höhe beider Säulen in einem Heberbarometer, dem man sich nicht nähern will, damit weder die Aufhängung des Instrumentes noch (durch die vom Beobachter ausstrahlende Wärme) die Temperatur gestört werde.

Fig. 5.

Nonius. Wird der Nullpunkt eines z. B. in Centimeter und Millimeter geteilten Maßstabes an den Anfangspunkt einer gegebenen Strecke gelegt, so ist es streng genommen unendlich unwahrscheinlich, daß auch der Endpunkt dieser Strecke genau zusammenfallen werde mit einem Teilstrich des Maßstabes. — Damit aber auch noch Zehntelmillimeter abgelesen werden können, ist neben dem Hauptmaßstab ein Nebenmaßstab (**Nonius, Vernier, Werner**) verschiebbar. Auf ihm sind dann 9, bzw. 11 mm in 10 gleiche Teile geteilt; dann ist beim „vortragenden Nonius“ 1 Teil = $\frac{9}{10}$ mm = $(1 - \frac{1}{10})$ mm, beim „nachtragenden Nonius“ 1 Teil = $\frac{11}{10}$ mm = $(1 + \frac{1}{10})$ mm.

Fig. 6 veranschaulicht, wie durch Beobachtung (nötigenfalls mittels Lupe) der coincidierenden Teilstriche des Haupt- und Nebenmaßstabes eine Strecke (zwischen A und B) von z. B. 4,76 cm abgemessen wird.

Ebensolche Nonien werden auch an feineren Kreisteilungen angebracht.

Sehr geringe Unterschiede von Längen lassen sich mittels **Mikrometerschrauben** bestimmen; denn wenn die Höhe eines Schraubenganges (Anh. Nr. 25) Anh. 25.

sehr klein ist und mit der Schraubenspindel ein Schraubenkopf verbunden

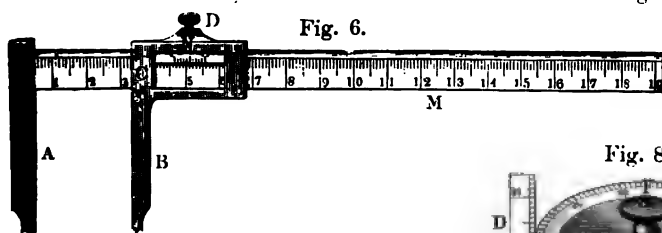


Fig. 6.

Fig. 7.


 $\frac{1}{2}$

Höfler, Physik.

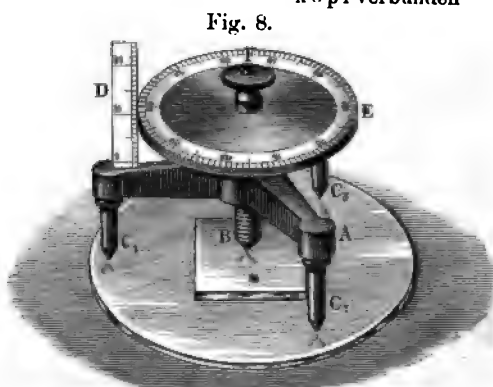


Fig. 8.

ist, an dessen Umfang eine genaue Gradteilung enthält, so lassen sich sehr kleine Bruchteile der Höhe des Schraubenganges mittelbar am Skopkopfe ablesen. Hierauf beruht z. B. die Messung von Spaltenbreiten n. v. S.); desgleichen das **Sphärometer** (Fig. 8 a. v. S.), mittels dessen Dicke eines Plättchens (unter der Spitze *B*), teils die Krümmung kugelige (hiernach der Name Sphärometer), z. B. von Hohlspiegeln, Linsen bestimmt kann — entsprechend der stereometrischen Aufgabe: Von einer Ellipse die Abstände dreier Punkte C_1, C_2, C_3 eines Nebenkreises und die Höhe der Kappe gegeben: hieraus den Kugelradius zu bestimmen.

4. Messung von Zeitstrecken.

Einheit der Zeitstrecke (der Zeitdauer, meistens kurz **ZE**) ist im C-S-G-System die **Sekunde mittlerer Sonne** (sec) = $\frac{1}{86400}$ des **mittleren Tages** (Tag mittlerer, bürgerlicher Sonne) — Es sind $60 \text{ sec} = 1 \text{ min}$, $60 \text{ min} = 1^h$, $24^h = 1^d$ (Tag, d. i. $1^d = 24 \times 60 \times 60 \text{ sec} = 86400 \text{ sec}$).

Nach § 181 liegt dem Begriffe des mittleren Tages zu Grunde das tropische Jahr, d. i. die zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Mittelpunktes der Sonnenscheibe durch den Frühlingspunkt verstrichene Zeit (nach einem für eine möglichst große Zahl von solchen Jahren genommenen Durchschnitt). Da aber die Zahl der Tage dieses tropischen Jahres bekannt (in erster Annäherung $365\frac{1}{4}$ Sonnentage = $366\frac{1}{4}$ Sternentage) ist, so gibt die Definition des Tages mittlerer Sonnenzeit auch noch die Rücksicht auf den Sternentag, indem die genaue Zahl x der auf ein tropisches Jahr entfallenden Sternentage dadurch definiert ist, daß die Zahl der Sternentage $x + 1$ sei. Nach § 181 sind die meisten Jahre genommenen Durchschnitts sind dann $365,24222$ Tage = $366,24222$ Sternentage. Daraus ergeben sich die Umrechnungszahlen:

$$1 \text{ mittlerer Tag} = \frac{366,24222}{365,24222} = 1,0027379 \text{ Sternentage} = 86636,55 \text{ sec S.}$$

$$1 \text{ Sternentag} = \frac{365,24222}{366,24222} = 0,9972696 \text{ mittlere Tage} = 86164,09 \text{ sec m.}$$

Dasselbe Zeichen „sec“ kann also sowohl die in der Astronomie gebräuchliche Sekunde Sternzeit, wie die im bürgerlichen Leben und in der gebräuchlichen Sekunde mittlerer Zeit bedeuten. Da alle genauen Bestimmungen auf die an den Sternwarten anzustellenden Beobachtungen zur Zeit und von diesen wieder die einfachsten und genauesten die der täglichen Drehung des Fixsternhimmels sind, wie sie durch die tägliche Rotation der Erde (gemäß dem ersten Hauptsatze der kopernikanischen Lehre, § 181) bedingt ist, so können wir sagen:

Die **Uhr**, nach deren Angaben wir letztlich alle anderen richten, ist die Erde; Uhrzeiger ist das nur in der Meridiane drehbare, im übrigen mit der Erde fest verbundene **Meridian** des Astronomen (§ 176), Zifferblatt ist der **Fixsternhimmel**.

Warum es nicht angeht, die Räderuhren nach den Sonnenuhren zu richten, vergl. § 181 (Zeitgleichung). — Wie nun die erste Forderung an eine Uhr die ist, daß die Winkelgeschwindigkeit (§ 12, 31) ihrer Zeiger konstant sei (wogegen ein gleichmäßiges Zufrüh- oder Zuspätgehen einer U

schadet, sondern durch Zu- oder Abrechnen einer der jeweilig verlossenen Zeitstrecke proportionalen Korrektur leicht verbessert werden kann — Vor- oder Nachrücken der Zeiger wird bei guten Uhren möglichst vermieden), so scheint alle Zeitmessung auf die Schwierigkeit zu führen, woher wir wissen, daß die Erde mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotiert? Ja, schließt nicht diese Frage selbst schon einen logischen Zirkel ein, da wir ja „gleiche Zeiten“ selbst wieder nur nach den von der Erde zurückgelegten gleichen Umdrehungswinkeln beurteilen? — Dieser Schwierigkeit scheint man entgegen zu können, wenn man an Stelle der Zeitstrecken in exakten physikalischen Messungen überhaupt nur die Umdrehungswinkel der Erde einsetzt. Gegen dieses Auskunftsmittel aber ist zu bemerken, daß, wenn die Erde eine hinreichend große Winkelbeschleunigung oder Verzögerung erhielte, wir dies an unserem unmittelbaren psychologischen Zeitmaße (psych. Anhang Nr. 41) merken würden. Auch würden wir, wenn z. B. die Erde ihren Umlauf in demjenigen Zeitraum vollendet hätte, den wir jetzt eine „Stunde“ nennen, nicht eben diesen Zeitraum als gleich demjenigen bezeichnen, den wir jetzt einen „Tag“ nennen. Anh. 41.

In der Tat liegt denn auch dem astronomisch-physikalischen Zeitmaße unser anderweitig, nämlich dynamisch begründetes Wissen (nicht die bloße „Annahme“) zu Grunde, daß die Umdrehung der Erde eine mit überaus großer Annäherung wirklich gleichförmige, d. h. ihre Winkelgeschwindigkeit fast völlig konstant sei. Wäre nämlich die Erde eine reine Kugel von homogener Massenverteilung, so könnte die Anziehung keiner anderen Masse des Universums an ihr eine Winkelbeschleunigung hervorrufen (da jeder Punkt auf diese Kugel so wirkte, als wenn ihre ganze Masse im Mittelpunkte vereinigt wäre, somit keine der Massenanziehungen ein Drehmoment lieferte). Daraus, daß die wirkliche Erde kein starres System ist, sondern daß vor allem der Mond im Wassermeeere (und vielleicht auch im feuerflüssigen Innern) Flutreibung hervorruft, kann die Erde allerdings eine Winkelverzögerung haben. Umgekehrt würde, wenn der Erdkörper infolge Abkühlung und Zusammenziehung ein kleineres Trägheitsmoment bekäme und seine kinetische Energie unverändert bliebe, dies eine Winkelbeschleunigung zur Folge haben. Man schätzt die aus beiden Ungleichheiten resultierende Ungleichförmigkeit der Erdrotation so, daß seit Hipparchs Zeiten der Sterntag nur etwa 1 sec länger geworden sei. Nach anderen Schätzungen hätte sich der Sterntag seit damals um jedenfalls weniger als $\frac{1}{20}$ sec verlängert oder verkürzt. —

So wie sich die Gleichförmigkeit der Erdrotation letztlich aus dem Trägheitsgesetze erklärt, sind es auch dynamische Gesetze, auf die wir die Einrichtung der Pendel- und Federuhren gründen. Inwieweit dann eine einzelne Uhr der Absicht gemäß ausgeführt ist, beurteilen wir teils durch Vergleichung mit dem Fixstermlaufe, d. h. danach, ob den von den Fixsternen zurückgelegten Bögen die von den Zeigerspitzen zurückgelegten Bögen proportional sind; teils vergleichen wir nur möglichst viele sorgfältig gearbeitete Uhren untereinander.

Die **Pendeluhr** (zuerst ersonnen von GALILEI, von dem eine wahrscheinlich nach einem Modell angefertigte Zeichnung einer ganz richtig gebauten Pendeluhr erhalten ist, Fig. 9 a. f. S.), wurde zuerst wirklich ausgeführt und verwendet von HUYGENS auf Grund der in der Schrift *Horologium oscillatorium* 1673 entwickelten Theorie des einfachen und zusammengesetzten Pendels. In eben dieser Schrift ist auch die für die Einrichtung genauer Chronometer wesentliche Verwendung der Trägheitsmomente (auf deren Begriff eben das Problem des physischen Pendels geführt hatte) gegeben. Erst hierdurch wurden die schon lange vorher be-

kannten Räderuhren (z. B. Nürnberger Eierlein) zu exakten Zeitmeßinstrumenten Wasseruhren (vergl. GALILEIS Versuche, § 2), Sanduhren.

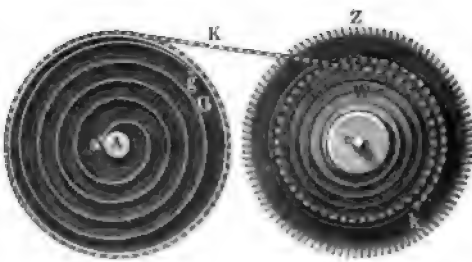
Fig. 9.



In der Pendel-
uhr würde ein
Welle eines Zahn-
werkendes Ge-
oder eine ges-
Feder diesem
Winkelbesch-
gung erteilen,
nicht eine mit
Pendel ver-
Ankerhemm-
die gleichmäßi-
schleunigte Bew-
in eine glei-
förmige (ge-
in eine aus gle-
Abschnitten
ungleichförm-
bestehende) ver-
delte. — Die Be-
wirkung des L-
auf das Pe-
ersetzt diesem
durch Reibung
Luftwiderstand
stehenden Verlu-
Energie.

Sekunden-, Minuten-, Stundenzeiger mit den entsprechenden Zahn-
Kompensationspendel, § 73.

Fig. 10.



Im **Chronometer** ist
bewegende Kraft die eine
stischen Feder wirksam.
Ankerhemmung der Pend-
ist hier ersetzt durch die
ruhe, welche Drehsch-
gungen (§ 33) ausführt.
Die Konstanz der Schwing-
dauer trotz der durch das
Laufen der Feder eintreten-

Verminderung der Federkraft wird herbeigeführt durch Veränderung des Kraftarmes (indem eine Kette spiralig aufgewunden ist, Fig.

Die Regulierung gegenüber Einflüssen der Temperatur wird durch Änderung des Trägheitsmomentes von Massen erzielt, die an einem Doppelstreifen aus Metall entsprechend angebracht sind (Kompensationsstreifen, Fig. 278, S. 264).

Chronoskope heißen Vorrichtungen zur Messung sehr kleiner Zeitstrecken bis herab auf Tausendstel, ja Millionstel Sekunden.

In Hipp's Chronoskop ist ein sehr genaues Uhrwerk mit zwei Zifferblättern, die Hundertstel und Tausendstel Sekunden angeben, durch einen Elektromagneten so lange arretiert, bis zu Beginn der zu messenden Zeitstrecke (z. B. freier Fall einer Kugel bei geringer Fallstrecke) der Strom unterbrochen wird und so die Bewegung des Räderwerkes freigibt. Zu Ende der Zeitstrecke werden die Zeiger wieder arretiert.

Sogar die Zeiten, die z. B. eine Kanonenkugel braucht, um bestimmte Strecken innerhalb des Kanonenlaufes zurückzulegen, lassen sich elektrisch messen, indem quer durch den Lauf Leitungsdrähte gespannt sind, die von der Kugel abgerissen werden und in diesen Zeitpunkten z. B. Funkenmarken in sehr rasch rotierende berufste Trommeln einbrennen. Bei anderen Chronoskopen liefern schwingende Federn, frei fallende Körper und dergleichen, fast immer unter Zuhilfenahme elektrischer Ströme, die Zeitmaße.

5. Messung von Massen.

Einheit der Masse (Masseneinheit ME) ist im C-S-G-System das **Gramm (g)** = $\frac{1}{1000}$ **Kilogramm (kg)**. Es sind $10\text{ g} = 1$ Dekagramm, $\frac{1}{10}\text{ g} = 1$ Decigramm, $\frac{1}{1000}\text{ g} = 1$ Milligramm (mg). — Vergl. § 16.

Das **Kilogramm** ist definiert als die Masse des internationalen Kilogrammprototyps, d. i. des Platin-Iridiumzylinders, der 1889 dem Pariser Archivkilogramm von 1800 möglichst genau massengleich gemacht, mit der Bezeichnung \mathfrak{K} versehen wurde und im Keller des internationalen *Bureau des poids et mesures* zu Paris aufbewahrt wird.

Das Archivkilogramm war ein Platinzylinder, den die 1790 eingesetzte *commission des poids et mesures* möglichst genau massengleich gemacht hatte einem Liter Wasser von 4°C . — Durch diese Definition hatte man ein Urmaß der Masse festgestellt zu haben geglaubt, was aber später aus ähnlichen Gründen wie bei dem Meter sich als nur annähernd erreicht herausstellte. Überdies hatten sich aber während der Arbeiten behufs Abnahme von Kopien dieses Kilogrammkörpers Zweifel an seiner Konstanz erhoben, deren Berechtigung aus den folgenden Einzelheiten erhellt:

Es war nicht möglich gewesen, eine der Definition des Kilogramms unmittelbar entsprechende Menge Wasser von 4°C . und 1 Liter Volumen direkt herzustellen; denn schon die Kapillarscheinungen am Rande eines genau 1 Liter fassenden Gefäßes machen eine genaue Entscheidung schwierig, ja unmöglich, ob ein solches Gefäß wirklich genau eben gefüllt sei. Vielmehr wurde die Masse von 1 Liter Wasser mittelbar auf Grund des Archimedischen Prinzips bestimmt: Ein Messingzylinder (bei dem es nicht auf seine Masse, sondern auf sein stereometrisch genau zu bestimmendes Volumen ankam) wurde in Wasser gewogen und hiernach ermittelt, daß 1 Liter Wasser von 4°C . das Gewicht von 2 Pfund 5 Gros 35 Gran altfranzösischen Gewichtes habe. Auf Grund dieser Zahlen wurde dann ein Platinkörper gefertigt, der ein genau ebenso großes Gewicht haben sollte. Als Gestalt

dieses Körpers wurde die des gleichseitigen Zylinders ($h = 2r$) gewählt. In Wahrheit hatte das nach diesen Definitionen angefertigte Archivkilogramm aber abgerundete Kanten und zeigt auch an der Oberfläche Poren, in welchen sich Schmiergelkörner lagern (sie rühren her vom Abschmiegeln des Zylinders, aber auf sein richtiges Gewicht gebracht wurde; und die Poren waren nicht zu vermeiden, weil man damals das Platin noch nicht schmelzen konnte, sondern nur chemischen Verbindungen als Pulver abschied und dieses in der Glühhitze des Hämmerns zu einem dichterem Ganzen zusammenschweißte). Als dann später der Archivkilogrammzylinder selbst wieder in Wasser gewogen wurde, hat sich wahrscheinlich eine nicht mehr zu bestimmende Menge dieser Schmiergelkörner abgeschwemmt. Möglicherweise weicht das alte Archivkilogramm um ein $\frac{1}{50}$ tausendstel gegen seine theoretische Definition ab, welche Größe noch bei weite nicht an, geschweige unter der Grenze der Empfindlichkeit unserer Waagen ist.

Bei der Herstellung des internationalen Kilogrammprototyps von 1889 war so vorgegangen: Es wurde ein Block von 65 kg einer Legierung von 90 P. Platin und 10 Proz. Iridium (die erst auf Grund ganz neuer chemischer Methoden frei von fremden Metallen, namentlich von Eisen erhalten werden konnten) der Schmelzung hergestellt. Aus diesem Block wurden 40 Zylinder entnommen:

Fig. 11.

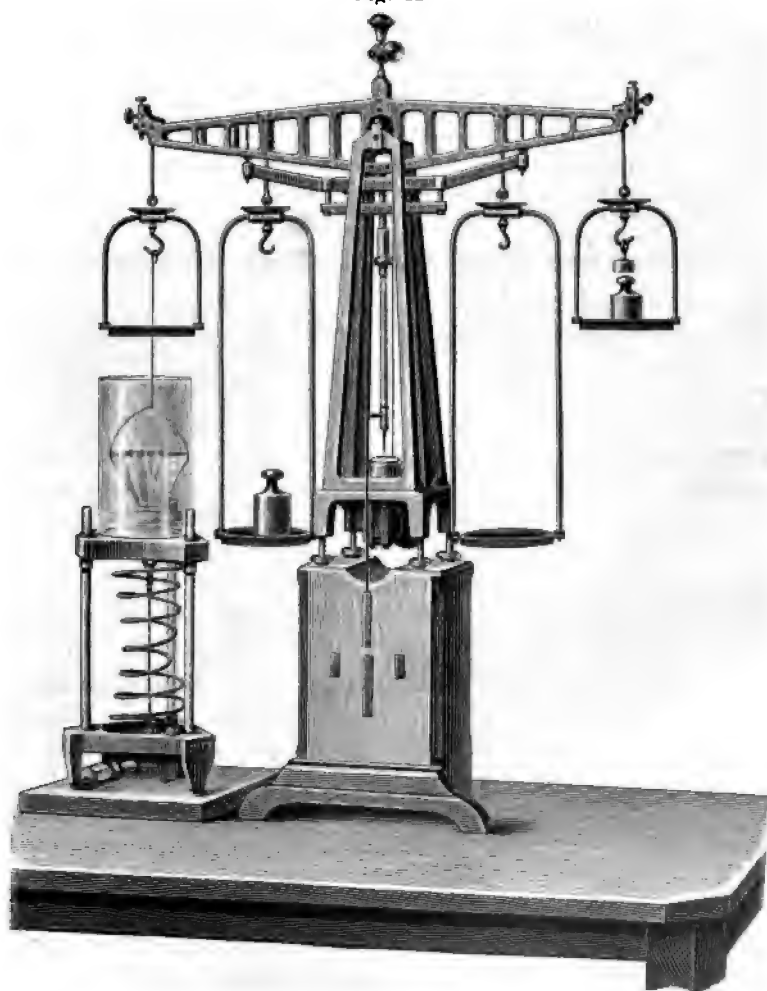


von denen 20 für die Gewichte benutzte. Ebenso hatte man vorher ein Archivkilogramm mit dem Archivkilogramm verglichen und so festgestellt, daß es um $\frac{1}{50}$ tausendstel leichter als solches Gewicht mit dem Archivkilogramm war. Diese 20 Zylinder von 1889 hatten, dabei zeigte einer dieser Kerne eine kleine Abweichung von der theoretischen Verschiedenheit vom Gewichte des Archivkilogramms. Diese Kerne waren als A bezeichnet und bilden zur Zeit

• internationale Prototyp. Mit diesem Kilogramm \mathfrak{K} wurden die 40 nationalen Prototypen durch Wägung in Luft verglichen und die Abweichungen auf den leeren Raum reduziert. Österreich erhielt bei der Verlosung die mit \mathfrak{K}_{14} und \mathfrak{K}_{33} bezeichneten Prototypen; von diesen ist \mathfrak{K}_{33} um 0,061 mg zu leicht, wobei der mögliche Fehler $\pm 0,001$ die Wahrscheinlichkeit von 1400:1 hat. — Es ist auch hier festzuhalten, daß trotz der Unterschiede der nationalen Kilogrammprototypen von dem internationalen Kilogrammprototyp nicht etwa die verschiedenen Staaten verschiedene Masseneinheiten besitzen, sondern für alle gemeinsam ist als Masseneinheit das internationale Prototyp.

Für die meisten theoretischen und praktischen Massen- und Dichtebestimmungen genügt die alte Definition: 1 g ist die Masse von 1 cm³ Wasser bei 4° C. — Die theoretisch aber ist die Masse von 1 g = $\frac{1}{1000}$ der Masse des internationalen Kilogramms \mathfrak{K} = der Masse von 1,00005 cm³ Wasser bei 4° C.

Fig. 12.



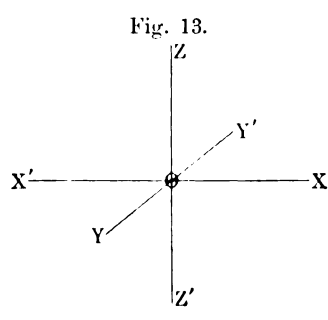
Alle genaue Vergleichung irdischer Massen erfolgt in der **Wage** (über die Vergleichung kosmischer Massen vergl. § 21). Fig. 11 (S. 710) zeigt eine feine Wage mittlerer Tragkraft. Der Balken ist durchbrochen und mit einer Skalenteilung versehen; auf ihn an verschiedenen Stellen „Centigrammhaken“ (mittels Schrauben von außen durch das Gehäuse geführt sind) aufgesetzt, so kann man noch Bruchteile eines Centigramms wägen. Die abwärts hängende Zunge spielt vor einer Skale; da nach § 29, Gl. 1, für kleine Gewichte $\tan \alpha$ proportional p ist, so kann aus der Abweichung der Lotlage auf die Größe des Übergewichts geschlossen werden. An dem Wagebalken oberhalb der Schneide angebrachte Gewichte erlauben den Schwerpunkt des Wagebalkens verschieden hoch zu stellen und so die Empfindlichkeit nach Bedarf zu regulieren. Die Waagschalen werden mittels Träger, die ebenfalls von außen zu den Schalen zu senken sind, arretiert oder freigegeben. — Erklärung der Einheiten nach einer wirklichen feinen „chemischen Waage“.

Fig. 12 (a. v. S.) zeigt eine Demonstrationswaage von RUPRECHT zum Zwecke mit Vorrichtung zu Wägungen unter Wasser.

6. Geometrische (und arithmetische) Dimensionen

Bekanntlich pflegt man eine Linie ein eindimensionales, eine Ebene ein zweidimensionales, einen Raum ein dreidimensionales Gebilde zu nennen. Die Ausdrücke „Dimension“ und „1-, 2-, 3- (4- . . . , n -)dimensional“ im strengen Sinne gemeint ist, läßt sich zuerst für Raumgrößen so beschreiben.

Durch einen Punkt O des Raumes lassen sich unendlich viele Geraden legen, so daß keine Gerade allen übrigen irgendwie ausgezeichnet ist. — Wählen wir von

Fig. 13.  Geraden eine $X'X$ (Fig. 13), so lassen sich auf ihr im Punkte O immer noch unendlich viele normale Geraden legen, welche zusammen in der auf $X'X$ senkrechten Ebene liegen. Wählen wir von diesen Geraden wieder eine $Y'Y$, so läßt sich nunmehr eine einzige Gerade Z angeben, welche sowohl auf $X'X$, als auch auf $Y'Y$ normal steht. Kürzer: In jedem Punkte des Raumes beträgt die Anzahl der Geraden, die zu einer gegebenen Geraden in einem Punkte normal stehen, drei; wobei aber die Lage des Scheitels O selbst schon eindeutig, sondern unendlich vieldeutig gegeben ist. Drei solche Geraden OX , OY , OZ bilden ein **dreiaxiges Koordinatensystem**; näheres hierüber s. u. Nr. 7.

gegenseitig aufeinander Normalen drei; wobei aber die Lage des Scheitels O selbst schon eindeutig, sondern unendlich vieldeutig gegeben ist. Drei solche Geraden OX , OY , OZ bilden ein **dreiaxiges Koordinatensystem**; näheres hierüber s. u. Nr. 7.

Unter den begrenzten Räumen, d. h. den („mathematischen“) **Körpern**, ist es das rechtwinkelige Parallelepipèd, von welchem je drei in einer Ecke zusammenstossende Kanten die drei Dimensionen anschaulich darstellen. Ebenso unter den begrenzten Flächen das Rechteck die zwei Dimensionen. Die Gerade besitzt nur eine Dimension.

Aber auch einer unbegrenzten oder begrenzten krummen Linie sprechen wir nur eine, die Längsdimension, zu, einer krummen Fläche zwei Dimensionen, die Flächendimension. Letzteres hat den Sinn, daß, wenn wir aus der Fläche ein Element herausheben, seine Abweichung von der Tangentialebene verschwindend klein ist gegen die Längsausdehnungen des Elementes (von scharfen Kanten und Spitzen abgesehen; vergl. Nr. 26 „Krümmung“). — Halten wir uns daher, um zu einer festen Definition der räumlichen Dimension zu gelangen, der Einfachheit halber wieder nur an die Ebene mit ihren zwei Dimensionen, so können wir sagen: Sobald in der Ebene zwei zu einander normale Gerade $X'X$ und $Y'Y$ gezogen sind, läßt sich jede durch deren Durchschnittspunkt O gehende weitere Gerade $G'G$ ersetzen durch die Richtungen jener beiden „Achsen“ und bestimmte Längen an diesen Achsen; und: Jede begrenzte Gerade ist durch ihre Projektionen auf die eine Achse und den Projektionswinkel, oder durch ihre Projektionen auf die zwei Achsen eindeutig bestimmt.

Diese beiden Richtungen der Ebene, auf welche sich in diesem Sinne alle übrigen Richtungen „zurückführen“ lassen, heißen nun die „zwei Dimensionen“ der Ebene. Im analogen Sinne kommen dann dem Raume „drei Dimensionen“ zu. — Daß es einen „Raum mit 4, 5 . . . $n > 3$ Dimensionen“ nicht gibt (wenn auch aufseräumliche „Mannigfaltigkeiten“ von beliebig vielen „*Dimensionen“ denkbar, zum Teil auch zu veranschaulichen sind, z. B. am „Farbenkörper“, Nr. 44), ist im selben Sinne und mit gleicher Evidenz ein Axiom der („Euklidschen“) Geometrie, wie z. B. das, daß alle vollen ebenen Winkel einander gleich sind. (Speziell dem Vorschlage, den drei Dimensionen des Raumes als vierte Dimension die eindimensionale Zeit zuzugesellen, ist entgegenzuhalten, daß Raum und Zeit qualitativ verschieden sind; wie sich denn auch schon z. B. eine Zeitstrecke weder der Lage noch der Länge nach vergleichen läßt mit einer Raumstrecke. Ebenso war auch oben schon einmal das Wort „*Dimension“ in künstlich erweitertem Sinne gebraucht.)

Die bisherigen Bestimmungen betreffen bloß geometrische Lagen-, nicht Gröfsen- (Maß-)Verhältnisse. — Vergleichen wir nun die Maßzahlen des Rechtecks und des senkrecht-rechtwinkeligen Parallelepipèds mit den Maßzahlen einer Geraden, so ist

für das Rechteck: $f = g \cdot h$, für das Parallelepipèd: $v = abc$
speziell für das Quadrat: $f = a^2$, für den Würfel: $v = a^3$.

Es kehren also hier die Zahlen 2 und 3, welche bezüglich der Lageverhältnisse die Anzahl der in einem Punkte möglichen Normalen gewesen waren, als Potenzexponenten, allgemeiner als **Anzahlen** der in den Formeln für f , bzw. v als **Faktoren** auftretenden Längenmaßzahlen auf.

Über diesen eigentlichen Sinn hinausgehend sagt man aber gegenwärtig nicht nur, die Maßzahl einer Fläche sei eine Gröfse zweiter, die Maßzahl eines Volumens dritter Dimension; sondern man schreibt auch sehr zweckmäßig die

Maßeinheiten der Fläche cm^2 , des Volumens cm^3 (welche Zeichen aber deshalb nicht buchstäblich, sondern nur symbolisch zu nehmen sein können, weil man zwei oder drei Größen, die, wie die Centimeter, nicht bloße Zahlengrößen sind, nicht multiplizieren, also auch nicht potenzieren kann).

Indem man überdies jenen Begriff von Dimension auch auf Produkte von mehr als drei Faktoren ausdehnte, sagt man noch innerhalb der Geometrie (z. B. bei der algebraischen Analyse von Konstruktionsaufgaben), daß, wenn $a, b, c, d, m, n \dots$ Maßzahlen von Strecken sind, das Produkt $abcd$ von vier Dimensionen, oder häufiger, aber minder genau: daß es von der vierten Dimension, des

Quotient $\frac{abc}{mnpqr}$ von der (-2) ten Dimension, die Wurzelgröße $\sqrt{\frac{abc}{mn}}$ von der $(\frac{1}{2})$ ten Dimension sei. Auch kann man dann schreiben cm^{+4} , cm^{-2} , $\text{cm}^{\frac{1}{2}}$. Hierbei hat also der Ausdruck „Dimension“ seine ursprüngliche Bedeutung gewechselt, indem es räumliche Gebilde von mehr als drei und weniger als Null Dimensionen nicht gibt (der mathematische Punkt einerseits, der im absoluten Maße gemessener Winkel andererseits hat die Dimension Null; beides in genau gleichem Sinne), man kann diesen Sinn des Wortes „Dimension“ zum Unterschied von den vorigen Bedeutungen als den der „arithmetischen Dimension“ bezeichnen. Dagegen ist die Anzahl der räumlichen Dimensionen im ursprünglichen Sinne ebenso notwendig eine absolute, ganze Zahl, wie eine Anzahl Menschen, eine Anzahl Seiten oder Ecken eines Polygons u. dergl.

Prüfung von Gleichungen in Arithmetik und Geometrie auf ihre Homogenität mittels Vergleichung der „Dimensionen“ aller einzelner Glieder. Z. B.

In der Gleichung für das Volumen des Pyramidenstützes $V = \frac{1}{3} b (B + \sqrt{Bb} + b)$ ist \sqrt{Bb} von der Dimension $(2 + 2) : 2 = 2$, also wie B und b selbst, u. s. w.

Diese zum Teil stark erweiterten Begriffe von „Dimension“ haben dann in der Physik noch folgende weitere Verallgemeinerung und Anwendung erfahren.

7. Physikalische Dimensionen.

FOURIER (1826) führte folgende Bezeichnungsweise ein: Z. B. Die Geschwindigkeit ist nach der Länge von der Dimension $+1$, nach der Zeit von der Dimension -1 ; die Beschleunigung ist nach der Länge von der Dimension $+1$, nach der Zeit von der Dimension -2 .

Dieser Sprachgebrauch FOURIERS wurde nachmals abgeändert in folgenden: Z. B. Die Geschwindigkeit hat die (oder: „ist von der“) Dimension $L^1 T^{-1}$, die Beschleunigung hat die Dimension $L^1 T^{-2}$, wobei die Zeichen L und T nur Länge und Zeit überhaupt (qualitativ), ohne Voraussetzung spezieller Längen- und Zeiteinheiten bedeuten.

Unter Einführung der Einheiten des C-S-G-Systems schreibt man z. B.:

Die Geschwindigkeit (§ 4) eines Körpers, der in gleichförmiger Bewegung 15 cm in 3 sec zurücklegt, ist $c = \frac{15 \text{ cm}}{3 \text{ sec}} = 5 \text{ cm sec}^{-1}$. —

Die Beschleunigung (§ 5) im freien Falle ist 981 cm sec^{-2} . — Bei solcher Verwendung vertreten also die Dimensionssymbole in der Regel (Ausnahmen wegen gleicher Dimension bei ungleicher Benennung s. unten) zugleich die Angabe der Benennung. Z. B. Statt 1 Dyn

kann man schreiben $1 \text{ cm sec}^{-2} g$; denn nach der Gleichung $k = mb$ hängt die Maßeinheit der Kraft von der der Beschleunigung cm sec^{-2} und der der Masse g in der Weise ab, daß die Maßzahlen beider Größen zu multiplizieren sind. — Hierbei können sich durch Auflösung der Definitionsgleichungen auch gebrochene Exponenten ergeben. Z. B. Da die elektrische Ladungsmenge gemäß $f = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r^2}$ Dyn (§ 135) definiert wird, gilt symbolisch $\text{cm sec}^{-2} g = \varepsilon^2 \cdot \text{cm}^{-2}$, woraus folgt:

$$\text{Dim } \varepsilon^2 = \text{cm}^3 \text{ sec}^{-2} g, \text{ also } \text{Dim } \varepsilon = \text{cm}^{3/2} \text{ sec}^{-1} g^{1/2}.$$

In der Tabelle der Nr. 29, S. 769 ff. sind für die wichtigsten der in diesem Buche verwendeten Größen die Dimensionssymbole beigesetzt, wogegen im Texte nur einige wenige der am leichtesten zu merkenden regelmäßig verwendet wurden, namentlich cm sec^{-1} und cm sec^{-2} . Insoweit nicht kurze Namen wie Dyn, Erg, Ohm (Cel? Accel? — S. 12 und S. 15, Anm.) . . . gebräuchlich sind, genügt es für den Anfänger und meistens auch für den praktischen Rechner, nur die Grundeinheiten im Gedächtnis zu behalten oder in Klammern beizusetzen. Freilich tritt dann bei den meisten physikalischen Größen das Zeichen (cm, sec, g) in gleicher Weise auf, da eben die meisten von allen drei Grundgrößen, d. h. von Raum, Zeit und Masse abhängen. Aber 1. genügt dies sehr oft als Erinnerung, daß z. B. im absoluten (nicht im irdischen) Maß der Massen und Kräfte, oder im absoluten C-S-G-System (nicht im absoluten GAUSS-WEBERSchen Millimeter-Sekunden-Milligramm-System) gerechnet worden sei; 2. fallen doch bei vielen Größen die eine oder zwei, selbst alle drei der Grundgrößen aus, z. B. Trägheitsmoment (cm, g) d. h. $\text{cm}^2 g$; in allen rein phoronomischen Größen fehlt g überhaupt.

Übrigens sind auch die Dimensionssymbole öfters die nämlichen für ganz heterogene Größen, z. B. cm. sec^{-1} für eine Geschwindigkeit und für einen Leitungswiderstand im elektromagnetischen Maße; cm für eine Länge und für eine elektrostatische Kapazität (§ 139). Schon aus diesem Umstande geht hervor, daß die Dimension und Benennung einer physikalischen GröÙe einander nur „in der Regel“ praktisch vertreten können und daß sie vollends theoretisch nicht dasselbe sind. Vielmehr gilt: Nur die „Benennung“ (z. B. Länge, Geschwindigkeit, Widerstand . . .) ist der unzweideutige Ausdruck für die qualitative Beschaffenheit einer physikalischen GröÙe. Noch vollkommeneres leistet die betreffende Maßeinheit (cm, absol. GE = Cel, Ohm = Ω . . .), da hier nebst der Qualität auch eine bestimmte GröÙe bezeichnet ist, nämlich die des gleichartigen Etalons (so bei der GrundgröÙe cm, bei der abgeleiteten GröÙe Ohm), oder der aus den Etalons immer wieder durch Rechnung abzuleitenden Einheiten.

Die wichtigste praktische Anwendung findet die vollständige Dimensionsangabe einer GröÙenart dann, wenn im Verlaufe oder am Ende einer physikalischen Rechnung statt der bis dahin verwendeten Einheiten höhere oder niedrigere Einheiten (oder solche eines ganz anderen Maßsystems) eingeführt werden sollen.

Inwiefern hierbei auch die Exponenten wichtig werden, zeigt die Gegenüberstellung folgender zwei Beispiele:

1. Legt ein Körper in gleichförmiger Bewegung 6 m in 5 min zurück, so ist seine Geschwindigkeit $\frac{6}{5}$ (m, min). Führen wir zunächst als Einheit des Weges

statt Meter Centimeter und später als Einheiten der Zeit statt Minuten Sekunden ein, so wird seine Geschwindigkeit ausgedrückt durch $\frac{600}{5} \text{ (cm, min)} = 120 \text{ (cm, min)}$
 $= \frac{120}{60} \text{ (cm, sec)} = 2 \text{ (cm, sec)}.$

2. Hat ein Körper bei gleichmäßiger Geschwindigkeitszunahme zu Beginn einer Minute die Geschwindigkeit $\frac{6}{5} \text{ (m, min)}$, am Ende dieser Minute hingegen $\frac{7}{5} \text{ (m, min)}$, so ist seine Beschleunigung $\frac{7-6}{5} \text{ (m, min)} = \frac{100}{5} \text{ (cm, min)} = \frac{100}{5 \cdot 60^2} \text{ (cm, sec)}$
 $= \frac{1}{5 \cdot 36} \text{ (cm, sec)} = \frac{1}{180} \text{ (cm, sec)}.$

Es ist also z. B. bei Einführung einer kleineren Zeiteinheit die Maßzahl der Geschwindigkeit mit der (+1)ten, die einer Beschleunigung mit der (+2)ten Potenz der Verwandlungszahl zu multiplizieren; dagegen bei Einführung einer kleineren Wegeinheit hindurch nur mit der (+1)ten Potenz zu dividieren oder mit der (-1)ten Potenz zu multiplizieren; und so überhaupt mit den jeweiligen reziproken Werte der Verwandlungszahl in der durch die Dimensionsformel angezeigten Potenz. — Diese Rechnungsregel kommt übrigens meist nur dort zur Anwendung, wo man erst nach durchgeführter Rechnung die neuen Einheiten einführen will. Solange während des Rechnens die Potenzierungen der Maßzahlen noch nicht ausgeführt sind, unterliegen auch Einführung der neuen Maßzahlen die in ihnen steckenden Umwandlungszahlen selbst den durch die physikalischen Formeln vorgeschriebenen Operationen. — Man beachte diesen Unterschied z. B. bei der Berechnung der Beschleunigung des Mondes gegen die Erde aus dem Abstände des Mondes in Erdradien und seiner

LA 34. Umlaufzeit in Tagen nach der Gleichung $w_{\perp} = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$ in cm und sec (LA 34), indem man einmal die Umrechnung zu Beginn und ein andermal zu Ende der numerischen Rechnung vornimmt. —

Die theoretische Bedeutung der Dimensionsformeln liegt darin, daß sie den Hinweis darauf enthalten, ob eine abgeleitete GröÙe mit den Grundgrößen cm, sec, g (oder auch anderen, schon abgeleiteten Größen) nach dem „multiplikativen Typus“ (Beispiele: Fläche = Länge \times Länge; Volumen = Fläche \times Länge; Kraft = Masse \times Beschleunigung; Arbeit = Kraft \times Weg . . .) oder dem „divisiven Typus“ (Beispiele: Geschwindigkeit = $\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}}$; Beschleunigung = $\frac{\text{Geschwindigkeit}}{\text{Zeit}}$; Dichte = $\frac{\text{Masse}}{\text{Volumen}}$. . .) zusammenhängt. Anderer als dieser zwei Typen bedient sich die Physik nicht.

Über weitgehende Vereinfachungen aller Dimensionsformeln, sobald die Dimension der Gravitationskonstante (desgleichen der reziproke Wert der Dielektrizitäts- und der der Magnetisierungskonstante) gleich der Dimension einer LA 32 Geschwindigkeit gewählt wird, vergl. LA 52.

8. Vektoren. Vektorgrößen und Skalengrößen.

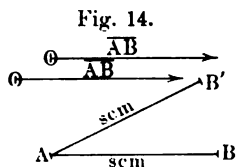
Bekanntlich pflegt man Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte u. dergl., wiewohl sie nicht selbst Strecken sind, doch durch Strecken (Pfeile, Vektoren) darzustellen; und zwar deutet man durch eine Pfeilspitze eine

bestimmte Richtung (z. B. der Geschwindigkeit, genauer genommen: des von einem Punkte mit dieser Geschwindigkeit zurückgelegten Weges) unmittelbar an; wogegen sich die **absolute Größe** z. B. einer Geschwindigkeit nur mittelbar durch die Länge einer Strecke so darstellen läßt, daß, wenn willkürlich festgesetzt ist, 1 cm Länge solle eine Geschwindigkeit c cm sec⁻¹ darstellen, ein Pfeil von 2, 3 . . . cm Länge Geschwindigkeiten von $2c$, $3c$. . . cm sec⁻¹ darstellt.

Alle Größen, denen außer ihrem absoluten Werte noch Richtung zukommt, heißen **Vektorgrößen** — im Gegensatz zu richtungslosen Größen oder **Skalengrößen**, wie Wärmegrade, Potentiale (§ 24) . .

Schärfer gefaßt gehört zum Begriffe des Vektors noch, daß sein Ausgangspunkt („Ursprung“) unwesentlich sei (z. B. bei rein fortschreitenden Bewegungen, wo die Bewegung irgend eines Punktes zugleich die aller übrigen repräsentiert; desgleichen bei den Kräften des homogenen Kraftfeldes). — MAXWELL [*Matter and motion* (Stoff und Bewegung), Art. VIII] definiert: „Der Ausdruck \overline{AB} ist im geometrischen Sinne nichts als der Name einer Linie. Hier jedoch bezeichnet er die Operation, mittels welcher die Linie gezogen wurde, nämlich das Fortführen eines beschreibenden Punktes in einer bestimmten Richtung und durch eine bestimmte Strecke. — In dieser Bedeutung als Operation nennt man \overline{AB} einen **Vektor**, und die Operation selbst ist vollständig bestimmt durch die Richtung und Strecke der Fortführung. Der Ausgangspunkt, den man Ursprung des Vektors nennt, kann beliebig gewählt werden. — Um eine gerade Linie zu bestimmen, müssen wir sowohl ihren Anfangspunkt, als auch ihre Richtung und Länge angeben; Vektoren hingegen, welche sich nur durch ihren Ursprung voneinander unterscheiden, welche also parallel (und nach derselben Seite hin gezogen) und von gleicher Länge sind, werden als gleich angesehen. — Jede Größe, welche, wie z. B. eine Geschwindigkeit oder eine Kraft, eine bestimmte Richtung und einen bestimmten Betrag hat, kann als Vektor betrachtet und in einem Diagramm als gerade Linie dargestellt werden, deren Richtung parallel ist der des Vektors und deren Länge, nach einer angenommenen Skala, die Größe des Vektors vorstellt.“

Wie man sieht, sind im Begriffe des „Vektors“ die Merkmale der Größe und Richtung künstlich vereinigt, das der absoluten Lage künstlich aus ihm ausgeschieden. Wird nämlich z. B. die Strecke AB (Fig. 14) von der absoluten Länge s cm binnen t sec zurückgelegt, so kommt der Bewegung die absolute Geschwindigkeit von $c = \frac{s}{t}$ cm sec⁻¹ zu, welcher Größe



zunächst noch kein Richtungsmerkmal anhaftet. Insofern ist die Geschwindigkeit der Bewegung von A nach B die gleiche wie die von A nach B' oder speziell auch von B nach A , wenn die Strecke AB' der absoluten Länge nach gleich der Strecke AB , wiewohl der Richtung nach von ihr verschieden, ja ihr geradezu entgegengesetzt ist. Wie man aber dem Begriffe der (absoluten) natürlichen Zahl nochmals das Merkmal des Negativen, bzw. Positiven (und bei komplexen Zahlen das irgend einer Richtung in der Zahlenebene) hinzufügt, kann man auch zu dem Begriffe jener absoluten (richtungslosen) Größe der Geschwindigkeit das Merkmal der Richtung der Strecke AB , bzw. AB' ausdrücklich hinzufügen und dann sagen, es habe nicht nur die Bewegung überhaupt eine bestimmte Richtung, sondern auch speziell die Geschwindigkeit selbst habe eine Richtung. —

Man kann die **Vektoren der Geschwindigkeit** und die **Vektoren der Beschleunigung** mit dem gemeinschaftlichen Namen **Bewegungsvektoren** zeichnen. Unter diese Bezeichnung fallen auch **Vektoren der Wege** (Dislokationen, falls z. B. in Fig. 27, S. 26 nur darauf geachtet wird, daß die Strecken AB und AD binnen gleicher Zeiten zurückgelegt worden sind).

Durch Einführung des Begriffes Vektor vereinfachen sich alle Sätze, in auf die Konstruktion von Parallelogrammen (der Dislokationen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte . . .) Rücksicht genommen zu müßte. Während nämlich z. B. die Resultierende zweier Kräfte nur dann ist ihrer „Summe“ im gewöhnlichen Sinne, wenn die Kräfte denselben Anpunkt und gleiche Richtungen haben, läßt sich allgemein der die Diagonale Kräfteparallelogramms darstellende Vektor als die „Summe“ der die Komponenten darstellenden Vektoren aus den Parallelogrammseiten auffassen und bezeichnen (Es entspricht dies z. B. der Darstellung der komplexen Zahlen in der Zahlenlinie, indem dieselbe Zahl $Z = a + bi$ entweder durch die gebrochene Linie den Strecken a, b oder durch die gerade Linie $OM = r$ dargestellt wird $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und $\tan \varphi = \frac{b}{a}$). Ebenso kann dann jede Komponente (Differenz¹⁾) aus der Resultierenden und der anderen Komponente berechnet werden u. s. f. — Eine interessante Anwendung dieser Vektoren in Hamiltonschen Hodographen (LA 31, 44).

9. Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

Für den Fall von nur zwei Größen a und b entspricht der arithmetischen Proportion $a - x = x - b$

das **arithmetische Mittel** $x = \frac{a+b}{2}$

der geometrischen Proportion $a : y = y : b$

das **geometrische Mittel** $y = \sqrt{ab}$

der harmonischen Proportion $(a - z) : (z - b) = a : b$

das **harmonische Mittel** $z = \frac{2ab}{a+b}$

Verallgemeinerte arithmetische Mittel.

Zu den n Größen a_1, a_2, \dots, a_n ist das arithmetische Mittel $x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$ (1); man bezeichnet es auch kurz als die „durchschnittliche Größe“ oder als den „Durchschnitt jener Größen.“

¹⁾ Für die sehr häufige Wortverbindung „gleich und entgegengesetzt“ (in Physik: Wege, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen, Kräfte, Potentiale, elektrische Ladung, magnetische Polstärken u. s. f.) würde sich der kurze Ausdruck „**gegengleich**“ empfehlen. — In dieser Ausdruckweise hiefse es dann z. B. allgemein: **Die Summe gegengleicher Größen** (sowohl Vektorgrößen wie Skalengrößen) **ist Null**.



Ein solcher Durchschnitt wird z. B. genommen, wenn sich bei wiederholten Messungen der Länge desselben Stabes u. dgl. die voneinander etwas abweichenden Maßzahlen $a_1, a_2 \dots a_n$ ergeben haben; vorausgesetzt, daß alle Messungen unter (so viel man weiß) gleich günstigen Messungsbedingungen ausgeführt worden sind. Es ist dann unmittelbar einleuchtend, daß der wahrscheinlichste Wert der wahren Länge jenes arithmetische Mittel sei. — Auch hat dieses die merkwürdige Eigenschaft, daß die Summe der Quadrate $S = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ den kleinstmöglichen Wert erreicht, wenn als Wert von x jenes arithmetische Mittel gewählt wird (Beweis vergl. Anh. Nr. 14).

Anh. 14.

Sehr häufig sind in der Physik Durchschnitte aus Größen zu nehmen, die von einem Anfangswerte Null bis zu einem Endwerte E gleichförmig und stetig zunehmen. Dann ist $D = \frac{0 + E}{2} = \frac{E}{2}$. Daß dieses arithmetische Mittel aus Nichts und Etwas auch zugleich die Durchschnittsgröße der Einzelwerte ist, läßt sich in den Formeln der arithmetischen Reihe (Nr. 10) allgemein so beweisen:

$$\frac{\varepsilon + 2\varepsilon + \dots + (n-1)\varepsilon + n\varepsilon}{n} = \frac{n(n+1)\varepsilon}{2 \cdot n} \neq \frac{n\varepsilon}{2} = \frac{E}{2}.$$

Beispiele: Galileis graphische Methode zur Ableitung von $s = \frac{g}{2} t^2 = \frac{1}{2} (gt) \cdot t$,

§ 6: die Ableitung der Arbeit $A = \frac{1}{2} \kappa s^2$, § 22; ferner LA 57, 58, 59.

LA 57, 58, 59

Eine Erweiterung des Begriffes arithmetisches Mittel in anderer Hinsicht wird dann notwendig, wenn den zwei (oder mehreren) Größen a und b verschiedenes „Gewicht“ (das Wort im übertragenen Sinne, wie „Gewicht einer Zeugenaussage“, genommen) zukommt. Wer z. B. 1 m Tuch um 5 Mk. und 1 m um 7 Mk. kauft, hat im Mittel „Tuch im Werte von 6 Mk. pro Meter gekauft“. Wer aber 3 m Tuch zu 5 Mk. und 6 m zu 7 Mk. gekauft hat, hat Tuch um $\frac{3 \cdot 5 + 6 \cdot 7}{3 + 6} = \frac{57}{9} = 6\frac{1}{3}$ Mk. pro Meter gekauft. Dieser Preis weicht von dem einfachen Mittel (6) zwischen 5 und 7 gegen den Preis des kostspieligeren (7) ab, weil die Menge des kostspieligeren Tuches überwogen hatte. So bei allen „Mischungsrechnungen“. — Allgemein:

Das arithmetische Mittel für die Größen $a, b, c \dots$, welche die „Gewichte“ $\alpha, \beta, \gamma \dots$ haben, ist $x = \frac{\alpha a + \beta b + \gamma c + \dots}{\alpha + \beta + \gamma + \dots}$.. (2)

Diese Gl. (2) läßt sich übrigens als spezieller Fall der obigen Gl. (1) auffassen; denn wir können die Gewichtszahlen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ (vorausgesetzt, daß sie ganze Zahlen sind) als Anzahlen gleicher Gewichte einzelner Gruppen auffassen. Z. B. Hat ein Schüler dreimal die Note 2 und fünfmal die Note 4 erhalten, so verdient er nicht die „reine“ Note 3, sondern man rechnet:

$$x = \frac{2 + 2 + 2 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4}{8} \quad \text{oder} \quad x = \frac{3 \cdot 2 + 5 \cdot 4}{3 + 5} = \frac{26}{8} = 3\frac{1}{4}.$$

Speziell auch bei wiederholten Beobachtungen, von welchen α Beobachtungen das Ergebnis a und β das Ergebnis b ergeben haben, wird der wahrscheinliche Wert nicht $\frac{a + b}{2}$, sondern $\frac{\alpha a + \beta b}{\alpha + \beta}$ sein.

Die Erweiterung der Gl. 3 für gleiche oder ungleiche Massen. Da durch diese Gleichung nur der Abstand des Schwerpunktes von einer Ebene kommt, so bedarf es für ein nach drei Dimensionen verteiltes System von Massenpunkten dreier solcher Gleichungen. Haben wir Bezug auf ein dreiachsiges rechtwinkeliges Koordinatensystem (Fig. 18) die Massenpunkte m_1, m_2, \dots, m_n die Koordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, \dots, x_n, y_n, z_n$, und schreiben wir z. B. $x_1 + m_1 x_2 + \dots + m_n x_n = \Sigma m x$ und $m_1 + m_2 + \dots + m_n = \Sigma m = M$ die Gesamtmasse des Systems, so sind (Fig. 18) die

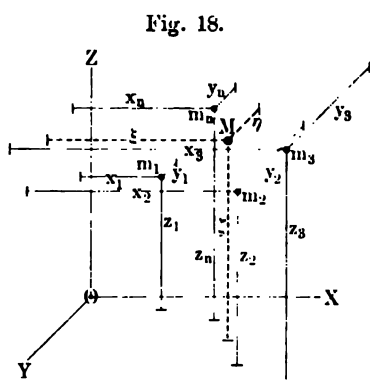


Fig. 18.

Koordinaten des Schwerpunktes $\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}$, $\eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}$, $\zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}$... (4).

Anwendungen dieser Gleichungen zur Schwerpunktsbestimmung von stetig verteilter Masse erfüllen Gebilden LA 70, 72.

LA 70, 72.

Bemerkung: Obwohl durch die Gleichungen (3, 4) die Lage des Schwerpunktes eines Systems von Massenpunkten nicht auf dieses System selbst, sondern auf ein äußeres Koordinatensystem bezogen erscheint, so ist doch die Lage des Schwerpunktes nur von der gegenseitigen Lage der Massenpunkte und den Größen ihrer Massen, nicht aber von der Lage dieses Koordinatensystems abhängig. Es erhellt dies schon im einfachsten Falle eines arithmetischen Mittels z. B. $x = \frac{a+b}{2}$. Dieser Gleichung entspricht geometrisch

die Lage eines Punktes M in der Mitte zwischen zwei Punkten A und B ; dabei zählt M seine Lage in Bezug

auf A und B , wie immer diese

äußere geometrische Ge-

de liegen mögen. Bezieht man

auf die Punkte A und B auf

einander in der durch sie bestimmten Geraden liegenden Punkt O (Fig. 19), indem

$OA = a$, $OB = b$, so ist $OM = x = \frac{a+b}{2}$. Aber auch wenn statt O ein

anderer Punkt O' gewählt wird, so daß $O'A = a'$, $O'B = b'$, ist doch wieder

$M = x' = \frac{a'+b'}{2}$. Denn, wenn $O'O = \delta$, so ist $a' = a + \delta$, $b' = b + \delta$,

mit $x' = \frac{a'+b'}{2} = \frac{(a+\delta)+(b+\delta)}{2} = \frac{a+b}{2} + \delta = x + \delta = O'M$.

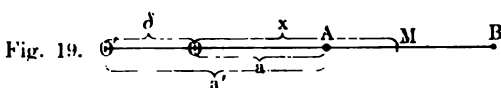


Fig. 19.

Geometrisches Mittel.

Nach der Formel $y = \sqrt{ab}$ wird gerechnet bei BORDAS Doppel- LA 78.
messung (LA 78), bei der Ermittlung der Horizontalintensität des Erd-
magnetismus aus den Ergebnissen A und B der ersten und zweiten
Auptoperation (§ 146); weitere Beispiele 146.

Ein geometrisches Mittel ist es auch, wenn in der Ableitung der Gl. (3),
22, als Mittelwert von r^2 und r_1^2 gesetzt wird rr_1 , denn $rr_1 = \sqrt{r^2 r_1^2}$. Dieses
Höfler, Physik.

Mittel wird hier nur gewählt, weil es das rechnerisch bequemste ist; würde man rr_1 ein anderer Mittelwert $r_1 r'_1$ gewählt, wo $r'_1 = r + \varepsilon$ (und wieder ε verschwindend klein wird, wenn r_1 sich der Grenze r nähert, wie es in jener Rechnung vorausgesetzt ist), so wird auch der Unterschied zwischen den Mitteln rr_1 und rr'_1 verschwindend klein. (Immerhin ist hiermit noch nicht streng bewiesen, daß, wenn man dieselbe Vernachlässigung bei allen unendlich vielen Gliedern der Summierung vornimmt, es in der Summe nicht einen endlichen Unterschied macht. Der strenge Nachweis ließe sich erst durch Einschließen zwischen eine obere und untere Grenze erbringen, wie in allen solchen wesentlich der Integralrechnung angehörigen Aufgaben; vergl. Anh. Nr. 15, 21.)

Harmonisches Mittel.

Das durch die harmonische Proportion $(a - z) : (z - b) = a : b$ definierte harmonische Mittel läßt sich übersichtlicher als in $z = \frac{2ab}{a+b}$ so darstellen: $bz + az = 2ab$, daher nach Division durch abz

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{z} \quad \dots (5)$$

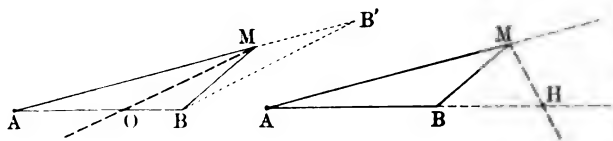
Denken wir uns hier z als gegebene konstante GröÙe, a als unabhängig veränderliche, b als abhängig veränderliche GröÙe, so heißt b dem a in Bezug auf z harmonisch zugeordnet.

Von der Form der Gleichung (5) ist die Hohlspiegelformel (§ 103). Hierin ist z der gegebene konstante Krümmungshalbmesser des Spiegels, a die unabhängig veränderlich gedachte Gegenstandsweite, b die ihr jeweilig zugeordnete Bildweite. Daß zwischen a und b diese harmonische Zuordnung besteht, hat seinen allgemeineren Grund darin, daß in dem Dreiecke AMB (Fig. 358, S. 332) der Krümmungshalbmesser OM als Einfallslot eine Winkelsymmetrale darstellt; von dieser gilt der Satz: Die Symmetrale eines Winkels im Dreiecke teilt die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten (Beweis nach Fig. 20 durch $MB' = MB$, daher $B'B \parallel MO$ u. s. w.).

Denken wir uns überdies das auf dem Einfallslote normal stehende Element der Fläche des Hohlspiegels als Ebene erweitert bis zur Verlängerung der Geraden

Fig. 20.

Fig. 21.



AB , so entspricht das der Symmetrale des Außenwinkels bei M (Fig. 21). Die Beschränkung, unter der die Hohlspiegelformel aufgestellt wurde, daß nämlich nur verschwin-

dend kleine Winkel MAH vorausgesetzt werden, hat zur Folge, daß der Punkt H zusammenfällt mit demjenigen Punkte H des Kugelspiegels, in dem der Hauptstrahl auffällt. Wir können also die Hohlspiegelformel auch so auffassen: Den beiden festen Punkten H und O sind die beiden beweglichen Punkte B und A

harmonisch zugeordnet; dies entsprechend dem allgemeinen planimetrischen Satze: Werden in einem Dreiecke ein Winkel und sein Außenwinkel halbiert, so sind die Schnittpunkte dieser beiden Winkelsymmetralen den Endpunkten der dem Winkel gegenüber liegenden Dreiecksseite harmonisch zugeordnet.

Denkt man sich dann über der Strecke OH alle diejenigen (in einem Halbkreise liegenden) Punkte M aufgesucht, für die $OM \perp MH$ und den Punkt A als Gegenstandspunkt aus $+\infty$ bis O und von da nach H wandernd, so stellt B den Bildpunkt dar, wenn immer $\angle BMO = \angle OMA$ gemacht wird.

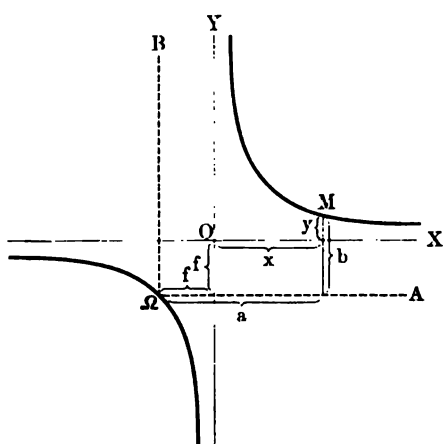
Weitere arithmetische und geometrische Beziehungen ergeben sich aus (5), wenn wir $\frac{2}{z} = \frac{1}{f}$ und $a = f + x \dots (6)$, $b = f + y \dots (7)$ setzen. Dann

wird durch eine leichte Reduktion $xy = f^2 \dots (8)$. Das ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel (Nr. 23) in Bezug auf ein Koordinatensystem $O(XY)$, für die zu $x=f$ auch $y=f$ gehört und deren reelle Halbachse $\sqrt{f^2 + f^2} = f\sqrt{2}$ ist (Fig. 22). Betrachten wir ferner die Gleichungen (6) und (7) als Transformationsformeln in Bezug auf ein System $\Omega(AB)$, und denken wir uns in diesem Systeme die Abszisse a von $+\infty$ bis Null abnehmend, so wachsen die zugehörigen Werte der Ordinaten b gemäß der Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \dots (9)$$

— also ebenso, wie bei einem Konkavspiegel oder einer Konvexlinse von gegebener Brennweite f mit abnehmender Gegenstandsweite die Bildweite wächst.

Fig. 22.



10. Arithmetische und geometrische Reihen. Interpolation und Extrapolation.

Eine arithmetische Reihe (erster Ordnung) bilden die Größen $a, a + d, a + 2d, a + 3d \dots$; es ist dann

das n te Glied der arithmetischen Reihe $t = a + (n-1)d$,

die Summe der arithmetischen Reihe $s = \frac{1}{2}n(a + t)$.

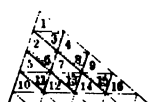
Z. B. Für die natürlichen Zahlen: $\Sigma n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1) \dots (1)$; für die ungeraden Zahlen: $\Sigma(2n-1) = 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2 \dots (2)$.

Anschauliche Darstellung der Gleichung (2) in Fig. 23 und Fig. 24 — Anwendung in den Fallgesetzen § 2; hierzu §§ 3, 6.

Fig. 23.



Fig. 24.



Steigende Reihe für $q > 1$, fallende Reihe für $q < 1$. Summe der fallenden unendlichen geometrischen Reihe $s = \frac{a}{1-q}$.

Ein Beispiel einer steigenden arithmetischen Reihe gab die VerdichtungsLuftpumpe, einer fallenden geometrischen die VerdünnungsLuftpumpe § 48. — Graphische Darstellungen von geometrischen Reihen in Figg. 26, 27, 28.

Da die Stellenzeiger $1, 2, 3, 4 \dots n-1, n \dots$ der einzelnen Glieder der Reihe selbst eine arithmetische Reihe bilden, kann man sich vorstellen, daß die Glieder einer geometrischen Reihe denen einer arithmetischen zugeordnet seien. In solchem Sinne sagt man z. B., daß die Dichtigkeiten der Luft in einer vertikalen Säule nach geometrischer Reihe abnehmen, wenn die Erhebungen nach arithmetischer Reihe wachsen; ebenso, daß die Schwingungszahlen von Tönen nach der geometrischen Reihe $1, 2, 4, 8, 16 \dots$ wachsen müssen, damit die Tonhöhe um das nämliche Intervall von je einer Oktave zunehme (ob aber diese Zunahme der Tonhöhen selbst wieder mit einer arithmetischen Reihe verglichen werden darf, ist eine Streitfrage der Psychologie, insofern es sich nicht von selbst versteht, daß Steigerungen um gleiche Tonintervalle mit den gleichen Differenzen in einer arithmetischen Reihe verglichen werden dürfen; psychol. Anh. Nr. 40). Daß und warum sich dieser Zusammenhang einer arithmetischen und einer geometrischen Reihe auch in logarithmischer Form ausdrücken läßt, ja geradezu das Wesen der Logarithmen darstellt, zeigt zunächst das Beispiel der geometrischen Reihe $10^0, 10^1, 10^2, 10^3 \dots$, wo die Exponenten $0, 1, 2, 3, \dots$ die Werte von $\log 1, \log 10, \log 100, \log 1000 \dots$ darstellen. Vergl. den allgemeineren Beweis Nr. 17. Anh. 40.

Interpolieren und Extrapolieren. Schaltet man z. B. zwischen je zwei Glieder einer arithmetischen Reihe deren arithmetisches Mittel ein, so bilden die früheren und die interpolierten neuen Zahlen zusammen wieder eine arithmetische Reihe. Ähnlich z. B. bei der geometrischen Reihe $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 \dots$.

So wurden auch am Wurfapparate Fig. 17, S. 20, zwischen je zwei aufeinander folgende Lote von den Längen $0, 5, 20, 45$ cm je drei so eingeschaltet, daß auch sie der Quadratreihe sich fügen, nämlich $0, 5 \cdot (\frac{1}{4})^2, 5 \cdot (\frac{2}{4})^2, 5 \cdot (\frac{3}{4})^2, 5 \cdot (\frac{4}{4})^2, 5 \cdot (\frac{5}{4})^2, 5 \cdot (\frac{6}{4})^2, 20 \cdot 5 \cdot (\frac{7}{4})^2 \dots$.

Ist von einer beiderseits endlichen Reihe irgendwie das Bildungsgesetz erkannt, so kann man nach demselben die Reihe auch nach beiden Seiten erweitern (oder Glieder extrapolieren).

Das einfachste Beispiel ist das Erweitern der natürlichen Zahlenreihe nach beiden Seiten ins Unendliche. — In der Physik werden so öfters Reihen von direkt beobachteten Werten über die Grenze der Beobachtung hinaus mit größerer oder geringerer Wahrscheinlichkeit angenommen (vergl. log. Anh. Nr. 31). — Doch verbietet sich eine solche Erweiterung von selbst, wenn man weiß, daß jenseits der Grenzen der der Erfahrung entnommenen Reihen anderweitige Naturgesetze ins Spiel kommen. Ein Beispiel hierfür das Erweitern des Gesetzes für die Volumverkleinerung der Gase beim Abkühlen bis zum absoluten Nullpunkt Anh. 31.

— 273° C., wobei aber schon vor dem Erreichen dieser Temperatur die Gas-
hören Gase zu sein, indem sie flüssig oder fest werden.

11. Koordinatensysteme und Koordinaten. Graphische Darstellungen.

Aus der analytischen Geometrie der Ebene wird als bekannt vorausgesetzt, wie man mittels eines **zweiachsigen, rechtwinkligen Koordinatensystems** OX, OY und zweier Koordinaten von x, y cm Länge die Lage jedes Punktes dieser Ebene darstellt. — Richtungen der Koordinatenachsen, Vorzeichen der Koordinaten. —

Die drei gegeneinander normalen OX, OY, OZ (Fig. 13, S. 6) bilden ein **dreiachsiges, rechtwinkliges Koordinatensystem**. Ebenen XOY, XOZ, YOZ heißen die drei Koordinatenebenen. Die Lage irgend eines Punktes M wird durch die drei Koordinaten von x, y, z cm Länge angegeben.

Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den ebenen und räumlichen Koordinatensystemen! — Im räumlichen System gelten meistens zwei Koordinaten x und y als unabhängig, die dritte z als die (von x, y beiden in gleichem Maße) abhängig veränderliche Koordinate.

Wie z. B. die Mittelpunkts Gleichung eines Kreises lautet $x^2 + y^2 = a^2$, so die Mittelpunkts Gleichung der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. — Rotationsellipsoid (z. B. Erdsphäroid): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$. — Dreiachsiges Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

LA 42. — Rotationsparaboloid (z. B. LA 42) $x^2 + y^2 = 2pz$. —

Das **ebene Polarkoordinatensystem** besteht in dem einzigen Falle OZ (Figg. 50, 69 . . .). Koordinaten sind hier der (meist als unabhängig veränderlich gedachte) Polarwinkel φ und der (dann als abhängig veränderlich gedachte) Leitstrahl (*radius vector* r). Man zählt φ von 0° bis 360°, r von 0 bis ∞ .

So wie man die mannigfachsten einzelnen Größen durch Vektoren darstellt, so auch die Beziehungen der mannigfachsten Größen aneinander durch **Kurven**, z. B. Luftdruckkurven (Fig. 449, S. 6), Sterblichkeitskurven u. s. f. Anwendungen solcher graphischer Darstellungen in §§ 6, 22, u. s. f.; Anh. Nr. 9 (Fig. 22), Nr. 19 (Figg. 53); LA 49, 121, 135, 139, 150, 184, 196, 206, 207, 209, 223 u. s. f.

Gesetzt, alle diese physikalischen Kurven seien zunächst rein empirisch gefunden, indem z. B. in der Kurve von Mariottes Gesetz sowohl die Werte für c , in der Kurve für die Spannkraft der Wasserdämpfe sowohl die Temperaturen t wie die Spannungen p direkt gemessen und dann durch die zugehörigen Strecken zu einer graphischen Darstellung vereinigt worden wären. Sind dann die zwei Hauptfälle zu unterscheiden, daß ein die beiderlei Größen verbindendes arithmetisches Gesetz bekannt, bzw. nicht bekannt ist. Im ersteren Falle bildet dann die die Größen selbst verbindende Gleichung zugleich die Gleichung der Kurve. Im letzteren Falle ist zwar eine solche Gleichung nicht angebar, aber auch hier ist die Kurve noch ein anschauliches Bild des zwischen den beiden Größen bestehenden „funktionellen“, wenn auch sonst übrigens unbekannten Verhältnisses. In der folgenden Nummer

jedoch der Begriff der mathematischen Funktion nur für die Fälle einer angebbaren Gleichung näher erörtert werden.

Sind nicht wie bisher nur zwei, sondern drei Größen in Abhängigkeit voneinander, so ergibt sich als graphische Darstellung statt einer Linie eine Fläche; z. B. die für Boyle-Gay-Lussacs Gesetz in LA 144. LA 144.

12. Begriff der mathematischen Funktion.

Eine arithmetische, eine geometrische (oder sonst irgend eine mathematische) Reihe läßt sich so auffassen, daß die Größe jedes Gliedes „abhängt“ von dem Stellenzeiger des Gliedes. Tragen wir dann diese, ihrer Natur nach ganzzahligen Stellenzeiger als äquidistante Punkte an einer Abszissenachse, die zugehörigen Werte der einzelnen Glieder als Strecken parallel der Ordinatenachse auf, so bilden deren Enden eine Punktreihe; sie kommen z. B. bei der arithmetischen Reihe längs einer Geraden, bei der steigenden geometrischen auf einer immer steiler werdenden Kurve (Anh. Nr. 17) zu liegen. — Dem **Inter-** Anh. 17.
polleren von Gliedern in der Reihe entspricht das Dichterwerden jener Punktreihen; um aus den getrennten Punkten aber wirklich eine stetige Linie zu machen, müßten unendlich viele Reihenglieder interpoliert werden oder wir müssen uns den Stellenzeiger gleichsam stetig wachsend denken, wobei dann auch die Werte der Reihenglieder im allgemeinen stetig wachsen. Es bilden so die mathematischen Reihen eine natürliche Einführung in den allgemeinen Begriff der **mathematischen Funktion**. — Wir nähern uns diesem Begriffe auch durch die Gegenüberstellung der folgenden beiden Betrachtungsweisen mathematischer Beziehungen überhaupt, einer elementaren und einer höheren. Besteht nämlich z. B. zwischen zwei Größen x und y die Beziehung $y = x^2$, so können wir diese Gleichung erstens im elementaren Sinne der „Buchstabenrechnung“ oder zweitens im höheren Sinne einer „funktionellen Beziehung“ auffassen:

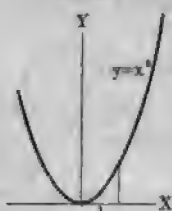
Erstens: Denken wir uns der „Buchstabengröße“ x beliebige besondere Werte erteilt, so ergibt sich durch Quadrieren jedes dieser Werte ein zugehöriger besonderer Wert von y . Dieser Auffassung entspricht das Auseinanderlegen der einen Gleichung zwischen allgemeinen Zahlen in eine **Tabelle** von zwei Reihen besonderer Zahlen, wie das Täfelchen unter Fig. 29 (a. f. S.).

Zweitens: Denken wir uns die Größe x als eine veränderliche Größe, so ändert sich mit ihr auch die Größe y ; dabei können wir uns x als von $-\infty$ stetig wachsend denken bis 0 und von hier bis $+\infty$. Es wird dann y stetig abnehmen von $+\infty$ bis 0 und von hier stetig zunehmen bis $+\infty$. Dieser Auffassung entspricht die graphische Darstellung der Gleichung durch die stetige **Kurve** in Fig. 29 (a. f. S.). — Ähnliche Tafeln und Kurven für die Gleichungen $y = x^2$ (Fig. 30), $y = \pm \sqrt{x}$ (Fig. 31), $y = \frac{1}{x}$ (Fig. 32), $y = \frac{1}{x^2}$ (Fig. 33) . . .

Denkt man sich statt der besonderen Operationen des Quadrierens, Kubierens, Radizierens, Reziproknehmens u. s. f. mit der Größe x irgend eine mathematische **Operation** vollzogen, so ist das Symbol hierfür $f(x)$, sprich: **Funktion von x** . Bezeichnet man ferner das zu je einem besonderen Wert von x zugehörige Ergebnis dieser Operation mit y , so ist die Gleichung $y = f(x)$ — in Worten: „ y ist eine **Funktion von x** “ — der Ausdruck dafür, daß zwischen y und

x irgend ein mathematischer Zusammenhang bestehe. Es heißt da x die **unabhängig veränderliche** (independent variable) GröÙe und y die **abhängig veränderliche** (dependent variable) GröÙe.

Fig. 20.



x	y
-2	4
-1	1
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
1	1
$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{4}$
2	4

Fig. 30.

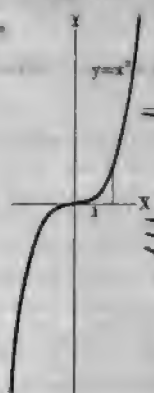


Fig. 32.

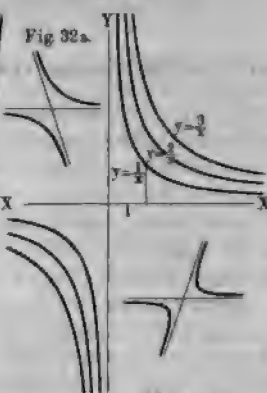


Fig. 33.

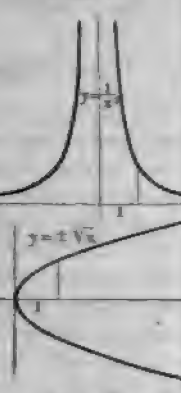


Fig. 32b.

Fig. 31.

Wie also die Einführung der Buchstaben $a, b, \dots, x, y \dots$ statt der Ziffern angedruckten Zahlen 1, 2, ... 99, 101, ... die Schwelle für das Aufsteigen von der besonderen zur allgemeinen Arithmetik darstellt, so die Einführung der Zeichen $f(x), F(x), \varphi(x) \dots$ für irgend welche Operationen die Schwelle für das Aufsteigen von der „niederen“ zur „höheren Mathematik“ dar.

Speziell in der Physik gewinnen die meisten der vorkommenden Gleichungen erst dann ihren vollen, lebendigen Sinn, wenn wir sie nicht im primitiven arithmetischen Formeln, sondern in der höheren Auffassung funktioneller Beziehungen nehmen. Z. B. Das Weg-Zeit-Gesetz für freifallende Körper $s = \frac{1}{2}gt^2$ kann allerdings einfach so verstanden werden, daß, wenn wir für t beliebige besondere Zahlen einsetzen, z. B. $t = 1 \text{ sec}$, $t = 1\frac{1}{2} \text{ sec}$, $t = 2 \text{ sec}$, sich zugehörigen Werte $s = 5 \text{ m}$, $s = 11,25 \text{ m}$, $s = 20 \text{ m}$ ergeben. Der volle Sinn dieser Gleichung aber, insofern sie eine Bewegung, also die stetige Änderung des Ortes jenes Körpers während der stetig sich ändernden Zeit darstellen erfordert, daß wir uns auch die GröÙe t als unabhängig veränderlich denken (und in der Tat können wir die Zeit die unabhängig veränderliche GröÙe t $\epsilon\lambda\omicron\chi\eta\tau$ nennen). Wenn dann die Zeit mit der ersten Potenz der stetig vergrößernden Zahlenwerte von t wächst, so wächst der Abstand vom Ausgangspunkte, d. i. der jeweilige Weg s , mit der zweiten Potenz jener Zahlen.

In den §§ 16 bis 19 sollen die einfachsten Funktionen der Elementarmathematik und einige ihrer Grundeigenschaften nach dieser Auffassung in Erinnerung gebracht und mit je einigen physikalischen Anwendungen versehen werden.

Zuvor aber stellen die §§ 13 bis 15 die Begriffe des „Differentialen“ und „Integralen“, die in physikalischen Rechnungen versteckt oder offen überall besonderen Anwendung kommen, etwas allgemeiner dar.

13. Ausdrücke von der Form $\frac{y' - y}{x' - x}$ für $x' = x$ (Differentialquotienten).

1. Aufgabe: Zwischen der unabhängig veränderlichen GröÙe x und der abhängig veränderlichen GröÙe y bestehe die Beziehung $y = x^2$. Wächst ein bestimmter Wert x bis x' , so wächst y bis y' . Wie groß ist das Verhältnis der Zuwächse $\frac{y' - y}{x' - x}$, wenn x und x' erstens um einen endlichen, zweitens um einen verschwindend kleinen Betrag voneinander unterschieden sind?

Antwort: Es ist $\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{x'^2 - x^2}{x' - x} = \frac{(x' + x)(x' - x)}{x' - x} = x' + x \dots (1)$

Soll nun hier x nur um einen verschwindend kleinen Betrag sich in x' verändern, so läÙt sich das ausdrücken durch $x' - x = 0$ oder $x' = x$. Wird dann in (1) $x' = x$ gesetzt, so ergibt sich $\frac{y' - y}{x' - x} = x + x = 2x \dots (2)$

2. Aufgabe. Dieselbe Operation durchgeführt für die Gleichung $y = x^3$ gibt

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{x'^3 - x^3}{x' - x} = \frac{(x'^2 + x'x + x^2)(x' - x)}{x' - x} = x'^2 + x'x + x^2.$$

Für $x' = x$ wird hier $\frac{y' - y}{x' - x} = x^2 + xx + x^2 = 3x^2$. — Ähnlich gilt:

Man kann zu jeder¹⁾ Funktion $y = f(x)$ den Quotienten der Differenzen $\frac{y' - y}{x' - x}$ auswerten. Man nennt solche Quotienten **Differenzquotienten**, und wenn die Differenz $x' - x$ als eine „verschwindend kleine“, d. h. wenn $x' = x$ gedacht wird, **Differentialquotienten**.

Als völlig gleichbedeutend mit den im Texte dieses Buches ausschließlich benutzten schwerfälligen, elementaren Symbolen

$$\frac{y' - y}{x' - x} \quad \text{schreibt man auch} \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\text{Differenzquotient})$$

$$\frac{y' - y}{x' - x} \quad \text{für } x' = x \quad \text{schreibt man auch} \quad \frac{dy}{dx} \quad (\text{Differentialquotient}),$$

wo die Zeichen Δ und d nicht Faktoren, sondern Operationssymbole sind.

Man sagt auch z. B.: Die Funktion $y = x^2$ gibt differenziert $\frac{dy}{dx} = 2x$.

Ebenso: Die Funktion $y = x^3$ gibt differenziert $\frac{dy}{dx} = 3x^2$. — Die Differentialrechnung lehrt jede¹⁾ Funktion zu differenzieren.

Das Anwendungsgebiet dieser Operation des Differenzierens ist ein unermesslich großes. So wurde im § 4 allgemein aus dem Weg-Zeit-Gesetz $s = f(t)$ die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ gefunden. Also z. B. angewendet auf $s = at$ ergibt sich $v = \frac{ds}{dt} = a$ (§ 4). — Aus $s = at^2$ ergibt sich $v = \frac{ds}{dt} = 2at$ (§ 4).

¹⁾ Von den durch die „Funktionentheorie“ untersuchten Ausnahmen kann in der physikalisch angewandten Mathematik abgesehen werden.

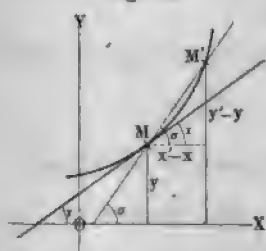
Ebenso wurde in § 5 allgemein aus der Geschwindigkeit v die Beschleunigung $w = \frac{dv}{dt}$ gefunden. Also z. B. angewendet auf $v = a$ ergibt sich

$w = 0$ (§ 5). — Aus $v = 2at$ ergibt sich $w = \frac{dv}{dt} = 2a$ (§ 5). —

Ebenso ergibt sich in § 12 aus $s = a \sin(\alpha t)$ durch Differenzieren $v = \frac{ds}{dt} = a \alpha \cos(\alpha t)$ und $w = \frac{dv}{dt} = -\alpha^2 a \sin(\alpha t)$.

Vor allem solche phoronomische Berechnungen von Geschwindigkeiten und Beschleunigungen waren es, die NEWTON die Differentialrechnung (unter dem Namen „Methode der Fluxionen“) um dieselbe Zeit erfinden ließ, als sie in der Hauptsache (unabhängig von NEWTON) LEIBNIZ zunächst behufs einer sehr allgemeinen geometrischen Aufgabe erfand, nämlich unter dem Namen

Fig. 34.



„Problem der Tangenten“: 1. Aufgabe: Es sei $y = x^2$ die Gleichung der Parabel in Fig. 29, S. 728. Wie groß ist der **Richtungskoeffizient** $A = \operatorname{tg} \tau$ in demjenigen Punkte M der Parabel, dessen Abszisse x ist? **Auflösung:** Für den Punkt M ist $y = x^2$, für einen Nachbarpunkt M' ist $y' = x'^2$. Die durch M und M' gehende Sekante schliesse mit der Abszissenachse den Winkel σ ein; für ihn ist

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{y' - y}{x' - x}.$$

Die Sekante geht in die Tangente über, wenn M' unendlich nahe an M heranrückt, also $x' - x = 0$, oder $x' = x$ wird. Dies eingesetzt in die Gleichung für $\operatorname{tg} \sigma$ ergibt

$$A = \operatorname{tg} \tau = \frac{y' - y}{x' - x} \text{ für } x' = x.$$

Diese allgemeine [für jede Kurvengleichung $y = f(x)$ gültige] Gleichung gibt, auf die spezielle Kurve $y = x^2$ angewendet, $A = \operatorname{tg} \tau = 2x$.

Beweis: $\operatorname{tg} \sigma = \frac{x'^2 - x^2}{x' - x} = x' + x$ und daher ist $\operatorname{tg} \tau = x + x = 2x$.

Es entsprechen einander für diese spezielle Kurve $y = x^2$ z. B. die Werte

$x = -2,$	$x = -1,$	$x = 0,$	$x = +\frac{1}{2},$	$x = +1,$	$x = +2$
$\operatorname{tg} \tau = -4,$	$\operatorname{tg} \tau = -2,$	$\operatorname{tg} \tau = 0,$	$\operatorname{tg} \tau = +1,$	$\operatorname{tg} \tau = +2,$	$\operatorname{tg} \tau = +4$
$\tau = 104^\circ 2' 10'',$	$\tau = 116^\circ 33' 54'',$	$\tau = 0^\circ,$	$\tau = 45^\circ,$	$\tau = 63^\circ 26' 6'',$	$\tau = 75^\circ 57' 50''$

Bemerkung. Statt ausführlich zu sagen: „ $A = 2x$ ist der Richtungskoeffizient in demjenigen Punkte M der Parabel, dessen Abszisse x ist“, werden wir auch abkürzend sagen: „Der Richtungskoeffizient der Parabel ist $2x$ “.

Ein Beispiel für Differenzquotienten (entsprechend $\operatorname{tg} \sigma$) und Differentialquotienten (entsprechend $\operatorname{tg} \tau$) vergl. auch LA 139 über „mittlere spezifische Wärme“ und „wahre spezifische Wärme“.

Eine der nächstliegenden Anwendungen des Differenzierens ist die „Methode der Maxima und Minima“.

14. Maxima und Minima der Funktionen.

Es gibt Funktionen, z. B. $x = +Ax$, $y = x^3$, $y = \log x$, . . . , bei denen jedem Wachsen des x auch ein Wachsen des y entspricht; andere, z. B. $y = -x^3$, $y = \operatorname{ctg} x$, . . . , bei denen jedem Wachsen des x ein Abnehmen des y entspricht. — Bei sehr vielen Funktionen aber geht mit einer immer in demselben Sinne erfolgenden Änderung (Wachsen, Abnehmen) des x das Wachsen des y bei bestimmten Werten des x in ein Abnehmen (bezw. das Abnehmen in ein Wachsen) über. Man sagt von solchen Funktionen, daß bestimmten Werten des x ein **Maximum** bzw. **Minimum** des y entspreche.

So haben die Funktionen $y = x^2$, $y = x^4$, . . . bei $x = 0$ ihr Minimum. Die Funktion $y = x^2 - 3x + 2$ hat bei $x = 1\frac{1}{2}$ ihren Minimalwert (Fig. 35). Z. B. für die Funktion $y = \sin x$ (Fig. 52, S. 742) sind

die Maxima bei $x = \dots - 270^\circ, + 90^\circ, + 450^\circ, \dots$,
die Minima bei $x = \dots - 90^\circ, + 270^\circ, + 630^\circ, \dots$

Wie hier, sind also die Begriffe Maximum und Minimum nur in Bezug auf die nächste Umgebung gemeint. Z. B. $\sin 90^\circ = 1$ ist sowohl größer als $\sin(90^\circ - \xi)$ wie auch größer als $\sin(90^\circ + \xi)$, wenn ξ eine beliebig kleine GröÙe bedeutet; dagegen sind die Maxima bei $x = 90^\circ, 450^\circ \dots$ alle untereinander gleich, nämlich $= 1$.

Ein Verfahren, diejenigen Werte der unabhängigen Variablen x anzugeben, für welche die unabhängig veränderliche GröÙe $y = f(x)$ ein Maximum oder Minimum erreicht, bieten die Differentialquotienten der Funktion; nämlich:

Eine GröÙe $x = f(x)$ erreicht ihre größten und kleinsten Werte y_{\max} bzw. y_{\min} für diejenigen speziellen Werte von x , für die die GröÙe $A = \frac{y' - y}{x' - x}$ für $x' = x$ (kürzer geschrieben $\frac{dy}{dx}$) den Wert Null annimmt [— über Ausnahmen von dieser Regel siehe unten a) und b)].

Fig. 36 gibt die graphische Begründung dieser Regel: An Stellen, wo die Kurve steigt oder fällt, ist $A = \operatorname{tg} \tau$ positiv bzw. negativ. Wo dagegen die Kurve nicht mehr steigt und noch nicht fällt, ist $A = \operatorname{tg} \tau = 0$.

Diese Regel hat Ausnahmen in zweierlei Fällen:

a) Es kann $A = \operatorname{tg} \tau = 0$ werden, indem statt Maximis und Minimis „Wendepunkte“ (W, Fig. 37) vorhanden sind, wo der konvexe in den konkaven Verlauf oder umgekehrt übergeht, wie z. B. für $y = x^3$ bei $x = 0$ (Fig. 30).

Fig. 35.

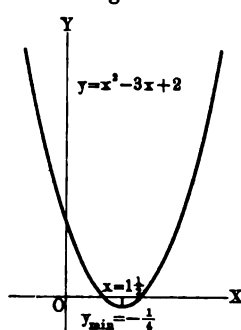


Fig. 36.

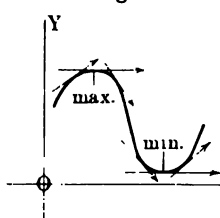
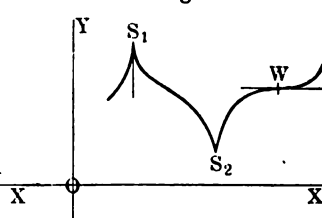


Fig. 37.



b) Es können Maxima und Minima eintreten, ohne daß $A = tg t = 0$, nämlich wenn die Kurve Spitzen S_1, S_2 hat wie in Fig. 37.

Beispiel 1: Durch Rechnung zu zeigen, daß und warum die Funktion $y = x^2 - 3x + 2$ ihren Minimalwert bei $x = \frac{3}{2}$ hat.

$$\text{Auflösung: Für diese Funktion ist } \frac{y' - y}{x' - y} = \frac{x'^2 - 3x' + 2 - (x^2 - 3x)}{x' - x} \\ = \frac{x'^2 - x^2 - 3(x' - x)}{x' - x} = \frac{(x' + x)(x' - x) - 3(x' - x)}{x' - x} = x' + x - 3$$

Für $x' = x$ wird dieser Quotient $A = x + x - 3 = 2x - 3$. $A = 0$, muß $2x - 3 = 0$, also $x = 1\frac{1}{2}$ sein.

Der zu diesem Werte $x = 1\frac{1}{2}$ gehörige Wert $y = (1\frac{1}{2})^2 - 3(1\frac{1}{2}) + 2 = -\frac{1}{4}$ ist wirklich kleiner als die Nachbarwerte des y (für $x = 1\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$).

Beispiel 2: Zu zeigen, daß unter allen Rechtecken von gleichem Umfange $4a$ das Quadrat den größten Flächeninhalt hat.

Auflösung: Ist eine Rechteckseite x , so ist die andere $2a - x$, die Fläche $y = (2a - x)x = 2ax - x^2$; hier ist also

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{(2ax' - x'^2) - (2ax - x^2)}{x' - x} = \frac{2a(x' - x) - (x'^2 - x^2)}{x' - x} = 2a - (x' + x)$$

Für $x' = x$ wird dieser Quotient $A = 2a - 2x$. Damit $A = 0$, muß $x = a$ sein.

Eine Art Umkehrung des obigen Satzes ist der folgende: Unter den Rechtecken von gleichem Flächeninhalt a^2 hat das Quadrat den kleinsten Umfang. — Der Beweis dieser Umkehrung stützt sich auf den unmittelbar einleuchtenden Satz, daß bei ähnlichen Figuren zum größeren Umfange der größere Flächeninhalt und umgekehrt gehört. Sind dann nebst dem gegebenen Quadrat von der Fläche a^2 und somit vom Umfang $4a$ noch beliebige Rechtecke von gleichem Umfang $4a$ gegeben, so haben nach obigem Beispiel 2 alle Rechtecke kleinere Flächen als das Quadrat. Ersetzt man jedes Rechteck durch ein ähnliches, das mit dem Quadrat flächengleich geworden ist, so sind die Umfänge größer geworden als bei den kleineren Rechtecken und daher größer als der Umfang des Quadrates: es hat also das Quadrat den kleinsten Umfang unter allen flächengleichen Rechtecken; *q. e. d.*

Einen arithmetischen Beweis für den einfachsten speziellen Fall jener Umkehrung liefert folgende Betrachtung: Wählen wir die Seite des Quadrats Längeneinheit, also seinen Inhalt als Flächeneinheit und ist die Grundlinie ein Rechteck x , so ist seine Höhe $\frac{1}{x}$, also der Umfang $2(x + \frac{1}{x})$. Lassen wir die Wertereihe $\dots 5, 4, 3, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \dots$ durchlaufen, so durchläuft der Ausdruck $2(x + \frac{1}{x})$ die Reihe $\dots 5\frac{1}{5}, 4\frac{1}{4}, 3\frac{1}{3}, 2\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{3}, 4\frac{1}{4}, 5\frac{1}{5} \dots$ offenbar 2 das Minimum ist; daher ist 2×2 jener kleinste Umfang. — allgemeiner: Sind zwei Größen A und B derart veränderlich, daß ihr Produkt $A \cdot B = P$ konstant bleibt, so erreicht die Summe $A + B = S$ das Minimum, wenn $A = B$. — Beweis: Wir setzen $A = C_1 x$, $B = \frac{C_2}{x}$, x eine unabhängig veränderliche Größe, C_1 und C_2 konstante Größen sind, daß A und B das konstante Produkt $C_1 \cdot C_2 = P$ haben. Setzen wir ferner



abhängig veränderliche Gröſſe $S = y$, so ist $y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$, daher $\frac{y' - y}{x' - x}$

$$= \frac{\left(C_1 x' + \frac{C_2}{x'}\right) - \left(C_1 x + \frac{C_2}{x}\right)}{x' - x} = C_1 - C_2 \frac{x' - x}{(x' - x) x' x}; \text{ was für } x' = x \text{ über-}$$

geht in $C_1 - \frac{C_2}{x^2}$. Dieser Ausdruck gleich Null gesetzt gibt $x = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}}$ und

$$y = C_1 \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} + C_2 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = 2 \sqrt{C_1 C_2}. \text{ [Also für } C_1 = C_2 = 1 \text{ wieder } y = 2]. -$$

Anwendung in LA 200 und 206.

LA 200.
LA 206.

Beispiel 3: Zu zeigen, daß die Funktion $y = x^3$ weder ein Maximum noch ein Minimum hat.

Auflösung: $\frac{x'^3 - x^3}{x' - x} = x'^2 + x'x + x^2$. Für $x' = x$ wird $A = x^2 + x^2 + x^2 = 3x^2$. Hier wird zwar $A = 0$, oder $3x^2 = 0$ für $x = 0$. An dieser Stelle ist aber weder ein Maximum noch ein Minimum, sondern ein „Wendepunkt“, indem die Kurve bis zum Punkte $x = 0$, $y = 0$ zugenommen hat (und zwar immer schwächer), von da an aber nicht etwa abnimmt, sondern wieder zunimmt (Fig. 30, S. 728).

Beispiel 4: Zu zeigen, daß die Summe der Quadrate $S = (x - a_1)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ ihren kleinstmöglichen Wert für das einfache arithmetische Mittel der Gröſſen a_1, a_2, \dots, a_n erreicht (vergl. Anh. Nr. 9).

Anh. 9.

Auflösung: Subtrahiert man S von $S' = (x' - a_1)^2 + \dots + (x' - a_n)^2$, so folgt aus $S' - S = [(x' - a_1)^2 - (x - a_1)^2] + \dots + [(x' - a_n)^2 - (x - a_n)^2]$

$$= (x' + x - 2a_1) \cdot (x' - x) + \dots + (x' + x - 2a_n) \cdot (x' - x); \text{ somit}$$

$$\frac{S' - S}{x' - x} = (x' + x - 2a_1) + (x' + x - 2a_2) + \dots + (x' + x - 2a_n)$$

$$= n(x' + x) - 2(a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

Hierin $x' = x$ und dann der ganze Ausdruck gleich Null gesetzt, gibt

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

Auf den Beweis, daß für diesen besonderen Wert des x wirklich ein Minimum und nicht etwa ein Maximum oder ein Wendepunkt eintritt, soll hier nicht eingegangen werden. Gemäß vorstehender Beziehung wird auch die „Fehlertheorie“, d. i. die Methode, aus gegebenen Beobachtungen den wahrscheinlichst richtigen Wert zu ermitteln, überhaupt als „Methode der kleinsten Quadrate“ bezeichnet.

Physikalische Anwendungen der Maxima und Minima beim Minimum der Ablenkung im Prisma § 106, Minimum der Ablenkung bei dem Hauptregenbogen LA 227, Maximum der Ablenkung bei dem Nebenregenbogen, Maximum der Stromstärke bei Gleichheit des äußeren und inneren Widerstandes LA 200 u. s. w.

LA 227.
LA 200.

15. Summen von unendlich vielen unendlich kleinen, nach einem bestimmten Gesetze sich ändernden Gröſſen (Integrale).

Ist der Flächeninhalt einer auf ein ebenes rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Kurve (Fig. 38) zu bestimmen, deren Gleichung $y = f(x)$ ist, so kann die Fläche als die Summe von schmalen Streifen aufgefaßt werden, deren jeder

für sich ein Rechteck mit der Grundlinie $x' - x$ und der Höhe y darstellt, so wird dies um so genauer, je kleiner die Strecke $x' - x$ genommen wird. Es nimmt daher die Maßzahl der Fläche die Form an

$F = y_1(x_1 - x) + y_2(x_2 - x_1) + \dots + y_n(X - x_{n-1})$, wofür $F = \sum y(x' - x)$ eine abgekürzte Darstellung ist.

Wenn die Differenzen $x' - x$ verschwindend klein gedacht werden, so setzt man statt des Summenzeichens \sum das Summenzeichen \int (Integralzeichen), statt der Differenz $x' - x$ das Differentialzeichen dx (vergl. Nr. 13) und schreibt $F = \int y dx$.

Fig. 38.



$$F_x^X = \int_x^X y dx \quad \text{oder} \quad F_x^X = \int_x^X f(x) dx.$$

In dieser Bezeichnungsweise lauten z. B. die aus der analytischen Geometrie bekannten Flächeninhaltsformeln für die

Halbparabel im I. Quadranten $F_0^x = \int_0^x y dx = \int_0^x \sqrt{2px} dx = \frac{2}{3} \cdot xy = \frac{2}{3} x \sqrt{2px}$

Halbellipse im II. und I. Quadranten $F_{-a}^{+a} = \int_{-a}^{+a} \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} ab\pi$.

Von den physikalischen Rechnungen dieses Buches waren also Integrationen Galileis Ableitung des Gesetzes $s = \frac{g}{2} t^2$ aus $v = gt$ (§ 6, Fig. 14), sowie die LA 9. entsprechende arithmetische Ableitung (LA 9). Ferner die Berechnung von Arbeitssummen, in deren Arbeitsdiagrammen gerade (Fig. 65) oder stetig gekrümmte Kurven (Fig. 66, 67) vorkommen; die Berechnung der Gravitations-, elektrischen und magnetischen Potentiale; die Berechnung von Schwerpunkts- LA. 70, 90. koordinaten (Nr. 9 und LA 70), von Trägheitsmomenten (LA 90) u. s. f. —

Einem ersten Einblick in den Zusammenhang zwischen Integral- und Differentialrechnung diene noch folgendes: Während fast alle Summierungen von unendlichen Reihen, wie sie in der Elementarmathematik durchgeführt werden, auf mehr oder minder zufällig scheinenden Kunstgriffen beruhen, löst die Integralrechnung ihre Aufgaben dadurch, daß das Integrieren die inverse Operation zum Differenzieren ist. Dies werde hier nur an einigen Beispielen erläutert.

1. Beispiel: Es sei die Summe einer Reihe von Größen von der Form $x^n (x' - x)$ zu bilden, wo x vom Anfangswerte Null bis zu einem beliebig großen endlichen Spezialwerte X stetig zunehmend und die Differenz $x' - x$ verschwindend klein vorausgesetzt wird. Dann hat die verlangte Summe die Form $\int_0^X x^n dx$.

Denken wir uns die Strecke von O bis X in n gleiche Teile geteilt, so findet die annähernde Gleichung $\Sigma n^2 = \frac{n^3}{3}$ (Nr. 10, Gl. 4) um so besser Anwendung, je größer n ist. Setzen wir also $X = n \cdot (x' - x)$, so wird $\int_0^X x^2 dx = \frac{X^3}{3}$. — Hier läßt sich aber der Kunstgriff, der in Nr. 10 zur Beziehung $\Sigma n^2 = \frac{n^3}{3}$ geführt hatte, ersparen, wenn wir beachten, daß nach Nr. 13 aus der Gl. $y = x^3$ durch Differenzieren folgt $\frac{dy}{dx} = 3x^2$; schreiben wir dafür $dy = 3x^2 dx$ oder $x^2 dx = \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} d(x^3) = d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3}$, so erkennen wir die Integration $\int_0^X x^2 dy = \frac{X^3}{3}$ als invers zur Differentiation $\frac{1}{3} d(x^3) = x^2 dx$.

2. Beispiel: Ebenso ist $\int_0^X x^3 dx = \frac{X^4}{4}$ als invers zur Differentiation $\frac{1}{4} d(x^4) = x^3 dx$. — Etwas allgemeiner ist $\int_a^A x^3 dx = \frac{A^4}{4} - \frac{a^4}{4}$ und $\int_a^A x^2 dx = \frac{A^3}{3} - \frac{a^3}{3}$.

Nehmen wir nun im weiteren die oben mitgeteilte (und durch die beiden angeführten Beispiele natürlich keineswegs schon strenge bewiesene) Beziehung zwischen Integrieren und Differenzieren als allgemein gültig an, so ergeben sich z. B. aus den Differentialbeziehungen $d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$ und $d \cos x = -\sin x dx$ die folgenden weiteren Beziehungen: 3. Beispiel: $\int_r^R \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{R}$ (vergl. § 22).

4. Beispiel: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 = 1$ (vergl. Nr. 19).

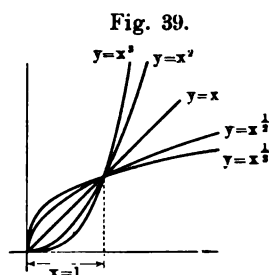
16. Die Funktion $y = x^m$.

Unter den allgemeinen Ausdruck $y = x^m$ fallen alle Potenzen und Wurzeln, z. B.: x selber für $m=1$, x^2 für $m=2$, x^3 für $m=3$, ...; ferner die Reziprokwerte $\frac{1}{x}$ für $m=-1$, $\frac{1}{x^2}$ für $m=-2$, ...; \sqrt{x} für m

$= \frac{1}{2}$, $\sqrt[3]{x}$ für $m = \frac{1}{3}$, ... In Fig. 39 sind einige dieser Kurven zusammengestellt.

Man stelle die unter den Ausdruck $y = x^m$ fallenden Gesetze aus den verschiedenen Teilen der Physik möglichst vollständig nach dem Vorbilde folgender Beispiele zusammen:

Nach der Funktion $y = x$ (oder allgemeiner $y = Ax + B$) hängt bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung die Geschwindigkeit von der Zeit, die Länge bzw. das Volumen eines Körpers von seiner Temperatur ab. — Nach der Funktion $y = x^2$ (oder allgemeiner $y = Ax^2$) hängt bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung der Gesamtweg von der Zeit, die



Stromwärme von der Stromstärke . . . ab. — Nach der Funktion $y = \sqrt{x}$ oder (allgemeiner $y = A \sqrt{x}$) hängt bei gleichmäßig beschleunigter Bewegung die Geschwindigkeit vom Wege ab. — Nach der Funktion $\frac{1}{x}$ (oder allgemeiner $\frac{A}{x}$) hängt nach dem Boyle'schen Gesetze p von v , oder v von p ab; ebenso das Potential V vom Abstand r . — Nach der Funktion $\frac{1}{x^2}$ hängen die Massenanziehung, Schallstärke, Lichtstärke u. s. w. vom Abstände ab. — Dagegen folgen (nach MAXWELL) bestimmte Molekularkräfte dem Gesetze $\frac{1}{x^3}$ u. s. f.

17. Die Funktionen $y = a^x$ und $z = {}^b \log x$.

Die Gleichung $y = a^x$ ($a > 1$) gibt nach x aufgelöst $x = {}^a \log y$. Wie entsprechen daher die logarithmischen Kurven in Fig. 41 den Exponentialkurven in Fig. 40? Warum haben alle Kurven in Fig. 40 die negative Abszissenachse, in Fig. 41 die negative Ordinatenachse zur Asymptote? Warum gehen sie alle durch

Fig. 40.

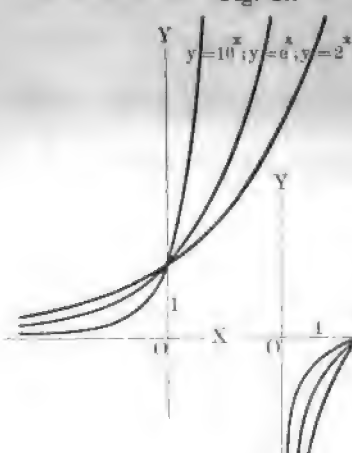
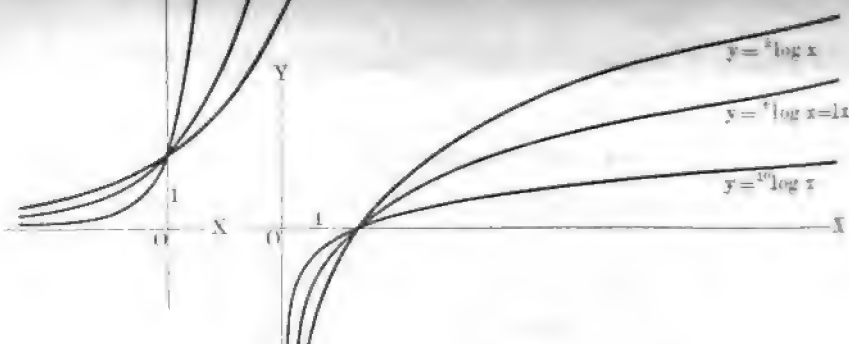


Fig. 41.



den Punkt $x=0, y=1$? Dem sehr raschen Steigen der Exponentialkurve für große x entspricht das sehr schwache Steigen der logarithmischen Kurve für sehr große y (man sagt: Das „logarithmische Unendlich“ ist ein schwächeres Unendlich als jedes algebraische, z. B. $\log x$ ist kleiner als $\sqrt[3]{x}, \sqrt[1000]{x}, \dots \sqrt[x]{x} \dots$ für $x = \infty$).

Da der logarithmischen Funktion die Exponentialfunktion zu Grunde liegt, in der Elementarmathematik aber nicht so ausführlich untersucht zu werden pflegt, wie (wegen ihrer praktischen Verwendung) die Logarithmen, so sei über die Exponentialfunktion und speziell über die Zahl e folgendes mitgeteilt:

Vergleichen wir die Funktion $y = x^x$ mit der Funktion $Y = 2^x$, indem wir beide für $x = 1, 2, 3, 4, \dots$ auswerten, so wird das rasche Wachsen der

Reihenglieder 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ... alsbald noch stärker übertroffen durch das von 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Die Funktion $Y = a^x$ heisst **Exponentialfunktion** (und gehört zu den transzendenten Funktionen im Gegensatz zu den algebraischen, unter die x^a gehört, wenn a rational ist). — Fig. 40 zeigt die Exponentialkurven für $a = 2$, $a = e$, $a = 10$. Dabei ist die Zahl $e = 2,7182818284590452...$, bekanntlich die Basis der „natürlichen“ Logarithmen, definiert als Wert der Grenze, der sich der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega$ immer mehr nähert, je größer ω wird; was wir so schreiben können:

$$e = \left(1 + \frac{1}{\omega}\right)^\omega_{\text{für } \omega = \infty} \dots \dots \dots (1)$$

Um die angegebene Zahl e in etlichen Stellen zu bestätigen, berechne man diesen Ausdruck für $\omega = 1, 2, 3 \dots$ nach dem binomischen Satze; ferner z. B. für $\omega = 100, 1000 \dots$ mittels vielstelliger Logarithmen.

Auf Grund der Definitionsgleichung (1) für e ergibt sich sodann allgemeiner:

$$\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{x} \cdot x} = \left[\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{x}}\right]^x, \text{ daher } \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega = e^x \text{ für } \omega = \infty. \dots (2)$$

Eine naheliegende arithmetische Anwendung dieser Zahl bildet die folgende Aufgabe der Zinseszinsrechnung: Ein Kapital A zu p Prozent auf n Jahre angelegt, gibt, je nachdem die Zinsen nach 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{24}$, ... $\frac{1}{r}$ Jahr zum Kapital geschlagen werden, die Endwerte

$$A \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, A \left(1 + \frac{1}{2} \frac{p}{100}\right)^{2n}, \dots E_{n,r} = A \left(1 + \frac{1}{r} \frac{p}{100}\right)^{nr} \dots (3)$$

Welcher Grenze nähert sich letzterer Ausdruck, wenn die Verzinsung nach immer kleineren und schließlich nach verschwindend kleinen Zeiteilen erfolgt, d. h. $r = \infty$ wird? (Anwendung, wenn z. B. das Zuwachsen von Holz in einem Walde nicht wie bei uns in Perioden von ganzen Jahren, sondern wie in den Tropen stetig erfolgt, weshalb wir eine Verzinsung für $r = \infty$ als „organische Verzinsung“ bezeichnen können). Antwort: Der Ausdruck in Gl. (3) hat den Bau des Ausdruckes $\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega$ in Gl. (2), wenn $x = \frac{p}{100}$ und $r = \omega$ gesetzt wird. Daher ist

$$E_{n,r} = A \left[\left(1 + \frac{p}{100r}\right)^r \right]^n = A \cdot \left(\frac{p}{e^{100}}\right)^n = A \cdot e^{\frac{pn}{100}} = A \cdot e^z \dots (4)$$

wo $\frac{pn}{100} = z$ die einfachen Zinsen der Kapitaleinheit für n Jahre darstellt. —

In der Physik sind die Funktion $y = e^x$ und aus ihr zusammengesetzte Funktionen mehrfach wichtig. So lautet die Gleichung der Kettenlinie $y = \frac{h}{2} \left(e^{\frac{x}{h}} + e^{-\frac{x}{h}}\right)$ in Bezug auf ein Koordinatensystem, dessen Ordinatenachse die vertikale Symmetrale der Kettenlinie ist und dessen Anfangspunkt h cm unter dem tiefsten Punkte der Kettenlinie liegt.

Man beachte die gemeinsame Form in den Gesetzen

$b = b_0 e^{-\lambda h}$ für Barometerstand b und Höhe h (barometrische Höhenmessung)

$t = t_0 e^{-\lambda s}$ für die Abnahme der Temperatur t mit der Zeit s (Newton's Abkühlungsgesetz)

$l = l_0 e^{\pm \lambda A}$ für die Länge l einer Gassäule, zu deren Zusammendrückung bei konstanter Temperatur eine Arbeit A aufgewendet worden ist (LA 225), wo λ je eine Konstante bedeutet.

Oft werden für empirisch gewonnene Kurven (z. B. für die Spannkraft der Wasserdämpfe) zweckmäßig Gleichungen von der Form $y = Ae^{a+bz}$ oder $y = Ae^{a+bz+cz^2}$ u. s. f. behufs Anpassung an die durch direkte Versuche gefundenen Wertpaare x und y benutzt.

Physikalische Anwendung findet das logarithmische Wachsen z. B. bei der barometrischen Höhenmessung, indem der Barometerstand als unabhängig, die Höhe als abhängig veränderlich aufgefasst wird.

Überhaupt lässt sich jede Abhängigkeit, die einer geometrischen Reihe entspricht (wobei in $t = a \cdot q^{n-1}$ die Stellenzeiger n im Exponenten stehen, sonach t eine Exponentialfunktion von n ist), auch als logarithmische auffassen, indem wir die abhängige und die unabhängige GröÙe vertauschen; z. B. Bei der Luftpumpe schreitet die Verdünnung fort nach einer geometrischen Reihe, wenn nämlich die Anzahl der Kolbenzüge als Stellenzeiger der Reihenglieder betrachtet wird; daher muss die Zahl der Kolbenzüge nach dem Gesetze des Logarithmus zunehmen, wenn die Verdünnung nach einer (fallenden) arithmetischen Reihe erfolgen soll.

18. Die goniometrischen Funktionen.

Ein Beispiel für die Funktion Tangens: Befindet sich im wagerechten Abstände $b = 10$ m vom Fußpunkte eines lotrechten Turmes ein Auge, das (z. B. durch ein Dioptr oder Fernrohr) unter Elevationswinkeln von $\alpha^\circ = 0^\circ, 1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \dots$

Fig. 42.

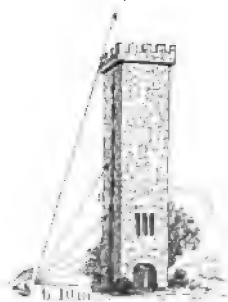


Fig. 43.



$30^\circ, \dots 45^\circ, \dots 60^\circ, \dots 87^\circ, 88^\circ, 89^\circ, 90^\circ$ gegen den Turm hin blickt (Fig. 42), so gehören zu immer größeren Winkeln α auch immer größere Strecken a vom Fußpunkte des Turmes aufwärts bis zu dem von der Blicklinie getroffenen Punkte. Es wachsen aber die Strecken a nicht einfach proportional den Winkeln α , sondern in stärkerem Verhältnisse. Und zwar lässt sich dieses Verhältnisse auch nicht angeben durch irgend eine algebraische Funktion (z. B. a^α oder $a^3 \dots$, so dass etwa $a = b a^\alpha$ oder $b a^3 \dots$ wäre),

sondern das Verhältnisse $\frac{a}{b}$ ist eine ganz eigenartige Funktion, nämlich eine „goniometrische Funktion“ von α , und es wird daher geschrieben $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$ (sprich: „ a zu b ist Tangens α “ oder ausführlicher: „das Verhältnisse $\frac{a}{b}$ ist die goniometrische Tangente des Winkels von α Grad“).

Aus planimetrischen Betrachtungen ist bekannt, dass also $\operatorname{tg} 0^\circ = 0,00000$, $\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0,57735$, $\operatorname{tg} 45^\circ = 1,00000$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3} = 1,73205$, $\operatorname{tg} 90^\circ = \infty$.

Die Zwischenwerte von $tg\alpha$ sind zu entnehmen den „Tafeln der natürlichen goniometrischen Funktionen“ (und den Tafeln der Logarithmen der goniometrischen Funktionen).

Die Funktion $tg\alpha$ hat ihren Namen „Tangens“ davon, daß, wenn man zu den Winkeln α als Centriwinkeln einen Kreis mit der Strecke b als Halbmesser zeichnet (Fig. 43), die dem Winkel α gegenüberliegenden Strecken a alle längs der im Endpunkte von b an den Kreis gelegten (planimetrischen) **Tangente** zu liegen kommen. Insofern wird das Wachsen der Funktion tg veranschaulicht durch das Wachsen dieser Tangentenstrecken. — Am zweckmäßigsten ist es hierbei, die Strecke $b = 1$ cm zu nehmen und so die Funktion tg zu veranschaulichen durch die Tangentenstrecke am Einheitskreise. Es ist aber $tg\alpha$ nicht eine Strecke, sondern gemäß der Definition $tg\alpha = \frac{a}{b}$ eine unbenannte Zahl.

Da durch die zwei Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreieckes auch die Hypotenuse c gegeben ist (Fig. 44), und da sich aus den Größen a, b, c sechs verschiedene Verhältnisse $\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$ bilden lassen, so gibt es

aufser der Funktion $tg\alpha$ noch fünf andere goniometrische Funktionen $\sin\alpha, \cos\alpha, ctg\alpha, \sec\alpha, cosec\alpha$. Durch irgend eine von ihnen sind die fünf anderen gegeben mittels der goniometrischen Grundformeln; denn es folgen durch Multiplikationen, bezw. aus dem Pythagoreischen Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2$

aus den Definitionen die Reziproformeln die Quadratformeln

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{a}{c} & cosec\alpha &= \frac{c}{a} & \sin\alpha cosec\alpha &= 1 & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \cos\alpha &= \frac{b}{c} & sec\alpha &= \frac{c}{b} & \cos\alpha sec\alpha &= 1 & tg^2\alpha + 1 &= sec^2\alpha \\ tg\alpha &= \frac{a}{b} & ctg\alpha &= \frac{b}{a} & tg\alpha ctg\alpha &= 1 & 1 + ctg^2\alpha &= cosec^2\alpha. \end{aligned}$$

Der bisherigen Definition der Funktion tg und der übrigen goniometrischen Funktionen liegt die Voraussetzung zu Grunde, daß der Winkel α ein absoluter spitzer Winkel sei; denn nur für einen solchen läßt sich ein rechtwinkliges Dreieck konstruieren, indem von einem Punkte des einen Schenkels eine Normale auf den anderen Schenkel gefällt wird. — Wie sich die Definitionen erweitern lassen für beliebige Winkel φ , soll, nebst einigen anderen Eigenschaften, nur für die beiden in der Physik besonders häufig vorkommenden Funktionen **Sinus** und **Cosinus** näher ausgeführt werden in der folgenden Nr. 19.

Aus der sphärischen Trigonometrie. Wiewohl die Definitionen der goniometrischen Funktionen auf Grund ebener Dreiecke gegeben sind, so sind sie doch notwendig und ausreichend auch für die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln **sphärischer Dreiecke**. Als Beispiel soll hier nur die Beziehung $tg A = \frac{tg a}{\sin b}$ für das rechtwinklige Dreieck (mit dem Winkel $C = 90^\circ$) abgeleitet werden, und zwar in der Form $tg \varepsilon = \frac{tg \delta}{\sin \alpha}$ die in LA 212 zur Anwendung kommt. Aus Fig. 45 folgt $tg \varepsilon = \frac{m}{n} = \frac{m}{p} \cdot \frac{p}{n} = tg \delta \cdot \frac{1}{\sin \alpha}$.

Fig. 44.

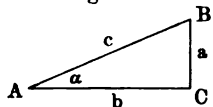
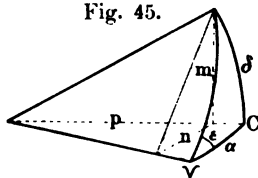


Fig. 45.



LA 212.

19. Näheres über die Funktionen $y = \sin x$ und $z = \cos$

I. Sinus für absolute spitze Winkel α : Ist $0^\circ \leq \alpha^\circ \leq 90^\circ$, so dem rechtwinkligen Dreiecke ABC das Verhältnis $\frac{a}{c} = \sin \alpha$. Speziell

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin 90^\circ = 1$$

$$= 0,5000, \quad = 0,7071, \quad = 0,8660, \quad = 1,0000$$

Die unbekannte Zahl $\sin \alpha$ läßt sich darstellen durch die Sinusstrecke, nämlich als **Halbsehne** im Einheitskreise (Fig. 46)

Fig. 46.



nämlich im Kreise mit dem Halbmesser $c = 1$ die Maßzahl der zum Centriwinkel $2\alpha^\circ$ gehörigen Sehne

ist die Maßzahl der Halbsehne $\frac{s}{2} = a$ und $\sin \alpha = \frac{a}{1}$

— Die Funktion $\sin \alpha$ wächst mit α , und zwar anfangs schnell, später langsam.

Dieses Wachsen des Sinus mit dem Winkel läßt sich konkreter veranschaulichen, indem wir eine Strecke (z. B. Stab oder ein Brett, vgl. die Fig. 2, S. 7 für die schiefe Ebene) in dem einen Endpunkte an einer bestimmten Wagrechte (z. B. Tischplatte) festgehalten und von dem anderen Endpunkte ein Lot (z. B. Schnur) auf die Wagrechte herabgelassen denken. Je steiler die Strecke ist, so länger wird das Lot, aber so, daß die Lotlängen langsamer als der Winkel wachsen; insbesondere: Nachdem der Winkel erst 30° , d. i. ein Drittel der vollen Größe von 90° erreicht hat, hat die Lotlänge schon $\frac{1}{2}$, d. i. die Hälfte ihrer vollen Länge Eins (gleich der Stablänge) erreicht. — Verschiedene Beispiele für Größen, die nach der Funktion Sinus wachsen (z. B. aus der Geometrie: Die Sinusstrecke eines schiefwinkligen Dreieckes mit γ , wenn die Stücke a und α konstant bleiben gemäß $c = \frac{a}{\sin \alpha} \cdot \sin \gamma$; desgleichen der Flächeninhalt gemäß $f = \frac{1}{2} a b \sin \gamma$).

Aus der Physik: $u_e = a \sin \epsilon$ [§ 2]; $g_e = g \sin \epsilon$ [§ 6]; $W = \frac{c^2}{g} \sin 2\epsilon$ [§ 11]

Statt die Winkel wie bisher im Gradmaße, empfiehlt es sich Anh. 2. sie im **absoluten Winkelmaße** (Anh. Nr. 2) zu messen. Dann

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

Werden die Bogen des Viertelkreises (Fig. 47) als Abszissen:

Fig. 47.

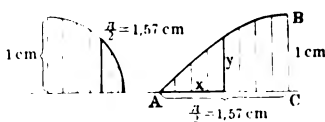
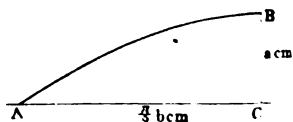


Fig. 48.



die Sinusstrecken als Ordinaten aufgetragen, so bilden deren Endpunkte die **einfache Sinuskurve** AB (Fig. 47); so nennen wir

ezielle Sinuskurve, deren Basis $AC = \frac{\pi}{2}$ und deren Höhe $CB = 1$ ist; ihre Gleichung ist $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$).

Wird die Basis im Verhältnis b mal so groß und die Höhe im Verhältnis a mal so groß genommen, so ergibt dies die **allgemeine Sinuskurve** (Fig. 48); ihre Gleichung ist $y = a \sin \frac{x}{b}$.

Für sehr kleine (im absoluten Maße gemessene) Winkel ξ gilt $\sin \xi = \xi$ oder $\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$.

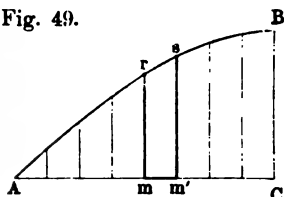
Veranschaulichung: In der einfachen Sinuskurve ist das sehr kleine Dreieck, das der Spitze A ein gleichschenkelig-rechtwinkliges, dessen wagerechte Kathete ξ , dessen lotrechte $\sin \xi$ ist. — Strengere Begründung Anh. Nr. 21.

Anh. 21.

Der Flächeninhalt der einfachen Sinuskurve ist gleich einer Flächeneinheit. — Beweis (Fig. 49): Die Basis AC werde in viele kleine Strecken zerlegt, deren eine, z. B. mm' , gleich ist einem entsprechenden Bogen MM' des Einheitskreises. Wird dieser Einheitskreis ebenfalls in viele kleinen Bögen zerlegt, die bis zur äußeren Quadratseite verlängert werden, so ist der Streifen $PQSR$ flächengleich dem Streifen $mm'sr$ (denn die Breiten PQ nehmen in demselben Verhältnis zu, wie die Höhen mr).



Fig. 49.



Für die allgemeine Sinuskurve $y = a \sin \frac{x}{b}$ ist die Fläche $f = ab$. — In jeder Streifen ist hier der Höhe nach a mal, der Breite nach b mal so groß, wie bei der einfachen Sinuslinie.

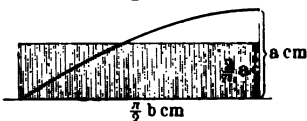
Zusatz: Diese beiden Flächensätze lauten in Integralzeichen (Nr. 15) so:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1 \quad \text{und} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}b} a \sin \frac{x}{b} \, dx = ab.$$

Mittelwert der Funktion Sinus ist die Höhe h desjenigen Rechteckes, das der Sinuskurve bei gleicher Basis flächengleich ist (Fig. 50). Somit ist für die einfache Sinuskurve $h \cdot \frac{\pi}{2} = 1$, also $h = \frac{2}{\pi}$;

allgemeine „ $H \cdot \frac{\pi}{2}b = ab$, „ $H = \frac{2}{\pi}a$.

Fig. 50.



LA 197.

(Anwendung in LA 197: „mittlere Stromstärke des Sinusstromes.“)

II. Sinus für beliebige Winkel φ : Ist der gegebene Winkel $\varphi > 90^\circ$ oder $\varphi < 0^\circ$, so läßt sich nicht mehr ein Lot von dem einen Schenkel auf den anderen fallen, und es ist daher auch nicht mehr die Definition des Sinus bei absoluten spitzen Winkel ohne weiteres auf jeden anderen Winkel übertragbar. Wohl aber läßt sich zu jedem beliebig großen, positiv oder negativ bezeichneten Winkel φ ein „entsprechender absoluter spitzer Winkel“ α auf folgende Art zuordnen: Der Scheitel des Winkels φ wird in den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems (Fig. 51), der eine Schenkel (bewegliche Schenkel) in die positive Abszissenrichtung gebracht und der Winkel im Sinne der positiven Abszissen- gegen die positive Abszissenrichtung hin gezählt. Dann kann der andere Schenkel (feststehender Schenkel) in den I., II., III. oder IV. Quadranten liegen. Je nach der Lage des anderen Schenkels (bewegliche Schenkel) erhält man spitzen Winkel in den I., II., III. oder IV. Quadranten u. s. w., zu liegen. Wird von diesem beweglichen Schenkel eine beliebige Strecke r cm abgeschnitten und von dem Endpunkt auf die Abszisse eine Normale gefällt, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Winkel α bei dem Scheitel O ; und zwar ist α derjenige absolute Winkel, den der gegebene Winkel φ größer ist als das 0° , 1° , 2° , 3° , ... von 180° . Wir nennen diesen Winkel α den „dem Winkel φ entsprechenden absoluten spitzen Winkel“ (oder kurz „den entsprechenden Winkel“) und erweitern die Definition des Sinus für solche absolute spitze Winkel so:

Unter dem Sinus eines beliebigen Winkels φ verstehen wir den Sinus des ihm entsprechenden (absoluten spitzen) Winkels α und zwar mit dem Vorzeichen der Ordinate desjenigen Quadranten, in welchen der bewegliche Schenkel des Winkels φ reicht. — Diese Definition ist eine Erweiterung der für absolute spitze Winkel gegebene, da sie sich, wenn speziell $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ist, mit der für $\sin \alpha$ gegebenen Definition deckt.

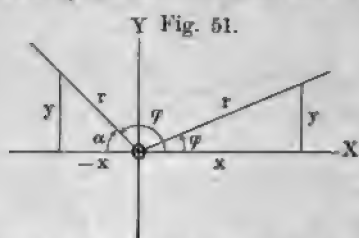


Fig. 52.

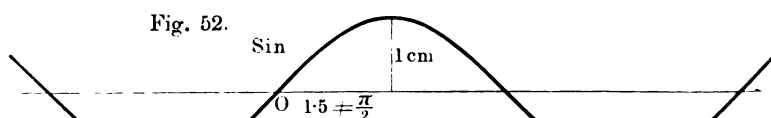
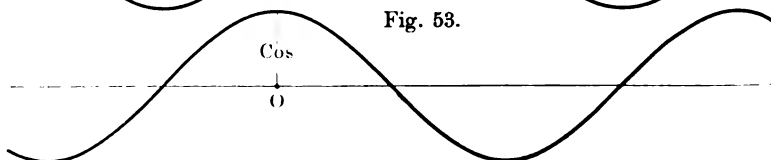


Fig. 53.



Graphische Darstellung des Gesamtverlaufes der Funktion $y = \sin x$: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ergibt sich als I. Quadrant Sinuskurve die oben als einfache Sinuskurve bezeichnete I. Diese wird dann für den II., III., IV., ..., -I., -II., ... Quadranten

in teils axialsymmetrischer, teils centralsymmetrischer Lage (Anhang Nr. 22) zu der nach beiden Seiten ins Unendliche verlaufend gedachten „Wellenlinie“ angereiht (Fig. 54).

Als eine in der Physik vielfach nützliche Anwendung betrachten wir folgende Beziehung zwischen der Sinuslinie und dem schiefen Zylinderschnitte (Fig. 52). Durch den geraden Kreiszylinder sei ein zur Achse senkrechter Schnitt $A''C''A'''C'''$ und ein zur Achse schiefer Schnitt $ABA'B'$ gelegt. Wird der Mantel des Zylinders in eine Ebene abgewickelt, so daß der Punkt A nach (A) , B' nach (B') . . . zu liegen kommt, so ist die Kurve $B(A)(B')(A')(B)$ eine Sinuskurve mit dem Nullpunkt A' (oder eine Cosinuskurve mit dem Anfangspunkte C). Ist der Radius AC des Zylinders gleich b und $CB = a$, so ist die Gleichung dieser Kurve [in Bezug auf (A') als Anfangspunkt] $y = a \sin \frac{x}{b}$. (Beweis!) — Umgekehrt: Wird auf ein rechteckiges Blatt die Sinuskurve $B(A)(B')(A')(B)$ gezeichnet und zu

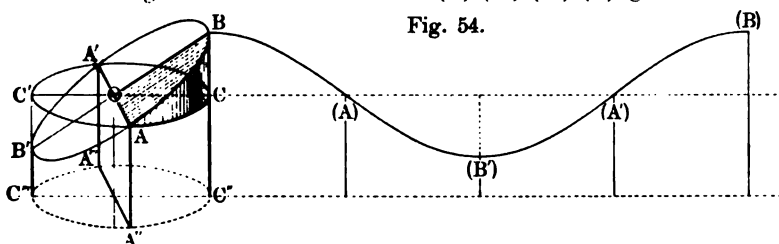


Fig. 54.

einem Zylinder zusammengerollt, so bildet der krumme Rand einen ebenen (elliptischen) Schnitt des Zylindermantels. Hierbei ist vorausgesetzt, daß nur vier Quadranten der Kurve (entsprechend einer Wellenlänge mit Wellenberg und Wellental) gegeben waren. Dagegen geben 8 Quadranten (zwei Berge und zwei Täler) eine doppelt gekrümmte Kurve (Anh. Nr. 26) am Zylinder; ähnlich bei 12 Quadranten u. s. f. Welche Beziehung zeigt diese

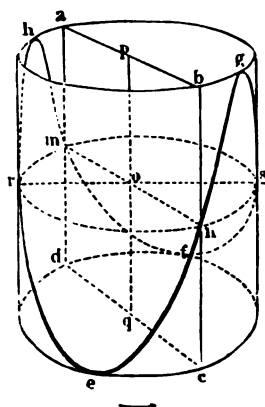
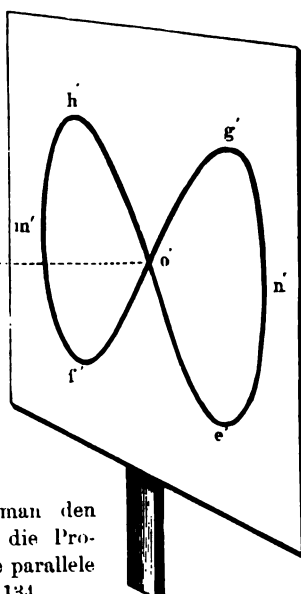


Fig. 55.



Anh. 26.

Kurve zu den Lissajouschen Figuren, wenn man den Zylinder langsam um seine Achse dreht und die Projektionen dieser Kurve auf eine zur Zylinderachse parallele Ebene beobachtet? Vergleiche Fig. 53 und LA 134.

Beziehungen zwischen den Funktionen Sinus und Cosinus. Werden die Funktionen $y = \sin x$ und $z = \cos x$ so in Kurven dargestellt, daß die Nullpunkte untereinander zu liegen kommen (Fig. 55 56 a. v. S.), so zeigt die Vergleichung beider Kurven zunächst die Beziehungen

$$\sin(90^\circ - \varphi) = \cos \varphi, \quad \cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi,$$

und zwar für Werte von φ beliebiger Quadranten.

Man präge sich nach den graphischen Darstellungen ein, in welchen Punkten die beiden Funktionen den Wert 0 haben, für welche Intervalle des Winkels x sie positiv, bezw. negativ sind; wo sie steigen, fallen; wo sie ihre Maxima +1, bezw. ihre Minima -1 haben.

Ach. 18. Rechnerisch ergeben sich diese Einzelbestimmungen nach Ach. Nr. 18 und 79 so:

Differentiation der Funktionen $\sin x$ und $\cos x$. — Wir bilden

$$\frac{\sin x' - \sin x}{x' - x} = \frac{2 \cos \frac{x' + x}{2} \sin \frac{x' - x}{2}}{x' - x} = \cos \frac{x' + x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x' - x}{2}}{\frac{x' - x}{2}}$$

Da $\frac{x' - x}{2}$ ein sehr kleiner Winkel ist, so wird $\frac{\sin \frac{x' - x}{2}}{\frac{x' - x}{2}} \approx 1$, und für $x' = x$ wird $\frac{\sin x' - \sin x}{x' - x} = \cos x$. (Oder $\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$)

Ebenso ergibt sich $\frac{\cos x' - \cos x}{x' - x} = -\sin \frac{x' + x}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x' - x}{2}}{\frac{x' - x}{2}}$, und

für $x' = x$ wird $\frac{\cos x' - \cos x}{x' - x} = -\sin x$. (Oder $\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$.)

Allgemeiner gehört zu $y = a \sin \alpha x$ der Differentialquotient $a \alpha \cos \alpha x$,
 „ „ $y = b \cos \beta x$ „ „ $-\beta b \sin \beta x$.

Durch solche Differentiationen nach t haben sich im § 12 aus $s = a \sin \alpha t$ ergeben $v = a \alpha \cos \alpha t$ und $w = -a^2 \alpha \sin \alpha t$.

Zunahme, Abnahme, Maxima und Minima von Sinus und Cosinus. — Da die Funktion $y = \sin x$ den Richtungskoeffizienten $A = \cos x$ hat und da $\cos x$ positiv ist im I., IV., V. VIII. . . . Quadranten, so ist in diesen Quadranten die Funktion $\sin x$ in Zunahme.

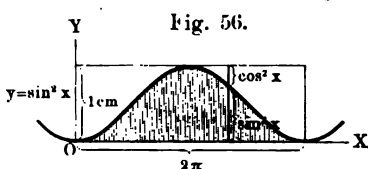
Da die Funktion $z = \cos x$ den Richtungskoeffizienten $-\sin x$ hat und da $-\sin x$ positiv ist für den III., IV., VII., VIII. . . . Quadranten, so ist in diesen Quadranten die Funktion $\cos x$ in Abnahme.

Ebenso Abnehmen der Funktionen $\sin x$ im II., III., VI., VII. . . ., der Funktion $\cos x$ im I., II., V., VI. . . . Quadranten.

20. Darstellung einer gegebenen Kurve durch Superposition von Sinuskurven. 745

Da $\cos x = 0$ bei $x = 90^\circ, 270^\circ \dots$, so hat in diesen Punkten die Funktion Sinus ihre Maxima oder Minima; entsprechend für die Funktion Cosinus. —

Der Flächeninhalt der Kurve $y = \sin^2 x$ hat für die Grundlinie 0 bis 2π den Wert $F = \pi$. — Beweis: Diese Kurve hat die Gestalt nach Fig. 56. Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, so stellt dieselbe Kurve auch die Gleichung $z = \cos^2 x$ dar, wenn wir uns den oberen Rand des Rechteckes als Abszissenachse und die positiven Ordinaten von ihr nach abwärts aufgetragen denken. — Von der Fläche dieses Rechteckes $F' = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$ kommen gleich große Teile auf die Kurve $y = \sin^2 x$ und $z = \cos^2 x$. Es hat daher die Fläche jeder dieser Kurven für die Grundlinie 2π den Wert π . (Anwendung LA 197).



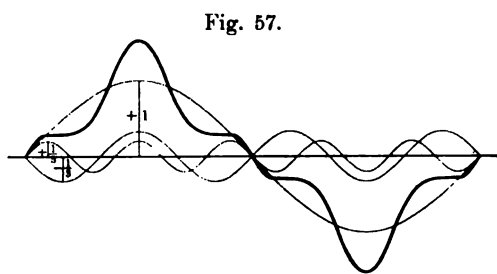
LA 197.

In Integralzeichen lautet der Satz so: $\int_0^{2\pi} \sin^2 x \, dx = \int_0^{2\pi} \cos^2 x \, dx = \pi$.

20. Darstellung einer gegebenen Kurve durch Superposition von Sinuskurven (Fouriers Satz).

Über einer und derselben Geraden als Abszissenachse seien zwei oder mehrere Sinuskurven gezeichnet, die durch ihre Längen $l_1, l_2, l_3 \dots$ und ihre Amplituden $a_1, a_2, a_3 \dots$ gegeben sind und überdies gegeneinander irgend welche Phasenverschiebungen haben können. Werden dann für jeden Punkt der gemeinschaftlichen Abszissenachse alle Ordinaten algebraisch addiert, so ergeben sich durch solche **Superposition von Sinuskurven** die mannigfachsten Linien.

So sind in Fig. 257 (S. 242) $l = \frac{l}{2}$ und die Nullpunkte der beiden Sinuskurven fallen zusammen. Indem in Fig. 258 eine Phasenverschiebung um $\frac{1}{4} l$ stattgefunden hat, ändert sogleich die resultierende Kurve völlig ihr Aussehen im Vergleich zu der in Fig. 257. — In Fig. 57 sind Kurven von den Längen $l, \frac{1}{3} l, \frac{1}{5} l, \frac{1}{7} l$, und den Amplituden $a, -\frac{1}{3} a, +\frac{1}{5} a, -\frac{1}{7} a$, superponiert, wo die Zeichen positiv und negativ bedeuten, daß die erste Welle mit einem Wellenberg, die zweite mit einem



Wellental usw. beginnt. — Ähnlich sind in Fig. 58 (a. f. S.), Wellen superponiert, deren Amplituden $a, -\frac{1}{3} a, +\frac{1}{5} a, -\frac{1}{7} a$ sind. Die Gleichung der superponierten Kurve ist also $y = \sin x - \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{7} \sin 7x$. Man erkennt, daß diese Kurve sich einer aus Geraden bestehenden Zickzacklinie

Mathematischer Anhang.

diese Annäherung ginge bis ins Unendliche, wenn noch Wellenbildungspunkt in infinitum hinzugefügt würden.

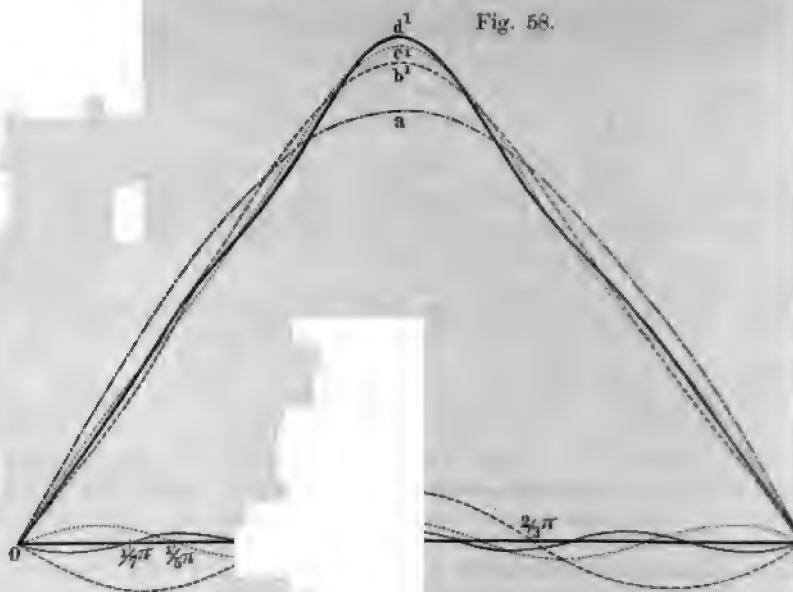


Fig. 56.

Wie bisher Sinuslinien zu neuen Gestalten zusammengesetzt wurden, der Gestalt der Sinuslinien scheinbar ganz fremd sind, so zeigt das letztangeführte Beispiel, daß und wie Linien sich auch wieder in Reihen von Sinuslinien (zwar im allgemeinen in unendliche Reihen) zerlegen lassen.

FOURIER hat gezeigt, daß eine Zerlegung in Sinuskurven sogar für alle erdenklichen Arten von Kurven möglich ist, in arithmetischer Form ausgedrückt: daß für jede beliebige Funktion die Reihenentwicklung gilt

$$f(x) = a_0 + a_1 \sin(A_1 + x) + a_2 \sin(A_2 + 2x) + \dots + a_n \sin(A_n + nx) + \dots$$

Fourier hat auch ein Verfahren (mittels Integralrechnung, worauf hier eingegangen werden kann) angegeben, wie je nach der Natur der gegebenen Funktion $f(x)$ die Konstanten dieser Reihe, nämlich $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ zu ermitteln sind.

Zur Veranschaulichung dieses mathematischen Theorems von FOURIER man sich mittels des Stäbchenapparates in Fig. 256, Seite 242 irgend eine Kurve aus Sinuskurven superponiert, dann aber alle komponierenden Kurven etwa mit einem Tuches verdeckt, und es werde nun verlangt, aus dem Anblick der resultierenden Kurve die komponierenden Kurven anzugeben. Diese Aufgabe ist bei drei oder vier Kurven für das Auge nicht mehr zu lösen. Dagegen wird die analoge Aufgabe für Schallwellen durch das Ohr auch noch bei viel mehr komponierenden Wellen gelöst, indem aus einem zusammengesetzten Klange die einzelnen Töne herausgehört werden (§§ 90, 96).

Eine weitere Anwendung des Fourierschen Satzes bildet die Zerlegung der täglichen Luftdruckkurve in zwei Sinuskurven (§ 190, S. 615; § 196, S. 640).

21. Annähernde Größenbestimmungen in der Physik.

So wie alle in der Physik vorkommenden Größen nur annähernd (mit einer günstigenfalls bis auf „untermerkliche Verschiedenheiten“ zurückgehenden Genauigkeit) durch Messung bestimmt werden können, so begnügt sich auch die rechnerische Verarbeitung dieser Größen mit **Annäherungen**, welche je nach dem besonderen Zwecke der Rechnung mehr oder minder genau sind. — Allgemein geht dieser Unterschied darauf zurück, daß die reine Mathematik nur mit Beziehungen, die Physik aber mit Wirklichkeiten zu tun habe (log. Anh. Nr. 37). Man vergegenwärtige sich diesen prinzipiellen Unterschied z. B. an der Schachbrettaufgabe: Es ist leicht (wenn auch etwas zeitraubend), die Anzahl der Körner $2^{44} - 1 = 18,446.744,073.709,551.615$ bis auf die Einer genau auszurechnen. Sollte aber diese Zahl an wirklichen Körnern hergestellt werden, so kämen wir auf keinen Fall über die Genauigkeit hinaus, wie sie etwa mit fünfstelligen Logarithmen zu erzielen ist, nämlich $1,8446 \cdot 10^{13}$. Denn schon wer 1 Million Körner wirklich zählen wollte, hätte eine sehr große Wahrscheinlichkeit, sich um wenigstens ein Korn (über oder unter 10^6) zu verzählen; daher bei 1 Billion um 1 Million, bei 1 Trillion um 1 Billion Körner sich zu verzählen. (Überdies bedenke man, daß man schon zum wirklichen Durchzählen einer Million Geldstücke etwa einen Monat braucht; wieviel Menschenleben daher zu obiger Zahl?) Ferner: Sollte jene ungeheure Zahl von Körnern wirklich beschafft werden, so würde man sie ja nicht durch Zählen, sondern durch Zumessen nach Scheffeln herstellen; wobei wieder die Anzahlen der Körner bei den verschiedenen einzelnen Scheffeln sich um Hunderte oder Tausende unterscheiden würden. — Ebenso ist es bei allen Zählungen: z. B. bei der Volkszählung einer Millionenstadt wird das Ergebnis gewiß schon in den Hunderten unsicher sein, daher bei einem Staat von etwa 40 Millionen Einwohnern günstigenfalls in den Tausenden und Zehntausenden. — Daher die Regel: **Schon die ganzen Zahlen, welche sich bei Zählungen ergeben, sind nur als bis auf etwa 6 oder 7 Stellen verläßlich anzusehen**; wobei, wie die angeführten Beispiele erkennen lassen, der jeweilig wirklich erreichte Genauigkeitsgrad ganz von den der Zählung günstigen objektiven Bedingungen (z. B. mehr oder minder strenge Administration eines Staates), nicht minder aber von den subjektiven Bedingungen (Aufmerksamkeit, Übung . . . des Zählenden) abhängt.

Um so mehr gilt von den Messungen **kontinuierlicher Größen** und ihrer rechnerischen Verarbeitung, daß **Zifferreihen von mehr als etwa 6 bis 7 Stellen nicht nur überflüssig, sondern unmöglich** sind. Es beruht auf einer Selbsttäuschung des Rechnenden, wenn er z. B. die Schwingungsdauer eines einfachen Pendels dadurch zu einer Zahl von 10 oder 20 Stellen anschwellen macht, daß er in $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ sowohl die Zahl π , wie die Quadratwurzel mit je 10 Stellen einführt und dann etwa auch noch ohne Abkürzung multipliziert.

Da jede wirklich physikalische Rechnung als solche (zu unterscheiden von Aufgaben der reinen Mathematik mit bloß physikalischer Einkleidung) auf numerische Angaben abzielt, so ist es auch schon während der algebraischen Durchführung der Rechnung (in all-

gemeinen, sogen. Buchstabengrößen) nicht nur erlaubt, sondern sehr häufig geboten, sich abkürzender und annähernder Rechnungen zu bedienen. — Für „Annäherung“, d. h. für eine nur annähernde Gleichheit, wurde (von § 3, S. 8 an) das Zeichen \approx gebraucht.

Einige allgemeine und besondere Gesetze über annähernde Rechnungen. — Vor allem sind zu unterscheiden 1. solche Annäherungen im Verlaufe der Rechnung, infolge deren auch das Resultat ein bloß annäherndes (Typus 1), und 2. solche Annäherungen, unbeschadet deren das Resultat völlig genau (Typus 2) wird.

Beispiele zu Typus 1.: Wird die Beschleunigung der Schwere auf 981 cm sec⁻² abgerundet 10 m sec⁻² gesetzt, so gelten auch die entsprechenden Werte für die Geschwindigkeiten c und die Wege s nur als abgerundete Zahlen. — Da für jede endliche Elongation eines Pendels die Sehne nur annähernd gleich

dem Bogen ist, so gilt die vereinfachte Formel für die Schwingungsdauer $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

LA 24, 25, 26. nur annähernd bei allen endlichen Elongationen (LA 24, 25, 26).

Beispiele zu Typus 2.: Wiewohl bei einer gleichförmigen Kreisung ein Element des Kreises nur annähernd durch eines nächst dem Scheitel der Parabel von dem gleichen Krümmungshalbmesser ersetzt werden kann, so gibt doch der aus der Analogie zur Wurfbewegung hergeleitete Ausdruck $b_{\perp} = \frac{c^2}{r}$ völlig genau den Wert der Normalbeschleunigung bei der Kreisung. — Trotz der Annäherungen $\sin \alpha \approx \alpha \approx \tan \alpha$ gibt die Ableitung der Linsenformel den genauen Wert der Bildweite — allerdings nur für die Spitze der Einhüllenden aller Strahlen, die unter verschiedenen Winkeln α von dem Gegenstandspunkte A ausgegangen waren.

Grundlegend für alle systematisch durchgeführten Annäherungen ist die Unterscheidung von **kleinen Größen erster Ordnung** und **kleinen Größen zweiter Ordnung**. — Ein Vorbild für diese Unterscheidung gibt schon jede dekadische Zahl, welche, wie z. B. 1,006009, sich darstellt als eine Summe aus einer GröÙe (1,000 000), einer im Vergleich zu ihr kleinen GröÙe (0,006) und einer wieder zu dieser GröÙe „kleinen“, im Vergleich zu ersterer also „sehr kleinen“ GröÙe (0,000 009). — Diese Unterscheidung von **verschiedenen GröÙenordnungen** wird dann sogleich praktisch bei Quadrierungen von Binomen zweier stark verschiedenen Summanden; es ist nämlich dann z. B.

$$1,003^2 = \left(1 + \frac{3}{1000}\right)^2 = 1,006009 = 1 + \frac{6}{1000} + \frac{9}{1000000}.$$

Dafs es nun hier zweckmäÙig sein kann, die Stelle mit der Ziffer 9 gegenüber der der Ziffer 6 zu vernachlässigen, erhellt schon aus den mehreren Nullen, durch die beide Ziffern getrennt sind. Diese Vernachlässigung wird aber physikalisch sogar unvermeidlich, wenn z. B. die Zahl 1,003 die Maßzahl von Metern ist und der Maßstab nur auf Millimeter genau zeigt. Denn angenommen, die wahre Länge wäre noch um $\frac{3}{10}$ mm gröÙer gewesen, also 1,003₃, dann ist $1,003_3^2 = 1,00661089$,

wo also die früher zwischen 6 und 9 stehenden Nullen schon ganz überdeckt sind durch andere Ziffern. — Allgemein ist

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \neq 1 + 2x. \quad (\text{I})$$

und zwar um so genauer, je kleiner x gegen 1 ist. — Ebenso

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 \neq 1 + 3x. \quad (\text{II})$$

$$(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \dots \neq 1 + nx. \quad (\text{III})$$

Fig. 59.

Von diesen Gleichungen gestatten (I) und (II) die graphischen Veranschaulichungen in Fig. 59. Es ist nämlich sofort ersichtlich, daß, wenn die Strecke x nur ein kleiner Zuwachs zur Quadrat-, bzw. Würfel-seite 1 ist, im Vergleich zu der Fläche der Streifen die des kleinen Quadrates, im Vergleich zum Volumen des Würfels und der drei ihm aufliegenden Platten das Volumen der drei Stäbchen und das des einen Würfelchens vernachlässigt werden können.

Die Gl. (III) wird nützlich, wenn n ein gebrochener oder negativer Exponent ist. Es ist nämlich dann

$$(1+x)^{1/2} = \sqrt{1+x} \neq 1 + \frac{1}{2}x \dots \dots (\text{IV})$$

$$(1+x)^{1/3} = \sqrt[3]{1+x} \neq 1 + \frac{1}{3}x \dots \dots (\text{V})$$

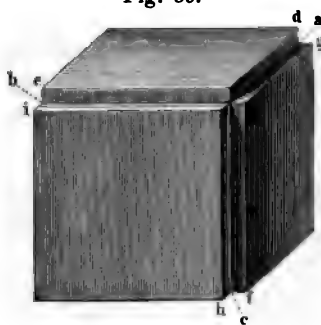
$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \dots \neq 1 - x \dots \dots (\text{VI})$$

„Unendlich kleine Größen“. — Denken wir uns in einem Ausdruck von der Form $1+x$ die Größe x nicht nur „klein“, sondern „unendlich klein“ gegen 1 (z. B. wenn im obigen Beispiel die Ziffern 1 und 3 statt durch 2, später durch 3, 4 . . . , schließlich durch „unendlich viele“ Nullen getrennt wären), so würde in $(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$ das Glied x^2 **unendlich klein zweiter Ordnung** im Vergleich zu $2x$, dem **unendlich kleinen Gliede erster Ordnung**.

Ein anderes typisches Beispiel einer unendlich kleinen Größe zweiter Ordnung bietet in Fig. 46 der „Pfeil“ (d. i. $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$) im Vergleich zur Sehne (d. i. $2 \sin \frac{\alpha}{2}$) und zum Bogen, falls diese beiden unendlich klein erster Ordnung im Vergleich zum Radius angenommen werden.

Man beachte in den Tafeln der natürlichen (und den Logarithmen der) goniometrischen Funktionen, daß bei kleinen Winkeln anfangs die Funktion Cosinus sich fast gar nicht ändert. — Dies führt auf folgendes erste Beispiel für eine strengere Begründung annähernder Rechnungen:

Daß die Funktion Sinus sich anfangs fast proportional dem Winkel ändert und, falls der Winkel ξ im absoluten Maß ausgedrückt ist, die Werte von ξ und $\sin \xi$ einander fast gleich sind, entspricht der mehrfach angewendeten Gleichung $\frac{\sin \xi}{\xi} \neq 1$



166, 170, 227. (§ 12, § 107, LA 166, 170, 227 u. s. f., Anh. Nr. 19). Ein strenger Beweis für

Anh. 19

Grenzgleichung $\frac{\sin \xi}{\xi} = 1$, sobald $\xi = 0$ wird, ist folgender: Für jeden abhän-

spitzen Winkel ξ gelten die Ungleichungen $\sin \xi < \xi < \tan \xi$, $\sin \xi < \xi < \frac{\sin \xi}{\cos \xi}$

$1 < \frac{\xi}{\sin \xi} < \frac{1}{\cos \xi}$, also auch $1 > \frac{\sin \xi}{\xi} > \cos \xi$. Erreicht ξ den Wert 0,

erreicht $\cos \xi$ den Wert 1. In diesem Grenzfalle ist also $\frac{\sin \xi}{\xi}$ nur mehr geschlossen zwischen den Grenzen 1 und 1, d. h. jener Bruch ist genau gleich

Ein zweites Beispiel für die strengere Begründung eines Grenzübergangs sei die Ableitung der Flächenformel für die Parabel $F = \frac{1}{2}xy$. — Die Fläche des ersten Quadranten inner- und außerhalb der Parabel (Fig. 60) werde zerlegt

Fig. 60.



sehr schmale Streifen, deren Längsausdehnung parallel den O-
naten, bezw. den Abszissen ist. Je ein Paar solcher schmaler Strei-
fen habe die Flächen f_y und f_x ; es ist zu beweisen, daß für unendl-
schmale Streifen $f_y : f_x = 2 : 1$. Zu diesem Grenzwert für
dreierlei Annäherungen, indem wir nämlich die in Wahr-
heit durch die Parabelbogen MM' (Fig. 60) abgeschlossenen Strei-
fen ersetzten erstens durch die zu kleinen Rechtecke $f_y \neq y(x' - x)$
und $f_x \neq x(y' - y)$; zweitens durch die zu großen Rechtecke
 $f_y \neq y'(x' - x)$ und $f_x \neq x'(y' - y)$; drittens durch die (zu
etwas zu kleinen) Trapeze $f_y \neq \frac{1}{2}(y' + y)(x' - x)$ und
 $f_x \neq \frac{1}{2}(x' + x)(y' - y)$. In allen drei Fällen benutzen wir dieselbe Gr-
beziehung, wie für den Richtungskoeffizienten der Parabel, nämlich daß für $x' =$

gilt $\frac{y' - y}{x' - x} = \frac{p}{y}$ (Anh. Nr. 23, S. 753). Aus dieser Beziehung, zusammen mit
der Parabelgleichung $y^2 = 2px$ entsprechenden $y^2 : px = 2 : 1$, folgt

erstens

$$f_y : f_x = y(x' - x) : x(y' - y) = \frac{y}{x} : \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{y}{x} : \frac{p}{y} = 2$$

zweitens

$$f_y : f_x = y'(x' - x) : x'(y' - y) = \frac{y'}{x'} : \frac{y' - y}{x' - x} \neq \frac{y}{x} : \frac{p}{y} = 2$$

drittens

$$f_y : f_x = \frac{1}{2}(y' + y)(x' - x) : \frac{1}{2}(x' + x)(y' - y) = \frac{y' + y}{x' + x} : \frac{y' - y}{x' - x} \neq \frac{2y}{2x} : \frac{p}{y} = 2$$

Eine vierte Annäherung wäre die, etwa den Parabelbogen MM' durch den
Bogen eines Kreises (oder einer anderen Kurve, deren Fläche bekannt ist) zu er-
setzen; aber offenbar wäre eine solche Genauigkeit während der Rechnung über-
flüssig, wenn schon die viel ungenaueren obigen Ersetzungen durch zu kleine oder
zu große Rechtecke oder durch Trapeze zu demselben Grenzwerte geführt haben.

Als ein drittes Beispiel für die strengere Begründung annähernder Rech-
nungen vergl. die des Mittelwertes $r r_1$ zwischen r^2 und r_1^2 im Anh. Nr. 9, S. 721.

Von den „unendlichen Größen“ („unendlich großen“ wie „unendlich kleinen“) hat die ganze Infinitesimalrechnung ihren Namen. Ihre beiden Grund-
operationen sind das Differenzieren und ihre inverse Operation, das Integrieren
(vgl. Anh. Nr. 13, 15). Eine mathematische Behandlung der Naturerscheinungen
kann fast nirgends die offene oder versteckte Anwendung der diesen beiden Teil-

Anh. 13, 15

höheren Mathematik entnommenen Methoden entbehren, da eben auch fast alle Lösen in den Naturerscheinungen sich stetig, in unendlich kleinen Abstufungen, ändern. —

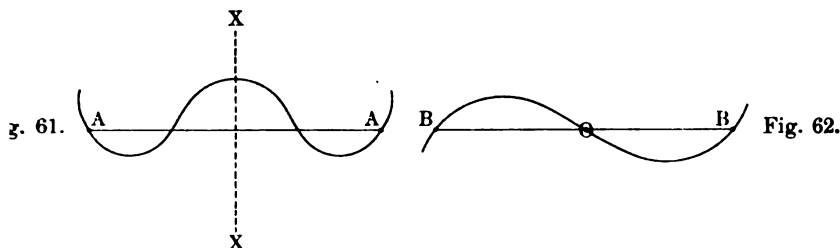
Auch viele Ableitungen der sogenannten Elementarmathematik setzen für ihr Verständnis einen Einblick in die Grundsätze des Rechnens mit Unendlichen voraus. So z. B. wenn die Kreisfläche als aus schmalen Sektoren bestehend betrachtet wird und diese als geradlinige Dreiecke nach $f = \frac{1}{2} \beta r$ berechnet werden (ist ein Beispiel zum obigen Typus 2, indem, wie sich nach durchgeführter Flächenberechnung des Kreises und seiner Sektoren herausstellt, die Fläche eines solchen Sektors nicht etwa annähernd, sondern genau gleich ist dem halben Produkt aus der Bogenlänge und dem Radius). — Weitere Beispiele: Die Flächenbestimmung der Ellipse, des Parabelsegmentes und dergleichen sind im Grunde Integrationen; ebenso auch namentlich alle Anwendungen des „Cavalierischen Prinzips“.

Einige besondere geometrische Gebilde und Beziehungen.

1. Axial-symmetrische und zentral-symmetrische Gebilde.

Zwei Punkte A, A (Fig. 61) sind einander in Bezug auf die Symmetrieachse XX **axial-symmetrisch** zugeordnet, wenn XX im Halbiungspunkte der Strecke \overline{AA} auf dieser senkrecht steht.

Zwei Punkte B, B (Fig. 62) sind einander in Bezug auf ein Symmetriezentrum O **zentral-symmetrisch** zugeordnet, wenn O der Halbiungspunkt der Strecke \overline{BB} ist.



Ein ebenes Gebilde heißt **axial-**, bzw. **zentral-symmetrisch**, wenn sich eine Achse XX , bzw. ein Zentrum O angeben läßt, in Bezug auf das jedem Punkte des Gebildes ein Punkt desselben Gebildes geordnet ist.

Beiderlei Gebilde gelangen mit sich selbst zur Deckung bei einer Drehung von 180° um die Symmetrieachse, bzw. um eine im Symmetriezentrum normal zur Ebene des Gebildes errichtete Gerade.

Anwendungen: Lage der Kräfte in Figg. 83—88, S. 114. — An Stelle der Symmetrieachse XX (Fig. 61) kann auch eine Symmetrieebene treten: typisch hierfür ist das physikalische Beispiel des Planspiegels (z. B. das Spiegelbild einer rechten Hand ist räumlich kongruent einer wirklichen linken Hand). Warum ist in der lotrechten Spiegelfläche nur rechts und links, nicht auch oben und unten vertauscht? Wie verhält sich hierin eine wagrechte Spiegelfläche, z. B. ein Wasserspiegel?

23. Parabel, Ellipse, Hyperbel. — Kegelschnitte.

Im folgenden werden zuerst einzelne Eigenschaften der Parabel (im physikalischen Unterricht am frühesten benötigt wird, §§ 7, 11, 13), der Ellipse (einschließlich des Kreises) und der Hyperbel, sodann der innere Zusammenhang dieser drei Kurven durch ihre Scheiteltgleichungen, durch ihre allgemeine Gleichung als Kegelschnittslinien und durch ihre Polargleichungen entwickelt.

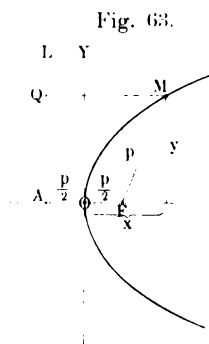
1. Parabel. Da sich die Parabel innerhalb der Physik am häufigsten ihrer Eigenschaft als Wurflinie aufdrängt und da sie diese ihre Gestalt dem Umstande verdankt, daß z. B. beim horizontalen Wurf den wagrechten Weg s (2c, 3c... et die lotrechten Fallstrecken a , $4a$, $9a$... at^2 entsprechen, so wird auch für die Geometrie der Parabel aus von folgender

arithmetischen Definition der Parabel: Eine Parabel ist die graphische Darstellung der Gleichung $y = x^2$ (Fig. 29, S. 72) oder allgemeiner $y = Cx^2$, noch allgemeiner $y = Cx^2 + Dx + E$. Für die Kurve $y = x^2$ ist Anfangspunkt Scheitel der Parabel, die Y-Achse zugleich die geometrische Achse der Parabel. Durch Vertauschung der veränderlichen Größen x und y nimmt die Parabelgleichung die Form an: $x = y^2$ oder $y = \pm\sqrt{x}$, allgemeiner $y = \pm\sqrt{Px}$. Für die Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ (und ebenso für $y = \pm\sqrt{Px}$) ist wieder der Koordinatenanfangspunkt Scheitel der Parabel; geometrische Achse der Parabel ist aber jetzt die X-Achse (Fig. 31, S. 728). —

Man beachte, daß in der Kurve $y = x^2$ die Ordinaten rascher wachsen als die Abszissen: umgekehrt in der Kurve $y = \pm\sqrt{x}$ (vergl. Fig. 39, S. 735).

Bemerkung: In einem allgemeineren Sinne des Wortes „Parabel“ versteht man auch die Kurven mit den Gleichungen $y = x^3$, $y = x^4$... als Parabel dritten, vierten... Grades (ferner $y = Cx^{3/2}$ als semikubische Parabel...) bezeichnet (Fig. 39, S. 735). — Im Vorigen und Nachfolgenden wird unter „Parabel“ nur die Parabel zweiten Grades verstanden.

Brennpunktsdefinition der Parabel: Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte, die gleichen Abstand von einem festen Punkte, dem **Brennpunkte**, und einer festen Geraden, der **Leitlinie**, haben (Fig. 63). Diese Definition führt zur Gleichung $FM = MQ$, umgesetzt in eine Beziehung zwischen den Koordinaten, gibt $y^2 = 2px$.



Ableitung: Die Größe p sei zuerst definiert als Abstand FA des Brennpunktes von der Leitlinie. Wird als Abszissenachse die durch F gehende Normale und als Koordinatenanfangspunkt der Halbierungspunkt von FA gewählt, so liefert die Definitionsgleichung $FM = MQ$ die Beziehung zwischen

den Koordinaten: $\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2}$.
 $y^2 = 2px$ oder $y = \pm\sqrt{2px}$.

Lehrsätze: 1. Der **Parameter der Parabel** (definiert als **ordinate im Brennpunkt**¹⁾) ist gleich p .

Beweis: Für den Brennpunkt ist $x = \frac{p}{2}$ und $y = \left(\frac{+}{-}\right)\sqrt{2p \cdot \frac{p}{2}} = p$.

2. Der **Richtungskoeffizient der Parabel** ist $A = \frac{p}{y}$.

Ableitung: $y^2 = 2px$, $y'^2 = 2px'$; daher $y'^2 - y^2 = 2px' - 2px$ oder $(y' + y)(y' - y) = 2p(x' - x)$.

Hieraus: $tg\sigma = \frac{y' - y}{x' - x} = \frac{2p}{y' + y}$ und $tg\tau = A = \frac{2p}{y + y} = \frac{p}{y}$. —

Auf Grund der Kenntnis von A ergeben sich dann (wie für jede Kurve) in bekannter Weise die „sechs Berührungsgrößen“. So ist u. a. die

3. **Subnormale der Parabel** $= p$. (Vgl. Nr. 26.)

Beweis: Allgemein: $Sn = yA$; also speziell für die Parabel $Sn = y \cdot \frac{p}{y} = p$.

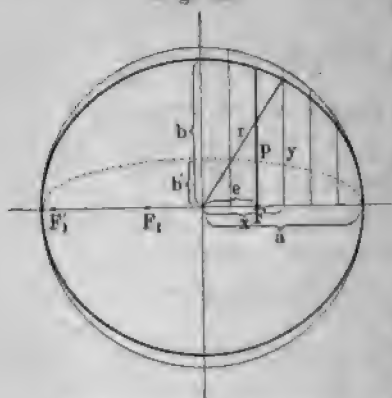
II. Ellipse. Ellipsen begegnen uns bekanntlich in perspektivischen Zeichnungen überall dort, wo ein Kreis so dargestellt werden soll, daß die vom Auge zu seinem Mittelpunkt gezogene Sehlinie mit der Ebene des Kreises einen tiefen Winkel bildet. Ebenso zeigt der Schatten einer undurchsichtigen Kreiskeibe auf einem ebenen Schirme im allgemeinen elliptische Gestalt; desgleichen ein schiefer Schnitt durch einen geraden Kreiszylinder (z. B. durch eine Wurst). Solche Beobachtungen führen zu folgender nächstliegender

perspektivischen Definition der Ellipse: Eine Ellipse entsteht, wenn in einem Kreise vom Halbmesser a alle Ordinaten in konstantem Verhältnisse $b : a$ (wo $b < a$) verkürzt werden (Fig. 64). Dann heißt a die **große Halbachse**, b die **kleine Halbachse** der Ellipse (daher $2a$ die große, $2b$ die kleine Achse). — Um von dieser Definition der Ellipse zu ihrer Mittelpunktsgleichung zu gelangen, gehen

¹⁾ Das Wort **Parameter** wird in mehreren Bedeutungen gebraucht, nämlich 1. für die Ordinate im Brennpunkt (wie oben definiert), 2. für die im Brennpunkt auf der großen Achse normale Sehne [die dann gleich ist der doppelten Ordinate im Brennpunkt. — Also im Sinne der Definition 2 wird dann die Ordinate im Brennpunkt oft auch **Halbparameter** genannt, und wenn man die ganze Sehne **Parameter** nennt und mit P bezeichnet, so lautet die Gleichung der Parabel $y^2 = Px$. Der obigen Definition 1 bedient sich z. B. SERRET-HARNACK, wo $y^2 = 2px$ geschrieben und p **Parameter** genannt wird; ebenso definiert EPSTEIN, Geometrie: Parameter der Ellipse ist gleich der Ordinate im Brennpunkt. — Die beiden Definitionen 1 und 2 setzen voraus, daß die Kurve einen Brennpunkt und eine Hauptachse habe, daß diese in die Abszissenachse falle und daß das Koordinatensystem ein rechtwinkliges sei. Dabei soll hier auf eine allgemeine Definition der Begriffe „Brennpunkt“ und „Hauptachse“ nicht näher eingegangen werden; vielmehr werden sie in ihrer hier allein vorkommenden Anwendung auf Kegelschnitte als bekannt vorausgesetzt]. In einem allgemeineren 3. Sinne nennt man **Parameter** jede für die besondere Größe und Gestalt einer Kurve charakteristische Strecke; endlich in einem noch allgemeineren 4. Sinne überhaupt jede (willkürlich gedachte) konstante Größe im Gegensatz zu den Variablen.

wir aus von der Mittelpunkts Gleichung des Kreises $x^2 + Y^2 = a^2$ oder $Y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. Da für die Ordinaten der Ellipse gilt

Fig. 64.



$y = \frac{b}{a} Y$, so ist die Gleichung der

Ellipse $y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2} \dots (1)$

oder rational gemacht:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \text{ oder } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{oder } \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \dots (2)$$

Vergleichung der letzten Form mit der

Knotengleichung der Geraden $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

— Zunächst unabhängig von der obigen „perspektivischen“ Definition ist die

Brennpunktdefinition der Ellipse: Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte M , für die die Summe der Abstände von zwei gegebenen Punkten F und F_1 , den **Brennpunkten**, gleich ist einer gegebenen Strecke, der **großen Achse** $A_1 A_2$.

Ist $OA_1 = OA_2 = a$ (**große Halbachse**), $OF = OF_1 = e$ (**lineare Excentricität**), so ist in der Definition (wieso?) als für die Ellipse wesentlich vorausgesetzt, daß $a > e$. Daher ist $a^2 - e^2$ jedenfalls eine positive GröÙe, kann also gleich gesetzt werden b^2 , so daß die Beziehungen bestehen $a^2 - e^2 = b^2$, $a^2 - b^2 = e^2$, $b^2 + e^2 = a^2$. (Daß und warum b die **kleine Halbachse**, s. u.) Das Verhältnis $\frac{e}{a} = \epsilon$ heißt die **numerische Excentricität** der Ellipse. —

Beziehen wir die Ellipse auf ein Koordinatensystem, dessen X-Achse durch F_1, F geht und dessen Anfangspunkt O der Halbierungspunkt der Strecke $F_1 F$ ist, so setzt sich jene Definition um in die Beziehung zwischen den Koordinaten:

$$\sqrt{y^2 + (x - e)^2} + \sqrt{y^2 + (x + e)^2} = 2a.$$

Dies ist schon eine Form der Gleichung der Ellipse. Sie geht durch eine hier als bekannt vorauszusetzende Transformation über in die beiden obigen Formen. —

Wird in obige Gleichung $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ eingesetzt $x = e$, so wird $y = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - e^2} = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{b^2} = \pm \frac{b^2}{a}$. Man nennt die **Ordinate im Brennpunkte** einer Ellipse den **Parameter** p (vgl. die Anmerkung zu S. 753). Daher ist $p = \frac{b^2}{a}$; in Worten!

Der Halbmesser r eines Umfangspunktes der Ellipse mit den Koordinaten x und y hat den (im Gegensatz zum Kreis) nicht konstanten, sondern von x abhängigen Wert $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)} = \frac{1}{a} \sqrt{(a^2 - b^2)x^2 + a^2 b^2}$. — Der kleinste Halbmesser entspricht $x = 0$, nämlich $r = b$, weshalb b die **kleine Halbachse** heißt. Ebenso ist für $x = a$ und $r = a$ der größte Halbmesser, weshalb eben a die **große Halbachse** heißt (Fig. 64).

Lehrsätze: 1. Der **Flächeninhalt** der Ellipse ist $F = ab\pi$.

Beweis unmittelbar anschaulich aus der perspektivischen Definition: denn wird der Kreis mit der Fläche $a^2\pi = a \cdot a \cdot \pi$ nach einer Dimension im Verhältnis $\frac{b}{a}$ verkürzt, so wird auch die Fläche $f = a \cdot a \cdot \pi \cdot \frac{b}{a} = ab\pi$. [Behufs strengerer formeller Durchführung dieses Gedankens wird jeder der schmalen Streifen, in die die Ellipse durch beliebig nahe nebeneinander gezogene Ordinaten zerlegt gedacht werden kann, zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, nämlich zwei Rechtecke, die die nämliche Breite wie die Ellipsenstreifen haben und deren Höhe bei dem einen die grössere, bei dem anderen die kleinere Ellipsenordinate ist.] (Vgl. Nr. 15, 21.)

2. Der **Richtungskoeffizient** der Ellipse ist $A = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$.

Ableitung: Aus $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ und $b^2 x'^2 + a^2 y'^2 = a^2 b^2$ folgt in bekannter Weise $\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{b^2(x' + x)}{a^2(y' + y)}$; hierin dann zu setzen $x' = x$, $y' = y$. — Eine der Anwendungen von A ist die Gleichung der Tangente $\eta - y = -\frac{b^2 x}{a^2 y}(\xi - x)$, worin x und y die Koordinaten des Ellipsenpunktes, ξ und η die laufenden Koordinaten der Tangente als gerader Linie sind. Durch bekannte Transformation wird dann die leicht einzupragende Form erhalten

$$b^2 x \xi + a^2 y \eta = a^2 b^2 \quad \text{oder explizit} \quad \eta = -\frac{b^2 x}{a^2 y} \xi + \frac{b^2}{y}.$$

3. Die zu einem Punkte gezogenen Leitstrahlen schliessen mit der Tangente (und daher auch ebenso mit der Normale) des Punktes gleiche Winkel ein.

Beweis in bekannter Weise aus den Richtungskoeffizienten der Ellipse $A = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ und

denen der Leitstrahlen $A_1 = \frac{y}{x + e}$ und $A_2 = \frac{y}{x - e}$. — Eine naheliegende Folge dieses Satzes ist die in LA 47 angewendete Eigenschaft, dass $YZ \perp FU$ (Fig. 65). LA 47.

4. Werden von den beiden Brennpunkten auf eine Tangente die Normalen n_1 und n gefällt, so gilt allgemein $n_1 n = b^2$ (Fig. 65).

Beweis: Die allgemeine Perpendikelformel $n = (\pm) \frac{y_1 - A x_1 - B}{\sqrt{1 + A^2}}$ wird zweimal angewendet auf die Brennpunkte $y_1 = 0$, $x_1 = -e$ und $y_1 = 0$, $x_1 = +e$ und auf die obige explizite Gleichung der Tangente:

$$n_1 = \frac{0 - \frac{b^2 x}{a^2 y} \cdot e - \frac{b^2}{y}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{b^2 x}{a^2 y}\right)^2}}, \quad n = \frac{0 + \frac{b^2 x}{a^2 y} \cdot e - \frac{b^2}{y}}{\sqrt{1 + \left(-\frac{b^2 x}{a^2 y}\right)^2}},$$

wonach für $n_1 n$ nach einigen Reduktionen (Ersetzungen: $a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2$, $e^2 = a^2 - b^2$) sich ergibt $n_1 n = b^2$. — Anwendung: LA 47.

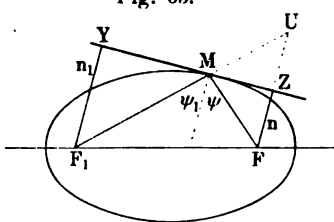


Fig. 65.

LA 121.

III. Hyperbel. — Anknüpfend an Fig. 32 (S. 728) und an die LA 120, sieht man sich als graphische Darstellung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes $p \cdot v = \text{Konst.}$ an. Die gleichseitige Hyperbel ergibt, gehen wir aus von folgender einfachsten

arithmetischen Definition einer Hyperbel: Eine Hyperbel ist die graphische Darstellung der Gleichung $y = \frac{1}{x}$ und allgemeiner $y = \frac{k}{x}$. Es sind dies **gleichseitige Hyperbeln**, ihre Asymptoten sind die Achsen des rechtwinkligen Koordinatensystems (vgl. Fig. 32).

Werden die nämlichen Gleichungen bezogen auf ein schiefwinkliges Parallelenkoordinatensystem, so stellen sie alle beliebigen Hyperbeln vor, wenn als jeweiliger Achsenwinkel der der Asymptoten gewählt wird, Fig. 32a und 32b (S. 728).

Transformieren wir das rechtwinklige System in ein anderes von demselben Anfangspunkt wie das frühere und mit dem Transformationswinkel $\alpha = 45^\circ$, so daß die allgemeinen Transformationsformeln

$$\begin{aligned} x &= \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha & \text{und} & & y &= \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha \\ \text{übergehen in } x &= \xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} & & & y &= \xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \eta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

so wird aus der Gleichung $y = \frac{k}{x}$ oder $xy = k$ die Gleichung $\xi^2 - \eta^2 = 2k$.

Wird hier $2k = a^2$ gesetzt, so kann diese Gleichung der gleichseitigen Hyperbel $x^2 - y^2 = a^2$ ebenso aus der allgemeineren Hyperbelgleichung $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ (deren Ableitung auf Grund der Brennpunktdefinition, siehe unten, hier als bekannt vorausgesetzt wird) für $a = b$ hervorgegangen gedacht werden, wie aus der Ellipsengleichung $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ für $a = b$ die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = a^2$ hervorgeht.

Die Brennpunktdefinition der Hyperbel unterscheidet sich von der der Ellipse nur dadurch, daß bei der Hyperbel die **Differenz** $r_2 - r_1 = 2a$ konstant ist, während bei der Ellipse die Summe $r_2 + r_1 = 2a$ konstant war.

Anwendung dieser Brennpunktdefinition zur Erklärung der Hyperbeln bei Interferenzerscheinungen, z. B. in Fig. 255 (S. 241), in Fresnels Spiegelversuch (LA 175).

Asymptoten der Hyperbel. Aus der einfachsten Gleichungsform $y = \frac{1}{x}$ oder $y = \frac{k}{x}$ der Hyperbel ist auch sofort ersichtlich, daß mit wachsendem x die Hyperbel sich immer mehr der X-Achse anschließt, ohne sie doch je zu erreichen; ähnlich für abnehmende x der Y-Achse. Für die auf die Haupt- und Nebenachse der Hyperbel als Koordinatenachsen bezogene Gleichung $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ haben die Asymptoten die Doppelgleichung $y = \pm \frac{b}{a} x$.

Erster Beweis: Mit der Mittelpunktsleichung der Hyperbel $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ koexistiert die Gleichung $y = Ax$ einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, die wir uns um den Mittelpunkt gedreht denken, indem wir $A = \tan \alpha$ von 0 bis ∞

wachsen lassen. Die Abszisse des gemeinschaftlichen Punktes beider Linien hat allgemein die Form $x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 A^2}}$. Hier bildet der Fall $b^2 - a^2 A^2 = 0$ oder $A = \pm \frac{b}{a}$ die Grenze zwischen den reellen und imaginären Werten von x und zwar rückt für die Grenzlage $y = \pm \frac{b}{a} x$ der gemeinschaftliche Punkt ins Unendliche. — Dafs sich Hyperbel und Gerade im Unendlichen (nicht schneiden, sondern) berühren, zeigt folgender

Zweiter Beweis: Um in der Gleichung der Hyperbeltangente $b^2 x \xi - a^2 y \eta = a^2 b^2$ die Abszisse des Berührungspunktes in ∞ übergehen zu lassen, setzen wir $b^2 \xi - a^2 \eta \cdot \frac{y}{x} = \frac{a^2 b^2}{x}$. Hier ergibt sich der Grenzwert für $\frac{y}{x}$ aus $b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2$ oder $1 - \frac{a^2 y^2}{b^2 x^2} = \frac{a^2}{x^2}$; denn weil für $x = \infty$ jetzt $\frac{a^2}{x^2} = 0$, so wird $\frac{y}{x} = \pm \frac{b}{a}$ und wegen $b^2 \xi - a^2 \eta \cdot \pm \frac{b}{a} = 0$ geht wieder die Tangente in die Asymptote $\eta = \pm \frac{b}{a} \xi$ über. —

Der Anfänger suche sich einen Blick dafür anzueignen, worin sich der Verlauf eines Hyperbelastes von dem eines Parabelastes charakteristisch unterscheidet; es weisen zwar beide sozusagen eine Tendenz zum Geradewerden auf, aber entschiedener die Hyperbel durch ihren Anschluß an die Asymptote; dagegen die Parabel, in der z. B. ein horizontal geworfener Körper sich bewegt, nähert sich zwar auch einer vertikalen Geraden, längs der ein frei fallender Körper sich bewegt, indem im Vergleich zur immer gröfser werdenden vertikalen Geschwindigkeitskomponente die konstant bleibende horizontale Geschwindigkeitskomponente immer mehr zurücktritt. Weil aber infolge der sich erhaltenden wagrechten Anfangsgeschwindigkeit jene lotrechte Fallstrecke gleichsam immerwährend von der geometrischen Achse der Parabel wegrückt, so kann man bei einer Parabel nicht von einer Asymptote sprechen. — Die Bewegung eines Kometen dagegen, der mit so grofser Anfangsgeschwindigkeit das Perihel passiert hatte, dafs er in einem Hyperbelaste sich bewegt, nähert sich, je ferner er der Sonne ist, um so mehr der geraden, gleichförmigen Bewegung eines blofs infolge der Trägheit sich bewegenden Körpers. Der Schüler gewöhne sich, alle Zeichnungen von Parabeln und Hyperbeln mindestens mit einem solchen Maß von Sorgfalt auszuführen, dafs der Unterschied von parabolischer und hyperbolischer Krümmung in den Zeichnungen auch anschaulich zur Geltung kommt.

Scheitelgleichungen von Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Vorbemerkung: Aus der allgemeinen Gleichung des Kreises $(x - m)^2 + (y - n)^2 = a^2$ ergibt sich für $m = a$, $n = 0$ die

Scheitelgleichung des Kreises $y^2 = 2ax - x^2$.

Ähnlich ergibt sich aus den Mittelpunktsleichungen der Ellipse (bzw. Hyperbel) durch Verschiebung des Koordinatenursprungs aus dem Mittelpunkt in den Scheitel, also um $+a$ (bzw. um $-a$)

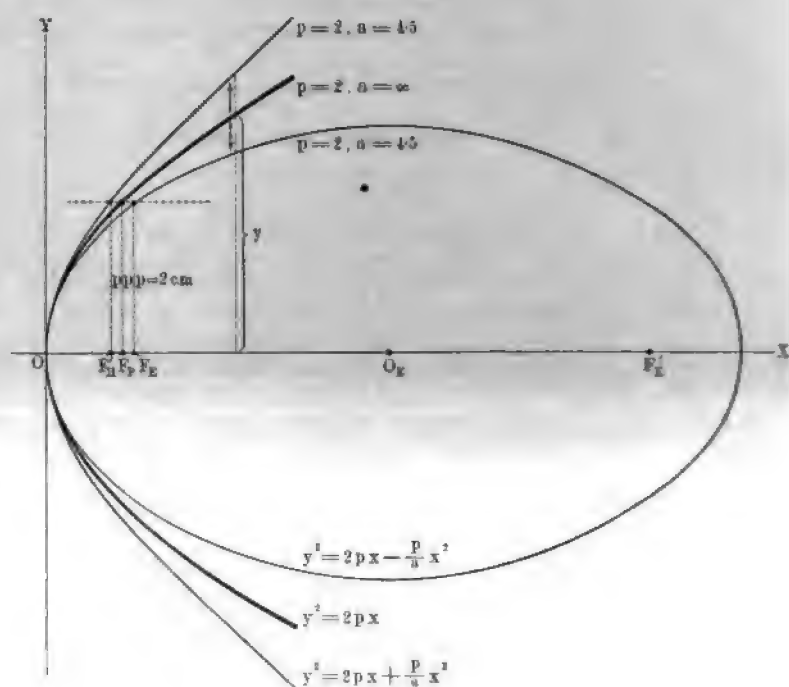
die Scheitelgleichung der Ellipse $a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 (x - a)^2 = b^2 \cdot [a^2 - x^2 + 2xa - a^2]$ und $y^2 = 2 \frac{b^2}{a} \cdot x - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2$. Wird hier $\frac{b^2}{a} = p$ eingeführt, so ergibt sich als

Scheitelgleichung der Ellipse $y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2$

Analog die Scheitelgleichung der Hyperbel $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$

Von der Gleichung der Parabel $y^2 = 2px$, die selbige Scheitelgleichung war, unterscheiden sich also die beiden anderen um das abzuziehende, bzw. hinzuzufügende Glied $\frac{p}{a}x^2$.

Fig. 66.



Daher die Namen Ellipse von *ἐν-λείπειν*, darin bleiben, und Hyper von *ἐπερβάλλειν*, darüber hinausreichen. Diese von APOLLONIUS eingeführten Namen weisen also schon auf tiefere Kenntnisse der (auch von ARCHIMEDES untersucht) drei Kurven und ihrer Beziehungen zueinander hin. An diese antiken Theorien der Kegelschnitte hat KEPLER nach seinem eigenen Zeugnisse unmittelbar angeknüpft — ein schönes Beispiel zu PLATONS bedeutsamem Worte: *ταύτης ἐχούτης διαδίδουσαν ἀλλήλοις*.

Bemerkung: Die obigen Formen der Scheitelgleichungen von Ellipse und Hyperbel, in denen y in der zweiten, x in der ersten und zweiten Potenz vorkommt, sind gebunden an eine bestimmte Lage zum Koordinatensystem. Die allgemeinste Form der Gleichung einer Kurve zweiten Grades $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.



Ellipse (einschl. Kreis), Parabel, Hyperbel als ebene Schnitte des (geraden oder schiefen) Kreiskegels [„Kegelschnitte“].

Beweise und Diskussion nach Figg. 67 bis 72 und den folgenden, auf die Scheitelgleichungen der drei Kurven führenden planimetrischen Rechnungen:

Fig. 67.

$$\begin{aligned} OA &= 2a \mid OB = OC \\ CD &= 2p \\ OP &= x \\ PM &= y \end{aligned}$$

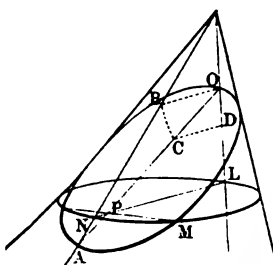


Fig. 68.

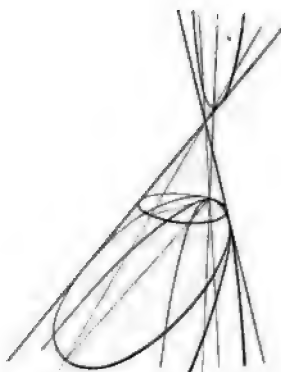


Fig. 69.

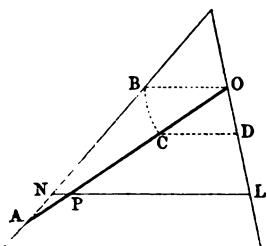
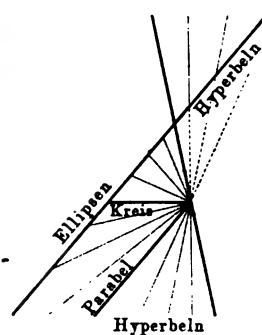


Fig. 70.

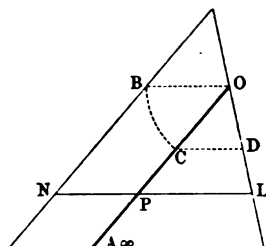


Fig. 71.

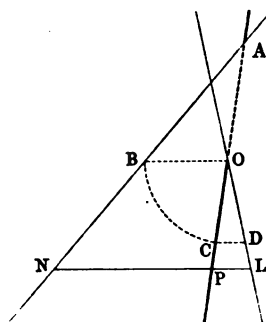


Fig. 72.

$$\begin{aligned} PM^2 &= LP \cdot PN \\ LP:DC &= OP:OC \\ PN:OB &= AP:AO \\ PM^2 &= \frac{DC \cdot OP \cdot OB \cdot AP}{OC \cdot AO} \\ &= \frac{2p \cdot x \cdot (2a - x)}{2a} \end{aligned}$$

$$y^2 = 2px - \frac{p}{a} x^2$$

$$\begin{aligned} PM^2 &= LP \cdot PN \\ LP:DC &= OP:OC \\ PN:OB &= AP:AO \\ PM^2 &= \frac{DC \cdot OP \cdot OB \cdot AP}{OC \cdot AO} \\ &= 2p \cdot x \end{aligned}$$

$$y^2 = 2px$$

$$\begin{aligned} PM^2 &= LP \cdot PN \\ LP:DC &= OP:OC \\ PN:OB &= AP:AO \\ PM^2 &= \frac{DC \cdot OP \cdot OB \cdot AP}{OC \cdot AO} \\ &= \frac{2p \cdot x \cdot (2a + x)}{2a} \end{aligned}$$

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a} x^2$$

Veranschaulichung der drei Arten von Kegelschnittslinien durch ein Gefäß (z. B. zwei Glastrichter in Metallfassungen, die an den Spitzen und durch ein aufsen angebrachtes Rohr miteinander kommunizieren), in das kleinere oder gröfsere Mengen einer gefärbten Flüssigkeit gefüllt sind, und das verschieden gegen die Wagrechte geneigt wird.

Polargleichungen der Kegelschnitte.

I. Als Pol werde der eine Brennpunkt F (Fig. 73), als Polar die Richtung der großen Achse des Kegelschnitts gewählt. — Dann

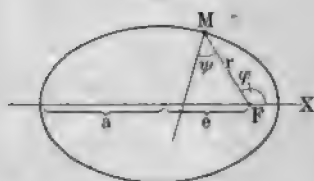
$x = e + r \cos \varphi$, $r = a - \frac{e x}{a}$, wo für die Ellipse $0 < e < a$. — Da

$$r = a - \frac{e}{a} (e + r \cos \varphi) = \frac{b^2 - e r \cos \varphi}{a}$$

LA 63. und nach r aufgelöst $r = \frac{b^2}{a + e \cos \varphi} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$, wo $0 < e < 1$. —

lich ergibt sich als allgemeine Polargleichung der Kegelschnitte $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$ und zwar

Fig. 73.



für die Ellipse $e < 1$, $p = \frac{b^2}{a}$,

„ „ Parabel $e = 1$, $p = r$ für $\varphi = 0$,

„ „ Hyperbel $e > 1$, $p = \frac{b^2}{a}$. —

II. Eine andere allgemeine Form für Gleichungen der Kegelschnitte ergibt

wenn wir statt des Polarwinkels φ den Winkel ψ zwischen dem Radiusvektor und der Normale n (Fig. 65, S. 755) als unabhängige Größe einführen. Als

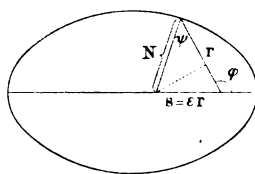
$r^2 \mp 2ar = \mp \frac{b^2}{\cos^2 \psi}$. (Anwendung LA 63.)

Beweis, zunächst für die Ellipse: Aus $r + r_1 = 2a$ und $r = \frac{n}{\cos \psi}$, $r_1 = \frac{n_1}{\cos \psi_1}$, also $rr_1 = \frac{n n_1}{\cos^2 \psi} = \frac{b^2}{\cos^2 \psi}$, folgt $r(2a - r) = \frac{b^2}{\cos^2 \psi}$ oder $r^2 - 2ar = -\frac{b^2}{\cos^2 \psi}$.

Wenn in $2r - \frac{r^2}{a} = \frac{a}{\cos^2 \psi}$ mit dem Grenzübergang $a = \infty$ auch wächst, daß $\frac{b^2}{a} = p$ bleibt, ergibt sich für die Parabel $2r = \frac{p}{\cos^2 \psi}$.

Die Gleichung der Hyperbel ergibt sich aus der für die Ellipse, in an Stelle von $r + r_1 = 2a$ tritt $r_1 - r = 2a$, woraus dann $r^2 + 2ar = \frac{b^2}{\cos^2 \psi}$.

Fig. 74.



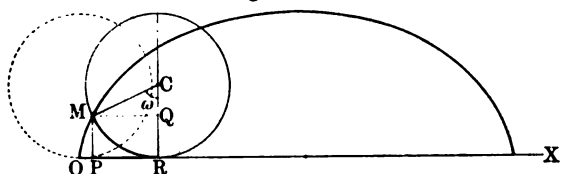
Auch hieraus ergibt sich die Gleichung Parabel für $a = \infty$, $\frac{b^2}{a} = p$.

III. Weitere Beziehungen nach Fig. 74 (vgl. Fig. 65, S. 755, wo $F_1 U = 2a$): Wegen $2a : r = 2$ ist $s = \frac{e}{a} r = e r$. — Ferner $r = e r \cos(180^\circ - \psi) + N \cos \psi$, somit $N \cos \psi = r(1 + e \cos \varphi) =$ (Anwendung math. Anh. Nr. 26).

24. Zykloiden.

Der Umfang eines Kreises vom Radius a rolle längs einer Geraden; je ein Punkt dieses Umfanges beschreibt dann eine **gemeine Zykloide** (Fig. 75).

Fig. 75.



Eine solche sehen wir z. B. ein Papierblatt beschreiben, das am Umfang

des Rades eines auf ebener StraÙe dahinrollenden Wagens klebt. (Über die physikalische Wichtigkeit der gemeinen Zykloide als Tautochrone und Brachistochrone vgl. LA Nr. 24.) Die Gleichung der gemeinen Zykloide ergibt sich so:

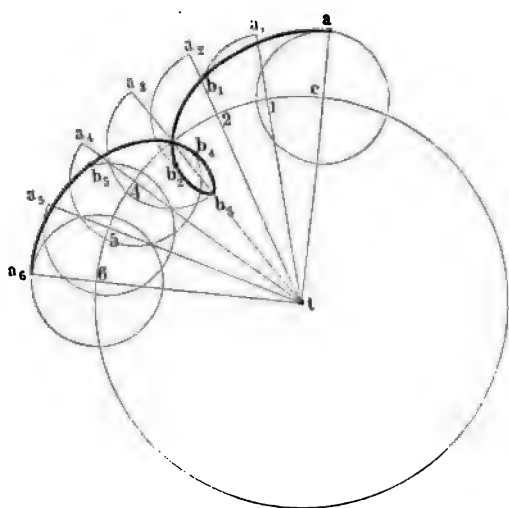
Die gegebene Gerade werde als Abszissenachse und als Koordinatenanfangspunkt in ihr einer derjenigen Punkte gewählt, in denen der gegebene Punkt M des Kreisumfanges die Gerade berührt. — Hat sich von dieser Stellung aus der Kreis um den Centriwinkel ω (Wälzungswinkel, gemessen im absoluten Maß) gedreht, so hat sich ein Bogen von der Länge $a\omega$ an der Abszissenachse abgerollt, und der Punkt M hat nun die Koordinaten $x = a(\omega - \sin \omega) \dots (1)$, $y = a(1 - \cos \omega) \dots (2)$. (Aus diesem Gleichungspaar ergäbe sich eine direkte Beziehung zwischen x und y , nämlich durch

Elimination von ω nämlich $x = a \left[\arccos \left(1 - \frac{y}{a} \right) - \sqrt{\frac{y}{a} \left(2 - \frac{y}{a} \right)} \right] \dots (3)$.

Wegen der Unübersichtlichkeit dieser Gl. (3) pflegt man aber lieber (1) und (2) selbst als Gleichungspaar der gemeinen Zykloide zu verwenden.) —

Während der Kreisumfang wie bei der gemeinen Zykloide längs einer Geraden abrollt, beschreibt ein Punkt des Radius selbst eine **verkürzte Zykloide**, die statt der Spitzen stetig gekrümmte Bogen hat, und zwar von um so geringerer Krümmung, je näher der Punkt dem Mittelpunkt liegt. — Ein Punkt auf dem verlängerten Radius beschreibt **verlängerte Zykloiden**, bei welchen sich statt der Spitzen Schleifen zeigen.

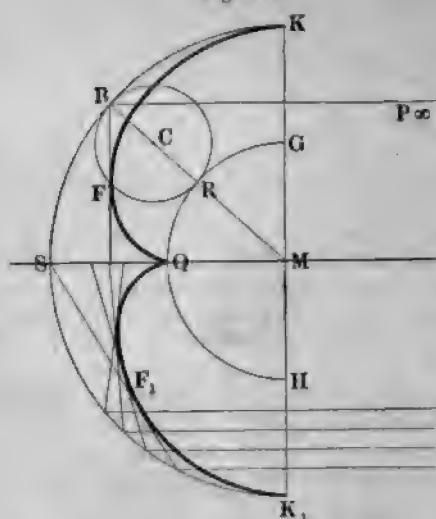
Fig. 76.



Epizykloiden beschreibt ein Punkt a (Fig. 76), der eine Kreisung auf dem Umfang eines Kreises (Epizykel) ausführt, während der Mittelpunkt c dieses Epizykels eine Kreisung auf dem Umfang eines anderen Kreises (Deferent) mit dem ruhenden Mittelpunkt t ausführt. Dies ist die dem Ptolemäischen Weltsystem zugrunde liegende Vorstellung (§§ 174, 183, Figg. 668, 669).

Hypozykloiden entstehen, wenn der Umfang eines Kreises auf der Innenseite eines anderen Kreises abrollt. Ist der Halbmesser dieses abrollenden

Fig. 77.



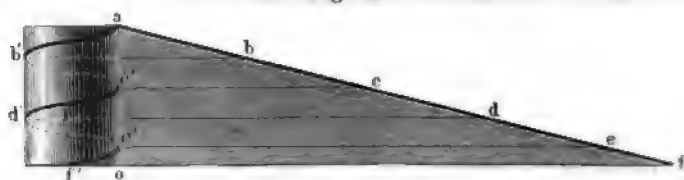
ein Viertel vom Halbmesser des äußeren Kreises (Fig. 77), so nimmt die Hypozykloide die Form der Herzkurve an, die physikalisch als Katakautika anspiegeln (vgl. Nr. 27).

25. Schraubenlinie

Auf den Mantel eines geraden Kreiszylinders von der Höhe h und dem Basiumfange u sei ein rechtwinkliges Dreieck von der Katheten h und u so aufgerollt, dass die Hypotenuse h längs einer Seite des Zylinders zu liegen kommt. Die Hypotenuse bildet dann eine einfache Schraubenlinie; h ist die Höhe, u ist der Umfang des

Schraubenganges. — Ein ähnliches Dreieck von den Katheten h und nu , wo n eine ganze Zahl ist, bildet auf einem Zylinder, der denselben Umfang u hat, n Schraubengänge (Fig. 78).

Fig. 78.



Schraubenlinien verwickelterer Art kann man sich nicht nur auf Zylinder, sondern auch z. B. auf Kugeloberflächen verzeichnet denken. Eine solche Schraubenlinie stellt z. B. die jährliche Bahn der Sonne am Himmelsgewölbe dar: die Sonne geht am 21. März im (genau: sehr nahe dem) Ostpunkte auf, erreicht sich bis Mittag $90^\circ - q$ über den Horizont eines Ortes von q° geographischer Breite, geht nahe dem Westpunkt unter, beschreibt am nächsten Tage die Bahn, die mit der des Vortages nicht zusammenfällt, sondern mit ihr nahezu parallel ist u. s. f. (Sehr häufig wird diese Sonnenbahn als eine „Spirale“ bezeichnet; mit Unrecht, denn Spiralen sind ebene Kurven von der Art der Fig. 21, S. 24, dargestellten, wogegen Schraubenlinien doppelt gekrümmte Kurven sind, Anhang Nr. 26.)

Warum projiziert sich eine einfache Schraubenlinie auf eine zur Zylinderachse parallele Ebene als Sinuslinie (z. B. der Aufriss einer Wendeltreppe). Daher Verwendung der Schraubenlinie bei manchen Wellenapparaten.



26. Krümmungshalbmesser und Krümmungsmittelpunkt.

Fährt ein Wagen in „scharfer Biegung“ um die Ecke, so sagt man schon im gewöhnlichen Leben, daß die Bahn des Wagens eine stark gekrümmte gewesen sei. Gemeint ist hiermit, daß schon auf kleine Wegstrecken große Änderungen der Richtung kommen. An diese Vorstellung knüpfen sich folgende Definitionen und Maßbestimmungen:

Der Kreis (und nur dieser) hat an allen Stellen seines Umfanges gleiche Krümmung. Kreise von kleinem Halbmesser haben große Krümmung, große Kreise kleine Krümmung. Die Größe (Stärke) der Krümmung eines Kreises wird gemessen durch den reziproken Wert des Kreishalbmessers, und zwar wird als **Einheit der Krümmung die Krümmung des Einheitskreises** gewählt. Der Kreis von r cm Halbmesser hat $\frac{1}{r}$ Krümmungseinheiten.

Der alltäglichen Anschauung dürfte die Eigenschaft des Kreises, daß er die Linie von konstanter Krümmung sei, in der Regel sogar noch viel eher sich aufdrängen als die in der Geometrie gewöhnlich zugrunde gelegte Definition, daß der Kreis die ebene geschlossene Linie von konstantem Halbmesser sei. — Denken wir uns einen Kreis gezeichnet und den Mittelpunkt nochmals wieder unkenntlich gemacht, so können wir ihn finden, wenn wir zu zwei Bogenelementen des Kreises Normalen errichten (wie verhält sich dieses Verfahren zu dem, zu zwei beliebigen, nur nicht parallelen Sehnen die Streckensymmetralen zu ziehen?). Läßt man die beiden Bogenelemente immer näher aneinander rücken, so rücken auch ihre Normalen einander immer näher. Sie werden aber nicht parallel, sondern ihr Schnittpunkt bleibt immer der Kreismittelpunkt. Dieses Verfahren läßt sich nun auch übertragen auf beliebig anders gestaltete Linien, und wir definieren allgemein:

Krümmungsmittelpunkt einer beliebigen Kurve an einer beliebigen Stelle ist der Durchschnittspunkt zweier daselbst unendlich benachbarter Normalen.

Die Gerade läßt sich auffassen als Kreis vom Halbmesser $r = \infty$, und die Krümmung der Geraden ist überall gleich Null. — Dagegen läßt sich eine scharfe Ecke auffassen als Bogen eines Kreises vom Halbmesser Null, und ihre Krümmung ist unendlich groß.

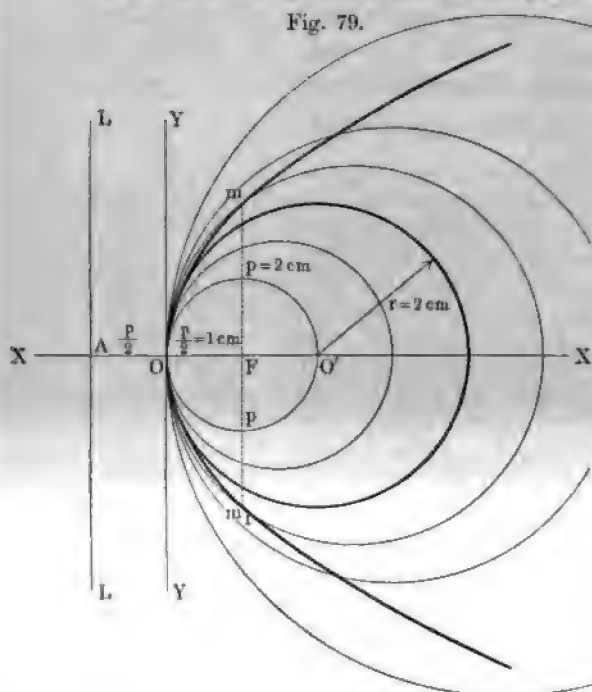
In krummlinigen, nicht kreisförmigen Bahnen ändert sich die Krümmung von Stelle zu Stelle (Fig. 13, S. 11). Für je ein Element einer beliebigen Kurve gibt es aber einen (und nur einen) Kreis von gleicher Krümmung, wie die des Elementes selbst: er heißt der **Krümmungskreis** dieses Elementes, sein Halbmesser der **Krümmungshalbmesser** und sein Mittelpunkt der **Krümmungsmittelpunkt**.

Schon das Verfahren praktischer Zeichner, Kurven beliebiger Gestalt aus Kreisbogen zusammenzusetzen, die dann bestimmte Mittelpunkte haben müssen, entspricht dieser Vorstellungsweise. In Fig. 97, S. 821, sind die Krümmungsmittelpunkte und Krümmungshalbmesser an mehreren Stellen der Wurfparabel angegeben. Insbesondere benutzten wir mehrmals (§ 13, ferner, indem wir uns einen Kugelspiegel durch einen parabolischen und umgekehrt ersetzt dachten) den Satz:

Der Krümmungshalbmesser im Scheitel einer Parabel gleich deren Parameter; $r_0 = p$.

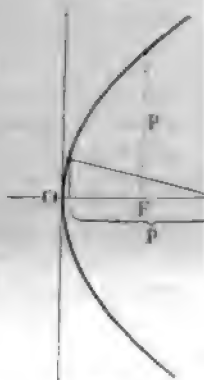
Zur Begründung: 1. Ist eine Parabel von dem gegebenen Parameter p möglichst genau gezeichnet und werden beliebig viele kleine und große Kreise gezeichnet, deren Mittelpunkte auf der Parabelachse liegen und die durch den Scheitel der Parabel gehen, so ist auf den ersten Blick zu sehen, daß die Kreise zu starke, die größten zu schwache Krümmung im Vergleich zum Parabelbogen am Scheitel haben. Es läßt sich so schon durch Ausprobieren ein Kreis finden, der sich der Parabel im Scheitel möglichst genau anseht und es wird sich zeigen, daß für ihn $r = p$ ist. — Fig. 79.

Fig. 79.



2. Beweis. I. Krümmungsmittelpunkt des Scheitel der Parabel in Abh. des allgemeinen

Fig. 80.



tion zu finden, beweisen wir, daß die Normale durch den Scheitel die geometrische Achse selbst ist. Da für alle Punkte der Parabel die Subnormale gleich

(S. 753), so ist auch für eine der Achse unendlich benachbarte Normale der Abstand zwischen dem Fußpunkt der Ordinate und dem Krümmungsmittelpunkt gleich. Im Vergleich zu dieser Strecke aber ist der Abstand zwischen dem Scheitel und Fußpunkt verschwindend klein, also ist auch $OC = p$. — Fig. 80.

3. Beweis. Die Scheitelgleichung des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$ geht in verschwindend kleine x über in $y^2 = 2rx$, und diese Gleichung stellt die Parabel $y^2 = 2px$ in der Nähe von O nur dann dar, wenn $r = p$ gesetzt wird. Dieser Gedanke läßt sich strenger gestalten in folgendem

4. Beweis. Lassen wir mit der Scheitelgleichung der Parabel $y^2 = 2px$ die Scheitelgleichung des Kreises $y^2 = 2rx - x^2$ von einstweilen beliebigen Radius r koexistieren, so daß $2rx - x^2 = 2px$, so haben die beiden Kurven jedenfalls den Wert $x = 0$ gemeinsam, entsprechend der Voraussetzung, daß beide Scheitelgleichungen sein sollen. Die zurückbleibende Gleichung $2r - x = 2p$

oder $x = 2(r - p)$ stellt die Abszisse eines zweiten gemeinsamen Punktes nur dann dar, wenn $r > p$; denn für $r < p$ würde x negativ, zu negativen Abszissen aber gehören (bei $p > 0$) keine reellen y -Werte der Parabel. Dann und nur dann, wenn $x = p$, fällt auch der zweite Punkt in den Scheitel. [Es ist dies arithmetisch ausgedrückt derselbe Umstand, auf den bei der in 1. beschriebenen Zeichnung der Zeichner achtet, indem er den anfänglich zu groß genommenen Kreis so lange verkleinert, bis der Durchschnittspunkt von Kreis und Parabel in den Scheitel rückt.]

Für alle Kegelschnitte gelten die Gleichungen $\rho \cos^2 \psi = N \dots (I)$, $N \cos \psi = p \dots (II)$, also $\rho \cos^3 \psi = p \dots (III)$, wo N die Normalenstrecke, ρ den Krümmungshalbmesser und ψ den Winkel zwischen ρ und r für je einen Punkt der Kurve, endlich p den Parameter (also für Ellipse und Hyperbel $p = \frac{b^2}{a}$) bedeutet (Anwendung in LA 47). LA 47.

Beweis (speziell für die Ellipse) zu Gl. (I): Zu zwei benachbarten Punkten M, M' der Ellipse (Fig. 81) seien die Leitstrahlen r, r', r_1, r_1' und ihre Winkelhalbierenden ρ, ρ' gezogen. Mit verschwindendem Bogen $\widehat{MM'}$ wird $\rho' = \rho$ der Krümmungshalbmesser, $\angle(r'\rho') = (r\rho) = \psi$. Die Winkel $(r r') = \alpha$, $(r_1 r_1') = \alpha_1$, $(\rho \rho') = \nu$ haben die Beziehung $\nu = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_1) \dots (1^*)$.

Da die Winkel in absoluten Einheiten (Anh. Nr. 2) die Bogen im Einheitskreis messen,

so ist $\nu \cdot \rho = \widehat{MM'}$, $\alpha \cdot r = \widehat{MM'} \cos \psi = \alpha_1 \cdot r_1$;

daher $\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \cos \psi \dots (2)$. Hier

ist $\frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} = \frac{2a}{rr_1}$ (wegen $r + r_1 = 2a$);

ferner ist $\frac{2a}{rr_1} = \frac{2 \cos \psi}{N}$ (wegen $\triangle FUF_1 \sim FMQ$, woraus $\frac{2a}{r} = \frac{F_1 U}{N}$ $= \frac{2r_1 \cos \psi}{N}$); daher $\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \psi}{N}$, also (Gl. I).

Beweis zu Gl. (II) vgl. Nr. 23, Ende (S. 760 u.).

Krümmung von Flächen. — Wie der Kreis die ebene Linie von konstanter Krümmung (über doppelt gekrümmte Linien s. u.), ist die Kugel eine Fläche von konstanter Krümmung. Die Definitionen der **Krümmung**, des **Krümmungshalbmessers**, **Krümmungsmittelpunktes** von kugeligen Flächen sind benutzt in §§ 103, 107.

) Erster Beweis für die Gl. (1): In Bezug auf eine beliebige feste Richtung sind die Richtungsunterschiede der Winkelhalbierenden die arithmetischen Mittel aus den Richtungsunterschieden der Schenkel 1 und 5, bzw. 2 und 6 (Fig. 82).

Zweiter Beweis aus Winkelsummen.

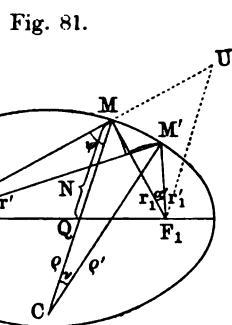


Fig. 81.

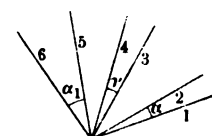


Fig. 82.

Auch die Fläche eines geraden Kreiszylinders ist nach populärer Auffassung gekrümmt, aber nicht wie die Kugel nach allen Seiten, sondern die Krümmung ist Null längs der Seitenlinie, sie ist am grössten normal zur Seitenlinie, d. h. längs des erzeugenden Kreises, und hat Zwischenwerte längs aller schiefen Schnitte entsprechend den an den Scheiteln der kleinen Achsen verschieden gekrümmten Ellipsen. — Nach GAUSS wird die Krümmung jeder Fläche in einem ihrer Punkte gemessen durch das Produkt der Krümmungen zweier Schnittlinien, die zu einander und zur Tangentialebene in jenem Punkte normal sind. Da nun in einem Zylinder die eine dieser Krümmungen Null ist, so ist nach diesem Gaussschen Maasse die Krümmung des ganzen Kreiszylinders überall Null, und ebenso auch Null bei jeder auf eine Ebene abwickelbaren Fläche (z. B. einer Kegelfläche). — Beim Erdellipsoid ist die Krümmung am stärksten am Äquator, am schwächsten an den Polen (wofür oft mißverständlich gesagt wird: Die Erde sei eine an den Polen abgeplattete Kugel). — Die Krümmung an Spitzen ist unendlich, insofern wir sie uns etwa durch eine Halbkugel von verschwindend kleinem Halbmesser gebildet denken. Hieraus Erklärung der sehr grossen elektrischen Dichte an Spitzen und Kanten geladener Leiter.

Doppelt gekrümmte Linien. Wird z. B. durch eine Kugel vom Radius R ein gerader Kreiszylinder vom Radius $r < R$ so gesteckt, daß die Zylinderachse durch den Kugelmittelpunkt geht, so ist die Schnittlinie ein Kreis. Geht aber die Zylinderachse nicht durch den Kugelmittelpunkt, so ist die Schnittlinie eine doppelt gekrümmte Linie, im Gegensatz zu denen alle in der Planimetrie betrachteten Kurven einfach gekrümmte Linien heißen.

Auch die ellipsenartigen Linien, in denen das Kegelpendel schwingt (§ 12. Versuch 8) wenn seine Amplituden nach zwei zueinander senkrechten Vertikalebenen ungleich sind, sind doppelt gekrümmte Linien. — Vgl. ferner Fig. 55. S. 743.

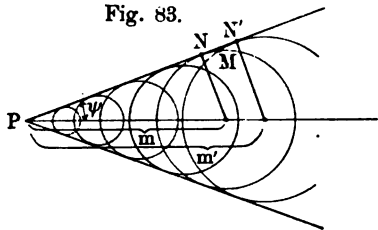
27. Einhüllende Linien und Flächen.

Zeichnet man z. B. sehr viele Kreise vom Halbmesser ϱ , deren Mittelpunkte alle auf dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser r liegen (Fig. 84), so vereinigen sich die dem Mittelpunkte des grossen Kreises am fernsten (und ebenso die am nächsten) liegenden Bogen der kleinen Kreise zu einem neuen Kreise vom Halbmesser $r + \varrho$ (bzw. $r - \varrho$). Man nennt diesen Kreis die **einhüllende Linie** der kleinen Kreise. — Ähnlich ergibt sich eine **einhüllende Fläche** an analog konstruierten Kugelflächen: Anwendung in Huygens Prinzip von den Elementarwellen (§ 68).

Eine andere Anwendung wird von dem Begriffe der einhüllenden Linie (bzw. Fläche) gemacht bei der Brennlinie eines Hohlspiegels, Fig. 352 (S. 327) und Fig. 77 (S. 762); desgleichen überhaupt bei der Bestimmung aller kausischen Linien und Flächen, vgl. S. 327 und LA 168.

Die rechnerische Bestimmung einer einhüllenden Kurve besteht darin, daß man den geometrischen Ort der Durchschnittspunkte je zweier unendlich benachbarter gegebener Kurven sucht; ein Beispiel hierfür bietet LA 18, zweiter Beweis. — Ein anderes Beispiel ist folgendes: Von einer Schar LA 18. Kreise liegen die Mittelpunkte auf der Abszissenachse und die Radien sind der jeweiligen Abszisse des Mittelpunktes proportional ($r = km$); zu zeigen, daß zwei Gerade durch den Anfangspunkt P die Einhüllenden dieser Kreise sind (Fig. 83). — Die Gleichung eines Kreises ist $(x - m)^2 + y^2 = r^2 = (km)^2 \dots (1)$ und die Gleichung seines Nachbarkreises $(x - m')^2 + y^2 = r_1^2 = (km')^2$. Daher $(m' - m)(2x - m - m') = k^2(m + m')(m - m')$ und $2x - m - m' = -k^2(m + m')$. Für $m' = m$ ergibt sich hieraus $2x - 2m = -2k^2m$ oder $x - m = -k^2m$ und hieraus $x = m(1 - k^2)$. Trägt man den Wert von $x - m$ in die Gl. (1) ein, so folgt $(k^2m)^2 + y^2 = k^2m^2$, also $y^2 = k^2m^2 - k^4m^2 = k^2m^2(1 - k^2)$, somit $y = \pm km \sqrt{1 - k^2}$. Eliminiert man aus den Ausdrücken für x, y die Größe m , so folgt $\frac{y}{x} = \pm \frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}$. Für $k = \sin \psi$ wird $\frac{y}{x} = \pm \tan \psi$.

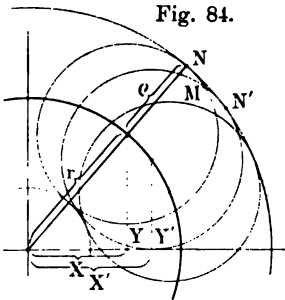
Fig. 83.



Vorstehende Aufgabe findet physikalische Anwendung in der Erklärung der bei den durch ein fahrendes Schiff zu seinen beiden Seiten aufgeworfenen Wellen, die bekanntlich einen um so spitzeren Winkel bilden, je schneller das Schiff fährt (nähere Erklärung aus Huygens' Prinzip).

Ein drittes Beispiel bildet die Erklärung der Kreis- (und Kugel-) Wellen nach Huygens' Prinzip (vgl. Fig. 262, S. 247); rechnerisch: Von einer Schar Kreise (Fig. 84) liegen die Mittelpunkte („sekundäre Erregungszentren“) auf dem Umfange eines anderen Kreises (dessen Mittelpunkt das „primäre Erregungszentrum“ ist). Dann ist für diesen „primären“ Kreis $X^2 + Y^2 = r^2 \dots (1)$, für jeden sekundären Kreis $(x - X)^2 + (y - Y)^2 = \rho^2 \dots (2)$. — Für einen unendlich benachbarten primären Kreis wird $X'^2 + Y'^2 = r^2 \dots (3)$ und $(x - X')^2 + (y - Y')^2 = \rho^2 \dots (4)$. Aus (1) und (2) folgt: $x^2 + y^2 - 2Xx - 2Yy = \rho^2 - r^2$, ebenso aus (3) und (4): $x^2 + y^2 - 2X'x - 2Y'y = \rho^2 - r^2$, also $2x(X' - X) + 2y(Y' - Y) = 0$ oder $x + y \cdot \frac{Y' - Y}{X' - X} = 0$. Hierin geht $\frac{Y' - Y}{X' - X} = -\frac{X' + X}{Y' + Y}$ für $X' = X$ über in $-\frac{X}{Y}$ (wie bekannt vom Richtungskoeffizienten des Kreises); somit $x - y \cdot \frac{X}{Y} = 0$ oder $xY - yX = 0 \dots (5)$. Nun sind aus (1), (2), (5) zu eliminieren X und Y ; am besten durch Quadrieren und Addieren der beiden Gleichungen $Xx + Yy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - \rho^2 + r^2)$ und (5). Dann wird $X^2(x^2 + y^2) + Y^2(x^2 + y^2) = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - \rho^2 + r^2)^2 = r^2 \cdot (x^2 + y^2)$ und hieraus $x^2 + y^2 = (r \pm \rho)^2$; das sind aber die Gleichungen der zum Kreise (1) in Abständen ρ gleichlaufenden Kreise, als äußere und innere Einhüllende der sekundären Kreise.

Fig. 84.



Anh. Nr.	Bezeichnung (Gegenstand)	Symbol (Formelzeichen)	Einheit (absolute, ganze)	gattung
Anh. 1	Unbenannte Zahl	$a, b, c \dots n \dots x, y, z$	Arithmetische (absolute, ganze) Einheit	0
Anh. 2	Winkel	$\alpha, \beta, \gamma; \varphi, \psi$	Winkelgrad, $1^\circ = \frac{1}{360}$ des vollen Winkels abs. W. E. = $57^\circ 17' 44,8''$	0
Größen im C-S-G-System (Centimeter-Sekunden-Gramm-System, abs. mechanisches Maßsystem).				
A. Größen der Phoronomie.				
Anh. 3 § 3	Raumstrecke Weg Weg in der 1. Sek. Länge (Pendel-, Wellen-) Höhe Abstand, Radius Leitstrahl (Radiusvektor) Krümmungshalbmesser Umfang Streckenkoordinaten Fläche; Volumen	s (spatium) u (Anfangsweg, Amplitude) l, λ h, H a, r, R r r (konstant), φ (variabel) u $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ b (Basis); r t (tempus) T n	Zentimeter, cm Meter, m Kilometer, km Millimeter, mm = $\frac{1}{1000}$ m Mikron, $\mu = \frac{1}{1000}$ mm $\frac{1}{1000}$ Mikron, $\mu\mu = 10^{-6}$ mm Erddweite } astronomische Lichtjahr } Längeneinheiten cm ² , m ² , mm ² ; cm ³ . . . Sekunde, sec Minute min; Stunde h; Tag d; Jahr Umläufe (Schwingungen) per Sekunde Cel (d. h. Geschwindigkeit von 1 cm per sec)	cm cm ² ; cm ³ sec sec ⁻¹ cm sec ⁻¹
Anh. 26	Zeltstrecke (kurz: Zeit) Umlaufzeit, Schwingungs- dauer	t (tempus) T n	Mittlerestropisches Jahr; Tag mittlerer Sonnenzeit (bürgerlicher Tag) = 1,002 737 9 Sterntage Wegen $n = \frac{1}{T}$ ist Dim n nicht gleich der einer Zahl (d. h. nicht 0)	
§§ 3, 181 §§ 12, 22, 187	Umlaufzahl, Tourenzahl, Schwingungszahl	n	Zum Vorschlag des Na- mens Cel vgl. S. 12, Anm.	
§ 4	Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit)	c (celeritas, constant) v (velocitas, veränderlich variabel)		

28. Trajektorien.

Ein System von Niveaulinien mit dem zu ihm gehörigen System von Linien (Tafel I und II, a—d bei S. 108) gibt ein Beispiel zu dem Begriffe

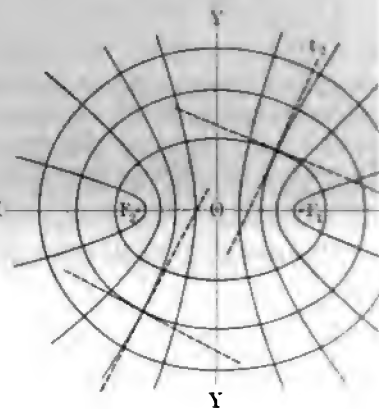
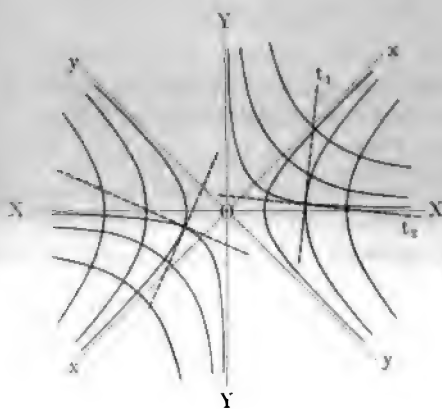
orthogonaler Trajektorien: So nennt man zwei Systeme S_1 und S_2 von Kurven, in welchen je eine Kurve des einen Systems alle Kurven des anderen unter rechten Winkeln durchkreuzt.

Beispiele: 1. Es seien gegeben die Systeme der gleichseitigen Hyperbeln (Fig. 85) von den Gleichungen $xy = C_1$ und $x^2 - y^2 = C_2$, wo die Konstanten C_1 und C_2 , indem ihnen immer andere und andere spezielle Werte werden, auch immer anderen speziellen Hyperbeln angehören. Es sind die Richtungskoeffizienten A_1 und A_2 für die Hyperbeln

$$A_1 = -\frac{C_1}{x^2}; \quad A_2 = +\frac{x}{y}. \quad \text{Daher } A_1 A_2 = -\frac{C_1}{x^2} \cdot \frac{x}{y} = -\frac{C_1}{xy} = -1.$$

Fig. 85.

Fig. 86.



2. Es seien gegeben die Systeme konfokaler Ellipsen und Hyperbeln (Fig. 86) solcher, die bei beliebigen Haupt- und Nebenachsen a, b, α, β dieselben Punkte F_1 und F_2 und die gemeinsame Excentricität $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$ haben, weshalb $a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2$ oder $a^2 - \alpha^2 = b^2 + \beta^2$.

Es sind dann die Richtungskoeffizienten $A_E = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$, $A_H = +\frac{b^2 y}{a^2 x}$ und $A_E A_H = -\frac{b^2 \beta^2}{a^2 \alpha^2} \cdot \frac{x^2}{y^2}$, wo sich die x^2, y^2 des Schnittpunktes erge-

$$\left. \begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1, \\ \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} &= 1. \end{aligned} \right\} \quad \text{nämlich} \quad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{a^2 \alpha^2 (b^2 + \beta^2)}{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2} \\ y^2 &= \frac{b^2 \beta^2 (a^2 - \alpha^2)}{a^2 \beta^2 + b^2 \alpha^2} \end{aligned} \right\}, \quad \text{also} \quad \frac{x^2}{y^2} = \frac{a^2 \alpha^2 (b^2 + \beta^2)}{b^2 \beta^2 (a^2 - \alpha^2)}$$

$$\text{Daher wird } A_E A_H = -\frac{b^2 \beta^2}{a^2 \alpha^2} \cdot \frac{a^2 \alpha^2 (b^2 + \beta^2)}{b^2 \beta^2 (a^2 - \alpha^2)} = -\frac{b^2 + \beta^2}{a^2 - \alpha^2} = -1.$$

Anh. Nr.	Größenbezeichnung (Verknüpfung)	Symbol	Einheit	gattung
Anh. 1	Unbenannte Zahl	$a, b, c \dots n \dots x, y, z$	(Arithmetische (absolute, ganze) Einheit)	0
Anh. 2	Winkel	$\alpha, \beta, \gamma; \varphi, \psi$	Winkelgrad, $1^\circ = \frac{1}{360}$ des vollen Winkels abs. W. E. = $57^\circ 17' 44,8''$	0
Größen im C-S-G-System (Centimeter-Sekunden-Gramm-System, abs. mechanisches Maßsystem).				
A. Größen der Phonomie.				
Anh. 3 § 3	Raumstrecke Weg Weg in der 1. Sek. Länge (Pendel-, Wellen-) Höhe Abstand, Radius Leitstrahl Radiusvektor	s (spatium) u (Anfangsweg, Amplitude) l, λ h, H a, r, R r	Zentimeter, cm Meter, m Kilometer, km Millimeter, mm = $\frac{1}{1000}$ m Mikron, $\mu = \frac{1}{1000}$ mm $\frac{1}{1000}$ Mikron, $\mu\mu = 10^{-6}$ mm Erdweite } astronomische Lichtjahr } Längeneinheiten	cm
Anh. 26	Krümmungshalbmesser Umfang Streckenkoordinaten Fläche; Volumen	r (konstant), ϱ (variabel) u $x, y, z; \xi, \eta, \zeta$ b (Basis); r		
§ 3, 181	Zeitstrecke (kurz: Zeit)	t (tempus)	cm ³ , m ³ , mm ³ ; cm ³ . . . Sekunde, sec	cm ³ ; cm ³
§ 12, 22, 187	Umlaufzeit, Schwingungsdauer	γ'	Minute min; Stunde h; Tag d; Jahr	sec
§ 12, 31 188	Umlaufzahl, Tourenzahl, Schwingungszahl	"	Umläufe (Schwingungen) per Sekunde	sec ⁻¹
§ 4	Geschwindigkeit (Bahngeschwindigkeit)	c (celeritas, constant) v (velocitas, veränderlich variabel)	Cel (d. h. Geschwindigkeit von 1 cm per sec)	cm sec ⁻¹

1 Erdmeridianquadrant
= 10000859 m
≠ 10⁴ km = 10⁷ m
= 10⁴ cm

1 geogr. Meile = 111 km
1 Erdweite = 2.10⁷ geogr.
graphische Meilen
1 Lichtjahr ≠
≠ 6.10⁸ Erdweiten
≠ 9,5.10¹² km

Mittlere tropisches Jahr;
Tag mittlerer Sonnenzeit
(bürgerlicher Tag)
= 1,002 737 9 Sternstage

Wegen $n = \frac{1}{T}$ ist Dim n
nicht gleich der einer
Zahl (d. h. nicht 0)

Zum Vorschlag des Namens
Cel vgl. S. 12, Anm.

Vgl. § bzw. Anh. Nr.	Name der Größengattung	Zeichen (und Merkwort) der Maßzahl	Name und Zeichen der Maßeinheit	Dimension der Größengattung	Anmerkung
§ 12, 31 1. A 13	Winkelgeschwindigkeit Flächengeschwindigkeit	α (konstant), η (variabel) \bar{F}		sec^{-1} $\text{cm}^2 \text{sec}^{-1}$	
§ 5, 6	Beschleunigung	b (Beschl., bleibend) w (Wachsen, wechselnd)	Accel (d. h. Geschwindigkeits- zuwachs von 1 Cel per sec, d. h. von 1 cm sec ⁻¹ per sec)	cm sec^{-2}	Vorschlag des Namens Accel vgl. S. 15, Anm. Über die Zeichen g (Schwerebeschleunig.), g (Massengramm), g (Kraftgramm), vgl. S. 62, Anm.
§ 2, 6, 31 § 13	Schwerebeschleunigung Normal (Centripetal)- beschleunigung	g , g (gravitas) h_{\perp} (bleibend, konstant) w_{\perp} (wechselnd, variabel)			
§ 31	Winkelbeschleunigung	β (konstant), ω (variabel)		sec^{-2}	
Bz. Größen der Dynamik im engeren Sinn.					
§ 16 Anh. 5	Masse	m , M	Gramm (Massengramm), g	g	1 g \neq der Masse eines cm ³ Wasser bei 4° C
§ 16	Kraft	k (Kraft, konstant) f (force, veränderlich)	Dyn, Megadyn = 10 ⁶ Dyn	$\text{cm sec}^{-2} \text{g}$	Der manchmal gebrauch- ten Bezeichnung „die Dyne“ ist „das Dyn“ vor- zuziehen wegen der Kürze und wegen der Analogie zu „das Erg“.
§ 14, 16	Beschleunigende Kraft; Spannung, Druck, Zug als statische Wirkung d. Kraft- Gewicht	p (pondus) d , D s , S	Gramm per cm ² Dyn per cm ²	$\text{cm}^{-1} \text{g}$ $\text{cm}^{-2} \text{sec}^{-2} \text{g}$	
§ 16, 41	Dichte (spezifische Masse) Spezifisches Gewicht relatives spezifisches Ge- wicht	d = σ		0	Verhältnis zur Dichte (zum spez. Gew.) des Wassers, der Luft.
§ 19 § 21	Centripetalkraft und Centrifugalkraft Gravitationskonstante	k_{\perp} (konstant) f (veränderlich) γ	Dyn	$\text{cm sec}^{-2} \text{g}$ $\text{cm}^3 \text{sec}^{-2} \text{g}^{-1}$	Dimensionsgleich mit mechanischer Arbeit

§	Lebendige Kraft (Energie der Bewegung, kinetische Energie)	L	Joule = 10^7 Erg Wattstunde = 3600 Joule Sekundenenergie Watt = Joule per sec = 10^7 Erg per sec	cm ² sec ⁻² g
§ 22	Leistung, Effekt (Arbeitsstärke, Zeitarbeit)			cm ² sec ⁻³ g
§ 24	Gravitationspotential	V	Erg per g	cm ² sec ⁻²
Dynamische und energetische Größen im irdischen (terrestrischen) Maßsystem.				
§ 16	Kraft, Gewicht	p (pondus)	Gramm (Kraftgramm), g Kilogramm (Kraftkilogramm), kg	1 g (Kraftgramm) = 981 Dyn 1 kg (Kraftkilogramm) = 981000 Dyn $\neq 10^3$ Dyn
§ 44	Flächendruck		Atmosphäre at	1 at = 1,0336 kg per cm ²
§ 22	Arbeit	A	Meterkilogramm, mkg Pferdestärke PS = 75 mkg per sec = 736 Watt	1 mkg = 981 · 10 ⁴ $\neq 10^3$ Erg $\neq 10$ Joule
§ 22	Leistung		Horsepower HP = 746 Watt	
Thermische und kalorische Größen im C-S-G-System und im irdischen System.				
§ 71	Wärmegrad (Temperatur)	t° C (sprich t Centigrad) T° absolute Temperatur ($T = 273^\circ + t$)	Centigrad (= $\frac{1}{100}$ des Fundamentaltabstandes ES)	0
§§ 72, 82	Wärmemenge	Q	cal (Grammkalorie, kleinekalorie) Cal (Kilogrammkalorie, große kalorie)	Einheit (Benennung) und Dimension von Wärme- menge ist gleich der von Arbeit und Energie. — 1 Cal = 424 mkg
§ 72	Spezifische Wärme	s	cal per g; Cal per kg	cm ² sec ⁻²
Optische Größen im beleuchtungstechnischen System.				
§ 117	Leuchtkraft (Lichtstärke)	i, I	Hefnerkerze HK	1 HK = 1,2 NK (Normalkerze)
§ 117	Lichtmenge	Q = $4\pi \cdot I \cdot t$	Lichtmengeneinheit, theoretisch: Erg per sec und per cm ² ; praktisch: Die von 1 HK per sec in die Einheit des räumlichen Winkels gestrahlte Lichtmenge	Lichtstärke \times Zeit
§ 117	Beleuchtungsstärke (Beleuchtung, Erhellung)		Lux Lx	

Vrgl. § . . bzw. Anh. Nr.	Name der Größengattung	Zeichen der Maßzahl	Name, Definition, Zeichen, l	
			elektrostatischen C-S-G-Sys	
§ 135	Ladungsmenge (Elektrizitätsmenge)	e, E	Ladungseinheit (st. LE) ist die Ladung, die auf eine ihr gleiche in 1 cm Abstand mit 1 Dyn abstoßend wirkt.	cm ²
§ 143	Polstärke (Menge des freien Magnetismus)	μ, m		cm
§§ 136, 149	El. Potential und el. Potentialdifferenz (elektromotorische Kraft, EMK, „Spannung“ im elektrotechnischen Sinn)	V, v	Einheit der Potentialdifferenz (st. PE) kommt zwei Stellen eines elektrischen Feldes zu, wenn die Verschiebung von 1 st. LE von einer zur andern 1 Erg erfordert.	cm ²
§ 139	Kapazität	C, c	Einheit der Kapazität (st. CE) hat ein Leiter, dessen Potential durch Zuführung von 1 st. LE einen Zuwachs um 1 st. PE erfährt	
§§ 140, 148	Stromstärke	i, I	Die Stromstärkeneinheit (st. SE) hat ein Strom, in dem 1 st. LE per sec durch den Querschnitt des Leiters geht.	cm ²
§ 149	Widerstand	w, W		cm

Physikalische Größen

rechnungszahlen der Maßzahlen, bzw. der Maßeinheiten im

elektromagn. C-S-G-System		elektromagnetischen technischen System	
Pol oder Poleinheit ist die eines Pols, f einen ihm in 1 cm Abstand 1 Dyn abt wirkt.	$\text{cm}^{1/2} \text{g}^{1/2}$	1 Coulomb = $3 \cdot 10^9$ st. LE = $\frac{1}{10}$ m. LE	$(10^9 \text{ cm})^{1/2} (10^{-11} \text{ g})^{1/2}$ = $\frac{1}{10} \text{ cm}^{1/2} \text{g}^{1/2}$
	$\text{cm}^{3/2} \text{sec}^{-1} \text{g}^{1/2}$		$(10^9 \text{ cm})^{3/2} \text{sec}^{-1} (10^{-11} \text{ g})^{1/2}$ = $10^9 \text{ cm}^{3/2} \text{sec}^{-1} \text{g}^{1/2}$
	$\text{cm}^{3/2} \text{sec}^{-2} \text{g}^{1/2}$	1 Volt = $\frac{1}{300}$ st. PE 10^9 m. PE	$(10^9 \text{ cm})^{3/2} \text{sec}^{-2} (10^{-11} \text{ g})^{1/2}$ = $10^9 \text{ cm}^{3/2} \text{sec}^{-2} \text{g}^{1/2}$
mstärkenein- (SE) hat ein der den Bo- cm im Ein- eis durchflie- auf den Ein- l im Kreis- unkt mit 1 irkt.	$\text{cm}^{-1} \text{sec}^2$	1 Farad = $9 \cdot 10^{11}$ st. CE = 10^{-9} m. CE	$(10^9 \text{ cm})^{-1} \text{sec}^2$ = $10^{-9} \text{ cm}^{-1} \text{sec}^2$
	$\text{cm}^{1/2} \text{sec}^{-1} \text{g}^{1/2}$	1 Ampère = $3 \cdot 10^9$ st. SE = $\frac{1}{10}$ m. SE	$(10^9 \text{ cm})^{1/2} \text{sec}^{-1} (10^{-11} \text{ g})^{1/2}$ = $\frac{1}{10} \text{ cm}^{1/2} \text{sec}^{-1} \text{g}^{1/2}$
	cm sec^{-1}	1 Ohm = $\frac{1}{9 \cdot 10^{11}}$ st. WE = 10^9 m. WE 1 Ohm ist der Widerstand eines Leiters, in dem ein Strom von 1 Amp. die Leistung von 1 Watt verrichtet.	$(10^9 \text{ cm}) \text{sec}^{-1}$ = 10^9 cm sec^{-1}

B. Zusätze aus der Logik und Psychologie.

30. Physische und psychische Erscheinungen.

Leuchten, Tönen, einen Blitz, einen Knall, die Bewegungen einer Maschine, das Wachsen und Welken einer Pflanze, das Zucken eines Muskels, die Leistungen unserer Sprachwerkzeuge... nennen wir **physische Erscheinungen**. — Freude, Trauer, einen Wunsch, einen Entschluß, Zweifeln, Glauben, Überzeugtsein, Sich erinnern, Etwas erwarten... nennen wir **psychische Erscheinungen**.

Die psychischen Erscheinungen wieder gliedern sich in solche des **Denkens** (Vorstellen, Urteilen) und des **Gemütes** (Fühlen, Begehren). Wie die physischen Erscheinungen den Gegenstand der Naturwissenschaften, machen die psychischen Erscheinungen den der Geisteswissenschaften aus. In besonders enger Beziehung zu dem Psychischen stehen alle **philosophischen Disziplinen**; nämlich die Logik als Lehre vom richtigen Denken, die Ethik als Lehre vom guten Wollen u. s. f. Die Psychologie ist die grundlegende unter allen Wissenschaften von psychischen Tatsachen, sowie die Physik unter allen Wissenschaften von physischen Tatsachen. —

Trotz der tiefgehenden Verschiedenheit ihrer Gegenstände fehlt es doch nicht an Berührungspunkten zwischen Physik und Philosophie. — Eine solche Beziehung besteht vor allem darin, daß auch das Denken des Physikers über physische Erscheinungen (z. B. über das Fallen eines Steines) selbst wieder eine freilich sehr spezielle Art psychischer Erscheinungen darstellt. Da die Physik unter allen Erfahrungswissenschaften den verhältnismäßig einfachsten Gegenstand hat, so ist auch die logische (und erkenntnistheoretische) Reflexion auf die vom Physiker praktisch ausgeübten Denktätigkeiten vorbildlich für die Erkenntnistheorie ~~was~~ immer für einer Erfahrungswissenschaft.

Ein anderes Beispiel im großen für das Ineinandergreifen von Natur- und Geisteswissenschaften, nämlich von Physik und Physiologie einerseits, Psychologie andererseits, stellt das Verhältnis der physikalischen, der physiologischen und der psychologischen Optik dar (und ähnlich bei der Akustik); vgl. Nr. 38 und 42 bis 44. — Endlich über die Grenze zwischen Physik und Philosophie der Physik (insbesondere auch zwischen Physik und Philosophie) in Nr. 45.

Im folgenden seien nur die einfachsten und der Erkenntnispraxis des Physikers am frühesten sich aufdrängenden Hilfsbegriffe und Sätze aus der Logik und Psychologie¹⁾ zusammengestellt.

a) Aus der Logik (und Erkenntnistheorie).

31. Methode der Physik: Die einer Erfahrungs- (empirischen) Wissenschaft.

Niemand wüßte, daß Körper (Steine, Regentropfen, Baumblätter, Menschen) unter bestimmten Umständen fallen, wenn er es nicht gesehen (getastet —

¹⁾ Wenn im folgenden einigemal L§ . . und Ps§ . . citiert wird, so bezieht sich dies auf HÖFLEB, Grundlehren der Logik und der Psychologie (Dritte Auflage 1903).

oder als von anderen gesehen ... berichten gehört), kurz und allgemein: **erfahren** hätte. Und hat er es von noch so vielen Körpern und noch so oft gesehen oder sonstwie erfahren, so wird es zwar immer weniger wahrscheinlich, daß ein anderer Körper an anderem Ort und zu anderer Zeit unter den gleichen Umständen einmal nicht falle; doch lassen auch noch so viele Erfahrungen einer Art die Möglichkeit (genauer: eine immer kleiner werdende Wahrscheinlichkeit) einer neuartigen Erfahrung für die nämliche Gattung von Erscheinungen offen.

Ganz anders, wenn z. B. der Satz von der Winkelsumme im Dreieck an einem Dreieck bewiesen ist; hier ist uns schon nach dem einmaligen Beweis der Satz völlig gewiß (nicht nur wahrscheinlich), und das Durchführen je eines besonderen Beweises an Dreiecken von anderer GröÙe, Lage, Farbe u. dgl. erscheint uns mit Recht überflüssig.

Können wir nun nicht ähnlich wie die Geometrie durch bloßes Schließen, **Deduzieren** aus unmittelbar einleuchtenden Sätzen (Axiomen), auch „beweisen“, daß alle freien Körper fallen „müssen“? Nein. Denn wer z. B. so schlosse: „Es gibt eine allgemeine Schwerkraft, mittels dieser Kraft zieht die Erde alle Körper an u. s. w.“ hätte übersehen, daß er von dem Bestehen einer solchen „Schwerkraft“ ja selbst nur aus seinen Erfahrungen über das Fallen der Körper etwas wissen kann. Und ebenso bei allen übrigen vermeintlich rein deduktiven Behandlungen der Erscheinungen des freien Falles oder was immer sonst für einer Naturerscheinung. —

Ein klassisches Beispiel für diejenige Methode, die zur Erforschung der Naturerscheinungen und auch speziell der physikalischen Erscheinungen unentbehrlich ist, die man als **induktive Methode** oder kurz als **Induktion** bezeichnet, hat GALILEI in der Entdeckung seiner Fallgesetze $v = gt$ und $s = \frac{g}{2}t^2$ gegeben.

Doch gibt eben der reich gegliederte Gedankengang, durch den GALILEI als erster unter allen Sterblichen zur richtigen Erkenntnis dieser Gesetze gelangt ist, auch ein deutliches Beispiel dafür, daß innerhalb des induktiven Denkens auch für das deduktive noch reichlich Raum bleibt.

Als im engsten Sinn **induktiv** bezeichnet man jedes **Schließen aus einzelnen Erfahrungen auf allgemeinere Sätze**. Dieser Schluss (insoweit nicht andere Gedanken die „Induktion stützen“) ist nie ein Gewißheits-, sondern immer nur ein Wahrscheinlichkeitschluss; unter übrigens gleichen Umständen wird die Wahrscheinlichkeit um so größer, eine je größere Zahl induzierender Fälle dem Schluss zugrunde gelegt wird.

Z. B. Hätte jemand durch Versuche an einer entsprechend geneigten schiefen Ebene für die vierlei Fallzeiten von 1, 2, 3, 4 sec die Fallstrecken von 5, 20, 45, 80 cm durch direkte Messung gefunden, so könnte er aus diesen vier Einzelversuchen auf keinerlei Art mit Gewißheit schließen, welche Fallstrecken den Fallzeiten von 5, 6, 7 ... sec entsprechen würden. Aber auch schon jene vier Zahlen für sich legen die Frage nahe, ob sie sich nicht unter ein allgemeines „Gesetz“ bringen lassen. Da nun $5 = 5 \cdot 1^2$, $20 = 5 \cdot 2^2$, $45 = 5 \cdot 3^2$, $80 = 5 \cdot 4^2$, so ist $s = 5t^2$ ein solches allgemeines Gesetz¹⁾. Wir können dann durch Einsetzen

¹⁾ Daß sich jene vier Zahlenwerte 5, 20, 45, 80 auch noch unter beliebig viele andere allgemeine Gesetze einfügen ließen, wird aus folgendem geometrischen Gleichnis erhellen:

(den dynamischen Bestimmungstücken, die ihrerseits erst aus den erfahrungsmäßigen Gesetzen erschlossen werden können, vgl. Nr. 35). — Allgemein:

Alle Erklärung setzt irgend ein Maß von Beschreibung voraus; denn wer erklären will, warum etwas ist, muß vorher wissen, daß (wie, was) es überhaupt ist. — Wenn aber auch in diesem Sinne die beschreibenden Disziplinen für die erklärenden eine unentbehrliche Grundlage bilden, so findet doch nirgends das Erkennen in der bloßen Beschreibung (Konstatierung) von Tatsachen wirkliche Befriedigung, sondern erst in dem Begreifen, Verstehen ihrer Gründe, d. i. in der Erklärung der Tatsachen.

Der typische Unterschied des Beschreibens und Erklärens nimmt im gewöhnlichen und wissenschaftlichen Denken mannigfache besondere Gestaltungen an, auf deren feinere Vergleichung bei jeder wissenschaftlichen Tätigkeit wohl zu achten nicht genug empfohlen werden kann. Ausdrücklich liegt er zugrunde der Gegenüberstellung von beschreibenden und erklärenden Naturwissenschaften. Aber auch innerhalb einer und derselben Wissenschaft (ja einer einzelnen Untersuchung) teilt sich die Arbeit jenem Unterschiede gemäß mehr oder weniger scharf; so in der Mechanik des Punktes die Phoronomie (§§ 2—13) und Dynamik im weiteren Sinne (§§ 15—24).

33. Beobachtung. Experiment.

Die gelegentliche Wahrnehmung von Naturerscheinungen, die auch den Nichtphysiker alsbald mit zahlreichen Kenntnissen von physikalischen Tatsachen und Beziehungen versorgt, muß zur **Beobachtung** der Tatsachen gesteigert werden, wenn diese nach induktiver Methode erforscht werden sollen. Über die bloße Wahrnehmung geht die Beobachtung dadurch hinaus, daß sie mit absichtlicher Aufmerksamkeit erfolgt; überdies aber erfafst sie das Wahrnehmbare nicht bloß als ein Ganzes, sondern möglichst in seine Teile und Merkmale analysiert. — Z. B. Eine Sternschnuppe mag dem Nichtastronomen ebenso sehr auffallen wie dem Astronomen; der letztere aber begnügt sich nicht mit dem Anblick, sondern fragt sich sofort, bei welchem Sternbild die Sternschnuppe sichtbar geworden, bei welchem sie verschwunden ist, wie lange etwa sie sichtbar geblieben war u. s. w. — Die astronomischen Erscheinungen geben ein Beispiel dafür, daß manche Naturwissenschaft ganz oder zum größeren Teil auf bloße Beobachtung angewiesen ist.

Wo immer es möglich ist, beschränkt sich der Naturforscher nicht auf das bloße Beobachten der Erscheinungen, sondern er ruft sie behufs eingehenderer Beobachtung selbst hervor — er stellt **Versuche, Experimente** an. Dabei hat das Experiment namentlich den Vorteil, die notwendigen Antezedenzen und Folgen (Nr. 35) gegebener Erscheinungen: 1. in viel mannigfaltigerer Weise, 2. unter weitergehender Sonderung der Umstände, 3. in beliebig häufiger Wiederholung festzustellen.

Nicht selten ist ein Fortschritt der Erkenntnis nicht so sehr dem wirklichen Durchführen eines Versuches zu verdanken, als schon einem sachgemäß ersonnenen

II. Methode des Unterschiedes: Wenn ein Fall einer zu erscheinenden Erscheinung alle Umstände bis auf einen gemeinsam hat mit einem Fall, in dem die Erscheinung nicht eintritt, so ist dieser unterscheidende Umstand die Ursache oder Wirkung jener Erscheinung.

Beispiele: Wenn mehrere zusammengesetzte Medikamente, die nur in einem Bestandteil übereinstimmen, gleiche Heilwirkung haben, so schließen wir nach I., daß jener Bestandteil der wirksame gewesen sei; dagegen dasselbe nach II., wenn die Wirkung gerade immer nur dann ausbleibt, sobald wir jenen Bestandteil weglassen. — Wenn elektrische Apparate scheinbar regellos versagen, wird man sie sorgfältig abtrocknen, abstauben oder (nach neuestem Vorschlag) abwaschen; das beweist der Erfolg bzw. Mißerfolg je einer dieser Maßregeln?

Als Abarten von I. und II. gibt MILL ferner an:

III. Die Methode der Rückstände. Z. B. Ebbe und Flut zeigen sich der Hauptsache nach abhängig von den Stellungen des Mondes zur Erde; die Abweichungen der Spring- und Nippfluten von der durchschnittlichen Flutgrößen lassen überdies noch einen schwächeren Miteinfluss der Sonne erkennen.

IV. Die Methode der Begleitveränderungen. Z. B. Daß sich ein Körper mit der Verzögerung Null bewegen würde, wenn die Reibung streng Null wäre, läßt sich nicht direkt durch Versuche zeigen; deshalb bleibt man darauf angewiesen zu beobachten, daß größeren Werten der Reibung größere Verzögerungen, kleineren kleinere entsprechen. —

Im ganzen ist die vornehmste Methode des Experiments die des Unterschiedes (II. und IV.), wogegen man sich für bloße Beobachtung meist mit der der Übereinstimmung (I. und III.) begnügen muß.

Experimentum crucis. So nannte Bacon entscheidende Experimente, die (wenn man wie an einem Kreuzweg steht) über die Wahl des richtigen Weges entscheiden („translatō vocabulo a crucibus quae erecta in bivio indicant et signant eorum separationes“). Diesen Ausdruck übernahm dann Newton für dasjenige seiner Experimente (zwei Prismen mit parallelen, nicht mit „gekreuzten“ Kanten), um er eine besondere Überzeugungskraft dafür beimaß, daß die Farben des Spektrums nicht wieder so zusammengesetzt und zerlegbar seien wie das Sonnenlicht.

34. Begriff eines wissenschaftlichen Gesetzes.

Das unmittelbare Ergebnis einer einzelnen Beobachtung ist immer nur die Feststellung einer einzelnen Tatsache. Aber nicht dem Ergebnis einer solchen und auch nicht der bloßen Summe von Ergebnissen einer Reihe von Beobachtungen pflegt sich das wissenschaftliche Interesse zuzuwenden, sondern dem in einer Reihe von Einzeltatsachen sich kundgebenden „Gesetze“.

Der ursprüngliche Sinn des Wortes Gesetz war der bekannte einer von Menschen eingesetzten Rechtsbestimmung. Mit diesem praktischen Sinne hat der übertragene theoretische, in dem von Naturgesetzen gesprochen wird, nur so viel gemeinsam, daß wir uns die Naturgesetze als ebenso allgemein gültig und ausnahmslos denken, wie es die richtig gehandhabten Rechtsgesetze sind oder wenigstens — sein sollen. —

Für den von allen solchen Analogien überhaupt unabhängigen Sinn, in dem man von Naturgesetzen und speziell von physikalischen Gesetzen spricht, bieten

Darstellung arithmetischer, geometrischer, physikalischer . . „Gleichungen“ zwischen einer abhängig und einer oder mehreren unabhängigen: $y = f(x)$, $z = F(x, y)$. . . Darstellung durch Kurven

Eine tiefer gehende Frage ist die folgende: Gehört das Aufgesetzte noch zur Beschreibung oder schon zur Erklärung? Unstreitig sind z. B. die Galileischen Fallgesetze $s = at^2$ und $v = gt$ in ihrem unmittelbaren Inhalte nach nur beschreibender Art — sie werden, ohne daß Galilei an die Ursache der Fallbewegung dachte, Gleichwohl ist nicht zu verkennen, daß man jene Beziehungen nennen würde, wenn man nicht mehr oder weniger bestimmt die in jenen Formeln zum Ausdruck kommende Regelmäßigkeit bestimmten Grund habe und aus ihm oder dem Zusammenwirken der Kräfte erklärt werden könnte. Wirklich begreifen wir heute ja $v = gt$, aus der Konstanz der Schwerkraft innerhalb mäßiger Geschwindigkeiten wissen aber auch, daß jenes Gesetz nicht genau gelten kann und das wahre Geschwindigkeitsgesetz frei fallender Körper darbietet. Gravitationsgesetz die Schwere von der Erdoberfläche an nach v nimmt (wonach vielmehr jenes Geschwindigkeitsgesetz die Fallgeschwindigkeit sich schließt, wie höhere Rechnung zeigt).

Vergleichen wir mit solchen eigentlichen Gesetzen bloße Erfahrungen, daß die Krebse in den Monaten ohne Regen am besten schmecken, oder daß Monate mit 31 Tagen in bekannter Weise aus dem Abzählen der Tage knöcheln im Gedächtnisse behalten lassen), so bestätigt es sich in der That, daß wir in letzteren Regeln eben nur Regelmäßigkeit oder Ordnung vor uns haben, und daß somit die hier vermifste Notwendigkeit jene ist, was uns dort an den wirklichen Gesetzen als das eigentliche Gesetz Einsicht vorschwebt und zur Forschung anlockt.

Im Vergleich zu diesem Ziele des Aufdeckens von Notwendigkeit in der Natur („Naturnotwendigkeiten“, „Naturzusammenhänge“) suchen der gesetzmäßigen Regelmäßigkeiten selbst nur ein Mittel ist für das Auffinden des Gesetzes wieder die Induktion, und das Experiment bloß ein Mittel. — Wo es dem Ge

abwarten, daß uns die Einzeltatsachen sogar bei noch so gehäuften Beobachtungen oder zahlreichen, aber planlosen Experimenten etwas von den wirklichen Gesetzen verraten werde, nur eine verschwindende Wahrscheinlichkeit für sich hat. Wir verpönen das bloß zufällige Herumtappen in den Erkenntnismitteln eines Naturforschers eben deshalb, weil wir auch in seinen Erkenntniszielen mehr als jene bloß zufälligen Regeln (wie die von den Krebsen und Fingerknöcheln) erlangen. — Zur Beleuchtung dieser tiefstgehenden Beziehungen zwischen Forscherätigkeit (Erkenntnisakt) und Forschungsziel (Erkenntnisgegenstand) greift KANT (in der Vorrede zur zweiten Auflage der „Kritik der reinen Vernunft“) auf die klassischen Beispiele der Naturwissenschaft zurück: „Als GALILEI seine Kugeln die schiefe Fläche mit einer von ihm selbst gewählten Schwere herabrollen, oder TORRICELLI die Luft ein Gewicht, was er sich zum voraus dem einer ihm bekannten Wassersäule gleich gedacht hatte, tragen ließe, oder in noch späterer Zeit STAHL Metalle in Kalk und diesen wiederum in Metall verwandelte, indem er ihm etwas entzog und wiedergab, so ging allen Naturforschern ein Licht auf. Sie begriffen, daß die Vernunft nur das einsieht, was sie selbst nach ihrem Entwurfe hervorbringt, daß sie mit Prinzipien ihrer Urteile nach beständigen Gesetzen vorangehen und die Natur nötigen müsse, auf ihre Fragen zu antworten, nicht aber sich gleichsam von ihr allein am Leitbunde gängeln lassen müsse; denn sonst hängen zufällige, nach keinem vorher entworfenen Plan gemachte Beobachtungen gar nicht an einem notwendigen Gesetze zusammen, welches doch die Vernunft sucht und bedarf. Die Vernunft muß mit ihren Prinzipien, nach denen allein überkommene Erscheinungen für Gesetze gelten können, in einer Hand, und mit dem Experiment, das sie nach jenen ausdachte, in der anderen an die Natur gehen, war um von ihr belehrt zu werden, aber nicht in der Qualität eines Schülers, der sich alles vorsagen läßt, was der Lehrer will, sondern eines bestallten Richters, der die Zeugen nötigt, auf die Fragen zu antworten, die er ihnen vorlegt. Und so hat sogar die Physik die so vorteilhafte Revolution ihrer Denkart lediglich dem Einfall zu verdanken, gemäß demjenigen, was die Vernunft selbst in die Natur hineinlegt, dasjenige in ihr zu suchen (nicht ihr anzudichten), was sie von dieser lernen muß, und wovon sie für sich selbst nichts wissen würde. Hierdurch ist die Naturwissenschaft allererst in den sicheren Gang einer Wissenschaft gebracht worden, da sie so viele Jahrhunderte doch nichts weiter als ein bloßes Herumtappen war.“ —

Empirische Gesetze. Wo aus Versuchsreihen sich zwar zwischen zwei oder mehreren Reihengliedern (z. B. den Temperaturen und Spannkraften eines Dampfes) gesetzmäßige Zuordnungen ergeben haben, für die sich aber weder ein allumfassendes beschreibendes Gesetz, noch eine Zurückführung auf andere bekannte Gründe an geben lassen, dort spricht man von **empirischen Gesetzen** im engeren Sinne (wiewohl ja auch die eigentlichen Gesetze, z. B. Galileis Fallgesetze, nachmals haben empirisch bestätigt werden müssen).

Letzte Gesetze. Da alles Erklären gesetzmäßiger Beziehungen auf andere Gesetze zurückgeht, ein solcher Rückgang aber nicht ins Unendliche führen kann (*regressus in infinitum*, der ebenso auch beim Definieren, L § 32, und beim Beweisen, L § 96, unmöglich ist), so ist die Anerkennung **letzter Gesetze** nicht etwa nur als ein unvermeidliches Übel hinzunehmen, sondern geradezu logisch geboten.

Solche letzte Gesetze sind es, die wir als Prinzipien der Methodik (§§ 15, 36, 43), der Elektrizitätslehre (§ 132: Faradays Worte Induktion) u. s. w. den Deduktionen, so weit solche innerhalb induktiven Wissenschaft möglich sind, zugrunde legen. Näheres solche Prinzipien Nr. 37.

Unregelmäßigkeiten, Ausnahmen. Im Begriffe eines Gesetzes im strengen Sinne liegt schon, daß dasselbe genau und nahtlos gelte. Wo der wirkliche Verlauf der physischen (psychischen) Tatsachen „Unregelmäßigkeiten“ und „Ausnahmen“ zeigen scheint, suchen wir diese zu erklären aus dem Zusammenhange einer so großen Vielheit von Bedingungen, daß wir diese nicht überblicken können, und wo dann durch das Ausfallen ein Umstand, welcher uns noch nicht näher bekannt ist, der Gesamterfolg nur modifiziert oder ganz aufgehoben wird.

Z. B. Das Gesetz, daß alle Körper durch Reiben elektrisch werden, ist nicht dadurch umgestoßen, daß eine Elektrisiermaschine bei feuchtem Wetter versagt. Ebenso: Fall im luftgefüllten Raume u. dgl. m. — Der Arzt hält ein erprobendes Heilmittel schon dann für nicht wirkungslos, wenn seinem Geheul nur in einer 50 Proz. nicht weit übersteigenden Zahl von Fällen eine Linderung folgt. Vgl. § 202, Punkt 6 über Wetterprognose. Ebenso: stische Gesetze überhaupt. Wie weit ihnen zu trauen ist, lehrt die Wahrscheinlichkeitsrechnung („Fehlertheorie“) mit großer logischer Schärfe beurteilen.

Der in vorstehendem aus dem gewöhnlichen Denken als bekannt vorausgesetzte Begriff der „Notwendigkeit“ soll nun in der nächsten Nummer noch genauer untersucht werden, und zwar namentlich in seiner Eigenschaft als Kern des erklärenden Naturwissenschaften unentbehrlichen Begriffes der **Ursache**.

35. Die Begriffe Ursache, Kraft und Energie. — Kausalgesetze.

Das „Kausalproblem“, eines der interessantesten und am meisten bearbeiteten philosophischen Probleme, gliedert sich in eine Reihe verschiedener Fragen, namentlich: 1. Was stellen wir uns vor, wenn wir etwas „Ursache“ (*causa*) nennen (logischer Inhalt des Kausalbegriffes)? 2. Woher haben wir diese Vorstellung (psychologischer Ursprung des Kausalbegriffes)? 3. Mit welchem Rechte halten wir etwas für eine Ursache (logische Begründung eines Kausalurteils)?

I. Zum Kausalbegriff. Wird z. B. ein Feuerschwamm durch die Einwirkung eines Hohlspiegels auf ihn konzentrierten Sonnenstrahlen entzündet, so faßt man dieses Entzünden als eine „Wirkung“ davon auf, daß der von Luft umgebene Feuerschwamm durch die gesammelten Sonnenstrahlen bis zur Entzündungstemperatur erhitzt war. Man beachte aber, daß im gewöhnlichen Spreche „Ursache“ häufig sehr unvollständig angegeben zu werden pflegt, so daß nur eine oder einige der auffallendsten **Teilursachen** namhaft macht, ohne die übrigen für entbehrlich zu halten. Z. B. Auf die Frage, was war die U

der Entzündung des Schwammes, wird leicht geantwortet werden: der „Spiegel“ oder die „Sonnenstrahlen“ u. s. w. Aber weder der Spiegel für sich (so z. B. solange er im Kasten steht) noch die Sonnenstrahlen für sich (wenn sie eben nicht hinreichend konzentriert sind), noch auch beide zusammen (wenn nämlich der Schwamm nicht von Sauerstoff umgeben ist) — sondern nur alle diese Teilursachen zusammen bilden die **Ursache**, der die Entzündung als Wirkung folgt. —

Auch diese **Wirkung** wird häufig ungenau angegeben. Z. B. Wenn man sagt, der Schmied sei die Ursache der Pflugschar, so ist eigentlich gemeint, die Arbeit des Schmiedes (zusammen mit dem Erweichtsein des Eisens durch Erhitzung . . .) sei die Ursache, daß das Eisen statt seiner früheren die neue Gestalt einer Pflugschar angenommen habe. Daß sie dagegen von da an ihre Gestalt behält, bedarf nicht einer besonderen Ursache, vielmehr fragen wir nur bei jeder neuen Veränderung, z. B. Rosten, Verbogenwerden . . . um die Ursache eben dieser Veränderung. — —

Ist nun alles, was einer Veränderung vorausgeht, sogleich als Ursache dieser Veränderung zu bezeichnen? Offenbar nicht: Denn schon die gewöhnliche Sprache unterscheidet deutlich zwischen Folgen (bloßer Sukzession) und Erfolgen (Kausation). Der Satz *Post hoc, ergo propter hoc* (Nach diesem, also durch dieses) verspottet einen solchen voreiligen Schluss. (Z. B. Wenn im Frühjahr die Frösche frühzeitig quaken und darauf wird es grün, so glauben wir nicht, daß jenes Quaken die Ursache des Grünens sei.) Vielmehr wenden wir den Begriff der Ursache nur dort an, wo wir einzusehen glauben, daß auf das Vorausgehende notwendig die Veränderung hat eintreten müssen; d. h.: Verursachtsein = Erfolgen = notwendiges Folgen. — Zusammenfassend:

Den Begriff der **Verursachung** wenden wir dort an, wo eine **Veränderung** mit **Notwendigkeit** eintritt, weil ein **Komplex von Tatsachen** eingetreten (vollständig geworden) war. — Jede einzelne dieser Tatsachen ist eine **Teilursache** der bewirkten Veränderung. Häufig nennt man die zuletzt eintretende Teilursache letzte Ursache (auch Veranlassung — in der Sprache der Energetik speziell auch „Auslösung“), die übrigen Teilursachen nennt man Bedingungen (Vorbedingungen). —

Unter den Bedingungen wieder führen den besonderen Namen **Kraft (Fähigkeit, Vermögen, Disposition)**, diejenigen Teilursachen, die wir als mehr oder minder **bleibende Bedingungen** zwar **nicht direkt wahrnehmen** können, deren Bestehen wir aber aus dem gesetzmäßigen Stattfinden der Erscheinungen **erschließen**.

Z. B.: In welchem Sinne glauben wir an das Bestehen einer „allgemeinen Schwerkraft“ und denken uns also speziell etwa die Erd- oder Sonnenkugel von einem „Kraftfeld“ umgeben, dessen Stärke mit dem Quadrat der Entfernung vom Kugelmittelpunkt abnimmt? Wäre es nicht vorsichtiger, sich einer solchen Annahme ganz zu enthalten, da das, was wir beobachten können, ja doch nur die Bewegungen der Steine zur Erde, des Mondes um die Erde, der einzelnen Planeten um die Sonne sind? — Hierauf ist zu erwidern, daß wir mit der Annahme einer solchen Kraft allerdings weit über das hinausgehen, was uns die Wahrnehmung direkt lehrt. Denn Newtons Gravitationsgesetz $f = \gamma \frac{Mm}{r^2}$ will ja keineswegs

nur für diejenigen Werte des Abstandes r gelten, innerhalb welcher schon ein Planet (Komet, Meteorit . . .) sich bewegend beobachtet wurde, geschweige denn nur für dasjenige Element der Bahn, in der er sich augenblicklich bewegt. Sondern jenes nicht bloß beschreibende, sondern erklärende (kausale) Gesetz besagt, daß, wenn auch z. B. in den Raum zwischen Jupiter und Saturn etwas neuer Komet hineingelangt, auch dieser sogleich jener „Kraft“ unterliege. Was aber auch durch jene Annahme einer Kraft in Räumen, die unendlichmal umfassender sind als diejenigen, in denen kosmische Massen schon beobachtet worden sind, diese direkte Beobachtung sozusagen ins Unendliche überschritten wird, so ist doch jene Annahme keineswegs unberechtigt (unlogisch); denn die bisherige enttäuschte Erwartung, daß auch in Orten der Umgebung der Sonne, wo auch unmittelbar vorher noch keine Körper befunden hatten, sogleich die Beschleunigung des Körpers nach jenem Gesetz eintritt, sobald der Körper dort eintrifft, führt auf die weitaus wahrscheinlichste Annahme, daß eine Teilbedingung für das Eintreten der Beschleunigung auch schon vor dem Eintreffen der Masse vorhanden gewesen sei (und auch weiterhin so bleiben wird). Nicht mehr und nicht weniger meinen wir, wenn wir schon der Sonne für sich ein „Kraftfeld“ zuschreiben. — Freilich versteht es sich dabei von selbst, daß eine andere ebenso notwendige Teilbedingung auch das Vorhandensein eines zweiten Körpers ist, der eine Beschleunigung zur Sonne hin erleiden soll; ein wirkliches Beschleunigen findet also nur in den zusammengesetzten Kraftfeldern statt (was in einfachster Weise schon im Gegenwirkungsprinzip ausgesprochen ist). Das Eintreffen der Planetenmasse in einem bestimmten Punkte des Kraftfeldes der Sonne ist dann die „letzte Teilbedingung“ für das „Aktualisieren“ der schon vorher vorhanden gewesenen Kraft, nämlich der Fähigkeit (Disposition) der Sonne und der Planeten, einander bei diesem bestimmten Abstande r diese bestimmte Beschleunigung zu erteilen. —

Schon von altersher hatten einzelne Denker Bedenken gegen die Annahme von Kräften, d. i. von bloßen Fähigkeiten (einem *δυνάμεις ὄν*) im Gegensatz zur wirklichen Betätigung dieser Fähigkeiten (— dem *ἐνεργεῖν ὄν*; man beachte hier den etymologischen Zusammenhang zwischen „wirken“, „wirklich“, *ἔργον* = Werk und *ἐργεῖν*). Diesem Bedenken ist aber schon von ARISTOTELIS mit Recht entgegengehalten worden, daß ja dann nur der ein Baumeister wäre, der wirklich baut, nicht auch schon der des Bauens fähig ist, ohne wirklich zu bauen; ferner, daß zwischen einem Blinden und einem in einen lichtlosen Keller eingeschlossenen Sehtüchtigen kein Unterschied wäre u. s. w. Die mittelalterliche Spekulationsweise freilich liebte es, dann überall sogleich „verborgene Fähigkeiten“ oder „verborgene Eigenschaften“ (*qualitates occultae*) anzunehmen (was MOLINA verspottet, der das Einschläfern durch Opium aus einer „einschläfernden Kraft“ des Opiums erklären läßt; was aber nicht etwa falsch, sondern nur zu richtig, nämlich selbstverständlich und auch nur darum wertlos ist). Hätte NEWTON die tatsächlich zu beobachtenden Beschleunigungen, ohne vor allem diese selbst näher quantitativ gemessen („vollständig beschrieben“) zu haben, ebenso summarisch nur durch eine „beschleunigende Kraft“ erklärt, so hätte dies unser physikalisches Wissen nicht über das Selbstverständliche hinaus erweitert. Indem er aber von dieser Kraft selbst wieder in genauen mathematischen Beziehungen die Abhängigkeit von der streng begrenzten Anzahl der drei Bedingungen M , m und r anzugeben vermochte, und indem seine Nachfolger dieses Gesetz für alle Körper des Weltalls ausdehnen konnten, ist durch diese wissenschaftliche Leistung der beste Beweis gegeben, um wieviel eine solche Annahme von quantitativ

genau bestimmten Kräften über die selbstverständliche Annahme einer Kraft überhaupt hinausgeht.

II. Zu den Kausalurteilen. Die bisherige Analyse des Begriffs der **Ursache** ergab als dessen wesentlichsten Kern den Begriff der **Notwendigkeit**. Bekanntlich sprechen wir von Notwendigkeit auch in Gebieten, die mit Verursachung nichts zu tun haben. — Sagen wir z. B.: „Ein Dreieck mit gleichen Seiten hat notwendig gleiche Winkel“, so ist hiermit offenbar eine besondere Art von Beziehung (Relation) zwischen der Gleichseitigkeit und der Gleichwinkligkeit erkannt und ausgesagt. Einem solchen Urteil über Notwendigkeit ist logisch äquivalent (Nr. 38, 2) das Urteil: „Ein gleichseitiges Dreieck kann nicht ungleichwinklig sein“. — Insoweit könnte es Manchem scheinen, als sei Notwendigkeit (und Unmöglichkeit) nur etwas unserem Urteil Anhaftendes (wonach es dann nur „Denknotwendigkeiten“, aber keine „Naturnotwendigkeiten“ gäbe). Dieser Schein hat aber nicht mehr Berechtigung, als wenn man behaupten wollte, in dem Urteile „ $2 \times 2 = 4$ “ oder „Meine beiden Zeigefinger sind einander gleich“ sei die erkannte und ausgesagte Relation der Gleichheit nur Sache unseres Urteilens (es gebe also nur „Denkgleichheiten“, keine „Naturgleichheiten“). Ohne auf die hieran sich schließenden allgemein erkenntnistheoretischen Missverständnisse und Berichtigungen einzugehen, kann wenigstens ein Teil der Bedenken gegen das Bestehen von Naturnotwendigkeiten durch die Feststellung behoben werden, daß wir das Bestehen einer Notwendigkeitsrelation zwischen zwei Vorgängen in der außerpsychischen Welt nur nicht mit gleicher Unmittelbarkeit erkennen, wie z. B. das Bestehen einer Gleichheits- oder einer Verschiedenheitsrelation zwischen zwei Daten der inneren Wahrnehmung. Vielmehr sind wir für das Erkennen einer Naturnotwendigkeit und im besonderen für jedes Kausalurteil auf den Schluß aus der Regelmäßigkeit auf die Notwendigkeit angewiesen. Die Prüfung der logischen Berechtigung jedes solchen Schlusses liegt in folgender Frage und Antwort:

Mit welchem logischen Recht greifen wir über den Inhalt der Beobachtung, daß eine Tatsache *W* bisher eine andere *U* zum regelmäßigen Antecedens gehabt habe, hinaus zu dem Glauben, daß *U* das **notwendige Antecedens** von *W* sei? — Antwort: Aus der Notwendigkeit wird die Regelmäßigkeit erklärlich; ohne Annahme einer Notwendigkeit bliebe die tatsächliche bisherige Regelmäßigkeit unerklärlich („ein Zufall“). — Hierin liegt auch der letzte Grund für die Berechtigung der Induktionsschlüsse überhaupt.

Als **spezielle Kausalgesetze** werden alle Urteile bezeichnet, die irgend welche nähere Angaben über die besondere Art der Ursache und Wirkung enthalten. — Dagegen sagt das **allgemeine Kausalgesetz** nur aus, daß jede Veränderung irgend eine Ursache hat (wenn wir sie im einzelnen auch noch so wenig kennen).

Beispiele spezieller Kausalgesetze sind also das der allgemeinen Massenanziehung; denn es besagt, was für eine Beschleunigung zweier gegebenen Massen bei gegebenem Abstand notwendig eintritt. — Ferner das Gay-Lussacsche Gesetz. Denn es besagt, was für eine Ausdehnung in einem Gase bei bestimmter Temperaturerhöhung notwendig eintritt; und so die meisten physikalischen Gesetze.

bewirken und die entgegengesetzte Veränderung verhindern. In diesem Sinne kann man dann auch sagen, daß das Wasser „von selbst“ fließt und nicht hinaufströmt; man weiß eben, daß für jene „natürliche Richtung“ durch die allezeit bereite Schwerkraft gesorgt ist.

36. Hypothese; Exklusion, Verifikation. Indirekte induktive Methode. — Wissenschaftl.

Das Gebiet der **Hypothese** betritt man überall über die unmittelbar beobachtete Tatsache hinaus; durch das Aufstellen von Gesetzen (verallgemeinerungen = **Beschreibungshypothesen**), sei es, in den Tatsachen und ihre Gesetze durch vermutete Notwendigkeit zu erklären versuchen (**Erklärungshypothesen**).

Meistens bieten sich in den früheren Stadien der Untersuchung eines Gegenstandes mehrere Hypothesen als möglich dar; häufig gleich wahrscheinlich: dann müssen durch die Vertiefung unserer Kenntnis der Tatsachen Gründe gefunden werden, um alle Hypothesen bis auf eine **auszuschließen** (zu verwerfen) und diese eine zu **bestätigen** (zu verifizieren).

Alles Prüfen einer Hypothese erfolgt so, daß wir eine (in sich widerspruchsfreie) Annahme zur **vera** Beschreibung, bzw. zur Erklärung einführen, dann die in ihre Konsequenzen verfolgen und diese nun mit beobachtbaren Tatsachen vergleichen. Für eine solche Prüfung gelten die folgenden Sätze:

Erstens: **Widerspricht auch nur eine konsistente Hypothese den Tatsachen, so ist die Hypothese**

Hypothese ausgenommen werde. Immerhin aber wird die durch ihre Übereinstimmung mit den Tatsachen verifizierte Hypothese um so wahrscheinlicher, je gröfser die Zahl der Übereinstimmungen wird und je weniger es trotz aufgewandter Bemühungen bis dahin gelungen ist, noch andere ebenso fruchtbare Hypothesen zu ersinnen.

Beispiele für blofse Beschreibungshypothesen gibt das Interpolieren und Extrapolieren von Wertepaaren zu den direkt beobachteten Gliedern einer Versuchsreihe, wie dies schon (in Nr. 31) an dem Beispiele von vier Einzelversuchen über den freien Fall (z. B. $t = 1, 2, 3, 4 \text{ sec}$; $s = 5, 20, 45, 80 \text{ m}$) erläutert wurde. Niemand gibt sich mit 4 oder auch 100 oder 1000 solchen einzelnen Wertepaaren zufrieden, sondern er sucht das zwischen ihnen waltende Gesetz (Nr. 34). Wenn nun aber dieses Gesetz, insoweit es ein rein beschreibendes ist, noch für beliebig inter- und extrapolierte Wertepaare durch wirkliche Versuche bestätigt werden könnte (im Gegensatz zu den Erklärungshypothesen, wo wir die vermuteten Kräfte nie wahrzunehmen vermögen), so müssen wir uns doch nur wieder mit einer blofsen Auswahl von Einzelversuchen schon darum begnügen, weil wir mit den unendlich vielen Wertepaaren in Wirklichkeit nie fertig würden. In der Tat aber häuft auch der sinnige Forscher die Einzelbeobachtungen niemals über Not, sondern sein Genie bewährt sich darin, dafs er schon an einer recht kleinen aber glücklich gewählten Auswahl von Einzelversuchen (namentlich für die „ausgezeichneten Punkte“ einer die gesuchte Funktion darstellenden Kurve) das hypothetische Gesetz entnimmt und es dann selbst wieder durch eine sparsame weitere Zahl verifiziert. Ein schönes Beispiel hierfür bietet Hipparchs Aufstellung des exzentrischen Kreises für die Sonnenbahn; vgl. I.A. 220.

LA 219.

Beispiele von erklärenden Hypothesen bieten im grofsen die Kant-Laplacesche Hypothese, die Molekular- und Atom-Hypothese (§ 57, § 209), die kinetische Wärme-Hypothese (§ 83), die Emissions- und Undulations-Hypothese des Lichtes (§ 123). Insbesondere das letzte Beispiel ist für die Logik der Hypothesenbildung klassisch: erstens wegen der für viele Erscheinungen (geradlinige Ausbreitung, Reflexion u. s. w.) gleich ungezwungenen und daher insoweit gleich grofsen Wahrscheinlichkeit beider Hypothesen; zweitens wegen der unwidersprechlichen Exklusion, die endlich die Emissionshypothese durch Foucaults Versuch über das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in Luft und Wasser für die besondere Erscheinung der Brechung fand; drittens wegen der innerhalb der verifizierten Hypothese, nämlich der Undulations-Hypothese, offen gebliebenen weiteren Ausgestaltung als Elastizitäts- und elektromagnetische Theorie; viertens wegen der überwiegenden Wahrscheinlichkeit, die von diesen beiden Subhypothesen (wie wir sie nennen könnten) die elektromagnetische Lichttheorie gefunden hat, und zwar nicht so sehr wegen eines einzelnen entscheidenden Experimentes (in der Weise des Foucaultschen), sondern wegen der inheitlicheren Darstellung sehr vieler Lichterscheinungen zusammen mit den elektrischen und magnetischen, die die Annahme eines elastischen Äthers bei weitem nicht ebenso gut erlaubt hatte. Fünftens insbesondere aber ist die Wellentheorie des Lichtes (wieder unabhängig von den beiden genannten Subhypothesen) namentlich dadurch ein glänzendes Vorbild, was eine gute Hypothese dem Forscher zu leisten hat, dafs diese Hypothese, nachdem sie einmal den Lichtstrahl als Wellenstrahl erklärt hat, die Optik mindestens ebenso viele sich unterscheidende Merkmale an einem Lichtstrahle empirisch aufzuzeigen einadert, wie die Mechanik in dem Wellenstrahle zu unterscheiden gelehrt hat.

Die allgemeine Wellenlehre als ein Zweig der Mechanik unterscheidet sich von einem Wellenstrahl (gleichviel, ob es selbst wieder mechanische oder mechanische Wellen sind, vgl. § 60, S. 227) mindestens folgende deterministische Merkmale: Die Wellen müssen 1. periodisch oder aperiodisch sein; 2. müssen eine bestimmte Ausbreitungsgeschwindigkeit haben; 3. die periodischen müssen bestimmte Wellenlängen haben; 4. beide müssen transversal oder longitudinal sein oder bestimmte Komponenten beider Schwingungsrichtungen aufweisen. So hat sich dann in der Tat aus Beugungs- und Interferenzversuchen die Wellenlänge (§ 124, S. 387) der Lichtstrahlen, aus Polarisierungsversuchen ihre Versalität (§ 128, S. 396) u. a. w. ergeben. Selbst wenn je noch die Undulationstheorie des Lichtes auch in ihrer modernsten Ausgestaltung als elektromagnetische Lichttheorie sich als unhaltbar erwies, wird die gewonnene Mannigfaltigkeit der Einzelbestimmungen eines Lichtstrahles nicht mehr fallen gelassen werden. In solchen Mannigfaltigkeiten der Einzelbestimmungen liegt dann auch gemein der heuristische Wert solcher *Arbeitshypothesen* (*working hypothesis*). Indem endlich die elektromagnetische Lichttheorie die während eines großen Teils des XIX. Jahrhunderts unentschiedene Streitfrage, ob die Schwingungen polarisierter Lichtstrahlen senkrecht zur Schwingungsebene (nach FRESNEL) oder in sie (nach NEUMANN) zu liegen kommt, überraschender Weise schlichtete, daß die elektrischen Wellen der Fresnelschen, die magnetischen der Neumannschen Hypothese genügen, machte dieses Ergebnis nützlich darauf aufmerksam, daß jene vermeintliche Alternative keine vollständige Disjunktion gewesen war, sondern, daß man drei Subhypothesen hätte aufstellen können und sollen, von denen sich dann herausgestellt hätte, daß die zwei ersten den Tatsachen nicht vollständig nachkommen konnten, wohl die dritte, die für beide Arten der Seitlichkeit des Lichtstrahles eine Deutung

Als *Hilfshypothesen* bezeichnet man solche Zusätze zu einer Hypothese, durch die einzelne Unverträglichkeiten, in der Hypothese mit der Wirklichkeit gerät, beseitigt werden sollen. Mehr solcher Hilfshypothesen (1., 2. . . . Ordnung) nötig werden, so mehr sinkt die Wahrscheinlichkeit der ursprünglichen Hypothese.

Das typische Beispiel einer Hilfshypothese sind die Epizykeln 2., 3. Ordnung, die als Zugabe zur epizyklischen Theorie des Ptolemäus nach und nach eingeführt wurden. — Wäre die Wahrscheinlichkeit jeder einzelnen von Hilfshypothesen der Reihe nach sozusagen aufeinandergepfropft werden, je $\frac{1}{2}$, so würde die Wahrscheinlichkeit der so modifizierten Hypothese.

Man beachte den wesentlichen Unterschied zwischen solchen unwillkommenen Hilfshypothesen und den willkommenen Gelegenheiten zur Ausgestaltung einer zuerst nur in allgemeinen Zügen entworfenen Hypothese: dieser Unterschied liegt darin, daß beim Ausgestalten einer abstrakt gehaltenen Hypothese sie der jedenfalls konkreten Wirklichkeit vollständig nachkommen soll. Konkrete Züge, die mit den bisherigen verträglich sind, hinzugefügt werden müssen, bis auch das hypothetische Gedankenbild ein konkretes geworden ist. In der Regel wird ein solches lückenloses Ausgestalten der Hypothese nur ein Grenzziel für unser Erklärungsbestreben bleiben. [Über den gegenwärtig gebrauchten Ausdruck „Bild“ im Sinne von Erklärungshypothesen (z. B. „Bild“ schwingender Moleküle zur Erklärung der Wärmeerscheinungen) vgl.

[Nr. 39.] — Den **Hilfshypothesen** dagegen ist es wesentlich, daß sie einen in das hypothetische Gebilde aufgenommenen konkreten Zug durch einen anderen ersetzen müssen, mit dem der erstere unverträglich ist.

Auch die für alle empirische Forschung überaus fruchtbare **indirekte induktive Methode** fällt unter den allgemeinen Begriff des Verifizierens einer Hypothese.

Schon deshalb ist eine „**hypothese[n]freie Naturforschung**“, wie sie gegenwärtig nicht selten verlangt wird, undurchführbar. — Für den allgemeinen Begriff jener wichtigen Methode biete ein erstes Beispiel wieder GALILEIS Methode bei der Induktion der phoronomischen Fallgesetze. Da er von vornherein nur überhaupt eine einfache Gesetzmäßigkeit zwischen irgend welchen phoronomischen Bestimmungsstücken beim freien Falle vermutete, waren die Beziehungen, welche wir in der Form $v = v_1 \cdot s$. . . (I) und $v = g t$. . . (II) schreiben, als möglich ins Auge zu fassen. Dabei gelangte Galilei (merkwürdigerweise durch einen mathematischen Fehlschluss) alsbald dazu, die Beziehung (I) auszuschließen (in der Tat gilt ja auch nicht $v = v_1 \cdot s$, sondern $v = v_1 \sqrt{s}$, wo $v_1 = \sqrt{2g}$). Die, wie wir jetzt wissen, richtige Gleichung (II) konnte aber nicht direkt verifiziert werden, weil es an einem direkten Maße der Werte von v fehlt. Daher verfolgte Galilei die einstweilen nur vermutete, also hypothetisch aufgestellte Beziehung $v = g t$ in ihre mathematischen Konsequenzen, indem er durch das in § 6 (Fig. 14) dargelegte graphische Verfahren aus $v = g t$ ableitete: $s = \frac{g}{2} t^2$. . . (III). Und da nun in dieser Beziehung (III) die Größen s und t der Messung zugänglich waren und durch den Versuch mit der Fallrinne sich wirklich als in dieser Beziehung stehend erwiesen, so war auch die Beziehung (II) verifiziert.

Ein zweites Beispiel gibt die Bestätigung des Trägheits- und Beharrungsgesetzes. Denn nicht in dem Herstellen einer möglichst reibungslosen horizontalen Ebene, auf die GALILEIS Worte: *Mente concipio . . . corpus super planum non inclinatum projectum* . . . zunächst hinweisen, bestand nachmals das entscheidende Experiment für die Gültigkeit jenes Gesetzes; sondern erst, indem die himmlische Mechanik Newtons die eine (tangentielle) Komponente der Planetenbewegungen als gemäß dem Beharrungsgesetze gleichförmig, eine zweite (zentrale) Komponente als gegen die Sonne hin gerichtet und beschleunigt annahm und beide Komponenten nach dem Bewegungsparallelogramm zusammensetzte, verifizierte sie mit der höchsten möglichen Genauigkeit die Gültigkeit des Beharrungsgesetzes. — Man kann also sagen: Auf die Gesetze einer geradlinig gleichförmigen Bewegung wird geschlossen aus Bewegungen, die keineswegs auch nur annähernd geradlinig sind; dies wäre völlig paradox, wenn es nicht neben der direkt induktiven Methode die indirekte gäbe. Sie ist allgemein so zu beschreiben:

Die **indirekte induktive Methode** leitet (wie alle Hypothesenbildung) aus zunächst nur angenommenen (vermuteten) Gesetzmäßigkeiten solche Bestimmungen ab (teils durch bloß mathematische Schlüsse, teils durch Verbindung der zu prüfenden Gesetzmäßigkeit mit schon anderweitig erkannten Erfahrungssätzen), die sich mit Tatsachen direkt vergleichen und aus ihnen bestätigen lassen. —

Von Hypothesen überhaupt sind wesentlich verschieden die **wissenschaftlichen Fiktionen**. Sie werden überall dort eingeführt,

scheinlich eingeführt wird) zurück. Wenn wir eine Betrachtung beginnen: „Angenommen, dieser Stab bleibe auch bei den Wirkungen unverbogen“, so können wir von dem Nichtvorkommen Systeme völlig überzeugt sein und sehen uns doch nicht gehin in ihre mathematischen Konsequenzen logisch zu verfolgen.

Die bisher beschriebenen Fiktionen haben also zum Zweck vereinfachte Beschreibung der beobachteten Tatsache Gewinnung einer Erklärung wenigstens für jene künstlich einfachen Tatsachen selbst. Fiktionen anderer Art sind z. B. die der, die, wenn wir an sie glaubten, sogleich den Zweck von Erklärungen erfüllen würden, und die wir, auch nachdem sie uns aus anderen Misstrauen gegen Imponderabilia überhaupt) unglaublich gewiss bis zur Aufstellung und Bewährung einer besseren Erklärung weiter benutzen, gleichsam als Mahnung, daß hier die bessere auszusinnen sei.

37. Begriff einer wissenschaftlichen Theorie. Prinzipien. Definitionen.

Die Erforschung einer kleineren oder größeren Sache und Beziehungen, die ihrem Gegenstande angehören, gilt erst dann als vollendet, wenn für sie aufgestellt und begründet ist. — Als „Theorie“ bezeichnet man das umfassende System derjenigen Erklärenden wie erklärender Art, welches die diesen betreffenden spezielleren Gesetze in möglichst einheitlich darstellt und aus ihren Gründen begreiflich macht.

Haben wir einmal diese Gründe, „Prinzipien“, so ist uns ein logisches Bedürfnis, auch die äußere Darstellung

Anders in der Mathematik: Hier sind die Prinzipien allerdings zugleich auch unmittelbar einleuchtend und heißen dann **Axiome**. Z. B. Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches. Zwei Gerade können sich nur in einem Punkte schneiden. Alle rechten Winkel sind einander gleich u. dergl. — Doch hat selbst hier das Denken erst spät, nachdem schon eine grössere Zahl mittelbar einleuchtender Sätze gefunden ist, ein eigentliches Bedürfnis, diese mannigfaltigen Sätze auf eine möglichst kleine Zahl unmittelbar einleuchtender Sätze zurückzuführen, indem es von diesen als Axiomen ausgehend durch ganze Reihen von Beweisketten nach und nach zu allen einzelnen Lehrsätzen fortschreitet.

Namentlich darf man sich auch nicht einbilden, physikalische Sätze, in demselben Sinne wie mathematische, „beweisen“ zu können; die nicht selten gebrauchten Bezeichnungen „Pendelbeweis“, „Linsenbeweis“ u. dergl. sind zum mindesten ungenau. Es sollte heißen: „Ableitung der Pendel-, der Linsenformel“, worunter dann ein Ableiten teils aus den letzten Prinzipien der Mechanik, der Optik, teils aus den schon von ihnen abgeleiteten Sätzen gemeint ist. —

Da die logische Klarheit der physikalischen Theorien lange Zeit darunter gelitten hat, daß man gewisse sehr einfache Sätze, wie den vom gleicharmigen Hebel, von der Trägheit und Beharrung, vom Kräfteparallelogramm, von der Unmöglichkeit des perpetuum mobile u. dergl. m., ganz unabhängig von der Erfahrung einleuchtend machen zu können glaubte, so sei an den genannten und einigen anderen Beispielen die Unzulässigkeit eines solchen Überspringens der Erfahrung erläutert und erwiesen:

1. Der gleicharmige Hebel. Indem ARCHIMEDES den Satz „Gleichschwere Grössen (sc. Gewichte), in gleichen Entfernungen (sc. vom Unterstützungspunkt eines Hebels) wirkend, sind im Gleichgewicht“, ohne weitere Begründung an die Spitze seiner Statik stellt, scheint er ihn für unmittelbar einleuchtend gehalten zu haben. In der Tat liegt es hier sehr nahe, es geradezu „undenkbar“ zu finden, daß bei der symmetrischen Anordnung der zwei Kräfte ihrer Grösse und Lage nach die Symmetrie durch eine Drehung des Hebels in dem einen Sinne gestört werden sollte. Denn warum nicht ebenso gut im anderen Sinne? Und da also beide Bewegungen gleich möglich sind, so sind sie eben hierdurch gleich unmöglich, d. h. der Hebel muß in Ruhe bleiben. — Dennoch hat diese scheinbar zwingende, rein logische Überlegung (deren Verallgemeinerung als „Satz des fehlenden zureichenden Grundes“, abgekürzt: Satz vom Grunde, bezeichnet wurde) höchstens dann Beweiskraft, wenn wir schon überdies wissen, daß die Bewegung nur von der Kraft und dem Kraftarm, nicht z. B. von der Farbe der Hebelarme abhängt: eben dies aber können wir nicht wieder durch reines Denken, sondern nur aus Erfahrung wissen. — Daß aber selbst dort, wo für die sinnliche Wahrnehmung die Symmetrie durch nichts gestört erscheint, wie beim Fliesen eines elektrischen Stromes parallel zur ruhenden Deklinationsnadel, jenes Schlussverfahren für sich trügerisch ist, zeigt die Erfahrung, daß das Ergebnis des Versuches ein ganz anderes ist, als es die bloße Symmetrierewägung lehren würde. Nach dem „Satz vom Grunde“ müßten wir nämlich das Ruhigbleiben der Nadel erwarten (denn es ist kein logischer Grund einzusehen, warum der Nordpol eher zur Linken des Schwimmers, als zur Rechten abweichen sollte); und dennoch zeigt Ørsted's Versuch, daß der Nordpol nur zur Linken des Schwimmers abweicht. Die tiefer gehende Theorie sucht freilich hier in dem Zustande des stromdurchflossenen Leiters und des Magnetpols eine Asymmetrie aufzuzeigen, indem sie beide Zustände auf Wirbel zurückführt, die nur in je einem Sinne kreisen. Eben solche Asymmetrien könnten aber auch beim Wirken

Ausnauung entsprechen (was selbst wieder zum Teil in symmetrischen Körperbau seine physiologisch-psychologische mag), den künstlicheren Gesetzen über die Zusammensetzung starren Systemen vorangestellt zu werden (fast wie „Axiome“).

3. Der Satz vom Kräfteparallelogramm. Diesen glaubt für zwei gleiche Kräfte ebenfalls sofort aus Symmetriebetrachtung können (was aber dann die Richtung, noch nicht die Größe ergibt), und diesen besonderen Fall glaubte man ähnlich zum des Kräfteparallelogramms erweitern zu können, wie ARCHIMEDES für den gleicharmigen Hebel den für den ungleicharmigen abgeleitet. Beweise sind seit einigen Jahrzehnten als Scheinbeweise erwiesen näher dargelegt werden soll). Bedenken wir, daß der Satz vom parallelogramm sich ergeben hat (§ 17), indem zu dem wirklich rein physikalischen (Zuhilfenahme besonderer Erfahrungen) einzusehenden Satze vom parallelogramm noch das zweite Prinzip der Mechanik (das Unabwandelbar hinzugenommen wird, und da dieses wie die beiden andere Prinzipien der Mechanik (s. u.) der Bewährung in der Erfahrung nicht entbehren einen induktiven Kern enthält, so erscheint es von vornherein, daß auch ohne Hinzukommen eines solchen induktiven Kerns der Satz vom Kräfteparallelogramm rein logisch einzusehen sein sollte.

4. Die drei Prinzipien der Mechanik. Vom Trägheitssatz man lange Zeit geglaubt, es sei unmittelbar einleuchtend, daß ein Körper „selbst“ weder seine Richtung noch seine Geschwindigkeit ändern kann. Beibehalten der Richtung berief man sich wieder auf Symmetrie und es gilt daher für diesen Beweisgrund das oben Gesagte. Mit der Zeit wurden für das Beibehalten der Geschwindigkeit geltend gemacht, daß es zwar kein stichhaltiger Einwand, daß man bis zu dem allmählichen Vermindern der Geschwindigkeit für einleuchtend, denn dieses Vorurteil rührte ja nachweislich davon her, daß man hatte, den Anteil der Reibung und des Luftwiderstandes wenigstens auszuschließen. — Aber auch nachdem GALILEI unter Berücksichtigung der „Wegeshindernisse“ das richtige Gesetz der Trägheit und Beh-

mit den wirklichen Erfahrungen vergleichen und für die Abweichungen (vgl. die Worte *omni secluso impedimento*) ebenfalls bestimmte Ursachen in Gedanken erfassen und in der Erfahrung aufzeigen müssen. — Speziell zum **Unabhängigkeitsprinzip** ist sogar zu bemerken, daß vielleicht künftighin sich herausstellen wird, es gelte nur in erster Annäherung. Ein Anzeichen hierfür liegt u. a. in WILHELM WEBERS Untersuchungen darüber, daß die elektrodynamischen Kräfte nicht unabhängig seien von der Größe der jeweilig vorhandenen Geschwindigkeit. — Hiervon abgesehen ist es aber eine rein gedankliche Stütze für alle drei Prinzipien der Mechanik, daß sie die jeweilig einfachste denkbare Beziehung als auch in der Natur verwirklicht annehmen (nämlich zum ersten Gesetz: das Beibehalten von Richtung und Geschwindigkeit ist „einfacher“ als etwa das Abnehmen um 0,000 001 Proz. binnen einem Jahre; zum zweiten Gesetz: die volle Unabhängigkeit der Kraftwirkung von der vorhandenen Geschwindigkeit ist „einfacher“ als ein wie immer schwaches Beeinflussen durch eine wie immer große Geschwindigkeit; ebenso zum dritten Gesetz: die volle Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung ist „einfacher“ als jedes sonst auszudenkende Gesetz der Ungleichheit). Insofern kann das Gesetz der **Einfachheit der Natur** als ein noch höheres Prinzip der Physik angesehen werden und kommt auch wirklich allenthalben in der Erkenntnispraxis schon darin zur Geltung, daß wir die einfachere Erklärung der verwickelteren vorziehen. — Doch muß der Anwendungsbereich auch dieses Gesetzes überall erst durch Erfahrung festgestellt und bewährt werden; ja schon in der Wahl, welche von zwei anzunehmenden Arten einer Erscheinungsgattung (z. B. Bahnform, „Geschwindigkeitsgesetz“) „einfacher“ sei, schwankt oft unser Denken. Ja die vorschnelle Anwendung des Gesetzes der „Einfachheit“ hat sogar die richtige Erkenntnis tatsächlicher Gesetze öfters auf lange Zeit verhindert. So in den Vorurteilen des HIPPARCH, daß die Bahnen der himmlischen Körper reine Kreise und ihre Geschwindigkeit eine konstante sein müsse, von welchem Vorurteil nicht einmal KOPERNIKUS, sondern erst KEPLER sich frei machte; ferner die Meinung GALILEIS, daß die Bewegung fallender Körper eine genau gleichmäßig beschleunigte sei, was wegen Abnahme der Schwere nach oben als nicht genau zutreffend erkannt ist. Aber selbst das die genannten Vorurteile nachmals berichtigende Gravitationsgesetz NEWTONS, in welchem die verkehrte zweite Potenz mit Rücksicht auf die Ausbreitung der Schwere gleichsam über immer wachsende Kugeloberflächen das denkbar „einfachste“ Abstandsgesetz zu sein scheint, muß nicht genau richtig sein; es könnte statt der zweiten Potenz etwa auch die 2,000 01 ste Potenz gelten, wenn es die genauere Nachprüfung der tatsächlichen himmlischen Bewegungen so verlangte; und wir würden eine solche Abweichung sogar begreiflich finden, wenn sich für das Gravitationsgesetz eine weiter zurückgehende Erklärung aus Nahewirkungen u. dergl. ergeben sollte. — Auf alle Fälle erwarten wir nur eine wirkliche Einfachheit der Natur nur in deren letzten Gesetzen, nicht in abgeleiteten, wie es die Fallgesetze und die Keplerschen Gesetze sind.

5. Das Gesetz der Erhaltung der Energie. Auch hier dürfte nicht das als ein Einwand gegen das unmittelbare Einleuchten des Gesetzes geltend gemacht werden, daß so lange Zeit viele Verstandskräfte auf die Erfindung des *perpetuum mobile* verwendet worden sind; denn das Lockende einer solchen Erfindung hätte ja immerhin besseres Wissen übertäuben können. Aber einerseits konnten schon auf mechanischem Gebiete nur diejenigen Erfahrungen, die den Gleichungen $p = mg$ und $s = \frac{v^2}{2g}$ zugrunde liegen, auf das Maß der Energie

ackennos genug angenommen wird, dient es eine logische Ersche
spezielle Naturtatsachen, wie immer gut sie sich auch jenem Gese
jenem Gesetz rein logisch folgend hinstellen wollte. So fü
Gesetze der Elektro- und Magnetoinduktion gemäß der Lenzsc
dem Gesetze der Erhaltung der Energie; indem nämlich z. B. be
sekundären Leiters an den primären ein entgegengesetzter Str
hierbei Arbeit verbraucht wird, kann man sich den induzierte
Kosten jener Arbeit entstanden denken. Es ist aber „zuviel bew
schließt: Wird einem primären Stromleiter ein sekundärer genä
diesem ein entgegengesetzter Strom entstehen u. s. w. Denn wen
Strom entstände, so fände auch keine Abstofsung statt, es würd
keine Arbeit verbraucht, und auch dies wäre mit der Erhaltung
im Einklang. (Überdies könnte man, wenn jener Schlufs rich
schließen, daß auch beim Annähern eines geschlossenen Bi
primären Leiter in jenem ein Strom entstehen müßte.)

Wenn nun durch die vorstehenden Beispiele ersich
ist, daß alle Prinzipien der Physik, wiewohl sie schon
nach ein Erstes, Grundlegendes sein wollen, doch für
kommen unserer physikalischen Erkenntnisse als erfa
ein Spätes und Letztes bilden (ja durch Bereich
erfahrungsmäßigen Wissens sogar wieder umgestoßen we
so läßt sich nun das über die Prinzipien Gesagte um so r
die Definitionen der Physik übertragen.

Die Prinzipien enthalten Sätze (genauer: Urteile), die
enthalten Begriffe (Vorstellungen); und da man erst über das
was man sich in bestimmter Weise vorgestellt hat, so scheint
strengen Darstellung der Physik die Definitionen ebenso den Pri
aus ihnen abgeleiteten Sätzen) vorangeschickt werden zu müssen,
die Definitionen den Axiomen (und diese den Lehrsätzen) vorans
aber ist zu sagen, daß in der wirklichen Entwicklung des physika

wiewohl sich der Begriff einer gleichmäßig beschleunigten Bewegung freilich rein mathematisch aus den Vorstellungselementen der Zeitstrecken, Wegstrecken, Geschwindigkeiten aufbauen liefs, so entstand doch das Bedürfnis nach dieser Begriffsbildung erst im Hinblick auf die tatsächlichen Erscheinungen beim freien Fall und beim Falle auf schiefen Ebenen.

Was hier von der Definition gesagt wurde, gilt ebenso von der Einteilung (L § 94. „Definition und Einteilung als Formen systematischer Begriffsbildung“ — hierzu § 95. „Wissenschaftliche Namengebung“; vgl. hier die allmählich völlige Umbildung des Begriffes „Säure“; über den in ihrer Definition liegenden „logischen Zirkel“ vgl. Nr. 38).

Das im Vorstehenden über Prinzipien und Definitionen (über physikalische Urteils- und Begriffsbildung) Gesagte zeigt sich in noch umfassenderer Weise in dem Unterschied, ja dem scheinbar manchmal gegensätzlichen Verhältnisse der experimentellen und theoretischen Physik.

Diese Unterscheidung entspricht praktisch genommen dem Bedürfnisse nach Arbeitsteilung, indem sowohl die experimentellen, wie die mathematischen Methoden der physikalischen Forschung sich sehr vermännigfaltigt haben. — Aber auch theoretisch kommt in jenem besonderen Unterschiede der beiden Arbeitsrichtungen der Physik der allgemein logische Unterschied zwischen der deduktiven (progressiv-synthetischen) und der induktiven (regressiv-analytischen) Gedankenbewegung zum Ausdruck. Die theoretische Physik stellt die höhere Stufe des physikalischen Erkennens dar, die aber ohne die experimentelle völlig in der Luft schweben würde. Nur die streng logische Form verlangt es, daß dann die rein theoretische Behandlung der Physik unter scheinbarer Übersprungung der vorausgegangenen Erfahrungen mit scheinbar ganz willkürlichen „Definitionen“ und scheinbar ebenso willkürlichen „Annahmen“ ihre Betrachtung einsetzt und erst nachmals wieder durch allseitige Deduktionen aus jenen frei gewählten Ausgangspunkten mit den experimentellen Einzeltatsachen Föhlung gewinnt; womit dann nachgewiesen ist, daß jene Ausgangspunkte doch nicht willkürlich gewählt und durch die Natur selbst vorgeschrieben waren.

β. Aus der deduktiven Logik.

38. Einige Begriffe und Kunstausrücke aus der logischen Elementarlehre.

1. Definition. Konstitutive und konsekutive Merkmale. Notwendige und ausreichende Bedingung. — Z. B. wir **definieren** als „freie Achse“ eines starren Körpers eine solche, in Bezug auf welche die bei der Rotation um diese Achse auftretenden Fliehkräfte einander das Gleichgewicht halten. — Aus dieser allgemeinen Definition selbst ist aber noch nicht zu ersehen, was für eine besondere Lage eine Rotationsachse im Körper haben muß, damit sie diesem **konstitutiven Merkmale** einer freien Achse Genüge leiste, ja nicht einmal, ob überhaupt auch nur eine solche Achse in einem Körper von beliebiger Gestalt und Massenverteilung möglich ist. Es gilt also diejenigen **konsekutiven Merkmale** aus jener Definition und aus den Prinzipien der Mechanik abzuleiten, die für das Bestehen einer freien Achse „notwendig und ausreichend“ sind.

Notwendig, aber nicht ausreichend wäre z. B. die Bedingung, daß die Drehachse durch den Schwerpunkt geht.

Ausreichend, aber nicht notwendig wäre z. B. die Bedingung, daß die Drehachse eine Symmetrale des Körpers (in Bezug auf Gestalt und Massenverteilung) sei.

Die richtige **notwendige und ausreichende Bedingung** dafür, daß eine Achse eine „freie“ sei, ergibt sich als Folgesatz eines sehr allgemeinen Satzes der höheren Mechanik starrer Systeme. Denken wir uns nämlich vom Schwerpunkt eines Körpers von beliebiger Gestalt und Massenverteilung nach allen Richtungen Gerade gelegt und auf ihnen vom Schwerpunkt Strecken aufgetragen, die den reziproken Quadratwurzeln aus den Massenmomenten des Systems für je eine dieser Geraden proportional sind, so bilden die Endpunkte dieser Strecken je einmal die Oberfläche eines Ellipsoids („Zentralellipsoid“); dieses geht in besonderen Fällen in ein Rotationsellipsoid (z. B. für einen homogenen Zylinder bzw. in eine Kugel (z. B. für eine Kugel, einen Würfel) über. Die gesuchte notwendige und ausreichende Bedingung für die freie Achse ist dann, daß sie mit einer der drei Hauptachsen des Zentralellipsoids zusammenfalle. — Soll die freie Achse überdies eine stabile Achse sein, so muß sie mit der längsten Achse des Zentralellipsoids zusammenfallen. Anwendung dieser Bestimmungen z. B. auf ein homogenes, rechtwinkliges Parallelepiped.

Analoge (viel einfachere) Anwendung der Ausdrücke „notwendig und ausreichend“ für das Gleichgewicht und speziell das stabile Gleichgewicht eines starren Körpers in Bezug auf reine Translation.

2. Logisch identische und logisch äquivalente Sätze. — Logisch identisch sind zwei Sätze, die sich nur durch ihren Wortlaut, nicht durch das in ihnen ausgedrückte Urteil unterscheiden. Z. B. die folgenden Sätze a) und a')

Satz a): **Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so hat er keine Beschleunigung.**

Satz a'): **Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so hat er konstante Bewegung (einschließlich des Grenzfalles Ruhe).**

Fragt man dagegen, ob im Vergleich zum Satz a) der

Satz b): **Hat ein Massenpunkt Beschleunigung, so wirken auf ihn Kräfte,** eine neue physikalische Wahrheit darstelle oder nicht, so wird ein logisch Ungeschulter zunächst unschlüssig sein. Um zu zeigen, daß die Sätze a) und b) **logisch äquivalent** sind, ist die wiederholte Anwendung der allgemeinen logischen Regeln¹⁾ der Schlüsse nach Äquipollenz [aus SaP folgt *per aequipollentiam* $Se(nonP)$] und nach Konversion [aus SeP folgt *per conversionem* PeS] ausreichend.

Beginnen wir mit dem Satz b): **Hat ein Massenpunkt Beschleunigung, so wirken auf ihn Kräfte.** Mit ihm ist logisch identisch: Ein Massenpunkt mit Beschleunigung ($B = S$) unterliegt Kräften ($K = P$); also lautet Satz b) symbolisch: BaK . — Aus diesem Satz b) folgt *per aequ.* $Be(nonK)$, hieraus *per contr.* $(nonK) e B$ — also Satz a).

Beginnen wir umgekehrt mit dem Satz a): **Wirkt auf einen Massenpunkt keine Kraft, so hat er keine Beschleunigung,** symbolisch $(nonK)a(nonB)$, so folgt aus diesem Satz a) *per aequ.* $(nonK)e(nonnonB)$ oder $(nonK)aB$; ferner hieraus *per contr.* $Be(nonK)$, endlich hieraus *per aequ.* $Ba(nonnonK)$ oder BaK — also Satz b).

¹⁾ Dabei bedeuten die Symbole S und P Subjekt und Prädikat, a allgemeine Bejahung, e allgemeine Verneinung; also

SaP heißt: Alle S sind P .

SeP heißt: Kein S ist P .

Es soll nicht geleugnet werden, daß der gesunde Menschenverstand auch ohne die hier vorgezeigten logischen Krücken an sein Ziel gelangen kann. Dieses Ziel besteht diesmal darin, einzusehen, daß das Trägheitsgesetz a) und das Beharrungsgesetz b) nur „zwei Seiten“ eines und desselben Sachverhaltes — ohne Gleichnis: daß sie logisch äquivalent (nicht logisch identisch) sind.

3. Progressiver und regressiver Beweis. — **Progressiv** (synthetisch) heißt derjenige Beweisgang, welcher von anerkannten Sätzen durch Schlüsse oder Schlussketten zur Thesis als letzter Conclusio führt; **regressiv** (analytisch) heißt der Beweisgang, welcher zeigt, daß aus der Thesis anderweitig als richtig erkannte Sätze mit Notwendigkeit folgen.

Z. B. Der Beweis der goniometrischen Grundformel $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, welcher nur auf dem pythagoreischen Lehrsatz $a^2 + b^2 = c^2$ und den Definitionen $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ und $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ beruht, läßt sich auf folgende zwei Arten darstellen:

Progressiv: $a^2 + b^2 = c^2$ $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ <hr style="width: 100%;"/> $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad q. e. d.$	Regressiv: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ $a^2 + b^2 = c^2$
--	---

Auch in der Physik wird bald die eine, bald die andere Richtung des Beweisganges eingehalten (vgl. LA 42). Da aber in der Physik als empirischer Wissenschaft (im Gegensatz zur Mathematik als apriorischer) immer solche Tatsachen (und die ihnen entsprechenden Sätze), die für unser Erkennen die früheren (*πρότερον πρὸς ἡμᾶς*) sind, der Sache nach selbst schon hervorgegangen sind aus weiter zurückliegenden Realgründen (*πρότερον τῇ γένεσι*), so findet in der Physik ein eigentliches „Beweisen“ (ähnlich dem der Mathematik) überhaupt nicht statt (vgl. oben Nr. 37 das über die schiefen Ausdrücke „Pendelbeweis“, „Linsenbeweis“ Gesagte). Führt man aber die physikalischen Prinzipien, von denen der Beweis als solcher ausgeht, zuerst nur als Annahmen ein, so kann von ihnen aus in progressiver Richtung zu neuen Folgerungen vorgeschritten werden: eben darum müssen aber die so „bewiesenen“ Sätze nachmals erst noch durch die Erfahrung verifiziert werden, wodurch dann auch erst für diese Annahmen der regressiv Beweis erbracht ist.

4. Logische Zirkel. — Ein Beispiel eines **Zirkels im Definieren** gibt das ineinandergreifen der beiden Definitionen für „Säure“ und „Salz“ (§ 217). Ein Beispiel eines **Zirkels im Beweisen** gibt NEWTONS Mondrechnung, LA 44. — Diese beiden Beispiele zeigen, daß die Physik gegen Zirkel der einen und der anderen Art nicht ebenso schlechterdings ablehnend sich zu verhalten braucht, wie die Mathematik. Dies rechtfertigt sich aus dem Unterschied zwischen dem apriorischen Charakter der Mathematik und dem empirischen der Physik; denn die Mathematik hat nur mit Beziehungen zwischen den von ihr durch Definitionen und Annahmen eingeführten Vorstellungsgegenständen, die Physik dagegen mit den wirklichen Dingen zu tun, an deren Existenz zu glauben wir letztlich durch unsere Sinneswahrnehmungen (im Gegensatz zu bloßen Halluzinationen und sonstigen Einbildungen) genötigt und berechtigt sind.

b) Aus der Psychologie (und Physiologie).

39. Die allgemeinen Aufgaben der physikalischen, der physiologischen und der psychologischen Empfindungslehre.

In die Untersuchung der Empfindungen von Temperaturen, Klängen, Farben u. s. w. teilen sich die Physik, die Physiologie und die Psychologie; so unterscheidet man z. B. eine physikalische, eine physiologische und eine psychologische Optik (vgl. §§ 85, 114; Nr. 43, 44).

Auch der physikalisch und physiologisch ganz Ununterrichtete denkt sich bei den Worten Licht (Farbe, Rot, Blau u. s. w.), Schall (Geräusch, Knall, Klang Ton *a*!, Tonleiter u. s. w.), Wärme (Hitze des Ofens, Kälte des Wassers u. s. w.) etwas ganz Bestimmtes. Wollen wir nur diese, schon dem Alltagsleben geläufigen Begriffe (ganz absehend von unserem späteren Wissen über die physikalischen und physiologischen Bedingungen für das Auftreten z. B. von Lichtempfindungen) in Definitionen fassen, so können wir nur sagen: **Licht** im psychologischen Sinne ist der **Inhalt unserer Gesichtsempfindungen** (vollständiger: Licht ist der Gegenstand unserer Gesichtswahrnehmungen, wie er uns aus den Inhalten unserer Gesichtsempfindungen bekannt ist); ähnlich **Schall**, **Wärme** der **Inhalt unserer Gehör-, bzw. Wärmeempfindungen**.

Die rein psychologische Empfindungslehre beschränkt sich auf die Anführung der einzelnen Gattungen und Arten der Empfindungsinhalte und auf die **Beschreibung** ihrer einzelnen **Eigenschaften**; z. B., daß die Tonhöhe eines Klanges eine Qualität, sein Laut- oder Leisesein eine Intensität, seine Dauer eine zeitliche Bestimmung sei u. s. f. — Ferner: Reihen von Empfindungsmerkmalen.

Die Physik als solche dagegen hat es nicht mit den Empfindungen selbst, sondern mit den **äußeren Empfindungserregern** zu tun, z. B. den Schallwellen, den Lichtwellen, und weiterhin mit den solche Wellen erregenden Schwingungen (der Teilchen schwingender Saiten, glühender Gase u. s. f.). Jene „**physikalischen Reize**“ erregen ihrerseits die Empfindungsorgane (Auge, Ohr, Tastnerven u. s. w.), deren **Funktionen** zu beschreiben und zu erklären Aufgabe der physiologischen Empfindungslehre ist. Diese physiologischen Funktionen bilden ihrerseits die „**physiologischen Reize**“ für das schließliche Auftreten der Empfindungen selbst.

Es liegt also eine dreigliedrige Kausalkette vor: **Physikalischer Reiz** (I — z. B. Luftschwingung); **physiologischer Reiz** (II — z. B. Schwingungen des Trommelfelles bis zu den Schwingungen der peripheren Gehörnervendigungen und den Vorgängen im Gehörnerv bis zu den zentralen Gehörnervendigungen); **Empfindung** (III — z. B. Hören eines Klanges.)

Die physikalische Erforschung der Empfindungserreger sucht sich von den physiologischen und psychologischen Teilbedingungen, von welchen das Eintreten bestimmter Wärme-, Schall-, Lichtempfindungen mit abhängig ist, möglichst unabhängig zu machen, indem sie z. B. Temperaturen statt nach der Wärmeempfindung nur nach dem Stande des Thermometers, die Intensität von Lichtstrahlen mittels des Photometers u. s. w. beurteilt. Ein Physiker, welcher eine ihm eingesendete Stimmgabel darauf zu prüfen hat, ob sie im Normal- a^1 tönt, achtet kaum oder gar nicht darauf, wie die Gabel klingt (wogegen der Klavierstimmer oder Violinspieler beim Stimmen seines Instrumentes direkt die Tonhöhe der Saite mit der der Stimmgabel vergleicht); sondern indem sich der Physiker der Methode der Schwebungen bedient, achtet er statt auf die Tonhöhe (Tonqualität) nur auf die ab- und zunehmende Intensität des von beiden Gabeln zusammen erregten Schalles (desgleichen bei der Methode der Lissajouschen Figuren auf deren wechselnde oder bleibende Gestalt). Ebenso meint der Physiker, wenn er von einem bestimmten Rot spricht, nicht ein Rot, welches genau so aussieht, wie ein gegebenes rotes Papier oder dergl.; auch nicht, ob es ein reines Rot oder ein Rot mit einem Stich ins Gelbe, ein gesättigtes oder nicht gesättigtes Rot ist, sondern er bestimmt das Rot durch die Nachbarschaft zur Fraunhoferschen Linie A oder a oder B u. s. f., oder er charakterisiert das Rot durch die Wellenlänge. In diesem Sinne kann auch ein Farbenblinder von bestimmten Farben sprechen.

Durch solche physikalische Methoden ist es also möglich geworden, sich von der unmittelbaren Rücksicht auf die jeweiligen Sinnesempfindungen zum Teil frei zu machen; immerhin nur zum Teil: denn das An- und Abschwellen der Intensität bei den Stimmgabelschwebungen erkennen wir doch wieder nur durch das Hören, die Lage bestimmter Farbennüancen neben einer bestimmten Fraunhoferschen Linie nur durch das Sehen, desgleichen den Stand des Thermometers u. s. f.

Wenn aber so der Physiker nicht mehr darauf angewiesen ist, auf die Qualitäten seiner Sinnesempfindungen zu achten, so versteht es sich doch von selbst, daß auch für ihn diese Sinnesqualitäten nicht aufhören, als dasselbe weiter zu existieren, als was sie jedem Nichtphysiker von jeher bekannt waren. Z. B. Auch der Physiker kauft sich eine Konzertkarte, nicht, damit er Schwingungen, sondern damit er Klänge höre. — Häufig irreführend war für die richtige Würdigung der kinetischen Theorien der Wärme, des Schalles und des Lichtes der Ausdruck: „Wir haben in den hypothetischen Bewegungen der Gasmoleküle nur ein Bild für die wirklichen Wärmezustände“. Denn niemand glaubt in den schwingenden Molekülen ein auch noch so entfernt ähnliches Bild der gegebenen Wärmeempfindung zu haben; sondern jene hypothetischen Bewegungen sollen ja nicht in einer Ähnlichkeits-, sondern in einer Kausalbeziehung [also nicht in einer Vergleichsrelation, sondern in einer Notwendigkeitsrelation, vgl. I., § 25 und oben, S. 875, Nr. 35] zur Wärmeempfindung stehen.

Nur mit diesen Einschränkungen also gilt die zusammenfassende Bezeichnung „Physik der Sinnesqualitäten“ für die Lehre von der Wärme, vom Schall und vom Licht (S. 251 ff.). Allgemein ist in dem Gesetz der spezifischen Sinnesenergien (vergl. Nr. 44, S. 814) ausgesprochen, inwieweit eine Sinnesempfindung von dem physiologischen und von dem physikalischen Reiz abhängig ist und inwieweit nicht. Die Besinnung auf die völlige Verschiedenheit der schließlic erregten Sinnesempfindung von ihren physiologischen und physikalischen Vorbedingungen führt zur unwidersprechlichsten Widerlegung einerseits aller „materialistischen“, andererseits aller „phänomenologischer“ Mißverständnisse.

Von solchen weitausschauenden Beziehungen zwischen den Wissenschaften

vom Physischen und Psychischen zwar unabhängig, aber doch eine erste grobe Beziehung zwischen ihnen herstellend, sind die zunächst kurz zu besprechenden Untersuchungen über „Empfindlichkeit“.

40. Empfindlichkeit. — Die Messung des Psychischen.

Da das Wort „Empfindlichkeit“ von „empfinden“ kommt, und Empfinden ein psychischer Vorgang ist („Empfindungen“ sind Wahrnehmungsvorstellungen von möglichst einfachem physischem Inhalt, Ps. § 8), so enthält der physikalische Begriff der Empfindlichkeit einer Wage, eines Thermometers und jedes anderen physikalischen Meßinstrumentes einen mahnenden Hinweis auf die Empfindlichkeit unserer Sinnesorgane und auf die Unterscheidungsfähigkeit unserer Sinnesurteile. Für diese Empfindlichkeit im physiologischen und psychologischen Sinne haben FECHNER (1860) und Spätere bestimmte Maßmethoden entwickelt und durchgeführt (Ps. § 29 und § 36) und dadurch der modernen Psychologie ein neues und weites Forschungsgebiet erschlossen.

Z. B. Der Orgelbauer APPUN und der Physiologe PREYER haben die „Unterschiedsempfindlichkeit“ für Tonreize untersucht und fanden sich in starken Töne von der Schwingungszahl $r_1 = 500$ und $r'_1 = 500,3$ (nahe dem Ton b') nicht unterscheiden; man sagt dann: der eben noch merkliche relative Reizunterschied in dieser Reizregion sei $\frac{r'_1 - r_1}{r_1} = \frac{500,3 - 500}{500} = 0,0006$. — In der um eine Oktave höheren Reizregion betrug der eben noch merkliche relative Reizunterschied $\frac{r'_2 - r_2}{r_2} = \frac{1000,6 - 1000}{1000} = 0,0006$. Indem nun als Maß der Unterschiedsempfindlichkeit die reziproken Werte jener eben noch merklichen relativen Reizunterschiede gewählt werden, beträgt für diese Versuchspersonen

in der Tonregion b^1 die relative Unterschiedsempfindlichkeit $\frac{1}{0,0006} = 1666$.

in der Tonregion b^2 die relative Unterschiedsempfindlichkeit $\frac{1}{0,0006} = 1666$.

Wäre in dem angeführten Beispiel (etwa für andere Beobachter) in der höheren Reizregion statt des Tones mit der Schwingungszahl 1000,6 erst der mit 1000,6 von dem Ton der Schwingungszahl 1000 unterschieden worden, so hätte sich ergeben $\frac{r'_2 - r_2}{r_2} = \frac{1000,6 - 1000}{1000} = 0,0006$. Es wäre also dann die Unterschiedsempfindlichkeit in der einen und in der anderen Reizregion die gleiche, nämlich 1666; und dies wäre ein Beispiel zu der von FECHNER als „Webers Gesetz“ bezeichneten Beziehung, die sich zuerst bei WILHELM WEBERs Versuchen über eben merkliche Gewichtsunterschiede (s. u.), über Augenmaß u. s. w. mehr oder minder annähernd gültig zeigte, und von der FECHNER erkannte, daß sie für die meisten Sinnesgebiete in mehr oder weniger großem Umfange gilt; in einfacher Formulierung lautet

Webers Gesetz: Die relative Unterschiedsempfindlichkeit ist unabhängig von der absoluten Reizgröße; oder etwas ausführlicher: **Die relative Unterschiedsempfindlichkeit ist für dieselbe Empfindungsgattung (z. B. Licht, Druck) und für dieselben Empfindungsmerkmale (Intensität, Qualität u. s. w.) in verschiedenen Reizregionen die gleiche.**

So fand WILHELM WEBER (1845), daß man bei bewegter Hand noch eine Verschiedenheit von 100 und 110 g, ferner eine von 200 und 220 g, von 300 und 330 g u. s. w. bemerkt, also die relative Unterschiedsempfindlichkeit überall 10 ist, außer bei allzu kleinen (der „Reizschwelle“ nahen) und allzu großen (der „Reizhöhe“ nahen) Gewichtsempfindungsreizen.

Aus Webers Gesetz glaubte FECHNER weiterhin eine mathematische Beziehung zwischen Empfindung und Reiz aufstellen zu können, deren einfachster Typus wäre $e = \log r$. Da nämlich z. B. den nach geometrischer Reihe steigenden Schwingungszahlen 1, 2, 4, 8, 16 . . . die immer gleichen Tonintervalle je einer Oktave entsprechen, also gleichsam eine arithmetische Reihe bilden, so wäre die graphische Darstellung für die Zuordnung dieser beiden Reihen eine logarithmische Kurve (math. Anh. Nr. 10, 17). Doch kann man nicht von den Empfindungen selbst sagen, daß sie den Logarithmen der Reize zugeordnet sind, sondern nur für die Größen der Verschiedenheiten von Empfindungspaaren gilt ein logarithmisches Gesetz in Bezug auf die Reize. So sind z. B. die gleichen musikalischen Intervalle einer Oktave nicht gleiche Empfindungsverschiedenheiten; denn in sehr tiefen und sehr hohen Lagen erscheint uns die Verschiedenheit eines Tones von seiner Oktave viel weniger groß, als in mittlerer Tonlage. — So hat denn auch die von FECHNER auf Grund jener logarithmischen Maßformel erhoffte Messung des Psychischen (und zwar ein indirektes Messen des Psychischen nach den direkt oder indirekt gemessenen physikalischen Reizen) sich bisher nicht verwirklicht, aber es ist doch eine mittelbare Messung nach den Relationen zwischen psychischen Elementen angebahnt. — (Näheres hierüber Ps. § 29 und § 36.)

Einige Empfindlichkeitsgrößen.

I. Absolute Empfindlichkeiten („Reizschwellen“): In der mittleren Tonregion genügt zur Erregung einer Schallempfindung eine kinetische Energie von weniger als 10^{-8} Erg (nach BOLTZMANN und TÖPLER und neuestens wieder nach ZWAADENAKER). — LANGLEY bestimmte die Empfindlichkeit des Auges für Strahlen mittlerer Wellenlänge, indem er es nach längerer Dunkeladaption und 1 m Entfernung einen 1 mm breiten Spalt beobachten ließ, der mehrmals für etwa $\frac{1}{4}$ sec schwach erhellt und dann wieder verdunkelt wurde. So ergab sich, daß die während $\frac{1}{2}$ sec dem Auge zugeführte Energie nur $\frac{1}{35}$ Milligramm-Milliontelmillimeter ($\frac{1}{35}$ mg $\mu\mu = 28 \cdot 10^{-10}$ Erg) betrage. Für Rotorange oder Violett war schon eine 200 mal so große Energie zum Erregen eben merklicher Empfindungen nötig (die Unsicherheit der Berechnung schätzt LANGLEY auf 100 Proz.)

II. Die Unterschiedsempfindlichkeit des Auges ist für die verschiedenen Teile des Spektrums sehr verschieden, z. B. klein bei Rot (so daß der größere Teil im Rot, trotz sehr verschiedener Wellenlängen, nur fast unmerklich verschiedene Empfindung gibt), am größten in Gelb und dann wieder in Blaugrün. Innerhalb des ganzen Spektrums werden etwa 160 (unter sehr günstigen Bedingungen höchstens 500) Farbentöne voneinander unterschieden, wozu noch die vielen Unterschiede in ungesättigten Farben und sonstigen Mischfarben kommen.

Durch die kunstvollen Meßinstrumente der Physik ist es gelungen, die Empfindlichkeit der unbewaffneten Sinnesorgane durchweg um das Hundert- oder Tausendfache zu übertreffen. Z. B. Unsere wägende Hand schätzt ein Gewicht auf 10 Proz. genau, die Empfindlichkeit der Wage ist $2 \cdot 10^7$ so groß. Unterschiede im Luftdruck spüren wir erst bei Bergbesteigungen, Ballonfahrten; das Barometer zeigt 10^{-5} at. Räumliche Abstände unterscheiden wir mit dem Tast-

sinn der Zunge von 1 mm an; das Auge unterscheidet bei 10 cm Entfernung von $\frac{1}{40}$ mm, das Mikroskop ist noch 200 mal so empfindlich. Der Farbensinn des Auges unterscheidet im Spektrum etwa 160 (nach anderen Angaben etwa 500) Abstufungen, ein Beugungsgitter und Bolometer dagegen 40 000 Abstufungen. Der Zeitsinn unseres Ohres unterscheidet noch $\frac{1}{500}$ sec. Chronoskope sind 300 000 mal so empfindlich; unser Temperatursinn unterscheidet noch etwa $\frac{1}{10}^{\circ}$ C. (manchmal $\frac{1}{10}^{\circ}$ C.), das Bolometer ist 200 000 mal so empfindlich.

41. Die Vorstellungselemente der Mechanik: Raum, Zeit, Spannung.

So wie sich die Physik der Wärmeerscheinungen, der Schall- und Lichterscheinungen gründen muß auf bestimmte Wärme-, Schall-, Lichtempfindungen, müssen sich auch für die Mechanik bestimmte Gruppen von Vorstellungsinhalten namhaft machen lassen, auf welche alle noch so zusammengestrichen und abstrakten Begriffe dieses Gebietes letztlich sich aufbauen lassen.

Man pflegt als Gegenstand der Mechanik gewöhnlich überhaupt nur die „Bewegungen“ zu bezeichnen. Dabei ist aber schon die Vorstellung von „Bewegung“ offenbar noch kein letztes Element, sondern weist zurück auf die Vorstellungen von Raum und Zeit.

Die Psychologie der Raumvorstellungen weist ihrerseits nach, was an dem als die letzten Elemente zu betrachten sind. Erfahrungsmäßig psychologisch genommen, sind es die kleinsten, eben noch merklichen Flächen- (nach Hume schon dreidimensionale Raum-) Elemente, welche wir eben noch als ausgedehnt namentlich in unseren Gesichts- und Tastempfindungen bemerken können. In künstlich logischer Bearbeitung gehen wir über diese psychologischen Raumelemente noch hinaus zum Begriffe des mathematischen Punktes. — Der Abstand zweier Punkte stellt schon eine Relation, nämlich eine örtliche Verschiedenheit dieser zwei Punkte, dar. Außer dem Abstände aber begründen zwei Punkte auch noch die Vorstellung einer Richtung. — Liegen drei Punkte A, B, C so, daß die Richtung AB gleich der Richtung BC ist, so sagen wir, die drei Punkte liegen in einer „Geraden“. Erst unendlich viele Punkte „bilden“ aber eine Gerade. — Ähnlich gestaltet sich die Analyse und Synthese aller jener Unzahl räumlicher Gebilde, welche schon die vorwissenschaftlichen Raumanschauungen und weiterhin die Geometrie, Phronomie, Dynamik u. s. f. wissenschaftlich behandeln.

Die Begriffe eines „absoluten Raumes“ (und der „absoluten Bewegung“) bilden ein bis heute nicht entschiedenes Problem aus dem Grenzgebiete der Geometrie, der Physik und der Philosophie. — Sicher ist, daß wir beide Begriffe, wenn überhaupt, so nicht aus direkten Wahrnehmungen haben können; denn schon aus dem Trägheitsgesetz folgt, daß sich eine konstante Bewegung mit irgend einer Richtung oder Geschwindigkeit nicht durch irgend eine Kraft (also auch nicht durch eine, die auf eines unserer Sinnesorgane wirken könnte) von uns immer für einer anderen konstanten Bewegung unterscheidet. Das Problem beginnt aber wesentlich bei einer Abschätzung darüber, wie weit wir in Ermangelung direkter Wahrnehmung von absoluten Raumbestimmungen indirekte Kenntnis durch Schlüsse auf solche Bestimmungen ziehen können und neben müssen, falls auf gegebenem relative Ortsbestimmungen und Bewegungen das relationstheoretische Grundgesetz: „Keine Relation ohne (in letzter Instanz) absolute Fundamente“ Anwendung findet.

Die Zeitvorstellung kann nicht im eigentlichen Sinne auf „Zeit-Empfindungen“ zurückgeführt werden; denn jede noch so kleine Zeitstrecke erstreckt sich schon über die Gegenwart hinaus, entweder nach der Vergangenheit oder in die Zukunft oder nach beiden Richtungen zugleich. „Empfinden“ aber im strengen Sinne können wir nur etwas streng Gegenwärtiges. Die Hauptquelle der Zeitvorstellungen sind aber unsere Erinnerungsvorstellungen (und wahrscheinlich erst auf Grund dieser die Erwartungsvorstellungen). — Wie beim Raume der „mathematische Punkt“, so ist für die Zeit der Zeitpunkt das letzte logisch auszusondernde Element; und aus solchen Elementen bauen sich dann wieder die Relations- und Komplexionsvorstellungen Zeitdistanz, Zeitstrecke, Dauer u. s. w. auf. — Gemessen wird die Zeit für die wissenschaftlichen Zwecke der Physik bekanntlich durch den Stundenwinkel der Erde (§ 176 und Anh. Nr. 4); deshalb ist aber die Zeit ebensowenig dieser Stundenwinkel, wie etwa der hohe Wärme-grad, welchen wir bei Annäherung der Hand an siedendes Wasser empfinden, der Teilstich 100 (oder die Raumstrecke zwischen 0° und 100°) der Thermometerskala ist.

Reaktionszeiten. — Bekanntlich sind wir nicht imstande, z. B. die Ausführung eines Kommandos genau in dem nämlichen Zeitpunkt zu beginnen, in dem es ausgerufen wird; denn es vergeht zuerst eine Zeit für das Auffassen des Gehörten, dann eine für die Innervation der entsprechenden Muskelbewegung. Beiderlei Zeiten können mittels Chronoskop (math. Anh. Nr. 4) gemessen werden; sie betragen je nach der Art des Reizes, der Geübtheit, dem Ermüdungszustand u. s. w. bestimmte Bruchteile von Sekunden. — Insbesondere sind diese von der Psychophysik vielfältig durchexperimentierten Erscheinungen auch praktisch wichtig geworden für jeden Beobachter des zeitlichen Eintritts von Erscheinungen, z. B. des Durchgangs von Sternen durch das Fadenkreuz des Fernrohrs. Es hat sich hierbei gezeigt, daß verschiedenen Beobachtern eine verschiedene „persönliche Gleichung“ zukommt, und derjenige Beobachter ist ein guter, bei dem die Zeitverschiebung zwischen dem wirklichen Eintritt der Erscheinung und dem von ihm (z. B. durch Niederdrücken eines Telegraphentasters) angegebenen sich recht nahe einem konstanten Werte hält, mag dies übrigens auch ein ziemlich großer sein. Sogar eine „negative Zeitverschiebung“ kommt bei manchen Beobachtern vor, indem sie in bestimmter Erwartung, z. B. des dem Fadenkreuz schon nahen Sternes, immer zu früh markieren; was ebenfalls nicht schadet, falls nur auch diese Zeitdifferenz sich als konstante herausstellt.

Die im § 14 als das dritte Element mechanischer Erscheinungen angeführten „mechanischen Spannungen“ erkennen wir in den **Spannungsempfindungen**, namentlich der Muskeln, Sehnen, Gelenke, auch der Haut. Wie diese Empfindungen qualitativ beschaffen sind, läßt sich ebensowenig beschreiben oder definieren, als wie Rot aussieht, wie der Ton *c* klingt u. dergl.; wohl aber kennt jeder diese Spannungsempfindungen ebenso gut aus eigener Erfahrung, wie die Gesicht-, Gehörs-, Wärmeempfindungen.

Es soll also keine Definition mehr, sondern schon wieder nur eine Bestimmung über das Entstehen dieser Empfindungen sein, wenn wir sagen: „Die Spannungsempfindungen treten ein, wo ein mit Tastorganen (dieser Ausdruck im weitesten Sinne, nicht nur für die Berührungsempfindungs-Organ der Haut verstanden) versehener Teil unseres Leibes in ein Massensystem eingeschaltet ist, innerhalb dessen mechanische Spannungen herrschen. Diese sind ihrerseits

in Zug-, bzw. Druckspannungen einzuteilen, denen ein Unterschied der Zug-, bzw. Druckempfindungen entspricht.“ — Solche Empfindungen haben wir, wenn uns z. B. ein fallender Körper auf die Hand stößt, aber qualitativ ähnliche auch dann noch, wenn er ruhig auf die Hand drückt.

Da die Schwerkraft auch an unserem eigenen Leibe angreift, so ergibt es bestimmte Empfindungen, welche man speziell als „**statischen Sinn**“ bezeichnet, der uns über die Stellung unseres Leibes und seiner einzelnen Teile zur Richtung der Schwere belehrt. — Im Groben sind es die Empfindungen des Gewichts der äußeren Teile unseres Leibes; im Feineren nach MACH und BREUER Empfindungen, die im Labyrinth des Ohres ihre speziellen Organe haben (§§ 93, 94) und zwar ist es teils das Gewicht der Hörsteinehen (Otolithen), das solche Empfindungen auslöst, teils der Stofs des Labyrinthwassers gegen die halbzirkelförmigen Gänge. Indem diese annähernd nach den drei Hauptebenen des Kopfes orientiert sind, können je nach Bewegungen in je einer dieser Ebenen oder in Zwischenlagen deutlich unterscheidbare Empfindungen ausgelöst werden; man darf sich aber nicht einbilden, daß hierbei die halbzirkelförmigen Gänge oder ihre Lagen selbst wieder empfunden werden (wie man ja auch z. B. nicht die Netzhaut und das Bild auf ihr empfindet; Nr. 44, S. 809).

42. Aus der psychologischen und physiologischen Wärmelehre.

Daß kalt, kühl, lau, warm, heiß eine Qualitätenreihe, und zwar eine von zwei verschiedenen Qualitätenarten (kalt-kühl einerseits, lau-warm-heiß andererseits) darstellt, ist psychologisch unbestreitbar und wird nicht umgestoßen durch den ebenfalls richtigen, aber nur auf die physikalischen Wärmezustände gehenden Satz: „Die Kälte ist nur ein geringerer Grad von Wärme“.

Gemeint ist mit letzterem Satz: Die in unseren Wärmeempfindungsorganen die Empfindung von kalt oder kühl bewirkenden Wärmezustände äußerer Körper unterscheiden sich nur graduell (nicht selbst wieder qualitativ) von solchen Wärmezuständen, die uns die Empfindungen von lau, warm, heiß hervorrufen. (Im Sinne der kinetischen Wärmehypothese z. B. unterscheiden sich die Geschwindigkeiten der Teilchen heißer Luft nur graduell von den Geschwindigkeiten der Teilchen kalter Luft).

Die beiden Reihen des Wärmeempfindungskontinuums weisen einen Nullpunkt auf, den man als physiologischen Nullpunkt zu bezeichnen pflegt, der aber zunächst eigentlich ein **psychologischer Nullpunkt** ist.

Bekanntlich erregt uns z. B. Wasser von 10°, 12° und 14° in der Hand noch die Empfindung von kühl, Wasser von 20°, 22° und 24° schon die Empfindung von warm. Dazwischen muß es also einen physikalischen Wärmegrad geben (etwa bei 15° C.), dem überhaupt keine Wärmeempfindung, weder eine solche der Kälte-, noch der Wärmereihe entspricht. — Dieser Nullpunkt verschiebt sich bekanntlich nicht unbeträchtlich nach oben, wenn wir nicht nur die Hand, sondern den ganzen sonst durch Kleider verwöhnten Leib in ein Bad tauchen. Es erregen dann auch 18°, 19°, 20° noch die Empfindung der Kühle, bei einem Wannenbad selbst noch 25°. Diese Wandelbarkeit des physiologischen Nullpunktes

weist auf die verwickelten physiologischen Bedingungen für das Zustandekommen dieser oder jener Wärmequalitätsempfindung hin. — Insbesondere auffällig sind hier alle Erfahrungen der **Wärmeadaptation**, d. i. die Anpassung unserer Wärmeempfindungsorgane, wie sie durch kurz vorausgegangene Berührung mit einem hinreichend weit unter bzw. über dem normalen physiologischen Nullpunkt liegenden Wärmegrade bewirkt wird; typisch hierfür ist LOCKES *Versuch* über das Eintauchen der erhitzten und der abgekühlten Hand in dasselbe laue Wasser.

Während im Bisherigen die Verschiedenheiten unserer Wärmeempfindungen als qualitative beschrieben wurden, sind doch auch Unterschiede der Intensität bei gleicher oder ähnlicher Qualität unverkennbar. Wir sprechen ja von starker Kälte, starker Hitze. Doch sei ebenfalls darauf aufmerksam gemacht, daß sich z. B. starke Kälte von schwächerer Kälte nicht nur der Intensität, sondern auch der Qualität nach (vielleicht auch durch quasi-räumliche und Tastqualitäts-Bestimmungen, „prickelnde, schneidende Kälte“) unterscheidet.

Die Unterschiedsempfindlichkeit für Wärmegrade kann in der mittleren Temperaturregion eine sehr feine sein.

So übertraf bei FECHNERS ersten Versuchen zur Bestätigung des Weberschen Gesetzes für Wärmeempfindungen seine unmittelbare Unterscheidungsfähigkeit sogar die Empfindlichkeit seines (noch Zehntelgrade anzeigenden) Thermometers.

Zur Streitfrage, ob die Wärmegrade eine Größenreihe darstellen oder nicht, ist vor allem wieder zu unterscheiden zwischen den psychologischen und den physiologischen Wärmezuständen. Für erstere gilt alles, was über psychologische Messung überhaupt gesagt wurde (Nr. 40). Daß aber in der Tat auch die physikalischen Wärmegrade eine Größenreihe bilden (und nicht nur konventionelle Zahlen an der Skala eines Thermometers aus beliebigen thermometrischen Substanzen), geht schon daraus hervor, daß sich die Angaben verschiedener Thermometer mittels verschiedener Korrekturen auf THOMSONS absolute Temperaturskala beziehen lassen und daß diese absolute Skala wegen ihrer Beziehung auf Reihen von mechanischen Arbeiten, deren Größencharakter von niemand bezweifelt wurde, selbst einer wenigstens mittelbaren Messung, nicht bloß einer Numerierung oder gar nur Benennung fähig ist.

Nach neueren physiologischen Untersuchungen fallen den einzelnen Tastnervenfasern-Endigungen in der Haut insofern ganz getrennte Aufgaben zu, als an bestimmten Punkten der Haut was immer für einem hinreichend scharf lokalisierten Reize eine Kälte-, an anderen eine Wärme-, an noch anderen eine Druckempfindung entspricht („Kälte-, Wärme-, Druckpunkte“).

43. Aus der psychologischen und physiologischen Akustik.

A. 1. Sowohl die Unterscheidung der **Geräusche** und **Klänge**, sowie innerhalb der Klänge die der **Klangfarbe** und der **Tonhöhen** betreffen qualitative Verschiedenheiten unserer Gehörsempfindungen. Dabei bilden die Tonhöhen eine eindimensionale Reihe; die graphische Darstellung des Tonempfindungskontinuums ist eine Linie.

Bekanntlich machen wir aber in der Musik keineswegs von diesem Kontinuum als solchem Gebrauch (ein stetiges Emporziehen eines Tons durch längere Tonstrecken macht den Eindruck des Heulens, und schon das Ineinanderschleifen von

Tonhöhen gilt dem Musikalischen als Unart); vielmehr liegt aller „Tonkunst“ folgende psychologische Tatsache zugrunde:

Die Musik hat aus dem Kontinuum möglicher Töne, von einem beliebigen Grundton ausgehend, ganz bestimmte **Intervalle** herausgehoben (in der gegenwärtigen europäischen Musik die der Ganz- und Halbtöne). Psychologische Beobachtungen und Versuche zeigen, daß zwischen je zwei Tönen der Tonleiter ein bestimmtes Empfindungsverhältnis besteht, das **STUMPF** als den Grad der **Tonverschmelzung** bezeichnet.

Die Verschmelzung ist die innigste für Grundton und Oktav, dann immer innig in absteigender Reihe für Grundton und Quint, Quart, Terz. Keine (oder keine?) Verschmelzung gehen ein: Grundton und Septim, Grundton und Sekund.

In dieser psychologischen Tatsache der Verschmelzungsgrade liegt auch der letzte psychologische Grund für die verschiedenen Grade der **Konsonanz** und **Dissonanz**.

Die von HELMHOLTZ gegebene Erklärung aus den Schwebungen der Partialtöne (vgl. LA 157) erklärt nur einen Teil des die Dissonanzen begleitenden Unlustgefühls; dagegen kann das positive Lustgefühl der Konsonanz nicht an dem bloßen Fehlen der Schwebungen erklärt werden.

2. Die Schallintensitäten bilden eine eindimensionale Reihe; ihre graphische Darstellung ist eine einerseits durch Null (entsprechend der völligen Stille) begrenzte, andererseits (nach der Richtung immer stärkerer *Forțe*) unbegrenzte Gerade für die denkbaren Tonstärken; dagegen für die wirklich hörbaren Tonstärken ein ebenfalls begrenztes Kontinuum schon deshalb, weil bei allzu starken Tonreizen das Empfindungsorgan beschädigt und unempfindlich (taub) wird. —

Auf die bisherigen psychologischen Beschreibungen¹⁾ der Schallempfindungen gründen sich nun die den Gegenstand der physikalischen Akustik bildenden

B. Beziehungen zwischen den Reihen der Schallempfindungsmerkmale und den Reihen der physikalischen Schallreize, nämlich:

1. Der psychologischen Unterscheidung der Schallqualitäten in Geräusche und Klänge entspricht physikalisch die Unterscheidung der den Schall erregenden Bewegungen in unperiodische und periodische. An den periodischen Bewegungen oder Schwingungen entspricht die Schwingungszahl der Tonhöhe, die Schwingungsform der Klangfarbe, die Schwingungsweite der Klangstärke.

Man beachte aber, daß der Periodizität der physikalischen Schwingungsvorgänge keinerlei merkbare Periodizität der bewirkten Klangempfindungen sondern eben nur ihre ruhig andauernde Qualität und Intensität entspricht. Schon deshalb ist es völlig unzulässig, in die Klangempfindungen als solche noch etwas von den Schwingungszahlen hineinzuverlegen; und eben deshalb wieder darf die wissenschaftliche Psychologie jene Zahlen und Zahlenverhältnisse nicht zur Erklärung der Tonvorstellungen, Tonurteile und Tongefühle heranziehen (wie es zur

¹⁾ Die ausführlichere deskriptive Psychologie der Schallempfindungen vgl. Ps. § 234.

zu häufig in der vermeintlichen Erklärung geschieht, daß uns Grundton und Oktav am meisten, Grundton und Quint schon weniger, Grundton und Sekund deshalb gar nicht als konsonant erscheinen, weil das Ohr an den einfachen Zahlenverhältnissen 1 : 2 und 1 : 3 ein größeres und kleineres Wohlgefallen, an den verwickelten 8 : 9 ein Mißfallen habe).

C. Indem die physiologische Funktion des Gehörorgans wesentlich im Mitschwingen der peripheren Enden des Gehörnerven (nebst den daran sich schließenden, bisher noch völlig unbekannten Vorgängen im Verlauf des Gehörnerven und an seinen zentralen Endigungen) besteht, ist dieses Organ wesentlich ein mechanischer Sinn für die physiologische Analyse aperiodischer und periodischer Bewegungen der Luft nächst dem äußeren Ohr (auch von ebensolchen Bewegungen des Schädelknochens, ausnahmsweise auch bei innerer Reizung des Gehörnerven, entsprechend den Gehörhalluzinationen).

Wählen wir als zusammenfassendes Beispiel für die physikalischen, physiologischen und psychologischen Vorgänge beim Hören das folgende: Drei Sänger singen in ein Klavier bei gehobenem Deckel und Pedal den Dreiklang *Es-G-B* etwa auf verschiedene Vokale *u, o, a*); nach gleichzeitigem Aufhören der Singtöne klingen aus dem Klavier gleiche Töne in gleicher Klangfarbe, und wir bemerken nicht nur die drei Grundtöne, sondern auch einige von den an jedem einzelnen Klang beteiligten Obertönen. Es fanden also folgende Zusammensetzungen (Synthesen) und Zerlegungen (Analysen) statt: 1. Eine physikalische Synthese der durch die drei Paare von Stimmbändern erregten Schwingungen in der einen Luftmasse zwischen den Sängern und den Saiten. 2. Eine physikalische Analyse der zusammengesetzten Schwingungen der Luft in die den einzelnen Saiten entsprechenden Grund- und Obertöne, und zwar jedes in entsprechender relativer Stärke. 3. Eine physikalische Synthese der durch diese Saitenschwingungen erregten Schwingungen der Luft bis zum Trommelfell, der Gehörknöchelchen und endlich des Labyrinthwassers. 4. Eine physiologische Analyse dieser zusammengesetzten Schwingungen des Labyrinthwassers durch die Fasern der *membrana basilaris* und Fortleitung der einzelnen Tonreize durch die einzelnen Fasern des Gehörnervs (eine solche Trennung auch noch in den Fasern und den entsprechenden Endorganen im Gehirn müssen wir, wiewohl wir die näheren physiologischen Vorgänge hierbei gar nicht mehr kennen, aus dem psychologischen Grunde annehmen, weil sonst ein nochmaliges Heraushören der einzelnen Teiltöne psychisch unmöglich wäre). 5. Eine psychische Synthese der einzelnen Teiltöne, infolge deren wir zunächst den Dreiklang und um so mehr die einzelnen Teiltöne jedes einzelnen der drei Klänge als etwas Einheitliches auffassen. 6. Eine psychische Analyse, insoweit wir durch Lenkung der Aufmerksamkeit die einzelnen einfachen Töne aus dem Zusammenklang heraushören.

14. Aus der psychologischen und physiologischen Optik.

A. Von den Bewußtseinsinhalten, die uns der Gesichtssinn vermittelt, sind 1. qualitativer Art die **Farben**, die neben dem **Farbenton** noch verschiedene **Sättigungsgrade** zeigen (z. B. reines Rot, weißliches Rot); 2. intensiver Art sind die größere oder geringere **Lichtstärke** (wobei die Ausdrücke „hell“ und „dunkel“ teils quali-

tative, teils intensive Merkmale bezeichnen). Hierzu kommen 3. die **räumlichen** Merkmale des Gesehenen; die Richtung „von Auge weg“ heisst **Tiefendimension**, alle zu dieser Richtung normalen Richtungen fallen in die **Flächendimensionen**.

Entsprechend der für die Physik sich empfehlenden Aufeinanderfolge von „geometrischer Optik“ (S. 323 ff.) und „Farbenlehre“ (S. 357 ff.), sei hier zuerst der „**Raumsinn** des Auges“ besprochen. — Man bezeichnet den Integrall aller durch den Gesichtssinn wahrnehmbaren Raumbestimmungen als Gesichtsräum, dies auch namentlich im Unterschied vom Tastraum. Diese beiden Sinne sind allen übrigen in ihren Leistungen als Raumsinne weit überlegen. — Ob der Gesichtssinn seine Raumauffassung erst dem Tastsinn sozusagen ablernt, oder ob die Entwicklung unserer Raumvorstellungen in der umgekehrten zeitlichen Ordnung erfolgt, oder ob endlich beiderlei Sinne gleich ursprüngliche Raumpfindungen haben, ist eine seit langem verhandelte psychologische Streitfrage; die Entscheidung neigt sich gegenwärtig immer mehr der dritten Theorie zu, dass auch im folgenden öfter von **Raumpfindungen**, speziell auch solchen des Gesichtssinnes, gesprochen werden darf.

B. Indem der Augapfel physikalisch wie eine Sammellinse zum Auffangen der physikalischen Bilder nach dem ersten und zweiten Linsenfall wirkt, lassen sich auch umgekehrt die physikalischen Teilbedingungen für ein räumlich scharfes Sehen auf die Bedingung für das Zustandekommen scharfer Netzhautbilder zurückführen. — Ihnen entsprechen namentlich auch alle physikalischen Einzelheiten der Akkommodation.

C. Von einer leblosen Linse und Dunkelkammer unterscheidet sich aber das lebendige Auge nicht nur α) dadurch, dass die Netzhaut (im Gegensatze zu der nur im übertragenen Sinne „lichtempfindlichen“ Platte im photographischen Apparat) dank ihrer Verbindung mit den Verzweigungen des Sehnerven Lichtempfindungen auslöst; sondern auch β) durch die Art, wie der Augapfel auf Lichtreize schon reflektorisch und dann auch mit grosser Feinheit willkürlich die passendsten Einstellungsbewegungen vornimmt (unter anderem auch bei der Akkommodation); endlich auch γ) durch die Art, wie das Doppelauge zu nicht bloß flächenhaften, sondern zu plastischen (auch nach der Tiefendimension Unterschiede aufweisenden „stereoskopischen“) Eindrücken gelangt.

Zu α). Wenn uns auch die physikalische und physiologische Optik lehrt, dass im Vergleich zum gesehenen Gegenstande das Netzhautbildchen verkehrt (verkleinert und flächenhaft gekrümmt) ist, so darf uns dies doch nicht zur an sich unberechtigten Frage verleiten, wie es komme, dass wir die Gegenstände aufrecht und nicht verkehrt sehen. Diese Frage ist unberechtigt, weil sie schon eine gewisse unrichtige Vormeinung einschließt, nämlich die, dass wir uns zuerst des Netzhautbildchens als solchen bewusst seien und erst aus diesem Netzhautbildchen die äusseren Gegenstände „konstruieren“, „projizieren“, „erschliessen“ u. dgl. m. Niemand aber, wenn er auch noch so gut sieht, aber nicht

von anderen gehört hat, daß er ein Netzhautbild hat, weiß auch nur das Geringste von diesem (es ist dies ebenso, wie wir den Zucker als etwas Süßes schmecken, ohne etwas von den chemischen Vorgängen in den Geschmackswärzchen zu spüren u. dergl. m.). — Eben hiermit aber tritt allerdings die andere, viel allgemeinere Frage auf, warum wir überhaupt, wenn sich unsere Sinnesorgane in bestimmten physiologischen Reizungszuständen befinden, bestimmte Empfindungen, u. a. auch Raumempfindungen und unter diesen wieder solche von Raumorten außerhalb der Raumorte unseres eigenen Leibes haben. Diese Frage ist nun zwar nicht unberechtigt, aber die Antwort auf die Frage kann nur lauten, daß es sich hier um letzte Tatsachen handelt, und daß es aller Voraussicht nach ebensowenig je gelingen wird zu „erklären“, warum wir z. B. mit beiden Augen, einen Lichtpunkt in 1 m Abstand von uns fixierend, diesen Punkt als in 1 m Abstand von uns befindlich erblicken, wie es ja auch wohl schwerlich jemals einzusehen sein wird, warum unser Ohr bei der Reizung durch 435 Schwingungen uns die Empfindung des Tones a^1 und nicht die eines anderen Tones oder gar die einer Farbe oder eines Geschmackes vermittelt. Es ist also z. B. beim Anblick der Spitze A einer Kerzenflamme (Fig. 349, S. 327) nicht weiter zu erklären, daß und warum wir in A den leuchtenden Gegenstand erblicken (denn wie sollten wir auch aus den durch die Hornhaut eingedrungenen, dann wiederholt gebrochenen Lichtstrahlen „zurückschließen“ können auf den Verlauf, den sie außerhalb des Auges von A her genommen hatten!). Wohl aber wird, wenn das Sehen von Gegenstandspunkten einmal als Tatsache hingenommen und zugegeben ist, das Sehen von Bildpunkten (B in Fig. 350 und 351, S. 327) verständlich, weil jetzt die Vorgänge im Auge und daher auch die Empfindungen ganz dieselben sind, wie wenn der Bildpunkt ein wirklich leuchtender Punkt wäre.

Zu β). Wenn wir uns in einem lichtlosen Raume befinden, und es blitzt seitlich von der Richtung, nach der wir zufällig die Augen gewendet halten, ein Lichtreiz auf, so wenden wir unwillkürlich das Auge dem Licht zu (dieser Bewegungsreiz ist kein unwiderstehlicher, aber immerhin ebenso lebhaft wie z. B. der, uns dort zu kratzen, wo es juckt). Dieser Trieb zur orientierenden Einstellung des Auges ist erst dann befriedigt und das Auge hält nunmehr unwillkürlich still, wenn die vom Lichtpunkt A durch den Kreuzungspunkt K gezogene Gerade in ihrer Verlängerung die lichtempfindlichste Stelle g der Netzhaut (die Netzhautgrube im gelben Fleck) trifft. Man sagt dann, das Auge fixiere den Punkt A . — Fig. 87 (a. f. S.). — Anteil der Aufmerksamkeit beim Fixieren.

Zu γ). **Stereoskopischsehen.** *Versuch:* Halten wir die rechte Hand flach ausgestreckt in die Median- (Symmetrie-) Ebene des Kopfes so, daß der Daumen dem Gesichte zugekehrt ist, so erblickt das rechte Auge den Handrücken, das linke Auge die Innenfläche der Hand. Es müssen also die beiden Netzhautbilder voneinander sehr verschieden sein. Nichtsdestoweniger pflegt man beim kunstlosen Sehen der Verschiedenheit der beiden Eindrücke sich wenig oder gar nicht bewußt zu sein, sondern man sieht die Hand als ein, u. zw. als ein räumliches Gebilde in bestimmtem Abstand vom Auge.

Man könnte meinen, daß hier das Bewußtsein des Abstandes, in dem sich die Hand vom Auge befindet, durch Tastraumempfindung des ausgestreckten Armes vermittelt werde. Bekanntlich vollzieht sich aber das räumliche Sehen nicht wesentlich anders auch dann, wenn ein lebloser Gegenstand, z. B. ein aus-

gestopfter Handschuh, an jener Stelle des Schraumes sich befindet. — Die näher psychologische und physiologische Analyse des Vorganges beim räumlichen Sehen (die hier nicht in allen Einzelheiten verfolgt werden soll) ergibt folgendes:

Wenn ein Punkt F (der in Fig. 87 etwas rechts von der Medianebene des Kopfes angenommen ist) von beiden Augen fixiert ist, so daß sein Bild auf Netzhautgruben g_r des rechten und g_l des linken Auges fallen, so werden da einen z. B. links von F gelegenen Punkt M die Netzhautpunkte m und m' gereizt und zwar heißen diese Punkte m und m' die **korrespondierenden Netzhautpunkte** des Punkt M , der in der durch F bestimmten **Kernfläche** des Schraumes (

Fig. 87.

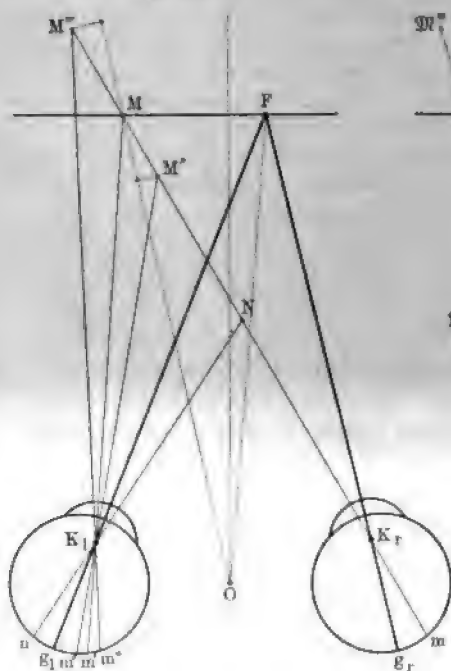
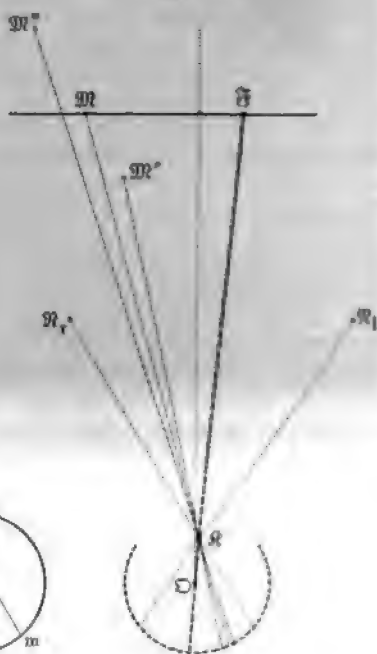


Fig. 88.



Das Doppelaugen (Fig. 87) sieht die Lichtpunkte F , M , M'' , M''' als einfache Punkte \tilde{F} , \tilde{M} , \tilde{M}' , \tilde{M}'' im Schraum des „imaginären Einauges“ (Zyklopenauges, Fig. 88).

nach HERING die zur Frontalebene parallele Ebene) gelegen war. Das psychologische Ergebnis einer solchen gleichzeitigen Reizung von m und m' ist das, daß wir im Schraum einen Punkt \tilde{M} (Fig. 88) erblicken, u. zw. **einfach**, trotzdem wir mit zwei Augen sehen (**binokulares Einfachsehen**). Durch Lichtpunkte M'' und M''' werden bei fortdauernder Fixierung des Punktes F zu einem Punkt m die **nicht mehr korrespondierenden Punkte** m'' und m''' gereizt; dem entspricht dann das Sehen der Sehpunkte \tilde{M}'' und \tilde{M}''' **vor bzw. hinter** der Kernfläche des Schraumes (**binokulares Tiefensehen**). — Ein allzuweit vor (oder hinter) der Kernfläche gelegener Punkt N erzeugt binokulares Doppelsehen.

Die Bedingungen des Plastischsehens wurden künstlich **nachgeahmt** durch WHEATSTONES Spiegelstereoskop (Figg. 89, 90) und BREWSTERS Linsenstereo-

Fig. 89.

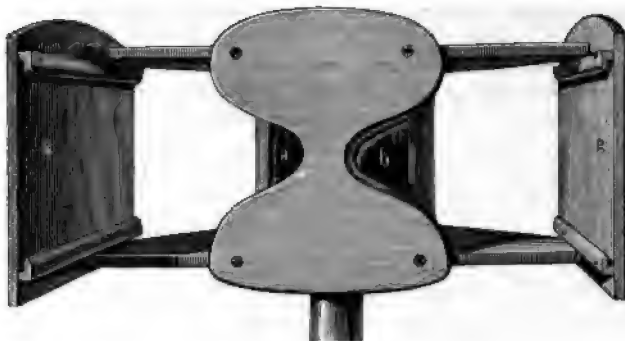
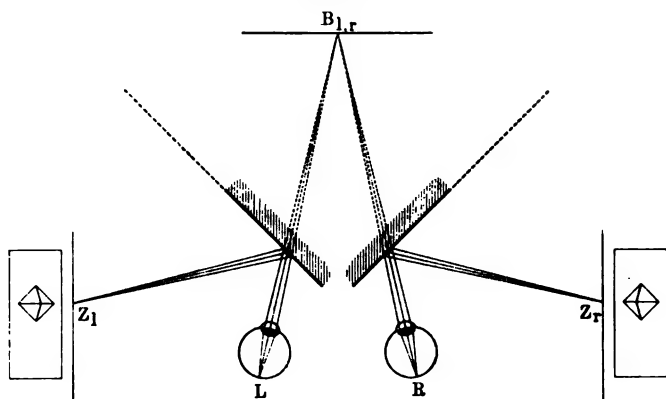


Fig. 90.



Die Zeichnungen Z_l und Z_r erzeugen die unter 45° gegen die Medianebene geneigten Planspiegel die in $B_{l,r}$ zusammenfallenden Bilder.

Fig. 91.

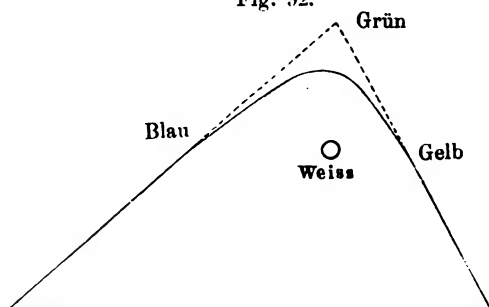


zu unterscheiden sind, so zeigt sich die Zeichnung plastisch.

Aus der psychologischen und physiologischen lehre. — Auch darin unterscheidet sich die Netzhaut von der gewöhnlichen photographischen Platte, daß ihre Reize Farbenempfindungen auslöst. Die Zuordnung der Reize zu den Qualitäten der Empfindungen ist aber bei weitem weniger einfach als beim Klangsinne. In der That ist der sachliche Grund dafür, daß bis in die Gegenwart weitverbreitete physiologische Theorien des Farbensinns bestehen. Im folgenden werden kurz die Grundgedanken der HELMHOLTZschen und HERINGschen Farbentheorie m

THOMAS YOUNG nimmt dreierlei Arten von Nervenfasern an, je eine für die Empfindung des Rot, des Grün, des Violett. Die Rotfasern nicht etwa nur auf die Erregung solcher Lichtstrahlen, die bei der Zerlegung im Prisma in die roten Teile des Spektrums fallen, sondern auch auf diejenigen Wellenlängen und die kleinsten Schwingungszahlen haben, so

Fig. 92.



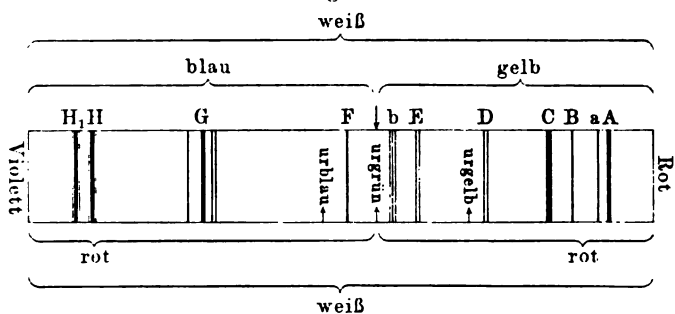
reagieren zu am meisten, können durch wenig (also im Spektrum Rot geben) ersetzt werden und Violett durch Weiss ein oder zwei Wellen, die elementären

dem ein solches Verhältnis der Sektoren für je zwei gegebene Farben gesucht wird, daß bei hinreichend rascher Drehung des Kreisels der Gesamteindruck weils (oder vielmehr der eines Grau, das aber weder etwas von dem einen, noch in anderen Farbenton zeigt), auf das Auge hervorgebracht wird.

HERINGS Farbentheorie lehrt in ihrem physiologischen Teile, daß die „Sehsubstanz“ in dreifach verschiedener Weise chemischer Veränderungen fähig ist (oder daß es drei Sehsubstanzen gibt), die nach den dabei auftretenden Empfindungen als **Weiß-Schwarz-, Rot-Grün-** und als **Blau-Gelb-Prozess** bezeichnet werden, und deren jeder als abhängig von den beiden anderen gedacht wird.

Nach HERING kommt z. B. die Bezeichnung als reinstes Gelb („Urgelb“, Fig. 93) jenenigen Farbe zu, die erregt wird durch Strahlen von $\lambda = 0,000577$ mm; es kommt im Spektrum nahe der Fraunhoferschen Linie *D* (gegen *E* hin) zu liegen. Dagegen sehen wir z. B. nächst der Linie *C* Gelbrot, nächst *E* Gelbgrün. Die Stellen nächst *C* bzw. *E* fallen, erregen also jedesmal schon zweierlei Substanzen, bzw. Empfindungen. Auch in der Empfindung des Rot nächst der Linie *A* ist noch ein Zusatz von Gelb zu bemerken. Umgekehrt findet sich

Fig. 93.



jeder ein Anteil von Rot in allen violetten Farbentönen jenseits des „Urblau“. Es schließen sich also nach HERING nur Gelb und Blau einerseits, Rot und Grün andererseits aus. Dagegen wird Weiß durch Strahlen aller Wellenlängen mitregt; d. h. keine Spektralfarbe darf als im psychologischen Sinne völlig getriggt gelten. — Zur weiteren Erklärung dieser Verhältnisse nimmt die Theorie an, daß, wenn z. B. die Weiß-Schwarz-Substanz von einem physikalischen Lichtreiz getroffen wird, in ihr „**Dissimilierung**“, d. h. eine Zersetzung jener Substanz (ähnlich wie bei einer vom Licht getroffenen photographischen Platte) eintritt, worauf dann jene Nervensubstanz mit der positiven Empfindung Weiß reagiert. Aber auch wenn jeder physikalische Reiz aufhört, so daß der physische Nullzustand völliger Finsternis herrscht, reagiert dennoch die Weiß-Schwarz-Substanz mit der positiven Empfindung des Schwarz, indem jetzt durch die physiologischen Ernährungsvorgänge in der Sehsubstanz (also höchst wahrscheinlich durch die infolge der Blutdurchströmung eintretenden chemischen Umsätze) eine Wiederherstellung (**Assimilierung**) der Substanz sich vollzieht, ähnlich, wie wenn eine gebrauchte photographische Platte von der verbrauchten Emulsion befreit und mit neuer belegt wird). — Diese physio-

grauen Grunde einen grünen Fleck von der Gestalt

Ein positives Nachbild folgt jedem Lichteindruck, d. h. kurz, daß es nicht bemerkt wird. — Wird z. B. eine glühende Kreise geschwungen, so kann man bekanntlich den Weg der kreisförmigen oder längeren Kreishögen oder bei hinreichender Rasc auch als geschlossene Kreislinie sehen, worauf sich auch die Einstellung der Dauer solcher Nachwirkungen gründet. — Anwendung der positiven Nachbilder **Stroboskop** und **Kinematograph**.

Den simultanen Kontrast zeigt besonders auffällig. Auf einem Bogen grellfarbigen, z. B. roten Papiers wird ein Ring (besser ein Ring von etwa 2 cm innerem und 3 cm äußerem Durchmesser) aufgetragen, und über das Ganze ein Bogen weißen, durchscheinenden Seidenpapiers gelegt. Das graue Papier erscheint dann grünlich. — Beobachtungen über farbige Schatten.

Die spezifischen Sinnesenergien des Sehnervens. THOMAS YOUNG'S Hypothese (s. o.) von den dreierlei Sehnerven: je eine zwar auf je eine Art von Wellen am stärksten (z. B. auf langwellige), aber doch zum Teil noch auf andere Reize. Spezielles Beispiel zu dem sehr allgemeinen Gesetze von JOHANNES: von den **spezifischen Energien der Nervensubstanz**. Nerven reagieren jede Art von Nerven (die drei Hauptgattungen: motorische, sekretorische für Drüsenabsonderung, Empfindungen; unter diesen wieder für verschiedene Sinne Sehnerven u. s. f.; und innerhalb dieser wieder Nerven für die verschiedenen Sinne, z. B. die verschiedenen Farbtöne nicht auf was immer für äußere Einwirkungen; wenn aber der Sehnerv) auf irgend einen physikalischen oder chemischen Reiz (Lichtstrahlen, elektrischer Schlag, Zerrung oder Durchschneiden, Kochsalzlösung, Berührung mit einem heißen Draht) überhaupt schiebt es nur mit einer Art von Empfindung (im Beispiel des Sehnervens nur mit Lichtempfindung, u. zw. so, daß kein anderer als

Lichtempfindungen, in der Leibeshaut Wärmeempfindungen erzeuge. Die Gründe, die um die Mitte des XIX. Jahrhunderts zur endgültigen Entscheidung der Frage in dem letzteren Sinne führten, sind namentlich folgende (nach HELMHOLTZ):

1. Innerhalb eines gegebenen Strahles sind das Leuchtende und das Wärmende schlechterdings nicht voneinander zu trennen, wie sich bei sorgfältigsten physikalischen Untersuchungen zeigte. 2. Man kann nicht die Leuchtkraft eines Strahles schwächen, ohne gleichzeitig und in demselben Verhältnis auch seine wärmende und seine chemische Wirkung zu verringern.

Dies ist völlig begreiflich, wenn man als physikalischen Vorgang nicht schon das Leuchten und das Wärmen selbst, sondern nur die schwingende Bewegung (sei es mechanische, sei es elektromagnetische Schwingung) innerhalb des Strahles auffaßt. Denn dann (und nur dann) muß jeder Vorgang, der die schwingende Bewegung des Äthers aufhebt, auch alle Wirkungen der schwingenden Bewegung schwächen und aufheben, das Leuchten, das Wärmen, die chemische Wirkung, die Erregung der Fluoreszenz usw.

§ 45. Analogien zwischen physikalischen und psychischen Erscheinungen. Grenzen zwischen Physik und Philosophie.

Die psychologische Forschung hat gelehrt, daß die meisten psychologischen Namen (z. B. vorstellen, begreifen . . .) zuerst von physischen Vorgängen auf psychische übertragen worden sind. Ein Beispiel von der umgekehrten Übertragung gab (Anh. Nr. 40) der Ausdruck „Empfindlichkeit“. — Über diese bloßen Beziehungen der Namensgebung hinaus gehen aber die zahlreichen sachlichen Analogien zwischen physischen und psychischen Vorgängen, die man von altersher zu finden geglaubt oder wirklich gefunden hat. So hat schon EMPEDOKLES Freundschaft (*φιλία*) und Zist (*μίσος*) als verbindende und trennende („anziehende“ und „abstoßende“) Kräfte in der Natur und wieder SCHOPENHAUER einen „Willen in der Natur“ gelehrt.

Auf die Prüfung solcher ganz allgemeiner Gedanken soll hier nicht eingegangen werden. Wohl aber mag ein sehr spezielles Beispiel, das des *horror vacui*, die Gründe zum Bewußtsein bringen, warum sich die physikalische Betrachtung als solche von allen Annahmen psychischer Kräfte unabhängig machen muß, so zwar, daß sie über ihre Zulässigkeit außerhalb einer physikalischen Betrachtung als solcher weder etwas im positiven noch negativen Sinn zu behaupten braucht:

Solange das Aufsteigen des Wassers in einem Pumpenkolben aus einem „*horror vacui*“ zu erklären versucht wurde, war diese Erklärungsweise physikalisch völlig wertlos: 1. weil die Hypothese, es finde neben dem physischen Vorgange des Emporsteigens auch der psychische Zustand eines solchen *horror* statt, physikalisch weder verifiziert noch exkludiert werden konnte; 2. weil diese Hypothese von vornherein unfähig war, zu einer Abänderung der Erscheinung Anregungen zu geben, die auf neue physische Tatsachen geführt hätten; und zwar war 3. insbesondere weder für die quantitative Beschreibung noch Erklärung der vorliegenden Tatsachen etwas gewonnen. — Im Vergleich hierzu war schon die bloße Beobachtung der Pumpenmacher, daß das Wasser dem Kolben nicht höher als 10 m folge, eine wertvolle

Erweiterung der Erfahrung. Und wiewohl die Erklärung aus einer „Kraft des Vakuums“, die GALILEI an Stelle des *horror vacui* setzte von uns heute für mindestens ebenso unrichtig wie jene erkannt ist (denn das „Nichts“ kann jedenfalls noch weniger wirken als eine psychische Kraft des „Abscheuens“), so bildete doch die Voraussicht GALILEIS, daß infolge der gleichen Kraft eine Quecksilbersäule nur bis zu einer 13,6mal so kleinen Höhe im Pumpenrohre emporsteigen werde, einen naturwissenschaftlich wertvollen Gedanken, da er quantitativ bestimmt und der Verifikation fähig war. — Die weiteren Schritte, die dann TORRICELLI durch die wirkliche Anstellung des Versuches und PASCAL durch seine Erklärung aus dem Luftdruck nach Analogie kommunizierender Gefäße mit verschiedenen Flüssigkeiten getan haben, waren von der Frage, ob neben den physischen Wirkungen des Luftdruckes sich auch irgend welche psychischen Zustände abspielen oder nicht, völlig unabhängig.

Offenbar kann aber aus den Erscheinungen an zusammengeprefsten Gasen, emporschießenden Flüssigkeitssäulen u. dgl. der Physiker auch niemals auf Grund der von ihm in Betracht gezogenen Wahrnehmungselemente zu einer bejahenden oder verneinenden Entscheidung darüber kommen, ob es etwa dem gepressten Körper unangenehm, dem emporschießenden wohl zumute ist. Und daher ist auch sogar die methodologische Frage, ob eine mit den psychischen Erscheinungen sich beschäftigende Wissenschaft, nämlich die unser Weltbild durch die Mithinberücksichtigung des Psychischen ergänzende Philosophie, zu irgend welchen Wahrscheinlichkeiten für oder gegen jene physiopsychischen Hypothesen gelangen konnte, in keiner Weise mehr Sache des Physikers.

Es wird Sache einer künftigen Entwicklung exakt physikalischer und exakt philosophischer Weltbetrachtung sein, namentlich diejenigen Analogien unter gleichmäßiger Handhabung physikalischer, biologischer, psychologischer und metaphysischer Methoden auf ihre Sachlichkeit (nicht nur Namensgleichheit) zu überprüfen, auf die uns Begriffe wie der der *Arbeit* hinweisen. Denn dieser Begriff hat seinen Ursprung längst in vorwissenschaftlichen Zeiten auf dem psychologischen Gebiete genommen (*arbeit* = Mühsal) und hat sich erst viel später auch in den physischen Wissenschaften von umfassendster Anwendbarkeit erwiesen.

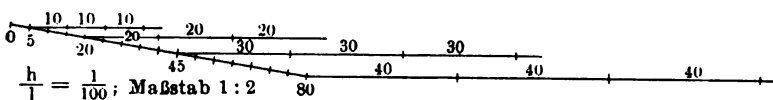
Für das Verhältnis von Namen und Begriffen ist hierbei auch insbesondere lehrreich, daß GALILEI, HUYGENS, LEIBNIZ sich des Begriffes „Produkt aus Kraft und Weg“ längst mit Erfolg bedient hatten, ehe die Mechaniker PONCELET (1836) und CORIOLIS (1829) für diesen Begriff den Namen „Arbeit“ mit richtigem Sprachgefühl der Verkehrssprache entnahmen; und daß später wieder durch ROBERT MAYER Entdeckung des Gesetzes der Erhaltung der „Kraft“ (im Sinne von „Energie“ = Fähigkeit, Arbeit zu leisten) jener Begriff von dem bloß mechanischen auf alle übrigen physischen Gebiete erweitert werden konnte. Zu einer analogen systematischen Ausdehnung auf das Gebiet der psychischen Tatsachen durch die Begriffe „psychische Arbeit“ und „psychische Energie“ besitzen wir gegenwärtig erst Anfänge.

Leitaufgaben.

1. Gleichförmige und beschleunigte Bewegungen.

1. Ein Wagen gehe, nachdem er sich 1, 2, 3, 4 . . . sec lang an einer schiefen Ebene von der Neigung $\frac{1}{100}$ bewegt hat, auf eine wagrechte Ebene über. Welche Wegstrecken legt er auf dieser binnen 1, 2, 3, 4 . . . sec zurück? (Der Anfangsweg beim freien Falle werde $a \neq 500$ cm angenommen; von Reibung und Luftwiderstand, sowie vom Stosse beim Knie beider Ebenen werde abgesehen.)

Fig. 94.



Anleitung: Auf Grund der Gesetze $s = at^2$ (§ 2) und $s = a't$ (§ 2, hierzu $a' = 2a$, § 6) übersichtlich dargestellt in Fig. 94, wo aber die Neigung viel stärker als $\frac{1}{100}$ ist. Eine entsprechende Zeichnung anzufertigen für die Neigung $\frac{1}{100}$.

2. Man forme aus folgenden Zahlenangaben von durchschnittlichen Geschwindigkeiten numerische Aufgaben zu den allgemeinen

Formeln $c = \frac{s}{t}$, $s = ct$, $t = \frac{s}{c}$:

Soldat im Marsch (120 Schritte à 65 cm in 1 Minute)	1,3 m sec ⁻¹ =	130
Pferd im Galopp 18 km h ⁻¹	5 m sec ⁻¹ =	500
Ozean-Passagier-Dampfer	10 m sec ⁻¹ =	1000
Fahrrad (Maximalgeschwindigkeit)	15 m sec ⁻¹ =	1500
Eisenbahnzug (gesetzliches Maximum: 90 km h ⁻¹) . .	25 m sec ⁻¹ =	2500
Schwalbe im Fluge	58 m sec ⁻¹ =	5800
Geschoss des Infanterie-Gewehres	620 m sec ⁻¹ =	62000
Größte Geschwindigkeit von Geschossen	1 km sec ⁻¹ =	10 ⁵
Schall in Luft	333 m sec ⁻¹ =	33300
Licht 40000 Meilen per sec = 300000 km sec ⁻¹ =	3 · 10 ⁸ m sec ⁻¹ =	3 · 10 ¹⁰
Wasserstoffausbrüche (Protuberanzen) auf der Sonne	100 km sec ⁻¹ =	10 ⁷
Irdische Orkane 50 (bis 65) m sec ⁻¹	50 m sec ⁻¹ =	5000
Sternschnuppe (im Mittel) 45 km sec ⁻¹	45000 m sec ⁻¹ =	4,5 · 10 ⁶
Erde in ihrer Bahn 4 Meilen per sec = 30 km sec ⁻¹ . .	30000 m sec ⁻¹ =	3 · 10 ⁶
Größte Eigengeschwindigkeit eines Fixsternes (1830 Groombridge im großen Bären) mindestens	240 km sec ⁻¹ =	2,4 · 10 ⁷

Centimeter per Sekunde, cm sec⁻¹
(kurz: Cel)

Z. B. Eine Schwalbe brauchte zu den 255 km von Compiègne bis Antwerpen 1h 13min; daher ist ihre Geschwindigkeit 58 m sec^{-1} . — Sie würde dann im Wanderflug von 50° bis 30° geogr. Breite (ein Breitengrad = 15 geogr. Meilen = 111 km) nur etwa 10 Stunden, d. h. kaum eine Nacht brauchen.

- § 2. 3. Welche Fallstrecken entsprechen im freien Falle und an solchen Ebenen bei Neigungen von $\frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \frac{7}{10} \dots \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, 0$ den Zeiten $0,1, 0,2 \dots 0,01, 0,02 \dots \text{sec}$? Man stelle diese Fallstrecken durch nebeneinander gestellte Gerade (wie am Wurfapparate Fig. S. 20) dar und erkläre, warum die die unteren Endpunkte verbindende Kurve eine nach unten konkave ist.

Bemerkung: Sind insbesondere die Fallzeiten „klein erster Ordnung“ werden die Fallstrecken (wegen des Vorkommens von t^2) „klein zweiter Ordnung“.

- § 4. 4. Wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit eines fallenden Körpers während der ersten, zweiten, dritten, vierten Hundertstel-, Tausendstelsekunde nach Beginn der Bewegung?

Anleitung: Ist z. B. $t = 0,003$, $t' = 0,004$, so ist $v_m = 5 \cdot (0,003 + 0,004) \text{ m sec}^{-1} = 3,5 \text{ cm sec}^{-1}$.

- §§ 4, 5, 11. 5. Aus dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^2 + Ct + S$ zu berechnen v und w .

$$v_m = \frac{at'^2 + Ct' + S - (at^2 + Ct + S)}{t' - t} = \frac{a(t'^2 - t^2) + C(t' - t)}{t' - t} \\ = a(t' + t) + C; \quad \text{daher } v = 2at + C \\ w_m = \frac{2at' + C - (2at + C)}{t' - t} = \frac{2a(t' - t)}{t' - t}; \quad \text{daher } w = 2a.$$

Es stellt daher auch obiges Weg-Zeit-Gesetz (wie $s = at^2$) noch eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung dar, nur hat zur Zeit $t = 0$ der sich bewegende Punkt vom Nullpunkt der Weg-Zählung schon den Abstand S . Welcher Zeit hat er die Geschwindigkeit C ? — Verwirklicht bei vertikal abwärts (und aufwärts) geworfenen Körpern.

- §§ 4, 5. 6. Aus dem Weg-Zeit-Gesetz $s = at^3$ zu berechnen v und w .

$$v_m = \frac{at'^3 - at^3}{t' - t} = a(t'^2 + t't + t^2); \quad \text{daher } v = 3at^2 \\ w_m = \frac{3at'^2 - 3at^2}{t' - t} = 3a(t' + t); \quad \text{daher } w = 6at.$$

Hier ist also auch die Beschleunigung noch von t abhängig und wächst w beständig mit wachsendem t . Ebenso ist es für $s = at^4$, $s = at^5$. Müßten Schienenbahnen diesen Weg-Zeit-Gesetzen entsprechend nach oben konvex oder konkav sein? Vergleichung mit Fig. 4 (S. 9).

- § 6. 7. Die zwei Gleichungen $s = \frac{b}{2}t^2$ und $v = bt$ enthalten Größen t, b, v, s , von denen daher je zwei gegeben sein müssen, d.



ie zwei anderen berechnet werden können. Die so entsprechenden zwölf Aufgaben zu bilden und zu lösen! Man ersinne zu jeder dieser Formeln konkrete Anwendungen.

gegeben:	t, b	t, v	t, s	b, v	b, s	v, s
gefunden:	$v = b t$	$b = \frac{v}{t}$	$b = \frac{2s}{t^2}$	$t = \frac{v}{b}$	$t = \sqrt{\frac{2s}{b}}$	$t = \frac{2s}{v}$
	$s = \frac{b}{2} t^2$	$s = \frac{v t}{2}$	$v = \frac{2s}{t}$	$s = \frac{v^2}{2b}$	$v = \sqrt{2bs}$	$b = \frac{v^2}{2s}$

Z. B. Zu $v = \sqrt{2bs}$: Ein Tourist sei über eine 500 m hohe Wand abgeürzt. Angenommen, der Sturz sei im freien Fall erfolgt und es werde mit dem vollen Wert der Fallbeschleunigung g gerechnet, so sind gegeben $s = 500$ m, $= g = 10 \text{ m sec}^{-2}$, somit $v = \sqrt{2 \cdot 10 \cdot 500} = 100 \text{ m sec}^{-1}$. — Ebenso $t = 10 \text{ sec}$.

S. GALILEIS Satz vom Sehnensfall zu beweisen.

§ 6.

Ableitung: Von demselben Punkte a (Fig. 95) beginnen gleichzeitig zwei Punkte längs einer Vertikalen ac und einer beliebig schiefen Geraden zu fallen. Die Fallstrecken s und s_s sind gegeben durch $s = \frac{g}{2} t^2$ und $s_s = \frac{g_s}{2} t^2 = s \cdot \sin \epsilon$

(warum?). Es ist also die Sehne des Halbkreises vom Durchmesser s , dessen vertikale Ebene durch die vorgezeichnete vertikale und schiefe Gerade bestimmt ist. (Versuch am Turfapparat Fig. 17, S. 20, indem eine Kugel frei fällt und eine andere in der geneigten Röhre fällt.)

Fig. 95.

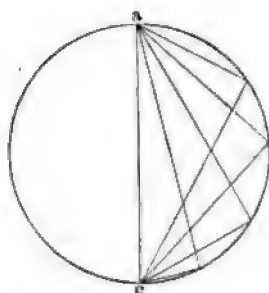
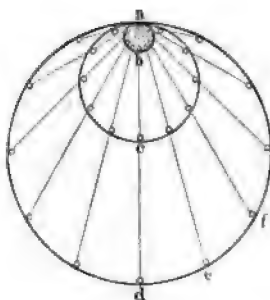


Fig. 96.



Zu zeigen, daß Kugeln, die gleichzeitig von a (Fig. 96) ausgehen, in jedem späteren Zeitpunkte in Kreisen angeordnet sind; und dies auch, wenn sie hierbei auf einem beliebig schiefen Brette in vorgezeichneten Rinnen rollen (Versuch).

9. Aus der Gleichung für die Geschwindigkeit $v = bt$ die Gleichung § 6.

für den Weg $s = \frac{b}{2} t^2$ nach arithmetischer Methode abzuleiten. — Vergleichung mit der graphischen Methode GALILEIS.

Ableitung: Man denke sich die ganze Zeit von t sec zusammengesetzt aus sehr kleinen, gleichen Zeiteilchen von je τ sec, so daß $t = n \cdot \tau$. Dann kann die Bewegung als innerhalb je einer solchen Zeitstrecke τ annähernd gleichförmig angenommen werden. Hätte also der sich bewegende Punkt die Geschwindigkeit $g\tau$, die er erst am Ende des ersten Zeiteilchens τ hat, schon während dieses Zeiteilchens gehabt, so hätte er während dieses ersten Zeit-

teilchens den Weg $g \tau \cdot \tau$ zurückgelegt (gemäß der Gl. $s = ct$). Hätte er Geschwindigkeit $2g\tau$, die er erst am Ende des zweiten Zeiteilchens hat, schon während dieses ganzen Teilchens gehabt, so hätte er während des zweiten Zeiteilchens den Weg $2g\tau \cdot \tau$ zurückgelegt u. s. f. — Daher ist der während $n\tau$ zurückgelegte Weg s (*spatium*, hier aber auch *Summe*):

$$s = g\tau \cdot \tau + 2g\tau \cdot \tau + \dots + ng\tau \cdot \tau = (1 + 2 + \dots + n) g\tau^2.$$

Hier ist die Summe der arithmetischen Reihe $1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2} n(1+n)$ da n als sehr groß angenommen ist; also

$$s \approx \frac{1}{2} n^2 \cdot g\tau^2 = \frac{1}{2} g(n\tau)^2 = \frac{1}{2} g t^2. -$$

Während GALILEI die angenommene Proportionalität $v = gt$ zugleich eine Gerade AM (Fig. 14, S. 17) darstellte, entspricht dem Zerlegen von sehr viele τ und dem sprunghaften Anwachsen der Geschwindigkeit von g $2g\tau$, $3g\tau$... eine stufenförmig gebrochene Linie.

Strenger wird der arithmetische Beweis, indem man den wirklichen v zwischen folgende untere und obere Grenzen einschließt:

$$0 + g\tau \cdot \tau + 2g\tau \cdot \tau + \dots + (n-1)g\tau \cdot \tau < s, \\ s < g\tau \cdot \tau + 2g\tau \cdot \tau + \dots + (n-1)g\tau \cdot \tau + ng\tau \cdot \tau,$$

$$\text{daher} \quad \frac{1}{2} g\tau^2 \frac{n(0+n-1)}{2} < s < \frac{1}{2} g\tau^2 \frac{n(1+n)}{2}.$$

Diese untere und obere Grenze fallen zusammen für $n = \infty$, $\tau = 0$, sowohl $n-1 \neq n$, wie auch $n+1 \neq n$, also wieder $s = \frac{1}{2} n^2 \cdot g\tau^2$ u.

II. Wurfbewegungen.

- §§ 7, 11. 10. Welche Erhebung s über dem Ausgangspunkte O und w Geschwindigkeiten v hat ein vertikal aufwärts geworfener Körper nach 1, 2, 3 ... sec, wenn die Anfangsgeschwindigkeit 30 m s 60 m sec^{-1} ist?

Anleitung: Übersichtliche numerische Darstellung für $c = 30 \text{ m sec}^{-1}$:

Wege:

infolge der Trägheit . .	0	30	60	90	120	150	180	210	240 ... m
" " Schwerkraft	0	5	20	45	80	125	180	245	320 ... m
	0	25	40	45	40	25	0	-35	-80 ... m

Geschwindigkeiten:

infolge der Trägheit . .	30	30	30	30	30	30	30	30	30 ... m
" " Schwerkraft	0	10	20	30	40	50	60	70	80 ... m
	30	20	10	0	-10	-20	-30	-40	-50 ... m

Wie verändern sich diese Zahlenreihen, wenn $c = 60 \text{ m sec}^{-1}$? — gleichung mit den allgemeinen Formeln (5), (6), (7), (8) in § 11.

- §§ 7, 11. 11. Mit welcher wagrechten Geschwindigkeit (und von welcher Höhe) muß die Kugel aus der Röhre des Wurfapparates kommen, damit sie die in Fig. 17, S. 20, vorgezeichnete Parabel durchläuft

Anleitung: Da das längste Lot 45 cm Senkung darstellt, so folgt aus $s = 500 t^2$, daß $t = 0,3 \text{ sec}$. Beträgt der wagrechte Abstand dieses letzten Lotes $lm = 30 \text{ cm}$, so folgt $c = 30 : 0,3 = 100 \text{ cm sec}^{-1} = 1 \text{ m sec}^{-1}$.

Im freien Falle würde diese Geschwindigkeit bei einer Falltiefe von (nur!) 6 cm erlangt. Die gleiche Falltiefe gilt auch unabhängig von der Form der Röhre (§ 23 — mit Rücksicht auf die Reibung muß die Auslösevorrichtung statt 23 cm etwa 8 bis 9 cm über dem unteren Ende der Röhre eingestellt werden).

12. Konstruktion und Berechnung der Richtungen und Geschwindigkeiten eines mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 15 \text{ m sec}^{-1}$ wagrecht geworfenen Körpers (Fig. 97, Maßstab 1:2000).

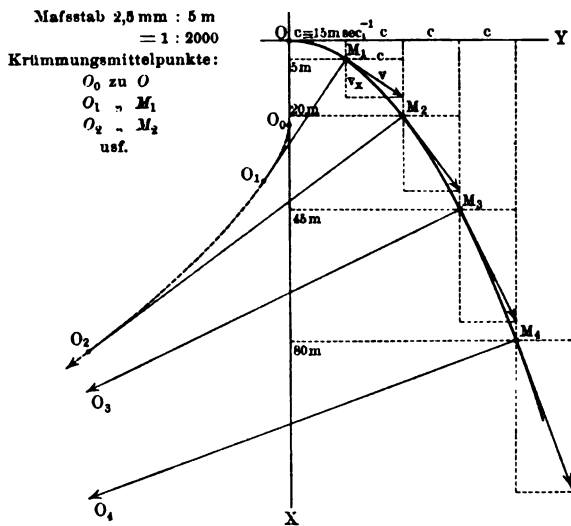
Anleitung: Die Richtungen der Bewegung sind die Parabeltangente; diese werden am bequemsten konstruiert nach dem Satze, daß die Normale gleich ist dem Parameter $p = \frac{c^2}{g}$; also wenn $g \neq 10 \text{ m sec}^{-2}$, ist $p = 22,5 \text{ m}$, und entsprechend dem Maßstabe 1:2000 ist p darzustellen durch 11,25 mm. Die Geschwindigkeiten ergeben sich aus $v = \sqrt{c^2 + v_x^2}$.

Was würde sich an g. 97 ändern, wenn man die Wurfbahn nach denselben Parallelogrammkonstruktionen wie die Bahn für die Zentralbewegungen nach Fig. 54, S. 74 konstruieren wollte? (Warum dort das Ersetzen der stetig gekrümmten Bahn durch eine gebrochene nicht zu Widersprüchen führt, vgl. S. 74, Bemerkung.)

13. Zu beweisen: Die Parabel, die ein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \text{ cm sec}^{-1}$ horizontal geworfener Körper beschreibt, hat als Leitlinie die Horizontale, die ein mit derselben Anfangsgeschwindigkeit vom selben Ausgangspunkte vertikal geworfener Körper erreicht.

Beweis: Der Parameter der Wurfparabel ist $p = \frac{c^2}{g}$. In eben diesem Abstande vom Brennpunkt und daher im Abstande $\frac{1}{2} \frac{c^2}{g}$ vom Scheitel liegt die Leitlinie. Die Wurfhöhe beim vertikalen Wurf aufwärts ist aber ebenfalls $\frac{1}{2} \frac{c^2}{g}$.

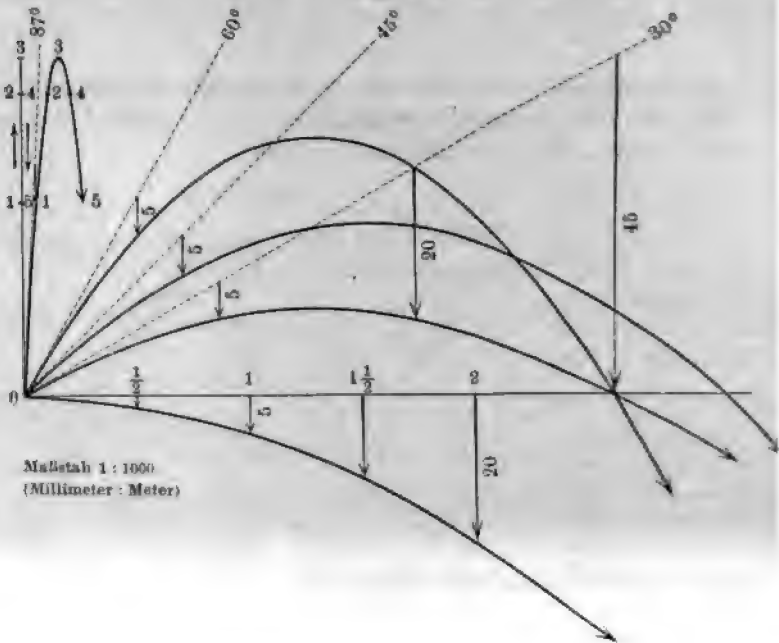
Fig. 97.



§ 7, 11.

14. Die Fig. 98, welche die verschiedenen Wurflinien je nach verschiedenen Elevationswinkeln bei gleicher Anfangsgeschwindigkeit in dem angegebenen Maßstabe darstellt, a) auf Millimeterpapier nachzukonstruieren, b) die Steighöhen, Wurfweiten u. s. w. nachzurechnen.

Fig. 98.



§ 7, 11, 42.

15. Ein Wasserstrahl geht 1 dm oberhalb einer unteren Ecke der Tafel des Wurfapparates (Fig. 17, S. 20) mit solcher Geschwindigkeit C aus, daß er den oberen Rand in der Mitte berührt und in der anderen unteren Ecke wieder anlangt. Aus der hiermit gegebenen Wurfhöhe $h = 8$ dm und der Wurfweite $l = 6$ dm jenen Anfangswinkel sowie die horizontale Geschwindigkeit c im Scheitel zu berechnen. hoch steigt der Strahl bei gleichem C , wenn die Ausflusssöhre jenem unteren Punkt der Wurfhöhe vertikal gerichtet wird? zusammengesetzte Aufgabe über schiefen, horizontalen, vertikalen Wurf.

Anleitung: Rechnet man c nach den Formeln für den horizontalen Wurf, indem man in $y = 2 \cdot \frac{c^2}{g} \cdot x$ einsetzt: $y = 3$ dm, $x = 8$ dm, so gibt dies Probe für den nach den Gesetzen des schiefen Wurfs berechneten Wert c . Probe am Wurfapparat durch Messung der Wurfhöhe beim vertikalen Wurf.

§ 11.

16. Die Scheitelgleichung der Wurfparabel eines mit der Anfangsgeschwindigkeit c m sec⁻¹ unter dem Elevationswinkel ε° schief nach oben geworfenen Körpers abzuleiten.

Ableitung: Aus den Gl. (1), (2) für die Wegkomponenten beim schiefen Wurf

$$x = -c \sin \varepsilon \cdot t + \frac{g}{2} t^2 \cdot \cdot \cdot (1), \quad y = c \cos \varepsilon \cdot t \cdot \cdot \cdot (2)$$

ergibt Eliminieren von $t = \frac{y}{c \cos \varepsilon}$ die Gl. $x = -y \tan \varepsilon + \frac{g}{2 c^2 \cos^2 \varepsilon} y^2 \cdot \cdot \cdot (3)$

In Bezug auf ein neues Koordinatensystem mit parallelen Achsen, dessen Anfangspunkt um die ganze Wurfhöhe h höher, um die halbe Wurfweite $\frac{d}{2}$ gegen die positive X-Richtung liegt, nimmt Gl. (3) die Form $y'^2 = 2 p x'$ an, wenn für die alten Koordinaten x und y eingesetzt wird:

$$x = x' - h = x' - \frac{c^2 \sin^2 \varepsilon}{2 g}, \quad y = y' + \frac{d}{2} = y' + \frac{1}{2} \frac{c^2}{g} 2 \sin \varepsilon \cos \varepsilon.$$

Aus (3) wird nach einigen Reduktionen $y'^2 = 2 \frac{c^2 \cos^2 \varepsilon}{g} \cdot x' = 2 p x' \cdot \cdot \cdot (4)$

Von dieser Parabel fällt also der absteigende Ast zusammen mit der Bahn eines Körpers, der mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \cos \varepsilon$ horizontal geworfen wird. In der Tat besitzt ja auch der schief aufwärts geworfene Körper bei erreichter Wurfhöhe nur mehr diese Horizontalgeschwindigkeit $c \cos \varepsilon$.

Nach diesem Gedanken hat GALILEI den schiefen Wurf auf den horizontalen zurückgeführt (vielleicht weil ihm die Verwendung des Trägheitsgesetzes auf wagrecht sich bewegende Körper geläufiger war als für andere Richtungen in Bezug auf die Erde). Dabei hatte GALILEI richtig erkannt, daß nicht nur der aufsteigende Ast der Parabel dem absteigenden geometrisch kongruent sei, sondern daß auch die Geschwindigkeiten beim Auf- und Absteigen in gleicher Höhe über dem Ausgangsniveau einander dem absoluten Werte nach gleich (im Grenzfalle des vertikalen Wurfes einander genau entgegengesetzt) seien.

17. Unter welchem Elevationswinkel ε^0 muß ein Körper von gegebener Anfangsgeschwindigkeit $c \text{ cm sec}^{-1}$ geworfen (z. B. die Kugel einer Jagdflinte abgeschossen) werden, damit der Körper einen gegebenen Punkt $M(x, y)$ treffe? (Fig. 99, a. f. S.)

Anleitung: Es ist obige Gl. (3) nach ε aufzulösen. Wird $\tan \varepsilon = z$ gesetzt, also $\frac{1}{\cos^2 \varepsilon} = \sec^2 \varepsilon = 1 + \tan^2 \varepsilon = 1 + z^2$, so liefert die Gleichung

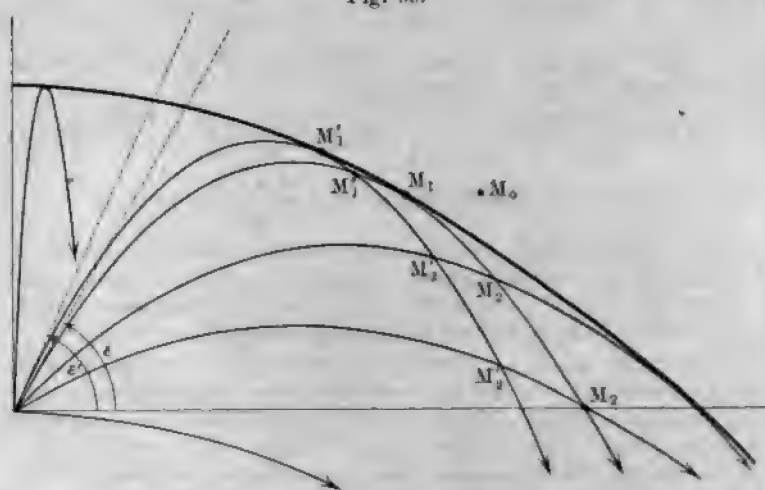
$$x = -y \cdot \tan \varepsilon + \frac{g}{2 c^2} y^2 (1 + \tan^2 \varepsilon) \dots (5) \text{ oder } z^2 - 2 \frac{c^2}{g y} z = 2 \frac{c^2}{g y^2} x - 1 \dots (6)$$

0 oder 1 oder 2 reelle Lösungen für z (und daher auch für ε), je nachdem in (6) die Diskriminante $D = c^4 + 2 c^2 g x - g^2 y^2 \geq 0$. Bei gegebenem c und g sind also solche Punkte $M_0(x, y)$, für die $D < 0$, auf keinerlei Art erreichbar; die Punkte M_1 (Fig. 99) auf einerlei Art [sie bilden selbst wieder eine Parabel, vgl. die folgende LA 18]; die Punkte M_2 (Fig. 99) auf zweierlei Art.

Wird z. B. in (6) für die größte erreichbare Wurfweite $y = \frac{c^2}{g}$, $x = 0$ gesetzt, so wird $z^2 - 2 z = -1$, also $z_{1,2} = 1$, $\tan \varepsilon = 1$, $\varepsilon = 45^\circ$. — Wieso ist der Satz 7 (§ 11) von den komplementären Elevationswinkeln ein spezieller Fall der Doppelwertigkeit für $D > 0$?

- § 11. 18. Zu beweisen, daß alle Parabeln, die derselben Anfangsgeschwindigkeit bei verschiedenen Elevationswinkeln entsprechen, „einhüllende Kurve“ (math. Anh. Nr. 27) wieder eine Parabel ist, deren Fläche vom Wasserstrahl (Fig. 17, S. 20) bei einem von 0 bis 90° wachsenden Neigungswinkel des Ausflußrohres bestrichen wird.

Fig. 99.



Erster Beweis: Die Bedingungsgleichung in der vorigen Aufgabe, daß ein Punkt mit den Koordinaten x, y von dem geworfenen Körper eben noch (wenn auch auf einerlei, nicht auf zweierlei Art) erreicht werden kann, stellt schon die Gleichung der gesuchten Parabel dar, nämlich $y^2 = 2 \frac{c^2}{g} x + \frac{c^4}{g^2}$. Transformieren wir diese Gleichung auf einen um die Steighöhe beim vertikalen Wurf höher gelegenen Anfangspunkt, also für $X = x + \frac{1}{2} \frac{c^2}{g}$, so wird $y^2 = 2 \frac{c^2}{g} X$. Die gesuchte Parabel ist also der beim horizontalen Wurf kongruent.

Zweiter Beweis: Betrachten wir in der Gleichung (5) der vorigen Aufgabe $tg \epsilon = z$ als neue veränderliche Größe, so lauten die Wurfparabeln für zwei sehr wenig voneinander verschiedene Elevationswinkel ϵ und ϵ' , wo $tg \epsilon' = z'$,

$$x = -y z + \frac{g}{2 c^2} y^2 (1 + z^2) \dots (5) \quad \text{und} \quad x = -y z' + \frac{g}{2 c^2} y^2 (1 + z'^2)$$

Die Gleichung der einhüllenden Kurve gewinnen wir, wenn wir x und y Durchschnittspunkte der einander unendlich benachbarten Wurfflinien fassen, also die beiden Gleichungen koexistieren lassen. Dann wird

$$0 = -y (z' - z) + \frac{g}{2 c^2} y^2 (z'^2 - z^2),$$

und nach Division durch $y (z' - z)$ wird $1 = \frac{g}{2 c^2} y (z' + z)$, woraus sich $z' = z$ ergibt $z = \frac{c^2}{g y}$. Dieser Wert von $z = tg \epsilon$ in (5) eingesetzt gibt

$$x = -\frac{c^2}{g} + \frac{g}{2 c^2} y^2 \left(1 + \frac{c^4}{g^2} \frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{2} \frac{c^2}{g} + \frac{1}{2} \frac{g}{c^2} y^2, \text{ also } y^2 = 2 \frac{c^2}{g} x + \frac{c^4}{g^2} \text{ oder } y^2 = 2 \frac{c^2}{g} x + \frac{c^4}{g^2}$$

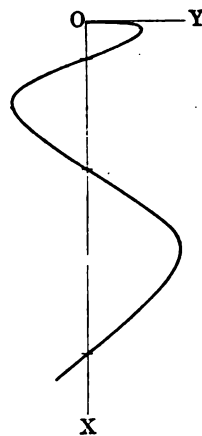


III. Kreisende und schwingende Bewegungen.

19. Eine schwingende Feder sei mit einer Schreibvorrichtung versehen, die Sinusschwingungen längs einer wagrechten Geraden OY (Fig. 100) beschreibt, solange die Befestigungsstelle der Feder in Bezug auf das Schreibblatt in Ruhe ist. Was für eine Kurve wird beschrieben, wenn die Feder frei fällt (so bei NEUMANN'S Fallmaschine), oder wenn das Schreibblatt an der Feder vorüber fällt (so bei den Fallmaschinen von LIPPICH und BABO)?

Fig. 100.

§§ 2, 12.



Ableitung: Aus den Gleichungen $y = a \sin \alpha t$ und $x = \frac{g}{2} t^2$ ergibt sich durch Elimination von t $y = a \sin \left(\alpha \cdot \sqrt{\frac{2x}{g}} \right)$.

Hier ist vorausgesetzt, daß in dem Zeitpunkte, da die Fallbewegung beginnt, die schwingende Feder die Mittellage passiert. — Was ändert sich an der Gleichung der Kurve, wenn sich in jenem Zeitpunkte die Feder in der Grenzlage befindet? — Welchen Unterschied zeigt diese Kurve gegen die der Fig. 239 (S. 229)?

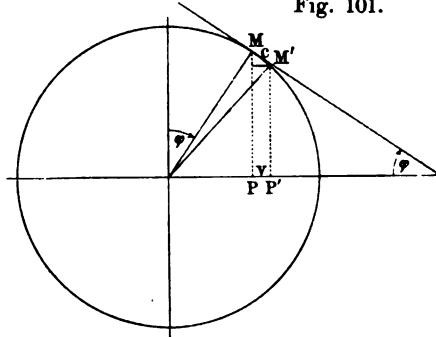
20. Die in § 12 durch Rechnung abgeleiteten Gleichungen $s = a \cdot a \cos \alpha t \dots (6)$ und $w = -\alpha^2 a \sin \alpha t = -\alpha^2 s \dots (7)$ sind auf graphischem Wege zu gewinnen.

Fig. 101.

Anleitung: Zu Gl. (6): Die Geschwindigkeit v auf dem Wegstückchen PP' (Fig. 101) ist die Projektion der Geschwindigkeit c auf dem Bogen PM' ; also $v = c \cdot \cos \varphi \dots (6')$.

$$c = \frac{2\pi a}{T} = \alpha a, \quad \varphi = \alpha t.$$

Zu Gl. (7) vgl. den Zusammenhang mit der Gleichung für die Normalbeschleunigung, LA 31. fünfte Ableitung.



21. Für eine Sinusschwingung von der Amplitude a cm und der Schwingungsdauer T sec (wo $\frac{2\pi}{T} = \alpha$) die Werte von s, v, w nach $\frac{1}{12} T, \frac{2}{12} T \dots \frac{11}{12} T, T, \frac{13}{12} T \dots$ in einer Tafel darzustellen. (Vgl. auch speziell z. B. für $a = 10$ cm, $T = 2$ sec., also $\alpha = \frac{2\pi}{2} = 3.14$.)

Anleitung: Wegen $\sin \alpha t = \sin \frac{2\pi}{T} t$ gehört z. B. zu $t = \frac{T}{12}$ der besondere Wert $s = a \cdot \sin \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} = a \cdot \sin \frac{\pi}{6} = a \cdot \sin 30^\circ = a \cdot \frac{1}{2}$; ferner

Leitaufgaben.

$\frac{\pi}{T} \cdot \frac{T}{12} = \alpha a \cdot \cos 30^\circ = \alpha a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha a \cdot 0,866 \dots$ u. s. f. — (Vgl. 6)
 ung der Winkel aus dem absoluten Winkelmaß in das Grade
 2; über die goniometrischen Funktionen $\sin \frac{\pi}{6}$, $\sin \frac{\pi}{3}$ u. s. f. na
 — So ergibt sich folgende Tafel:

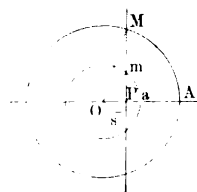
	s in cm	v in cm sec ⁻¹	w in cm sec ⁻²
0	$0 = 0,000 a$	$\alpha a = 1,000 \alpha a$	$0 = -0,000$
$1 \frac{T}{12}$	$+ a \cdot \frac{1}{2} = 0,500 a$	$\alpha a \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 \alpha a$	$-\alpha^2 a \frac{1}{2} = -0,500$
$2 \frac{T}{12}$	$+ a \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 a$	$1 = 0,500 \alpha a$	$-\alpha^2 a \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,866$
$3 \frac{T}{12}$	$+ a = 1,000 a$	$0,000 \alpha a$	$-\alpha^2 a = -1,000$
$4 \frac{T}{12}$	$+ a \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,866 a$	$-0,500 \alpha a$	$-\alpha^2 a \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,866$

n. s. f. — Vergleichung m ungen der Schattenflecken Fig. 31. S.

22. Den Isochronism- ziehung zu den entspreche

Vorbemerkung: Ist von zwe schwingungen vorausgesetzt, dafe
 ihre Weg-Zeit-Gesetze $s = a \sin \alpha t$ und $s = A \sin \alpha t$ nur durch die Amplitu
 a und A , nicht durch die α unterscheiden, so ist hiermit auch der Isochronis
 schon vorausgesetzt; denn für beide ist $T = \frac{2\pi}{\alpha}$. Dabei bleibt aber noch
 beweisen, dafs für beide Bewegungen trotz der verschiedenen Amplituden
 und a , falls sie aber die gleiche charakteristische Beschleunigung w_1 haben,
 gemein zum selben Werte von s die nämlichen Werte $W = w$ gehor

Fig. 102.



Beweis: Es seien die beiden Kreise in Fig. 102 z
 die Bahnen der Holzkugel bei großer und kleiner Winkl
 öffnung der Kreiskegelschwingung, also die Amplitu
 $OA = A$ und $Oa = a$, gleich den beiden auf den Sch
 men (Fig. 30, S. 34) vorgezeichneten Kreishalbmessern.
 beiden Kreisungen dasselbe T entspricht, so sind
 Normalbeschleunigungen

$$B_{\perp} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \quad \text{und} \quad b_{\perp} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a.$$

und deren Projektionen bei gleicher Elongation s trotz verschiedener Amplitu
 $W_{\perp} = B_{\perp} \cdot \cos MOP = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \cdot \frac{s}{A}$ und $w_{\perp} = b_{\perp} \cdot \cos mOP = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 a$
 also $W_{\perp} = w_{\perp}$.

23. Für ein einfaches Pendel (oder ein Wägelchen auf ein Kreisbahn, vgl. Fig. 4, S. 9 die bis zu einem Halbkreis erweitert s

zu den Elongationen von 90° , 80° , $70^\circ \dots 10^\circ$, 0° (bei hinreichend großer Pendellänge auch für 10° , 9° , $8^\circ \dots 1^\circ$, 0°) die Komponenten der Schwerkraft zu konstruieren (Fig. 103).

Fig. 103.

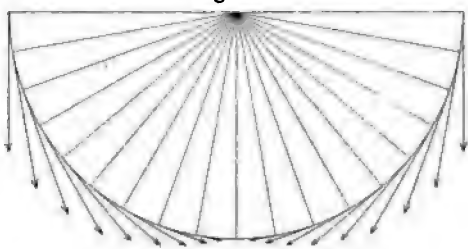
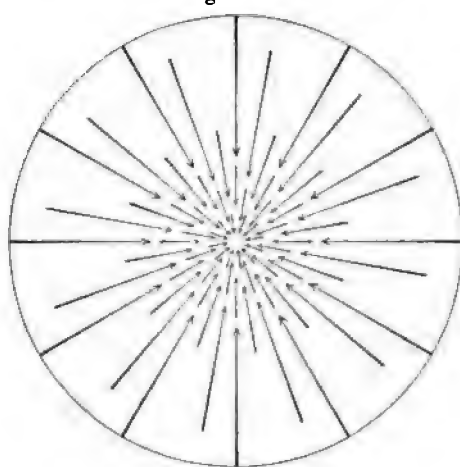


Fig. 104.



Anleitung: Werden aus Fig. 33 (S. 38) nur die Komponenten w beibehalten, so ergibt sich Fig. 103.

Zusatz: Man denke sich die Fig. 103 um die Lotlinie gedreht und vergleiche das so sich ergebende halbkugelförmige Kraftfeld mit demjenigen ebenen (Fig. 104), in welchem ein Punkt z. B. durch elastische Kräfte zu einem festen Mittelpunkte hingetrieben wird. Auch für eine sehr sorgfältige Zeichnung unterscheidet sich dieses elastische Kraftfeld nicht merklich von demjenigen, welches man erhält, wenn man die tangentielle Komponente für 10° , $9^\circ \dots 1^\circ$, 0° mit unveränderter Größe in wagrechte Richtung überträgt, wobei die Bogen in unveränderter Länge geradegestreckt angenommen werden. (Vgl. die drei folgenden Aufgaben!)

24. Anstatt der angenäherten Pendelformel $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. . . (I) §§ 6, 12.

gab GALILEI eine noch rohere Annäherung, die der Formel $T = 8 \sqrt{\frac{l}{g}}$ entspräche. Wie hängt diese mit GALILEIS Satz über den Sehnensfall (LA 8) zusammen?

Antwort: Für sehr kleine Amplituden scheint statt des Bogens von der Grenzlage A bis zur Lotlage O die Sehne AO eingesetzt werden zu dürfen. Zum Durchfallen der Sehne aber braucht der Pendelpunkt dieselbe Zeit wie zum freien Fall längs des ganzen Kreisdurchmessers $2l$. Diese Fallzeit ist

$t = \sqrt{2 \cdot \frac{2l}{g}} = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}$. — Daraus folgt sogleich $T = 8 \sqrt{\frac{l}{g}}$, da die volle Schwingungsdauer $T = 4t$.

Zusatz: Wie die Nichtübereinstimmung von Galileis Formel mit der richtigeren Gleichung (I) zeigt, besteht aber zwischen der Fallzeit längs der Sehne und des Bogens nicht Gleichheit, sondern überraschenderweise ist die Fallzeit für den Kreisbogen kleiner als die für die gerade Verbindung zwischen denselben

Endpunkten. Es erhebt sich hiermit die Frage nach derjenigen Linie („Brachistochrone“) zwischen zwei Punkten A und O , für die die Fallzeit die möglichste kleine ist. Nur in erster Annäherung ist dies jener Kreisbogen; in Wahrheit es die Zykloide (Anh. Nr. 24), deren Scheitel in O liegt, die durch A geht und den erzeugenden Kreis den Höhenunterschied der Punkte A und O zum Durchmesser hat. — Diese Linie ist auch erst wirklich die „Tautochrone“, d. h. die Linie, für welche die Schwingungsdauer völlig unabhängig von der Schwingweite ist. (Beide Sätze hat HUYGENS bewiesen.) Inwieweit die letzteren Eigenschaften bei dem Kreisbogen nicht zutreffen, zeigen die zwei folgenden Auf-

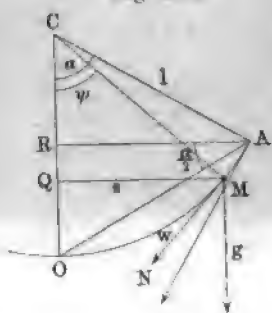
§§ 12, 23.

25. Als vollständige Pendelformel (III) ergibt sich durch hi (oder durch langwierige elementare) Rechnung:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \sin^6 \frac{\alpha}{2} + \dots \right]$$

Von dieser Reihe ist noch das zweite Glied elementar abzuleiten.

Fig. 105.



Ableitung: Bei der Herleitung der Formel (I) wurde die Beschleunigung im Abschnitte $MQ = s$ (Fig. 105) von der Lotlage mit ihrer wirklichen Größe $w = -\frac{g}{l} \cdot s \sin \alpha$ in Rechnung gesetzt; aber als Richtung dieser Beschleunigung wurde die Wagrechte MQ statt der Tangente fingiert. Beträgt die Amplitude α° , so weicht die Richtung der Tangente in der Grenzlage A um α° von der Wagrechten ab. Sie erlangt die wagrechte Richtung erst in der Stellung O . Als mittlere Richtung der Beschleunigung können wir somit die der Sehne AO unter dem

Winkel $\frac{\alpha^\circ}{2}$ gegen die Wagrechte einführen, und von dieser entfällt längs der Wagrechten die Komponente $w = -\frac{g}{l} \cdot s \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$. Daher tritt an Stelle von $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} \cdot \frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot (1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2})^{-\frac{1}{2}} \approx 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot (1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2})$$

§ 12.

26. Nach Gl. (II) und (III) der vorigen Aufgabe zu bestimmen, mit welchen Graden der Annäherung die ebenen Schwingungen des Pendels als isochron betrachtet werden dürfen.

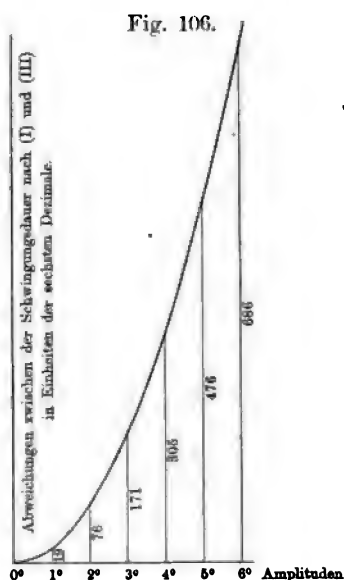
Vorbemerkung: Man findet in manchen elementaren Lehrbüchern

Behauptung, daß die Pendelformel $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ (I) und hiermit „der Isotismus der Pendelschwingungen bis etwa 5° ganz genau“ gelte, und daß von da ab die Schwingungsdauer mit der Amplitude wachse. Eine solche Behauptung muß aber auch schon für den Anfänger unglaublich sein, da sie in Sprache graphischer Darstellungen übersetzt besagen würde, daß eine Kurve eine endliche Strecke hin mit der Abszissenachse (an der die Amplituden

getragen sind) ganz zusammenfallen und erst dann von ihr (in unstetiger oder stetiger Krümmung?) abbiege. Wollte man jene schiefe Behauptung nicht buchstäblich, sondern selbst nur als annähernden Ausdruck für eine besondere Eigentümlichkeit der Kurve nehmen, so könnte man erwarten, daß die Kurve „bis etwa 5° der Abszissenachse nahe bleibe und von da ab in viel rascherem Verhältnisse sich erhebe. Doch trifft auch eine solche halbe Unstetigkeit nicht zu, wie Fig. 106 zeigt, die die folgenden strengen Rechnungsergebnisse graphisch darstellt.

Anleitung: Die Schwingungsdauer für den Grenzwert $\alpha = 0$ sei nach Gl. (I) berechnet T , für den endlichen Amplitudenwinkel α sei der Annäherungswert nach Gl. (II) berechnet T'_α , der wahre Wert nach Gl. (III) berechnet T_α ; für ein beliebiges l und g ist dann $T'_\alpha = k' \cdot T$, wo $k' = \left[1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right]$ und $T_\alpha = k T$, wo $k = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \dots \text{in inf.}\right]$. Es ergeben sich die Werte:

α	k' nach (II)	k nach (III)
0°	1,000 000 ₀	1,000 000 ₀
1°	1,000 019 ₀	1,000 019 ₀
2°	1,000 076 ₁	1,000 076 ₁
3°	1,000 171 ₃	1,000 171 ₃
4°	1,000 304 ₃	1,000 304 ₇
5°	1,000 475 ₇	1,000 476 ₄
6°	1,000 684 ₃	1,000 685 ₀
7°	1,000 931 ₇	1,000 933 ₇
8°	1,001 216 ₃	1,001 219 ₃
9°	1,001 538 ₀	1,001 544 ₄
10°	1,001 899 ₁	1,001 907 ₄
15°	1,004 259	1,004 301
30°	1,016 747	1,017 408
45°	1,036 612	1,039 969
90°	1,125 000	1,179 43



27. Die Träger der Atwoodschen Fallmaschine sind von unten §§ 12, 18. durch eine sehr biegsame, 2l cm lange Kette verbunden, von der auf 1 cm Länge δg Masse kommen (oder: die die „Längendichte“ $\delta g \text{ cm}^{-1}$ hat; Fig. 107). Zu zeigen, daß nach Störung des Gleichgewichtes durch Heben des einen Trägers um die beliebige Strecke a cm jeder Punkt der Kette Sinusschwingungen ausführt; wie groß ist ihre Schwingungsdauer, wenn jeder Träger samt Belastung (unter Einrechnung des Trägheitsmomentes des Rädchens, LA 91) Mg Masse hat? — Grenzfall für $M = 0$?

Anleitung: Ist der eine Träger um 1 cm über, der andere 1 cm unter der Mittellage 0, so wirkt als beschleunigende Kraft das Übergewicht der Kette von

Leitaufgaben.

cm, der Masse 2δ und dem Gewichte $2\delta g$. Ebenso ist allgemein während der Bewegung die augenblickliche Ausweichung x vom Trägers s cm ist. Es entspricht also hier der Faktor $2\delta g$ GröÙe x in Gleichung (6), § 18. Die zu bewegende Masse m ist jetzt $m = 2M + 2l\delta$. Daher

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2M + 2l\delta}{2\delta g}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g} + \frac{M}{\delta g}}.$$

Werden die oberen Enden der Kette statt unter Trägern unmittelbar an der Schnur des Rädchens angehängt und sieht man von der Masse der Schnur (sowie von dem Rädchen) ab, so wird $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$; Vergleich mit dem einfachen Pendel; Versuch! — Ebenso:



28. J-förmigen Röhre (Fig. 108) sei die Gesamtlänge $2l$ cm. Zu zeigen ist, dass die Schwingungsdauer nach Störung des hydrostatischen Gleichgewichts von dem Einfluss der Schwerkraft unabhängig ist, da die verzögernde Kraft der Adhäsion vernachlässigt werden kann. (Vgl. Versuch 28.)

29. Was für Schwingungen führt ein an einer elastischen Spirale hängender Körper aus? (Versuch mit Jollys Federwage, Fig. 208, S. 201.)

Anleitung: Im Vergleich zu dem auf waagrechter Bahn rollenden Wagen (Fig. 52, S. 70) kommt bei der aufwärts und abwärts schwingenden Belastung einer lotrecht hängenden Feder zu den elastischen Kräften noch die Schwere hinzu. Hierdurch tritt an Stelle des Beschleunigungsgesetzes $w = -\frac{x}{m} s \dots$ (I) (welchem das Weg-Zeit-Gesetz $s = a \sin \alpha t$ und wegen $\frac{x}{m} = \alpha^2$ und $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ die Schwingungsdauer $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ entspricht) nunmehr das Beschleunigungsgesetz $w = -\frac{x}{m} s + g \dots$ (II). Dies entspricht das Weg-Zeit-Gesetz $s = a \sin \alpha t + \frac{g}{\alpha^2} \dots$ (III) [allgemeiner $s = a_1 \sin \alpha t + a_2 \cos \alpha t + \frac{g}{\alpha^2} \dots$ (IV)]. — Der Beweis für (III) liegt darin, dass $v_m = \frac{ds}{dt} = a \alpha \cos \alpha t$ und $v = \frac{ds}{dt} = a \alpha \cos \alpha t + \frac{g}{\alpha}$ der konstante Summand $\frac{g}{\alpha}$ ausfällt, weshalb die Werte von v_m , v , w_m , w dieselben sind, wie beim einfachen Schwingen.

gungsgesetz $s = a \sin at$. — Da die Schwingungsdauer $T = \frac{2\pi}{\alpha}$ nur von dem Faktor α , nicht von dem konstanten Summanden $\frac{g}{\alpha^2}$ in (III) abhängt, so ist auch für die vertikal (in der Richtung der Kraftlinien des homogenen Kraftfeldes der Erde) schwingende Feder die Schwingungsdauer dieselbe wie bei horizontaler Schwingungsrichtung (oder wie bei der Feldstärke Null).

Numerisches Beispiel: Wird die Feder durch eine Belastung von $m = 1$ g, d. i. durch die Kraft von $mg \neq 10^3$ Dyn, um 10 cm verlängert, so gehören zur Verlängerung um 1 cm nur $x = 10^4$ Dyn. Somit $T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{100}} = 0,628$ sec.

30. Schon GALILEI hat die Frage aufgeworfen, wie sich ein Stein § 12, 18, 51. bewegen würde, der an der Mündung eines die ganze Erde längs eines Durchmessers durchsetzenden Schachtes freigelassen würde. Zu zeigen, daß der Körper Sinusschwingungen von der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels machen würde, dessen Länge gleich dem Erdradius ist (die Erde als homogene Kugel vorausgesetzt).

Anleitung: GALILEI hatte richtig erkannt, daß der Körper auf seinem Wege bis zum Erdmittelpunkte eine Beschleunigung zu diesem Punkte hin erhalte und sich infolge seiner Trägheit über diesen weiter hinaus mit Verzögerung und zwar bis zum entgegengesetzten Ende des Durchmessers bewegen müsse. Er hatte aber darin geirrt, daß er sich die Beschleunigung, bzw. Verzögerung als eine konstante dachte, was im Erdmittelpunkte eine plötzliche (diskontinuierliche) Veränderung der Beschleunigung verlangt hätte. (Die mittelalterlichen Vorstellungen über das Umschlagen der Schwere im Erdmittelpunkt entwickelt DANTE in der „Göttlichen Komödie“, Ende der „Hölle“ XXXIV. Gesang, Vers 70 ff.)

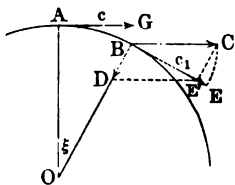
Dafs vielmehr (unter der freilich ebenfalls nicht verwirklichten Annahme konstanter Dichte der Erdkugel) die Anziehung des sich im Innern des Schachtes bewegendes Körpers einfach direkt proportional dem jeweiligen Abstande s von dem Erdmittelpunkte ist, wird in LA 49 gezeigt werden. Aus der dort abgeleiteten Gl. $w = -\frac{g}{R} \cdot s$ folgt wieder $T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$.

31. Die Gl. $b_{\perp} = \frac{c^2}{r} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r$ auf verschiedene Arten abzu- § 18.

leiten und den inneren Zusammenhang dieser Ableitungen darzulegen.

Erste Ableitung: Aus dem Zusammenhange zwischen Wurfbewegung und
 Kreisung nach Fig. 34, S. 41 (§ 13). — Zweite Ableitung: Fig. 109.
 Nach Fig. 35, S. 41 (§ 13).

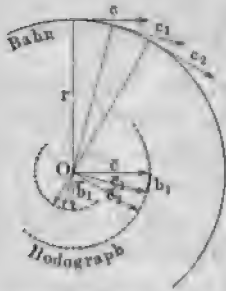
Dritte Ableitung (Fig. 109): Der kreisende Punkt habe in A und B die der Größe nach gleichen Geschwindigkeiten, dargestellt durch die Vektoren $AG = c$ und $BE = c_1$. Wegen der um ξ° veränderten Richtung läßt sich aber c_1 auffassen als Resultierende eines Geschwindigkeitsparallelogramms mit den Komponenten $BC = c$ und BD (wobei in erster Annäherung die vierte Ecke E' des Parallelogramms als zusammenfallend mit E , dem Endpunkt des Vektors c_1 , angenommen werde). Dabei ist die centripetale Geschwindigkeit BD



im Vergleich zur entsprechenden Größe für A , die gleich Null gewesen war, ein Geschwindigkeitszuwachs, und daher ist die Beschleunigung b_{\perp} in dem Grenzwert von $\frac{BD - 0}{\tau}$, wo $\tau = \frac{AB}{c}$, also $b_{\perp} = \frac{BD}{\tau} = \frac{c^2}{r^{\frac{1}{2}}} = \frac{c^2}{r}$.

Vierte (hodographische) Ableitung: Der kreisende Punkt hat eine Bewegung, deren Geschwindigkeit ihrem absoluten Werte nach zu allen Zeiten dieselbe

Fig. 110.



(Fig. 110, $c = c_1 = c_2 \dots$), deren Richtung aber in gleichen Zeiteilen sich um gleichviel ändert. Wir die Geschwindigkeit und Richtung zusammen in Vektoren dar, die alle von demselben Ursprung ausgehen, so bilden ihre Endpunkte wieder einen Kreis (Eine solche Kurve, die eine graphische Darstellung der Geschwindigkeiten der sich bewegenden Punkte heißt nach HAMILTON der **Hodograph** der Geschwindigkeit. Jeder Bewegung mit bestimmtem Weg-Zeit-Verhältnis und bestimmter Bahnform entspricht ein eigener Hodograph. Vgl. LA 47.) Bilden wir dann zu dem wechselnden Geschwindigkeiten darstellenden Kreis den Halbmesser c noch einmal den Kreis der Vektoren, so erhalten wir den Kreis der Beschleunigungen b (Hodograph der Beschleunigung), und für die drei Kreise $r:c = c:b$; also $b = \frac{c^2}{r}$.

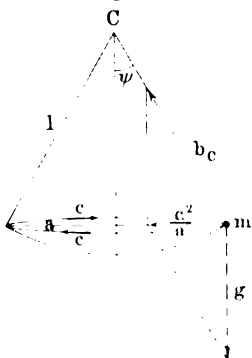
Fünfte Ableitung: Die Gleichung für die Beschleunigung bei Sinusschwingungen $x = -a \sin \omega t$ wird für $\omega = 1$ speziell $x = -a \sin t$ oder $x = +a \cos t$. Diese gegen die Mittellage des schwingenden Punktes gerichtete Beschleunigung ist aber gleich der Normalbeschleunigung desjenigen kreisenden Punktes, als dessen Projektion man die Sinusschwingungen auffassen kann; denn in den Grenzpunkten ist das Element der Kreisbahn senkrecht gegen die geradlinige Bahn der Sinusschwingungen; es ist also hier $x_a = b_{\perp}$ und $a = r$, somit $b_{\perp} = \frac{a^2}{r}$.

Eine sechste Ableitung der Normalbeschleunigung ergibt sich daraus, die mit ihr zusammenhängende (fünfte) Ableitung der Sinusschwingungen Teil auch energetisch (LA 62) sich darstellen läßt.

§ 12, 13, 19.

32. Es sind bei einem Kreiskegelpendel von der Masse m zwischen der Schwerebeschleunigung g , der Pendellänge l , dem Radius der Kreisung a , der Bahngeschwindigkeit c , der Winkelgeschwindigkeit ω und der Umlaufzeit T bestehenden Beziehungen phoronomisch und dynamisch zu erklären. Da sei der Winkel ψ zwischen der Achse und der Seite des Kegels I. von beliebiger Größe (Fig. 111) II. von sehr kleiner Größe.

Fig. 111.



zischen der Schwerebeschleunigung g , der Pendellänge l , dem Radius der Kreisung a , der Bahngeschwindigkeit c , der Winkelgeschwindigkeit ω und der Umlaufzeit T bestehenden Beziehungen phoronomisch und dynamisch zu erklären. Da sei der Winkel ψ zwischen der Achse und der Seite des Kegels I. von beliebiger Größe (Fig. 111) II. von sehr kleiner Größe.

Anleitung zu I.: Der einmal eingeleiteten fortwährenden Kreisung entspricht die wagrecht (gegen die Lotlage des Pendels normal gerichtete) Normalbeschleunigung $\frac{c^2}{a}$. Daß die kreisende Masse m

des Vorhandenseins der abwärts gerichteten Schwerebeschleunigung g keinerlei Annäherung an die Erde zeigt, weist darauf hin, daß auch noch eine aufwärts gerichtete Beschleunigung vorhanden sein müsse: es ist dies die Beschleunigung b_C , die längs des Fadens von der kreisenden Masse aus gegen den Aufhängepunkt C gerichtet ist. Die Resultierende aus g und b_C ist $\frac{c^2}{a} = g \tan \psi$; oder wegen

$$c = \alpha a \text{ und } a = l \sin \psi \text{ wird } \alpha^2 = \frac{g}{l \cos \psi}, \text{ somit } \frac{2\pi}{\alpha} = T = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \psi}{g}}.$$

Zu II.: Da die Funktion $\cos \psi$ für kleine Werte von ψ sich nur um kleine Größen zweiter Ordnung von 1 unterscheidet (sogar noch für $\psi < 15^\circ$ ist $\sqrt{\cos \psi} > 0,9828$), so gilt $T \neq 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$, also gleich der Schwingungsdauer für ebene Schwingungen.

Diese phoronomischen Beziehungen (— warum sind sie vom Werte der Masse m unabhängig?) erklären sich dynamisch jetzt so, daß bei der kreisenden Bewegung des Pendelpunktes als centripetal ablenkende Kraft die Resultierende der Schwerkraft und des Fadenwiderstandes wirkt. Indem der Pendelkörper diesem Zuge nach einwärts nicht folgt, sondern im Kreise bleibt, zeigt er seinen Beharrungswiderstand gegen die beständige Richtungsänderung im horizontalen Kreise.

Wäre $\frac{c^2}{a} \leq g \tan \psi$, so würde der Pendelpunkt nach außen, bzw. innen aus der Kreisbahn abweichen. Versucht die Hand diese Bewegungen zu verhindern, so empfindet sie einen auswärts, bzw. einwärts gerichteten Druck oder Zug. — Mit welchem Recht bezeichnet man daher das Kreisgelpendel auch als Centrifugalpendel? (Vgl. LA 40, 41, 42.). — Daß der feste Aufhängepunkt C in der Tat einem nach auswärts gerichteten Zug entgegenzuwirken hat, läßt sich durch den Gegenversuch nachweisen, daß der Faden von m über eine an Stelle von C angebrachte Rolle, von da zu einer zweiten Rolle (in der erweiterten Ebene der ersten) geführt und jenseits mit einer der Masse m gleichen Masse belastet wird. Das Gleichgewicht wird sogleich gestört, wenn m in die kreisende Bewegung versetzt wird.

Zusatz: Setzen wir $T = \frac{1}{n}$, so ergibt sich aus $\frac{1}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \psi}{g}}$ für $n = 0$ die unmögliche Gleichung $\cos \psi = \infty$. Wie löst sich dieses Paradoxon? — Antwort: Der Aufstellung jener Gleichung liegt die Voraussetzung zugrunde, daß der Winkel ψ während der Umdrehung konstant bleibt. Dies ist aber für $n = 0$, d. h. beim Aufhören gleichförmiger Umdrehungen, überhaupt nicht mehr der Fall. Denn schon für sehr kleine n beschreibt der Pendelpunkt nicht mehr Kreise, sondern Ellipsen oder strahlenförmig verschlungene Linien (wie beim Foucaultschen Pendelversuch). — Umgekehrt wird für $\psi = 0$ nicht etwa $\frac{1}{n} = \infty$ und $T = 0$, sondern es wird T gleich der Schwingungsdauer des einfachen Pendels.

33. Zu zeigen, daß ein mit etwa $8000 \text{ m sec}^{-1} = 8 \text{ km sec}^{-1}$ § 13, 21. Anfangsgeschwindigkeit in horizontaler Richtung abgefeuertes Projektil die Erde wie ein Trabant umkreisen würde.

Anleitung: Wird der Parameter der Wurfparabel, d. i. zugleich der Krümmungshalbmesser im Scheitel, gleich dem Erdhalbmesser, also $R = \frac{c^2}{g}$ und $c = \sqrt{Rg}$,

so behält der geworfene Körper seine Abstände von der Erdoberfläche: mm
 $R = 6370 \text{ km}$, $g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$, also $c = 790504 \neq 8 \cdot 10^5 \text{ cm sec}^{-1}$.

Der Vorgang läßt sich nicht verwirklichen, weil 1. die größte bis
 reichte Geschwindigkeit von Projektilen nur etwa den achten Teil der
 schwindigkeit beträgt; 2. weil infolge des Luftwiderstandes die Geschwin-
 aufgezehrt und der Körper an einer nicht zu berechnenden Stelle der E-
 fläche niederfallen würde.

- § 19, 21. 34. Zu zeigen, daß die Beschleunigung, mit der der Mo-
 der Tangente seiner Bahn gegen die Erde hin abgelenkt wird
 $\gamma = g : 60^2$ sei (NEWTONS „Mondrechnung“).

Anleitung: In $\gamma = (2\pi/T)^2 \cdot r$ ist r annähernd gleich 60 Erdradien
 rechnen in cm) und T annähernd gleich $27\frac{1}{3}$ Tagen (ein siderischer Monat
 rechnen in sec); ferner $g = 981 \text{ cm sec}^{-2}$. Hieraus ergibt sich $g : \gamma = 3625$.

Genauere Werte: Mittlerer Abstand Erde — Mond = 60,2776 Er-
 größter Abstand 63,5875; kleinster 56,9081 (vgl. LA 217). Die entspre-
 Werte von γ sind 0,272, 0,287, 0,257 cm sec^{-2} .

IV. Kräfte und Massen.

- § 10. 35. Folgende Veranschaulichungen der absoluten K-
 einheit 1 Dyn (ferner 1 Megadyn = 10^6 Dyn) zu begründen

a) 1 Dyn = $\frac{1}{981}$ Kraftgramm \neq dem Gewichtsdruck eines Milligramm

Schon das Gewicht einer Mücke (vgl. LA 53) von 1 Centigramm bis
 gramm Masse beträgt also 10 bis 100 Dyn. — Ein Bogen von 100 Brief-
 hat eine Masse von etwa $3\frac{1}{2}$ Massengramm (wiegt $3\frac{1}{2}$ Kraftgramm = $3\frac{1}{2} \times 981$
 das Gewicht einer Briefmarke ist also 0,035 g [lies: 0,035 Kraftgramm] = 34
 — 1 Megadyn \neq 1 kg [lies: ein Kraftkilogramm].

b) 1 Dyn = der Kraft, mit der eine Masse $m = 1 \text{ g}$ durch die Schw-
 komponente längs einer schiefen Ebene von der Neigung $\frac{h}{l} = \frac{1}{g} \neq \frac{1}{1000}$
 gezogen wird (§ 17).

c) 1 Dyn = der Kraft, mit der eine Masse $m = 1 \text{ g}$ als Pendelpunkt
 einfachen Pendels von der Länge $l = g \text{ cm} \neq 10 \text{ m}$ bei einem wagrecht-
 stande von der Lotlage $s = 1 \text{ cm}$ durch die Schwerkraftkomponente ge-
 Lotlage hin gezogen wird (§ 17).

d) 1 Dyn = der Kraft, mit der derselbe Pendelpunkt bei der Pend-
 $l \neq 5 \text{ m}$ um $s = \frac{1}{2} \text{ cm}$ aus der Lotlage abgelenkt wird. — Allgemeiner?

e) 1 Dyn = der Kraft, mit der zwei gleichnamig geladene elektrische
 von je 5 m Fadenlänge und je 1 g Masse aus einem Abstände von 1 cm e-
 abstossen. (Jede Kugel hat dann 1 elektrostatische Ladungseinheit, § 135: 1)

f) 1 Dyn = der elektrostatischen Spannung an einer auf 3000 Volt gel-
 Leiterkugel vom Radius $R = 10 \text{ cm}$ (LA 182).

- § 17. 36. Es sind die acht Aufgaben aufzustellen und zu löse-
 denen die sechs Größen $k, k_1, k_2, \varphi, \alpha, \beta$ des Kräfteparallelogr-
 (Fig. 112) und des diesem Parallelogramm entsprechenden K-
 dreiecks (Fig. 113) Anlaß geben.



Anleitung: Da zur Dreiecksauflösung je drei Stücke gegeben sein müssen, so sind zunächst $C_3(6) = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ Kombinationen denkbar. Von diesen ist aber vor allem φ, α, β kein Auflösungsfall, und von den übrigen sind z. B. k, k_1, α und k, k_2, β physikalisch gleichwertig. Es verbleiben nur

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
Gegeben:	k_1, k_2, φ	k_1, k_2, α	k, k_1, φ	k, k_1, α	k, k_1, β	k_1, α, β	k, α, β	k, k_1, k_2
Gefunden:	k, α, β	k, β, φ	k_2, α, β	k_2, β, φ	k_2, α, φ	k, k_2, φ	k_1, k_2, φ	α, β, φ

Fig. 112.

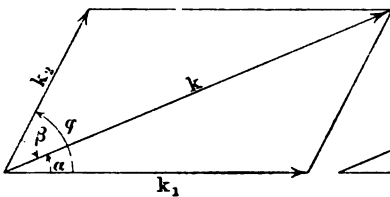
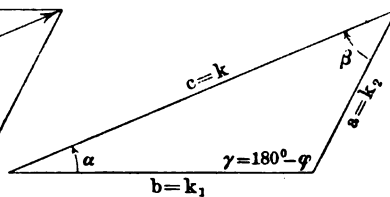


Fig. 113.



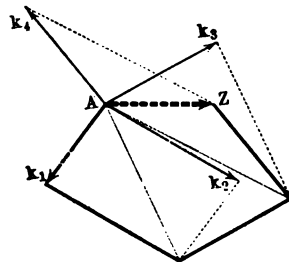
In Worten z. B.: 1. Gegeben sind zwei unter einem Winkel φ wirkende Kraftkomponenten k_1, k_2 ; wie groß ist die Resultierende k und welche Winkel schließt sie mit den beiden Komponenten ein?

8. Eine gegebene Kraft k soll zerlegt werden in zwei Komponenten, von denen die Größen k_1 und k_2 gegeben sind. Welche Winkel α, β müssen sie mit den Komponenten einschließen?

Lösungen durch planimetrische Konstruktion und trigonometrische Berechnung nach dem Ersatzdreiecke $abc\alpha\beta\gamma$.

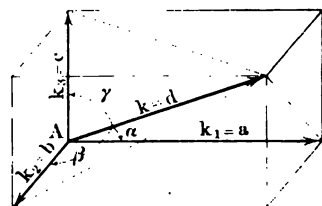
37. Die Resultierende beliebig vieler an einem Punkte an- § 17.
greifender Kräfte a) durch wiederholte Parallelogrammkonstruktion, b) durch Polygonkonstruktion zu finden. Welche Bedingung muß dieses Kräftepolygon (muß es ein ebenes sein?) erfüllen, wenn die Kräfte im Gleichgewichte sein sollen?

Fig. 114.



Anleitung: Ist A (Fig. 114) der Angriffspunkt, so ist die schließliche Resultierende bekannt, wenn der Endpunkt Z gefunden ist. Seine Lage in Bezug auf A ist aber durch die Polygonseiten bestimmt. — Gleichgewicht herrscht, wenn Z nach A fällt, also das Polygon geschlossen ist — gleichviel, ob eben oder nicht.

Fig. 115.



§ 17.

38. a) Zu zeigen, daß die Resultierende von drei an einem Punkte A angreifenden, nicht in einer Ebene liegenden Kräften durch die von A ausgehende Diagonale desjenigen Kräfteparallelepeds dar-

gestellt wird, dessen Seiten die Komponenten darstellen. b) Welche Beziehung besteht zwischen den Winkeln α , β , γ , wenn das Parallelepiped ein rechtwinkliges ist (Fig. 115, a. v. S.)?

Anleitung zu a): Wiederholte Parallelogramm- oder einfacher Polarkonstruktion wie in der vorigen Aufgabe.

Zu b): Da $\cos \alpha = \frac{a}{d}$, $\cos \beta = \frac{b}{d}$, $\cos \gamma = \frac{c}{d}$ und $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ (warum?), so ist $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Wie verhält sich diese Formel zur goniometrischen Grundformel $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$?

- § 17. 39. Was hat es physikalisch zu bedeuten, daß Fig. 45 (S. 835) den Eindruck eines Parallelepipeds macht, von dem zwei einander gegenüberliegende Ecken sich perspektivisch decken?

Antwort: Liegen drei Kräfte nicht in einer Ebene und blickt man auf ein Kräfteparallelepiped in der Richtung seiner Diagonale, so stehen die Projektionen der drei Komponenten auf eine zur Blicklinie normale Ebene untereinander im Gleichgewicht.

- § 19. 40. Nach welcher geometrischen Konstruktion wäre die im I. Geschoss der geschwungene Schleuder loszulassen, wenn das Geschoss einen gegebenen Punkt treffen soll, a) ohne Rücksicht auf die Schwerkraftbewegung sinkenden Geschosses, b) mit Rücksicht hierauf?

Antwort zu a). Es hätte z. B. David die Tangente, die von der Stirn Goliath aus an den vom Schleuderstein beschriebenen Kreis führt, konstruiert und beim Passieren des einen Tangentialpunktes den Strang loslassen müssen (Bekanntlich denkt der im Schleudern Geübte an Kreise und Tangenten eben so wenig, wie der Werfende an Parabeln.)

Zu b). Vom Augenblick des Loslassens an ist die Bewegung Wurfbewegung, daher Konstruktion der Wurfebene und des Elevationswinkels.

- §§ 19, 31. 41. Durch Zeichnung und Rechnung zu begründen, zu welchem Zwecke bei Bahnkrümmungen die äußeren Schienen höher liegen.

Anleitung: Wird in erster Annäherung angenommen, daß die Resultierende aller an den in krummen Bahnen (von freilich etwas verschiedener Krümmung) mit dem mittleren Krümmungshalbmesser R cm) angreifenden

Fig. 116.



Centrifugalkräfte im Schwerpunkte des Wagens angreife, so ist die Resultierende aus diesen Centrifugalkräften und der Schwerkraft des Wagens auf der durch die Schienen gelegten Ebene normal sein (für mittlere Bahngeschwindigkeit c cm sec⁻¹; Fig. 116).

den Elevationswinkel ϵ dieser Ebene muß somit die Bedingung $\tan \epsilon = b_{\perp} : g$ erfüllt sein, wo $b_{\perp} = \frac{c^2}{R}$.

§ 19, 31, 42

42. Zu beweisen, daß in einem um seine vertikale Achse rotierenden Trinkglase der Wasserspiegel parabolische Krümmung annimmt.

Regressiver Beweis (log. Anh. Nr. 38): Geht man von der Annahme aus, daß ein vertikaler Schnitt durch die Oberfläche die Parabel von der Gleichung

$y'' = 2px$ (Fig. 117) darstelle, so erhält ein Punkt in M zur lotrechten Schwerebeschleunigung g die wagrechte Centrifugalbeschleunigung b_{\perp} . Die Diagonale des Beschleunigungsparallelogramms muß die Normale MN der Parabel und $NP = p$ die Subnormale sein, daher

$b_{\perp} : g = y : p$; und weil $b_{\perp} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot y$, so wird

$T = 2\pi \sqrt{\frac{p}{g}}$. Vergleichung mit der Pendelformel. —

Der progressive Beweis hat die Natur der Kurve als noch unbekannt anzunehmen; es gilt aber $tg \tau = \frac{g}{b_{\perp}}$

$= \frac{g}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot y} = \frac{Konst}{y}$; ein Richtungskoeffizient von der

Form $\frac{Konst}{y}$ kommt aber nur der Parabel zu, wo dann $Konst = p$.

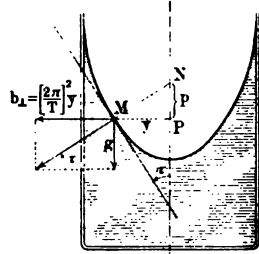
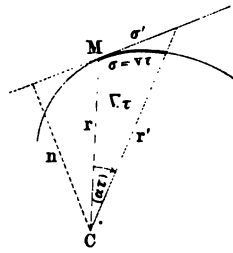


Fig. 117.

43. Für eine beliebige Zentralbewegung die Beziehungen zwischen der **Flächengeschwindigkeit** ρ und der Winkelgeschwindigkeit α des Leitstrahles r , sowie der Normale n aus dem Zentralpunkt auf die Bahntangente aufzustellen (Fig. 118).

Fig. 118.

§ 19.



Anleitung: So wie ein Maß für die Bahngeschwindigkeit der in 1 sec zurückgelegte Weg v , ein Maß für die Winkelgeschwindigkeit der in 1 sec zurückgelegte Winkel α bildet, so bildet das Maß für die „Flächengeschwindigkeit“ eines Leitstrahles die vom Leitstrahle in 1 sec zurückgelegte Fläche ρ . Binnen τ sec wird dann der Weg $\sigma = v \cdot \tau$, der Winkel $\alpha \cdot \tau$, die Fläche $\rho \cdot \tau$ zurückgelegt. Da nun geometrisch Fläche $r \cdot \tau = \frac{1}{2} r r' \sin(\alpha \tau) \neq \frac{1}{2} r^2 \alpha \tau$, so ist $\rho = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ (somit $\alpha = \frac{2\rho}{r^2}$; Anwendung in LA 47, hodographische Ableitung). Ferner

$$\rho \cdot \tau = \frac{1}{2} \sigma' n \neq \frac{1}{2} \sigma \cdot n = \frac{1}{2} v \tau \cdot n, \text{ daher } \rho = \frac{1}{2} v n.$$

Ist ferner ψ der Winkel zwischen dem Leitstrahl r und einer im Punkte M auf dem Bogenelement errichteten Normalen (z. B. dem Krümmungshalbmesser von M , vgl. Fig. 81, S. 765), so ist $n = r \cos \psi$ und daher $\rho = \frac{1}{2} v \cdot r \cos \psi$ (oder $r \cos \psi = \frac{2}{r} \cdot \rho$; Anwendung in LA 47, Rechnerische Ableitung).

V. Irdische und allgemeine Gravitation.

44. 1. Inwieweit folgt aus NEWTONS Mondrechnung (LA 34), daß §§ 20, 21. „die irdische Schwere bis zum Monde reicht“? 2. Inwieweit ist dieser Schluss ein Zirkelschluss?

Antwort zu 1. Die Rechnung von LA 31 lehrt unmittelbar überhaupt nichts über Kräfte, sondern nur, daß der Mond eine 60-mal so kleine Be-

beschleunigung gegen die Erde hin hat, als die Körper an der Erdoberfläche. Nachdem aber einerseits GALILEI und seine nächsten Nachfolger gelehrt hatten, daß und wie aus der Größe einer Beschleunigung auf die Größe einer beschleunigenden Kraft zu schließen sei, und da andererseits für die von Galilei offen gelassene Frage, wie weit sich das Kraftfeld der Erde erstrecke, und ob es Anzeichen für eine solche Erstreckung in kosmische Räume gebe, vor allem der Mond in Betracht kam, so mußte die von NEWTON zahlenmäßig bestimmte Beschleunigung des Mondes gegen die Erde auch auf eine an dem Mond angreifende und gegen die Erde hin gerichtete beschleunigende Kraft gedeutet werden. Und wie es am ungezwungensten ist zu denken, daß es „dieselbe Schwerkraft“ sei, die z. B. einen aus dem Meer emporspritzenden Wassertropfen an die Meeresfläche zurückzieht und „dieselbe Schwerkraft“, die eine Lawine von einem hohen Berggipfel mit nur unmerklich kleinerer Beschleunigung als jenen Tropfen herabstinken macht, so war es auch gerechtfertigt, daß es „dieselbe Schwerkraft“ sei, die auch noch auf den Mond, nur hier mit 60^{er}mal so kleiner Stärke, wirkt. (Die Erzählung, daß Newton durch einen fallenden Apfel zur Frage veranlaßt worden sei, ob die irdische Schwere bis zum Monde reiche, ist eine erst um die Mitte des XVIII. Jahrhunderts entstandene Legende, indem damals NEWTONS Gravitationslehre anfang populär zu werden, u. a. durch VOLTAIRE, EULER.)

Zu 2. Wollte man bloß daraus, daß die Beschleunigung γ des Mondes 60^{er}mal so klein ist als die Beschleunigung der Körper an der Erdoberfläche, auf das Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ schließen, so wäre das ein logischer Zirkel. Denn mit welchem Recht führt man als „Abstände“ gerade die vom Erdmittelpunkte ein? Freilich war es schon den Alten und dem ganzen Mittelalter (vgl. die in LA 30 erwähnte Stelle aus DANTES „Hölle“) geläufig, den Erdmittelpunkt als „Sitz der Schwere“ zu denken; und eben vom Erdmittelpunkt sind die Körper an der Erdoberfläche 1 R (Erdradius), der Mond 60 R entfernt. Aber erst NEWTON selbst hat erklärt, in welchem Sinne und mit welchem Rechte der Erdmittelpunkt gleichsam Sitz der Schwere ist. In Wahrheit gehen nämlich die Kräfte von allen Teilen der Erde aus und nur¹⁾, wenn schon angenommen ist, daß das Abstandsgesetz $\frac{C}{r^2}$ gelte, ist die Resultierende nach Richtung und Größe eine solche, als ob sie vom Erdmittelpunkt ausginge (vgl. LA 48). — NEWTONS Planetenrechnung (§ 21 und LA 47) ist von solchen Voraussetzungen unabhängig; und auch für den Mond wird der Schluss einwandfrei, wenn (unabhängig von der Größe der Kräfte) aus den Beobachtungen der Mondbewegung entnommen wird, daß für sie der Flächensatz in Bezug auf den Erdmittelpunkt gilt.

- § 21. 45. Für die Erdbahnellipse aus $a = 2 \cdot 10^7$ Meilen, $\varepsilon = \frac{1}{60}$, $T = 1$ Jahr die Größen e , b und f (LA 43) numerisch auszuwerten.

Anleitung: Lineare Excentrizität $e = a \times \varepsilon = \frac{2 \cdot 10^7}{60} = 3,3 \cdot 10^5$ Meilen.

¹⁾ NEWTON hat bewiesen, daß jene Ersetzbarkeit einer homogenen Kugel durch ihren Mittelpunkt sowohl beim Kraftgesetze $\frac{C}{r^2}$, wie auch beim Kraftgesetze $A \cdot r$ gelte. Erst LAPLACE hat bewiesen, daß jene Ersetzbarkeit nur für jene beiden Kraftgesetze (und für deren Superposition $f = A \cdot r + \frac{C}{r^2}$) gelte.

Kleine Halbachse $b = \sqrt{a^2 - a^2 \varepsilon^2} = 2 \cdot 10^7 \sqrt{1 - \frac{1}{60^2}} \approx 1,9999 \cdot 10^7$ Meilen.

Flächengeschwindigkeit $r = \frac{a b \pi}{1 \text{ Jahr}} = 1,257 \cdot 10^7$ Quadratmeilen per sec
 $= 6,943 \cdot 10^{18} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}$.

46. Die Konstante des Sonnensystems $\frac{a^3}{T^2} = \text{konst}$, sowie § 21.
 $4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \text{Konst}$ numerisch auszuwerten.

Anleitung: $\frac{a^3}{T^2} = \text{konst} = 1$ (Erdweite, Erdjahr) $= 3,298 \cdot 10^{24} \text{ (cm, sec)}$.

$4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \text{Konst} = 4 \pi^2$ (Erdweite, Erdjahr) $= 1,302 \cdot 10^{26} \text{ (cm, sec)}$.

Hierbei ist angenommen: Erdweite $a = 2 \times 10^7$ Meilen, 1 Meile $= 7,432 \text{ km}$,
 1 Erdjahr $= 365,242 \dots \times 86400 \text{ sec}$. — Für die genauere Verwandlungszahl
 1 Meile $= 7,4204 \text{ km}$ wird $\text{konst} = 3,282 \cdot 10^{24}$, $\text{Konst} = 1,296 \cdot 10^{26}$.

47. Aus Keplers Gesetzen ist Newtons Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ § 21.
abzuleiten für irgend einen Punkt einer Planetenbahn. (Vgl. die inverse Aufgabe in LA 63.)

I. Rechnerische Ableitung. Die Halbachsen der Bahnellipse seien a und b ,
 daher der Parameter $p = \frac{b^2}{a}$, die ganze Fläche $F = a b \pi$; ferner seien für
 einen beliebigen Punkt P (Fig. 119) der elliptischen
 Bahn der von der Sonne S aus gezogene Leitstrahl r ,
 der Krümmungshalbmesser ρ , der Winkel zwischen
 beiden ψ . In jenem Punkte habe der Planet gegen
 die Sonne die Beschleunigung w_r , seine Normalbeschleunigung
 sei w_ρ , seine Bahngeschwindigkeit v , seine
 konstante Flächengeschwindigkeit r . Dann gelten folgende Gleichungen:

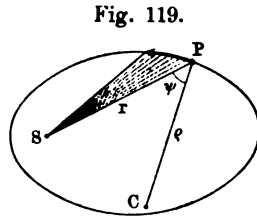


Fig. 119.

$$w_r = \frac{w_\rho}{\cos \psi} \text{ (denn } w_\rho \text{ lässt sich als eine Komponente von } w_r \text{ auffassen);}$$

$$w_\rho = \frac{v^2}{\rho} \text{ (allgemeine Gleichung für die Normalbeschleunigung, § 13);}$$

$$\rho \cdot \cos^3 \psi = \frac{b^2}{a} \text{ (diese Eigenschaft aller Kegelschnitte vgl. math. Anh. Nr. 26);}$$

$$r \cos \psi = \frac{2}{r} \cdot r \text{ (vgl. LA 43);}$$

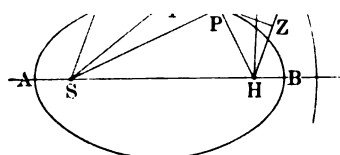
$$r = \frac{a b \pi}{T} \text{ (denn der ganzen Umlaufszeit des Planeten entspricht die ganze Fläche seiner Bahnellipse).}$$

Durch schrittweises Eliminieren der übrigen Größen ergibt sich:

$$w_r = 4 \pi^2 \cdot \frac{a^3}{T^2} \cdot \frac{1}{r^2}, \text{ wo } 4 \pi^2 \frac{a^3}{T^2} = \text{Konst} = 1,296 \cdot 10^{26} \text{ (LA 46).}$$

Über die Beziehung zwischen Konst und $C = \kappa M_m$ vgl. LA 51.

II. Hodographische Ableitung: Die Sonne stehe in dem einen Brennpunkte S der Bahnellipse, H sei der andere Brennpunkt (Fig. 120). Der Planet



der Strecke HU dargestellt
der Geschwindigkeit ist norm

Beweis: Wir benutze
schaften der Ellipse (Anh. 2:
Leitstrahlen $SP + HP =$

Ferner: Geht die Tangente

Punkte Y und Z , so ist $HU \perp YZ$. Ferner: $SY \cdot HZ =$
Bahngeschwindigkeit v in P die Richtung der Tangente PY

die Flächengeschwindigkeit r in P die Beziehungen: $r = \frac{1}{2}$

$= v \cdot \frac{b^2}{2HZ} = v \cdot \frac{b^2}{HU}$, woraus $v = \frac{r}{b^2} \cdot HU$. Setzen wir den

$\frac{r}{b^2} = k$, so ist HU der Größe nach proportional der Geschwin

dem Proportionalfaktor $\frac{1}{k}$, und da der Richtung nach $v \perp HU$.

U auf HU errichtete Normale $v = k \cdot HU$ der Größe und
Bahngeschwindigkeit v in P dar.

Die Gesamtbeschleunigung im Punkte P ergibt sich,
nach $\tau = 1$ sec erreichten Nachbarpunkt P' den zugehörigen Po
graphen konstruieren: dann stellt UU' den Zuwachs der Gesch
das ist die Beschleunigung dar. Da $UU' \perp SU$, und da di
 $v \perp HU$ errichtet zu denken war, so ist die durch UU' dar
nigung gegen die Sonne hin gerichtet. — Überdies ist die

Beschleunigung $\frac{v' - v}{\tau}$, wo $\tau = 1$ sec, also $w_r = k(HU' -$

(denn es liegt im Wesen der Vektorenmethode, math. Anh. N
Resultierende einfach gleich der Summe der beiden Komponer
eine Komponente gleich der Differenz aus der Resultierenden
Komponente setzt). Da nun UU' ein Bogen im Kreis mit d
dem Centriwinkel $\alpha \tau$ für $\tau = 1$ sec ist; und da ferner für die Wi

geschwindigkeit α die Beziehungen gelten $\alpha = \frac{2r}{a}$ (LA 43) und

äußere Punkte zu beweisen, wobei sich unter a) für den inneren und äußeren Punkt zum Teile die gleichen Rechnungsausdrücke darbieten; im Beweise b) wird der Satz für innere Punkte als bewiesen vorausgesetzt.

a) Es sei ein beliebiger innerer Punkt J (Fig. 121) einer Kugelfläche der gemeinschaftliche Scheitel von Doppelkegeln, durch die die ganze Oberfläche in Paare von Flächenelementen, z. B. PQ , $P'Q'$ zerlegt wird. Die Winkelöffnung eines dieser Kegel sei ω im absoluten Maße räumlicher Winkel (math. Anh. 2); die längste Seitenlinie dieses Kegels sei r . Die mit dem Radius r um den Mittelpunkt J beschriebene Kugel bildet dann das Element PQ , das mit PQ den Flächenwinkel α einschliesse. Es hat dann das Element PQ die Fläche $r^2 \omega$, das Element $P'Q'$ die Fläche $\frac{r^2 \omega}{\cos \alpha}$. Ist die Flächendichte der Kugelschale δ , so ist seine Masse $\frac{r^2 \omega}{\cos \alpha} \cdot \delta$, und diese Masse wirkt auf eine Masse von 1 g im Abstände x mit der Kraft $f_x = x \delta \cdot \frac{\omega}{\cos \alpha} \cdot \frac{r^2}{x^2}$.

Für den inneren Punkt J ist $x = r$, und daher sind die Kräfte $x \delta \cdot \frac{\omega}{\cos \alpha}$, die von je einem Elementenpaar ausgehen, einander gleich und ihre Resultierende Null. — Für einen äußeren Punkt A (Fig. 122), wo $OA = a$ und $PA = R$, ist die Kraft $f_R = x \delta \cdot \frac{\omega}{\cos \alpha} \cdot \frac{r^2}{R^2}$. Hier hat also der Faktor $\frac{r^2}{R^2}$ einen mit der

Lage von P veränderlichen Wert. Um ihn durch einen konstanten Wert zu ersetzen und so die Reihe der von den einzelnen Elementen ausgehenden Kräfte summierbar zu machen, ordnen wir dem Punkt A einen Hilfspunkt J so zu, daß $JP : AP = OP : OA$ oder

$\frac{r}{R} = \frac{\rho}{a}$. Hier ist dann $f_R \cdot \cos \alpha = x \delta \omega \cdot \frac{\rho^2}{a^2}$ die Komponente parallel OA (wogegen die zu OA normalen Kraftkomponenten einander wechselseitig aufheben). Dann ist $\sum f_R \cdot \cos \alpha = x \delta \frac{\rho^2}{a^2} \cdot \sum \omega = x \delta \frac{\rho^2}{a^2} \cdot 4\pi = x \cdot \frac{M}{a^2}$. — Also:

Die Gesamtanziehung der Kugelschale auf den äußeren Punkt ist nach Richtung und Stärke gleich der Anziehung einer im Mittelpunkte der Kugel befindlich gedachten Masse M .

b) Der Beweis mittels der Niveauflächen vergleicht die Arbeiten, die erfordert werden, um einer Masse m die Verschiebung AA' zu erteilen, entgegen der Anziehung der Masse M , wenn M einerseits an der Kugeloberfläche homogen ausgebreitet, andererseits M in O konzentriert gedacht wird. — Zu diesem Zwecke denken wir uns aus der Anfangskonfiguration (M als Kugelschale, m in A) diese Massen übergeführt in die Endkonfiguration (M als Kugelschale, m in A'); und zwar so, daß wir uns durch A und A' die Kugelflächen K und K' mit O als Mittelpunkt gelegt (Fig. 123) und dann folgende zwei Reihen von je vier Verschiebungen ausgeführt denken:

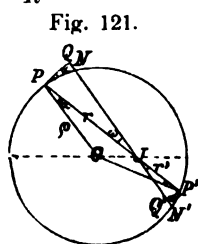


Fig. 121.

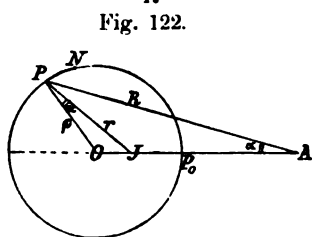


Fig. 122.

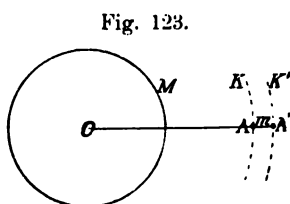


Fig. 123.

Einerseits:

1. Verschiebung von m aus A nach A' .
2. Gleichmäßige Verteilung von m auf der Fläche K' .
3. Konzentrierung von M in O .
4. Wiedervereinigung von m in A' .

Andererseits:

5. Gleichmäßige Verteilung von m auf der Fläche K .
6. Konzentrierung von M in O .
7. Wiedervereinigung von m in A .
8. Verschiebung von m aus A nach

Von diesen Verschiebungen erfordern 2., 4., 5., 7. keine Arbeit, keine Änderung des Abstandes der anziehenden Teilchen stattfand; 3. und 6. erfordern keine Arbeit, weil die Verschiebung im Innern der anziehenden Kugelflächen K und A' stattfand. Die geleisteten Gesamtarbeiten sind aber bei beiden Reihen von Verschiebungen gleich, da die Anfangs- und Endkonfigurationen dieselben sind. Es müssen also auch die einzelnen Arbeiten 1 und 8 einander gleich sein, und da die Verschiebung von m auf A' beide Male nämliche ist, so müssen auch die Kräfte einander gleich gewesen sein. Zur Beweiskraft dieser Schlüsse gehört, daß eine Verschiebung im Innern einer Kugel nur dann keine Arbeit erfordert, wenn die Kugelschale mit einer nach dem Newtonschen Abstandsgesetze wirkenden Masse (oder einer nach dem Coulombschen Gesetze wirkenden elektrischen oder magnetischen Menge) belegt ist; in § 21, III bewiesen worden ist.

§§ 20, 21.

49. Die Größe der **Schwerkraft** der als homogene Kugel gedachten **Erde** für alle inneren und äußeren Punkte rechnerisch und graphisch darzustellen.

Anleitung: Es sei der Erdradius $OE = R$ (Fig. 124 und 125). Für inneren, d. h. unterhalb, der Erdoberfläche gelegenen Punkte sei der Abstand vom Erdmittelpunkt $s < R$ (Fig. 124), für die äußeren Punkte sei $r > R$ (Fig. 125). — In beiden Figuren ist durch die Strecke $EK = 1$ cm die Größe des Gewichtes, das der Körper an der Erdoberfläche zeigt, graphisch dargestellt; wobei auch die wahre Richtung für die in Wahrheit lotrechte Kraft willkürlich als die für die Zeichnung bequemste Richtung gewählt ist.

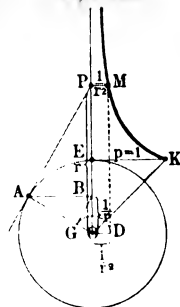
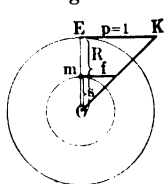


Fig. 124.



Die rechte Richtung für die in Wahrheit lotrechte Kraft willkürlich als die für die Zeichnung bequemste Richtung gewählt ist.

Daß die Anziehung für innere Punkte direkt proportional dem Abstand s wächst und also durch eine Gerade darzustellen ist, zeigt folgende Überlegung: Die Vollkugel von s cm Halbmesser ist m

äußerer Punkt. Das Volumen dieser Kugel ist $\frac{4\pi}{3}s^3$, und wenn als konstante Dichte der ganzen Erde D g cm⁻³ angenommen wird, so ist die Masse der Kugel $\frac{4\pi}{3}s^3D$. Da diese Kugel auf die in s cm vom Mittelpunkte befindliche Masse so wirkt, als wäre die ganze Kugelmasse im Mittelpunkte vereinigt, so wirkt eine Masse $m = 1$ g gegen den Mittelpunkt hingezogen mit der Kraft $f = -\kappa \cdot \frac{4\pi}{3}s^3D$, wo das Zeichen „-“ bedeutet, daß die Kraft zum Erdmittelpunkte gerichtet ist, wogegen der Abstand s vom Mittelpunkte weg gerechnet wird.

Speziell für die Erdoberfläche ist $f = p = 1 \cdot g = \pi \frac{4\pi}{3} D R$. Daher ist allgemein $\pi \frac{4\pi}{3} D = \frac{g}{R}$ und $f = -\frac{g}{R} \cdot s$.

Hier zeigt die Vergleichung mit der analogen Gleichung $f = -\frac{g}{l} \cdot s$ (für $m = 1$ g (§ 18), oder $w = -\frac{g}{l} \cdot s$ (§ 12)), daß $l = R$, vgl. LA 30.

Für äußere Punkte können wir uns die graphische Darstellung des Abnehmens der Erdanziehung mit wachsendem Abstand r vom Erdmittelpunkt, d. h. beliebig viele Punkte der „Gravitationskurve“ verschaffen, indem zu den Abständen $r = R, 2R, 3R \dots$ die Kräfte $f = p, \frac{p}{4}, \frac{p}{9} \dots$ gehören.

Statt durch diese rechnerische Bestimmung lassen sich die Punkte der Kurve auch durch folgende planimetrische Konstruktion finden, wobei der Einfachheit wegen sowohl $OE = R = 1$ cm, wie auch $EK = p = 1$ cm gesetzt werden möge, so daß wieder der Einheitskreis einen größten Kreis der Erdkugel darstellt.

Dann lautet die Gleichung der Gravitationskurve $f = \frac{1}{r^2}$. Diese Beziehung läßt sich konstruieren, indem man von dem äußeren Punkte P die Tangente PA an den Einheitskreis zieht, den Berührungspunkt A nach B projiziert, dann B wieder auf AO nach G projiziert und G durch einen Kreisbogen nach D , schließlich D durch die Parallele zu OP nach M überträgt. Dann ist

im $\triangle OAP$ $\overline{OA}^2 = OP \cdot OB$ oder $1 = r \cdot OB$, also $OB = \frac{1}{r}$,

im $\triangle OBA$ $\overline{OB}^2 = OA \cdot OG$ oder $\left(\frac{1}{r}\right)^2 = 1 \cdot OG$, also $OG = OD = PM = \frac{1}{r^2}$.

Um uns von der einschränkenden Annahme $EK = 1$ frei zu machen (da ja in Wahrheit das Gewicht an der Erdoberfläche $p = mg$ den Spezialwert für $f = \pi \frac{Mm}{r^2}$ zu $r = R$ darstellt), können entweder alle Ordinaten PM im Verhältnis $1 : p$ vergrößert oder es kann auch die Konstruktion, statt am Einheitskreis durchgeführt zu werden, eine entsprechende Verallgemeinerung erfahren, so daß statt $f = \frac{1}{r^2}$ allgemein $f = \frac{C}{r^2}$; wobei $C = \pi Mm$ (vgl. LA 51).

50. Ein Mann habe a) im Meeresniveau stehend, ein Gewicht von §§ 16, 20, 21. 100 kg. Um wieviel vermindert es sich, wenn er sich um die Höhe eines Tisches, d. i. etwa um $h = 0,8$ m, erhebt? (Vergleich des Gewichtsunterschiedes mit dem Gewichte einer Briefmarke, LA 35). Was ändert sich an diesen Zahlen b) für die Seehöhe von Wien (200 m)? — c) Statt $h = 0,8$ m die Höhe $H = 8840$ m des Mount Everest.

Anleitung: Am Meeresspiegel, d. i. im Abstände vom Erdmittelpunkt $R = 6370000$ m habe die Masse von m g das Gewicht p_0 (in g oder Dyn); in der Höhe h m über dem Meeresspiegel, d. i. im Abstände $(R + h)$ m, das Gewicht p_h . Dann ist

$$p_h = p_0 \cdot \frac{R^2}{(R + h)^2} = p_0 \cdot \left(\frac{R}{R + h}\right)^2 = p_0 \cdot \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-2} \neq p_0 \cdot \left(1 - \frac{2h}{R}\right).$$

(Gaurisankar) entspricht: $p_0 - p_H = p_0 \cdot \frac{2H}{R} = 0,00277 p_0$.

- § 21. 51. Zu zeigen, daß $Konst = 1,296 \cdot 10^{26}$ (c) d. h. daß die phoronomische Größe $Konst = 4\pi^2 \frac{a^3}{T^2}$ vielen astronomischen Rechnungen wiederkehrenden dy $\propto M$, nämlich dem Produkte aus der Gravitationsk der Sonnenmasse M .

Beweis: Nach § 21, Gl. (11) und (111) wirkt zwisch einem Planeten, wenn die Massen dieser Körper Mg , bzw. $m f = \frac{C}{r^2}$, wo $C = \propto Mm$. Diese Wirkung äußert sich in d $w_r = \frac{Konst}{r^2} \dots$ (§ 21, Gl. 6). Da nun $f = m w_r$, also $\frac{C}{r^2} = C = m Konst$ (in Worten!). Da ferner $\propto Mm = m Konst$, so

- § 21. 52. Wie ändern sich die Dimensionsformeln der Nr. 29, Tafel der physikalischen Größen), wenn als l Gravitationskonstante die einer Geschwindigkeit

Anleitung: Im C-S-G-System ergibt sich die Dimensio konstante \propto so: Da in der Gleichung $f = \propto \frac{Mm}{r^2}$ die Dim f : ist $\text{cm sec}^{-2} g = \propto \cdot \frac{g \cdot g}{\text{cm}^2}$, woraus $\text{Dim } \propto = \text{cm}^2 \text{sec}^{-2} g^{-1}$.

Da hier und in allen Beziehungen zwischen den Dimensio besonderen Einheiten cm , sec , g nicht wesentlich sind, sonde Qualitative von Länge (L), Zeit (T) und Masse (M) ankom allgemeiner: $\text{Dim } \propto = L^2 T^{-2} M^{-1}$.

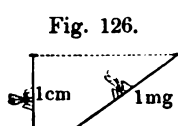
Wird nun hier (nach einem Vorschlage von ANDRIESEN) D

Die neuen Dimensionsformeln zeigen gegenüber den alten die Eigentümlichkeit, daß nicht nur 1. bloß die phoronomischen Grundgrößen Länge und Zeit vorkommen, sondern daß auch 2. nur mehr ganzzahlige Exponenten vorkommen. — Diese beiden Umstände werden als sachliche Gründe dafür geltend gemacht, daß die Annahme $\text{Dim } x = \text{Dim Geschwindigkeit}$ nicht nur eine willkürliche, sondern eine wahrscheinlich im Wesen der Gravitationswirkungen selbst begründete sei. (Diese Gründe gewinnen dadurch an Gewicht, daß sich auch mit den viel mannigfacheren Größen der Elektrik und Magnetik die gleichen Vereinfachungen vornehmen lassen, wenn man den reziproken Werten der Dielektrizitätskonstante und der Magnetisierungskonstante ebenfalls die Dimension einer Geschwindigkeit beilegt: vgl. auch über die Größe r LA 192).

VI. Mechanische Arbeit und Energie.

53. Folgende Veranschaulichungen der absoluten Arbeitseinheit 1 Erg (ferner 1 Joule = 10^7 Erg) zu begründen:

a) 1 Erg ist die Arbeit, die z. B. ein Insekt von der Masse 1 Milligramm (genauer $\frac{1}{981}$ g) durch seine Muskelenergie leistet, wenn es sich an eine um 1 cm höher gelegene Stelle des Kraftfeldes der Erde begibt (auf vertikalem, oder auf einem beliebig gerichteten und gestalteten Wege, Fig. 126).



b) 1 Joule \neq 0,1 mfg ist die Arbeit beim Heben von 1 kg um 1 dm.

c) 1 Erg hat rund 1 Billionstel Pfennig Kaufwert; vgl. LA 177.

54. An einem Klavier habe die Fingerspitze, indem sie eine Taste aus der Ruhelage in die tiefste Lage drückt, einen Weg von durchschnittlich $\frac{1}{2}$ cm zurückzulegen. Durch Auflegen von Gewichten (oder von Münzen) auf diese Anschlagstelle sei gefunden worden, daß durchschnittlich 100 g ausreichen, um die Tasten in irgend einer Zwischenlage zwischen der Ruhelage und der tiefsten Stellung festzuhalten. Wieviel Erg Arbeit hat ein Klavierspieler geleistet, während er 10000 Tasten mit keiner größeren Wucht anschlägt, als nötig ist, sie alle bis in die tiefste Stellung niederzudrücken? — Warum läßt sich die mechanische Verrichtung des Spielers nicht in Dyn (oder Kraftgramm, Kraftkilogramm), sondern nur in Erg (Joule oder Meterkilogramm), auch nicht in Pferdestärken oder Watt ausdrücken?

Anleitung: $100 \text{ g (Kraftgramm)} = 100 \cdot 981 \neq 10^5 \text{ Dyn}$; $(10^5 \text{ Dyn}) \times (\frac{1}{2} \text{ cm}) = 5 \cdot 10^4 \text{ Erg}$; $5 \cdot 10^4 \text{ Erg} = 50 \text{ Joule}$. — Unterscheide Kraft, Arbeit, Leistung!

55. Zu beweisen: Wird eine Masse vom Gewicht $p = mg$ aus dem Ruhezustande mit beliebig wechselnder Kraft f so gehoben, daß sie an einer um h cm höheren Stelle des (als homogen vorausgesetzten) Kraftfeldes der Erde wieder zur Ruhe kommt, so ist die

verrichtete Gesamtarbeit $A = ph$ (also unabhängig von der Größe der arbeitenden Kraft f und nur abhängig von der Größe der widerstehenden Kraft p der Schwere, sowie der Niveaudifferenz h).

Anleitung: Es sei hinsichtlich der veränderlichen Kraft f zuerst als einster Fall (wie in § 23, S. 98) vorausgesetzt, daß auf die Masse vom Gewicht $p = mg$ jeweilig konstante Kräfte, nämlich im Anlauf eine

Fig. 127. $k_1 > p$, im stationären Lauf $k_2 = p$, im Endlauf $k_3 < p$ wirken. Die während der drei Teile der Bewegung zurückgelegten vertikalen Strecken seien h_1, h_2, h_3 , so daß $h_1 + h_2 + h_3 = h$ (— wobei die jeweilig erlangten vertikal aufwärts gerichteten Geschwindigkeiten die horizontalen Ordinaten dargestellt seien; Fig. 127). — Insofern in der Definition des Arbeitsmaßes vorausgesetzt ist, daß es k oder ph jedesmal die widerstehende, nicht die Arbeit leistende Kraft sei, die unter k bzw. p verstanden ist, berechnet sich die längste Arbeit als $A = ph_1 + ph_2 + ph_3 = p(h_1 + h_2 + h_3) = ph$. Es treten also hier die Kräfte k_1, k_2, k_3 gar nicht in die Rechnung ein. — Dennoch macht es für die Einzelheiten des Arbeitsvorganges einen Unterschied, ob der Überschuss von k_1 über p ein „sehr kleiner“

ein beliebig großer ist: Im ersteren Falle hat nämlich die Masse im stationären Lauf nur eine sehr kleine, im letzteren eine beliebig große lebendige Kraft. In beiden Fällen muß dann diese lebendige Kraft im Endlauf wieder aufgebraucht werden, was dadurch geschieht, daß hier $k_3 < p$ ist. (Es könnten auch Zeiten des Erwerbens und Wiederverlierens der Geschwindigkeit und die durch die Überschüsse der Kräfte k_1 und k_3 über p herbeigeführten positiven und negativen Beschleunigungen in Betracht gezogen werden; doch sind diese Größen Zeit und Beschleunigung der energetischen Betrachtung als solcher fremd.) Um den für die vollständige Beschreibung des Bewegungsvorganges nicht gültigen Umstand, ob z. B. der Überschuss $k_1 - p$ im Anlauf klein, der Überschuss $p - k_3$ im Endlauf groß war (ähnlich wie bei einem Eisenbahnzug, der sich nur langsam in Bewegung gesetzt hatte und dann auf der Strecke rasch bremst wird), auch energetisch zu erfassen, vergleichen wir die in der vorausgesetzten Bewegung mit einer im leeren Raum (bei der Feldstärke N also für $p = 0$, wo nur mehr der Beharrungswiderstand zu überwinden ist. I bringt die längs der Strecke h_1 entgegen dem Beharrungswiderstand wirkende Kraft k_1 eine Geschwindigkeit v hervor, für die $k_1 h_1 = \frac{1}{2} m v^2$ gilt. Im stationären Lauf bleibt diese Geschwindigkeit v , gleichviel wie lang die Strecke h_2 ist. Im Endlauf muß, da schließlich wieder Ruhe eintreten soll, $\frac{1}{2} m v^2 = -k_3 h_3$ (d. h. wenn mit großer Kraft gebremst wird, erfolgt das Stillstehen auf kurzer Strecke; bei kleiner Kraft auf langer Strecke). Es ist also $k_1 h_1 = -k_3 h_3$, $k_1 h_1 + k_3 h_3 = 0$. Kehren wir nun zum homogenen Kraftfeld der Schwere zurück, so können wir uns die Vorgänge in ihm auf die Vorgänge im leeren Raum zurückgeführt denken, daß auf die Masse m im Anlauf eine Kraft $k_1 - p$ längs h_1 , dann im stationären Lauf eine Kraft $k_2 - p = 0$ längs h_2 , im Endlauf eine entgegengesetzt gerichtete Kraft $k_3 - p$ längs h_3 wirkt. Für diese Kräfte ist Gesamtarbeit

$(k_1 - p)h_1 + (k_2 - p)h_2 + (k_3 - p)h_3 = k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3 - p(h_1 + h_2 + h_3)$. Da nun analog der Gleichung $k_1 h_1 + k_3 h_3 = 0$ jetzt $(k_1 - p)h_1 + (k_3 - p)h_3 = 0$ und das mittlere Glied $(k_2 - p)h_2 = 0$ [wegen $k_2 = p$] sind, so ist

$$k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_3 h_3 = p(h_1 + h_2 + h_3) = ph.$$

Für eine beliebig veränderliche Kraft f lassen sich aufeinander folgende konstante Kräfte $k_1, k_2 \dots k_n$ bei beliebig kleinen Strecken $h_1, h_2 \dots h_n$ setzen, um dann die Betrachtung ähnlich wie oben an den Kräften k_1, k_2, k_3 durchzuführen.

56. Es ist die in § 22, S. 90 auf graphischem Wege gewonnene § 22. Gleichung $A = \frac{1}{2} \kappa s^2$ für die Arbeit entgegen Kräften nach dem Gesetz $f = -\kappa s$ auf arithmetischem Wege abzuleiten.

Anleitung: Wie Fig. 68 (S. 90) wesentlich der Fig. 14 (S. 17) für Galileis graphische Ableitung der Gleichung $s = \frac{1}{2} g t^2$ entspricht, so ist auch die arithmetische Ableitung der Gleichung $A = \frac{1}{2} \kappa s^2$ analog der Ableitung in LA 9, sowie der Gleichung $A = \frac{1}{2} V E$ in § 136.

Das Gemeinsame dieser Ableitungen und der in den folgenden LA 57, 58, 59 a) liegt im Wesen des arithmetischen Mittels, bzw. der arithmetischen Reihen. Es geht nämlich die Summenformel $s = \frac{n}{2} (a + t)$ für $a = 0$ und für verschwindend kleine Differenzen über in $s = \frac{1}{2} t^2$; vgl. math. Anh. Nr. 9.

57. Welche mechanische Arbeit kostet es, um einen rechteckigen § 22. Rollbalken (eine Leinwand-, Stäbchen-Roulette) vom Gesamtgewicht Pg und der Höhe H cm aufzurollen?

Antwort: Im Anfange des Hebens hat man die Kraft $0g$ und dann im gleichmäßigen Anwachsen immer mehr vom Gewicht bis zu den vollen Pg in der Höhe H zu tragen, somit $A = \frac{1}{2} (0 + P) H = \frac{1}{2} P H$. — Ähnlich:

58. Welche mechanische Arbeit kostet es, um ein lotrechtes, §§ 22, 27, 42. prismatisches Gefäß von der Basis b m² bis zur Höhe H m mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht s g cm⁻³ von einer Bodenöffnung aus vollzupumpen?

Antwort: $A = b H s \cdot \frac{H}{2} \text{ tgm}$ (Begründung wie in den vorigen LA 57, 56). —

Dieser Betrag von $A = \frac{1}{2} b H^2 s \text{ tgm}$ ist in der Wassermenge als potentielle Energie in Bezug auf das Niveau der Bodenfläche enthalten. Vgl. LA 116.

59. Welche Arbeit erfordert es, um eine Masse von $m = 1$ g § 22. a) vom Mittelpunkt der Erde (durch einen von hier aus gehenden gedachten engen Kanal, vgl. LA 30, 49) bis an die Erdoberfläche und b) von hier ins Unendliche zu bringen?

Anleitung: Zu a). Da nach LA 49 die Kraft $f = -\frac{g}{R} \cdot s$ ist, so berechnet sich die Arbeit nach § 22, Gl. (2) $A = \frac{1}{2} \kappa s^2$, wo jetzt $\kappa = \frac{g}{R}$ ist; somit $A_R^E = \frac{1}{2} \frac{g}{R} R^2 = \frac{1}{2} g R$.

Zu b). Die Arbeit $A_R^\infty = g R$ (vgl. LA 66).

Es ist also in dem Arbeitsdiagramm Fig. 128 (LA 60) die Fläche der Kurve außerhalb der Erde das Doppelte von der Fläche des Dreieckes OEK .

§§ 21, 22. 60. Die Gleichungen für die Arbeit $A = \kappa \frac{Mm}{r}$, für das Gravitationspotential $V = \kappa \frac{M}{r}$ und für $V_2 - V_1 = \kappa M \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$

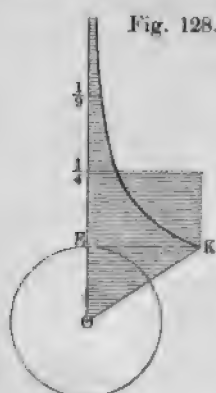


Fig. 129.



Arbeitsdiagramme darstellen.

Anleitung: Die gesamte Arbeit, die beim Wegtragen einer Masse m von der Erdoberfläche bis in den Abstand $r > R$ entgegen den Gravitationskräften zu leisten ist, wird durch die Fläche $EKMP$ der Gravitationskurve (Fig. 125, S. 842) dargestellt (über die Arbeit beim Emportragen vom Mittelpunkt bis an die Erdoberfläche durch die Fläche des Dreiecks O Fig. 124, S. 842). — Da die Rechnung zeigt (§ 22, Gl. 4), dass beim Wegtragen der Masse bis ins Unendliche

nicht selbst eine unendliche, sondern nur die endliche Arbeit $A = \kappa \frac{Mm}{r}$ zu leisten ist, so erhält, dass

die Fläche der Gravitationskurve, wiewohl diese selbst ins Unendliche erstreckt, keinen unendlichen, sondern einen endlichen Flächeninhalt.

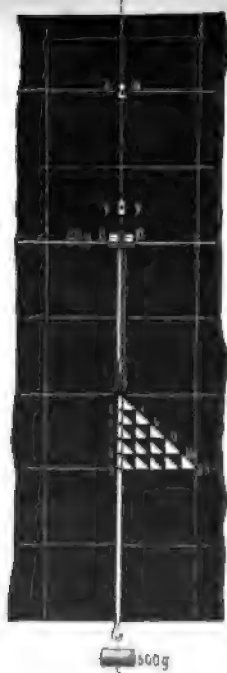
Da in LA 49 die Gravitationskurve selbst durch ein konstruktives Verfahren gefunden wurde, so ist Fig. 129, welchen Rechtecken $OB_1C_1D_1$ bzw. $OB_2C_2D_2$ und daher auch $B_1B_2C_2C_1$ die den Arbeiten, bzw. Arbeitendifferenzen entsprechenden Teile der Gravitationskurvenfläche flächengleich sind.

61. Die Feder einer Federkanone (mit vertikaler Röhre, die vor der Tafel des Wurfapparats anzubringen ist) wird durch Anhängen von Massen $M = 100, 200, 300, 400, 500$ g um 2, 4, 6, 8, 10 cm herabgezogen (gedrückt). Welche Arbeit ist hierbei geleistet worden? — Wie weit werden durch Freilassen der so gespannten Feder Geschosse von $m = 10, 20, 30$ g Masse emgeschossen (von der Masse der Feder selbst abgesehen, des mit ihr verbundenen Aluminiumstabes abgesehen)?

Anleitung: Die Gleichung für die Arbeit gegen elastische Kräfte $A = \frac{1}{2} \kappa s^2$ (§ 22, Gl. 2) lässt sich veranschaulichen durch die schwarzen und weißen Dreiecke (Fig. 130), indem den 2-, 3-, 4-, 5 mal so großen

Fig. 130.

389



schiebungen 4-, 9-, 16-, 25mal so viele kleine Dreiecke entsprechen. Die Größe x ergibt sich hier daraus, daß die Verschiebung $s = 2$ cm durch das Anhängen von 100 g (Massengramm), also durch das Wirken des Gewichtes von 100 g (Kraftgramm) $= 100.981 \pm 10^3$ Dyn erzielt wird. Zur Verschiebung um 1 cm gehören also $x = 100.981:2$ Dyn. Z. B. für $s = 10$ cm ist $A = \frac{1}{4} \cdot 98100 \cdot 100 \pm 2,5 \cdot 10^6$ Erg.

Wird durch Loslassen der Auslösevorrichtung (eines Sperrhakens) die potentielle Energie in kinetische Energie umgesetzt, so haben beim Passieren der Ruhelage die Masse der Feder und des Aluminiumstabes eine ebenso große Energie von $2,5 \cdot 10^6$ Erg. — War die Federkanone mit dem Geschofs von der Masse $m = 30$ g und dem Gewichte $p = 30.981$ Dyn geladen und werden gegenüber dieser Masse die der Feder und des Aluminiumstabes vernachlässigt, so berechnet sich die Steighöhe h dieser Masse aus der Gleichung $ph = A$ Erg, nämlich $30.981 \cdot h = \frac{1}{4} \cdot 981 \cdot 100 \cdot 100$, also $h = 83\frac{1}{2}$ cm. — Daß beim Versuch eine viel geringere Steighöhe erreicht wird, weist darauf hin, daß Feder und Stab nicht ihre ganze Energie an das Geschofs haben abgeben können.

62. Die Gesetze der Sinusschwingungen energetisch abzuleiten.

Anleitung: Eine Masse m g bewege sich mit der Geschwindigkeit c cm sec⁻¹ durch die Mittellage O eines elastischen Kraftfeldes (vgl. Fig. 104, S. 827) nach dem Kraftgesetze $f = -x \cdot s$. Im Abstände s cm von O ist dann durch die Arbeit $\frac{1}{2} x s^2$ die Geschwindigkeit von c auf v vermindert worden, so daß $\frac{1}{2} x s^2 = \frac{m c^2}{2} - \frac{m v^2}{2}$. Hieraus ergibt sich die Amplitude als die dem Wert $v = 0$ entsprechende Elongation; nämlich aus $\frac{1}{2} x a^2 = \frac{m c^2}{2} - 0$ folgt $a = c \sqrt{\frac{m}{x}}$. Ferner folgt aus $\frac{m}{2} = \frac{1}{2} x (a^2 - s^2)$ der allgemeine Wert der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{x}{m}} \sqrt{a^2 - s^2}$.

Hier weist uns der Ausdruck $\sqrt{a^2 - s^2}$ darauf hin, die Bewegung als Projektion einer Kreisung im Kreis von der Gleichung $y = \pm \sqrt{a^2 - s^2}$ aufzufassen. Hieraus ergeben sich dann wieder, wie im § 12, die phoronomischen Beziehungen $v = a \cos \alpha t$ und $s = a \sin \alpha t$ und die dynamische Beziehung $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{x}}$ (§ 18).

63. Aus Newtons Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ und dem Flächen- § 19, 21, 23, 24 satze der Zentralbewegungen die verallgemeinerten Keplerschen Gesetze abzuleiten. (Vgl. die inverse Aufgabe in LA 47.)

Ableitung: Es sei von einem kosmischen Körper nur gegeben, daß er einen Punkt des Weltraumes, der von der Sonne den Abstand r_0 hat, mit der Geschwindigkeit v_0 (unter beliebigem Winkel gegen r_0) passiere und dabei außer seiner eigenen Beharrung nur der gegen die Sonne gerichteten Kraft gemäß dem Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ unterliege. Die Masse jenes Körpers sei $m = 1$ g (die gesuchte Bahnform, Geschwindigkeit u. s. f. hängt von der Größe der sich bewegenden Masse nicht ab). Die Gravitationskonstante sei x , die Sonnenmasse M ; nach LA 51 ist dann $x M = \text{Konst}$ (der Konstanten des Sonnensystems) $= K$.

Wenn dann der Planet den um r von der Sonne abstehenden Punkt des Weltraumes mit der Geschwindigkeit v passiert, so ist nach dem Energiesatz

$$K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \quad (1)$$

Um weiter v durch r auszudrücken, hilft der Flächensatz, den wir hier anwenden dürfen, weil in der Aufgabe schon vorausgesetzt ist, daß die Kraft f gegen die als festen Punkt angenommene Sonne hin gerichtet ist. Es ist dann (nach LA 43) $2r = vr \cos \psi = v_0 r_0 \cos \psi_0 \dots (2)$, also

$$K \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 r_0^2 \cos^2 \psi_0}{\cos^2 \psi} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{2}$$

$$\text{oder} \quad r = \frac{2Kr_0}{2K - r_0 v_0^2} \cdot r = - \frac{v_0^2 r_0^2 \cos^2 \psi_0}{2K - r_0 v_0^2} \cdot \frac{1}{\cos^2 \psi}$$

Verglichen mit der Gleichung der Ellipse (math. Anh. 23, S. 760) ist also

$$2a = \frac{2Kr_0}{2K - r_0 v_0^2}, \quad b^2 = \frac{v_0^2 r_0^2 \cos^2 \psi_0}{2K - r_0 v_0^2}$$

Je nachdem hier $2K - r_0 v_0^2 \leq 0$, somit $v_0^2 \leq \frac{2K}{r_0}$, bleibt die Kurve eine Ellipse oder geht über in die Parabel, bzw. Hyperbel. Dabei wird speziell wieder die Ellipse ein Kreis, wenn $v_0^2 r_0 = K$, denn dann wird $a = r_0 = b$.

Physikalische Ergebnisse und Folgerungen: Die Bahn des kosmischen Körpers hängt nur von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ab, mit der er einen gegebenen Anfangsabstand r_0 passiert, und zwar hängt nur b^2 noch von ψ_0 ab, dagegen ist $2a$, die große Achse der Bahnkurve, unabhängig von der Richtung, mit der die Anfangslage passiert wurde. — Wäre speziell $v_0 = 0$, so stürzte der kosmische Körper in gerader Linie zur Sonne; diese Gerade stellt einen Grenzfall der Ellipse dar. Für allmählich wachsende v_0 werden Ellipsen beschrieben, für die die Sonne im entfernteren Brennpunkte steht (vgl. Fig. 53 a, S. 73). — Als Bedingung dafür, daß die Ellipse speziell ein Kreis wird, also daß $a = b$ und $\psi_0 = 0$ ist, ergibt sich aus $\frac{Kr_0}{2K - r_0 v_0^2} = \frac{r_0 r_0 \sqrt{1 - e^2}}{1/2 K - r_0 v_0^2}$ oder $K^2 - 2Kr_0 v_0^2 + r_0^2 v_0^4 = 0$ die Beziehung $v_0^2 = \frac{K}{r_0}$. [Um zu zeigen, daß diese Bedingung übereinstimmt mit der Gleichung $b_{\perp} = \frac{c^2}{r}$ (§ 13), bilde man $\frac{v_{\perp}^2}{r_0} = \frac{h}{r_0^2} = \frac{xM}{r_0^2}$. — Wird r_0 noch größer, so verlängert sich die Ellipse in der Weise, daß nun die Sonne den näheren Brennpunkt zum Ausgangspunkt darstellt, r_0 also jetzt dem Perihel entspricht. — Wird $v_0^2 = \frac{2K}{r_0}$ (das Doppelte des zur Kreisbahn erforderlichen Wertes), so geht die Ellipse in eine Parabel über. — Bei noch größerer Geschwindigkeit wird die Bahn eine Hyperbel.

64. Ist die Gleichung der Wurfparabel energetisch abzuleiten?

Anleitung: Hier tritt an Stelle der Gleichung (1) der vorigen LA die einfachere $gx - gx_0 = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \dots (1')$, oder für $x_0 = 0$ und $v_0 = 0$ speziell $v^2 = 2gx \dots (1'')$. — Dagegen fehlt es hier an einem Analogon zum Flächensatz (oder der Gl. (2) der vorigen LA); denn bei Ableitung der Bahn eines ge-

worfenen Körpers als einer Parabel wird der Zentralpunkt (hier der Erdmittelpunkt) als in unendlichem Abstand liegend fingiert, und die von den Leitstrahlen durchlaufenen Sektoren gehen daher in unendlich lange Streifen mit parallelen (lotrechten) Rändern über. — Sowie wir oben zum Flächensatz der Zentralbewegungen nur gelangten, indem wir das Trägheitsgesetz voraussetzen (und dieses daher auch wieder als Grenzfall der Gesetze der Zentralbewegung erhalten, indem die Zentralkraft Null wird), so kommt zu Gl. (1'') für die Bewegung eines in wagrechter Richtung geworfenen Körpers noch hinzu $v_y = c \dots (2')$ oder $y = ct \dots (2'')$; und hieraus folgt, zusammen mit der aus (1'') folgenden Gleichung $x = \frac{g}{2} t^2 \dots (1''')$ wieder die parabolische Bahn wie in § 11.

Die LA 64 und 63 geben Beispiele dafür, daß die Kenntnis der Energiegleichungen allein, wie (1) und (1'), nie die Eigenschaften einer Bewegung, wie Bahnform u. dgl., im einzelnen ausreichend bestimmt. (Gilt doch z. B. Gl. (1') für den Erwerb einer Geschwindigkeitskomponente v_x nach lotrechter Richtung bei Senkung um x auch auf was immer für einer vorgeschriebenen Bahn!)

65. Inwiefern stellen Fig. 131 u. 132 einerseits kartographische Reliefs § 24. von Berg und Tal mit Schichtenlinien (Isohypsen) und Strömungslinien, — andererseits

die Potentiale und Kraftlinien zweier benachbarter, entgegengesetzter Mengen, z. B. der Pole eines Magnetes, dar?

Fig. 131.

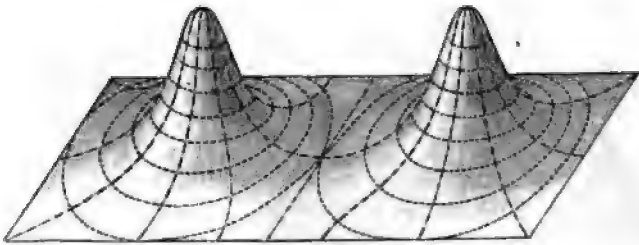
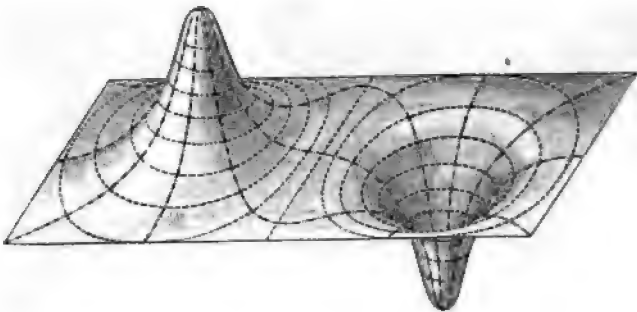


Fig. 132.



Anleitung:
Vergleichung mit Tafel Iab und IIab bei S. 108. Daß Berg und Tal weder ins Unendliche sich erstrecken noch Plateaus zeigen, ist eine Abweichung sowohl gegen das Potential einer punktuellen Masse (Ladung, Polstärke) wie auch gegen das Potential einer Leiterkugel.

66. In welchen Beziehungen der Kraft und der Arbeit steht § 21, 22. die Größe κM (Gravitationskonstante \times Erdmasse) zur Schwerebeschleunigung g und dem Erdradius R ?

Antwort: Nach § 21 ist $\kappa M = g R^2$. Nach § 22 ist $A_R = g R \cdot m$ für $m g$,

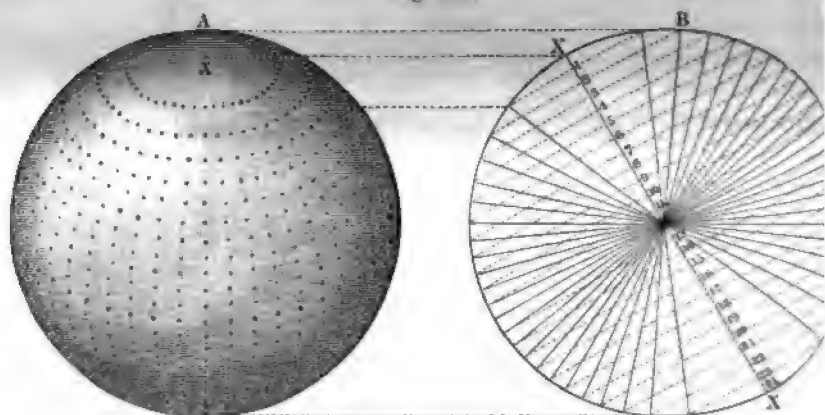
daher nach der Bezeichnung des § 24 $V_R = gR$ für 1 g. — Also auch wie $V_R = x \frac{M}{R}$ (Oberflächenpotential der Erde). — Vgl. I.A. 51.

- § 24. 67. Eine wie große Masse M müßte in einem Punkt konzentriert gedacht werden, damit in 1 cm Abstand von diesem Punkte Gravitationspotential 6 Erg per Gramm herrsche?

Anleitung: Aus $V = x \frac{M}{r}$ folgt wegen $x = 6,685 \cdot 10^{-8}$ (§ 21, $M = \frac{6}{6,685 \cdot 10^{-8}} = 8,975 \cdot 10^7$ Gramm. — Es wäre also eine ungeheure Masse an Stelle der Mengen + 6 in Tafel I, a–d und Tafel II, a–d stehen müßte, die bloß durch ihre Gravitationskräfte die in den Tafeln dargestellten Kraftgebiete. Wie groß müßte statt der punktuell gedachten Masse M eine Kugel dem dichtesten Stoff (Dichte des Platins 22 g cm^{-3}) sein, damit sie in 1 cm äußeren Kraftfeld so wirkte, wie wenn jene Masse im Mittelpunkt vereinigt wäre?

- § 24, 144. 68. Nach Fig. 133 zu erläutern, wie die von einem Punkte ausgehenden sehr zahlreichen Kraftlinien räumlich zu verteilen sind, mit durch je ein Quadratcentimeter der um jenen Punkt beschriebenen Kugeloberfläche durchschnittlich gleichviel Kraftlinien hindurchgehen.

Fig. 133.



Anleitung: Nach dem Satz, daß Zonen der gleichen Kugel dann flächengleich sind, wenn ihre Höhen gleich sind, ist der Durchmesser XX in eine Anzahl gleicher Strecken und hiernach die Kugel durch Meridiane und Parallelkreise durchschnittlich flächengleiche Teile geteilt.

VII. Zur Mechanik starrer Systeme.

- § 27. 69. Es sind die Sätze über die Äquivalenz und Zusammensetzung von Kräftepaaren¹⁾ abzuleiten, die für die Zusammen-

¹⁾ Des Zusammenhanges wegen sind auch die in § 27 ausgewählten Sätze und Weise a), b), c) hier nochmals angeführt; nämlich a) = 5., b) = 4., c) = 6.

ung beliebiger Paare zu einem einzigen Paare aus-
en.

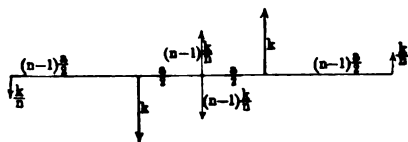
A. Äquivalenz von Kräftepaaren: Rein fortschreitende Verschieben (Fig. 134, I, II, III, IV). 1. Die Kräfte werden längs ihrer Angriffslinie verschoben (aus I nach II; Beweis gemäß dem Satze über die Verschiebung einer Kraft längs ihrer Angriffslinie, § 26, II). — 2. Beide Kräfte werden um gleichviel seitlich verschoben (aus I nach III). — 3. Das Kräftepaar wird in eine Ebene verschoben, die parallel ist der durch die Angriffslinien beider Kräfte bestimmten Ebene (aus I nach IV. — Beweise zu 2. und 3. sind wie zu 4.; nämlich: Zu den Kräften k_1, k_1' werden noch jeweilig die vier Kräfte k_2, k_2', k_2', k_2' hinzugefügt. Hiervon geben dann k_1 und (k_2) einerseits, k_1' und (k_2') andererseits Resultierende, die einander aufheben, so daß nur das verlegte Paar übrig bleibt).

Fig. 134.

4. Drehung eines Paares innerhalb seiner Ebene (Beweis nach Fig. 98, S. 120). — 5. Äquivalenz zweier Paare von gleichen Momenten (Beweis nach Fig. 135 als Verallgemeinerung des Satzes nach Fig. 97, S. 119).

Die bisher bewiesene Äquivalenz von Paaren wird folgendermaßen symbolisch dargestellt: Man errichtet auf der Ebene des Paares eine Senkrechte und ordnet vor allem den Sinn des Paares (den Sinn der Drehung, die durch das Kräftepaar an dem starren System hervorgerufen wird) dadurch, daß man die Senkrechte nach jener Seite der Ebene hinzieht, von der aus gesehen die Drehung im Sinne des Uhrzeigers (gegenläufig) erfolgt. An dieser Senkrechten wird eine Strecke aufgetragen, die soviel Längeneinheiten hat, als das Kräftepaar Momenteinheiten hat. Diese Strecke heißt dann nach Richtung und Größe die **Achse des Kräftepaares**. Dieser Hilfsbegriff wird insbesondere nützlich bei der

Fig. 135.



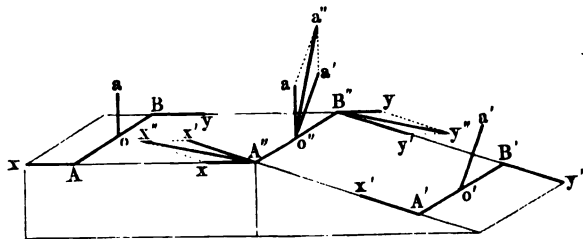
B. Zusammensetzung von Kräftepaaren. 6. Paare mit parallelen Achsen (Beweis nach Fig. 99, S. 120). — 7. Paare, deren Achsen unter beliebigem Winkel gegeneinander geneigt sind: Man ersetzt

Fig. 136.

die Paare durch solche von gleichen Armen, z. B. AB und $A'B'$ (Fig. 136). Dann verschiebt man sie nach Satz 4 in eine Ebene so, daß die Arme parallel werden.

Man verschiebt man sie nach Satz 1 in ihrer Ebene

so, daß die Arme sich decken, und indem man nun die in den gemeinschaft-



wird, ist es nicht von vornherein einleuchtend, daß die Reihenfolge für das Ergebnis gleichgültig ist. Wohl aber, wenn die Lage des M durch die Koordinaten $\xi = \frac{\sum m x}{\sum m}$, $\eta = \frac{\sum m y}{\sum m}$, $\zeta = \frac{\sum m z}{\sum m}$ erm.

z. B. in $\sum m x = m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n$ sind die einz.

$m_1 x_1, m_2 x_2, \dots$ beliebig vertauschbar. Gehen wir dabei zurück

des Ausdruckes $m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3$, so erkennen wir :

den zu beweisenden Satz die arithmetisch-kombinatorische Bezie

$$(m_1 + m_2) \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3 = (m_1 + m_2) \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} + m_3 x_3$$

und ähnlich für die Vertauschungen $(2, 1), 3 = (2, 3), 1 = (3, 1)$ — Ebenso, wenn statt 3 Elementen n Elemente gegeben sind.

Aus den Formeln für den Massenmittelpunkt ergeben sich die Formeln für den Schwerpunkt, wenn im Zähler und Nenner mit dem Faktor g multipliziert wird, wobei dann wegen $mg = p$ sich ergibt

$$\xi = \frac{\sum p x}{\sum p}, \quad \eta = \frac{\sum p y}{\sum p}, \quad \zeta = \frac{\sum p z}{\sum p}.$$

§ 28. 71. Die geometrischen Sätze und Beweise für „Schwerpunktes“ des Dreieckes, der dreiseitigen Pyramide

Anleitung: Da im Dreieck ABC (Fig. 137) M und N auf AC sind, so ist für das Strahlenbüschel mit dem äußeren Ähnlichkeitsmodul $1 : 2$, also $MN = \frac{1}{2} AC$. Da in den zwei

und CA s der Ähnlichkeitsmodul $1 : 2$ ist, so muß für den inn.

punkt s gelten: $Ms = \frac{1}{3} MC$. (Der gleiche Beweisgang f

Fig. 137.

Fig. 138.

Fig. 139.



gezogen, so zerfällt BC in vier gleiche Teile. Den drei gleichen Teilen von mC entsprechen dann auch die drei gleichen Teile auf MC . (Gleicher Beweisgang für die Pyramide. — Lage des Schwerpunktes für mehrseitige Pyramiden nach Fig. 140.)

72. Die Lage des Schwerpunktes zu berechnen (konstruieren) § 28. für folgende homogene Linien, Flächen und Körper (math. Anh. Nr. 9):

Vorbemerkung. Unter „Lage des Schwerpunktes“ ist zunächst seine Lage in Bezug auf die Teile des Gebildes selbst verstanden. Rechnerisch aber wird die Lage bestimmt in Bezug auf ein an das Gebilde gelegtes Koordinatensystem; z. B. $SC = \xi$ in Bezug auf XX , Fig. 141. — Ferner bezeichnen wir im folgenden mit d die Längendichte (die Masse der Längeneinheit), wiewohl behufs der statischen Momente das spezifische Gewicht der Längeneinheit einzuführen wäre, wofür aber ein kurzer Name nicht gebräuchlich ist. Der hinzuzudenkende Faktor g in $s = dg$ fällt aus den Gleichungen überall heraus.

1. **Kreisbogen** $AB = b$ (Fig. 141) mit dem Radius r . — Man denkt den Bogen in unendlich viele Teile geteilt und bestimmt deren statische Momente in Bezug auf eine durch den Kreismittelpunkt C mit der Sehne $AB = s$ parallele Gerade XX . Das statische Moment eines solchen Teiles ist $PQ \cdot PN = QR \cdot CP = QR \cdot r$, folglich $\Sigma QR \cdot CP = r \Sigma QR = \overline{AB} \cdot r$; daher $\xi \cdot \widehat{AB} \cdot d = \overline{AB} \cdot r \cdot d$, woraus $\xi = \frac{s \cdot r}{b}$. — Halbkreis: $\xi = \frac{2r}{\pi}$.

Fig. 141.

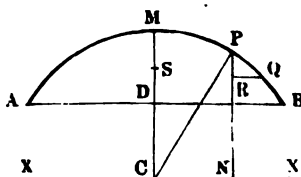
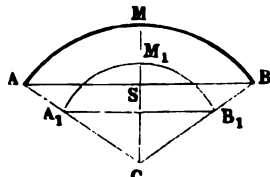


Fig. 142.



2. **Kreissektor** ABC (Fig. 142). Man denkt ihn durch Radien in unendlich viele Teile zerlegt, die als Dreiecke angesehen werden können. Der Schwerpunkt des Sektors fällt daher mit dem eines

Kreisbogens A_1B_1 zusammen, dessen Masse gleich der des Sektors und dessen Radius $= \frac{2}{3}r$ ist. Folglich $\xi = \frac{\frac{2}{3}s \cdot \frac{2}{3}r}{\frac{2}{3}b} = \frac{2rs}{3b}$.

3. **Kreissegment** vom Inhalt F ; die Fläche des Sektors $S = F + \triangle$. Für die statischen Momente dieser Teile ist:

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{rs}{b} \cdot \frac{1}{2} br = \xi \cdot F + \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}} \cdot \frac{1}{2} s \sqrt{r^2 - \frac{s^2}{4}}, \text{ woraus } \xi = \frac{s^3}{12F}.$$

4. **Kugelzone** (und **Kugelmütze**). Der Schwerpunkt ist der Halbierungspunkt der Höhe (denn gleichen Teilen der Höhe entsprechen flächen- und massengleiche Teile der Zone).

5. **Kugelsektor**. Dieser ist als Summe von Pyramiden aufzufassen. Da der Schwerpunkt einer solchen in $\frac{3}{4}$ der Höhe liegt, so ist der Schwerpunkt des Kugelsektors gleich dem einer Kugelmütze vom Radius $\frac{3}{4}r$ (also Figur analog Fig. 142). Ist die Höhe der Kugelmütze $AB = h$, so ist die Höhe der Kugelmütze $A_1B_1 = \frac{3}{4}h$, also liegt ihr Schwerpunkt um $\frac{3}{8}h$ vom Scheitel entfernt, daher $\xi = \frac{3}{4}r - \frac{3}{8}h = \frac{3}{8}(2r - h)$. [Geometrische Bedeutung von $2r - h$]

6. **Kugelsegment**. Aus der Lage des Schwerpunktes von Kugelsektor und Kugel folgt $\xi = \frac{3}{4} \cdot \frac{(2r - h)^2}{3r - h}$.

7. **Halbkugel**. Sowohl aus 5. wie aus 6. folgt $\xi = \frac{3}{8}r$.

§ 28. 73. Das dynamische Maß für die Stabilität eines Körpers entwickeln.

Vorbemerkung. Für die Größe der Stabilität sind mehrere Maße bräuchlich. In § 28 wurde als einfachstes, rein geometrisches Maß der Kippungswinkel (Kippwinkel α , oder auch $\tan \alpha$) eingeführt.

Das eine dynamische Maß der Stabilität sei so definiert: S_1 ist das statische Moment des Gewichtes P eines Körpers in Bezug auf die Kippkante. — Ist dann b der wagrechte Abstand des Schwerpunktes von der durch die Kippkante gelegten vertikalen Ebene, h die Höhe des Schwerpunktes über der durch die Kippkante gehenden horizontalen Ebene, r der Abstand des Schwerpunktes von der Kippkante, α der Kippwinkel, so ist $b = r \sin \alpha$, $h = r \cos \alpha$, $S_1 = Pb = Pr \sin \alpha$.

Eine andere dynamische Definition lautet: S_2 ist gleich der Kraft, die im Schwerpunkt wagrecht wirken muß, um den Körper der Drehung um die Kippkante aus seiner Lage zu bringen, und zwar der kleinste Wert von Q , der genügt, um den Gewicht P das Gleichgewicht halten. — Hiernach wäre $S_2 = Q = P \cdot \frac{b}{h} = P \cdot \tan \alpha$. Zu diesem Maß

muß aber zu bemerken, daß, wenn der Körper schon so aufgestellt ist, daß der Schwerpunkt lotrecht über der Kippkante liegt, er sich zwar im labilen Gleichgewicht befindet, zu dessen Aufrechterhaltung aber überhaupt keine Kraft erforderlich ist. — Wohl aber erfordert es eine Arbeit, um einen Körper irgend einer Lage des stabilen in jene Lage des labilen Gleichgewichtes zu zuführen, und dies führt zur folgenden Aufgabe:

§ 28. 74. Das energetische Maß für die Stabilität eines Körpers entwickeln.

Aus der Definition: S_3 ist die Arbeit, die geleistet werden muß, einen Körper bis in die Lage des labilen Gleichgewichtes zu drehen, ergibt sich die Maßformel $S_3 = P(r - h) = Pr(1 - \cos \alpha) = Pr \cdot 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$.

§ 28. 75. Es sei eine große Anzahl n gleicher, homogener, rechtwinkliger Parallelepipede von den Kantenlängen a, b, c cm gegeben, $a > b > c$; je eines hat das Gewicht pg , und ihr Gesamtgewicht $np = Pg$. Sie liegen anfänglich alle in der stabilsten Lage, d. h. auf dem größten Rechtecke (a, b). Hierauf werden aus ihnen (n der Art der Bausteine der Kinder) Türme aufgebaut, indem ein jedes die Rechtecke (a, b), dann (a, c), dann (b, c) als wagrechte Grundflächen dienen. Wie verhalten sich die potentiellen Energien $L_c : L_b : L_a$, die sich so in den Türmen aufspeichern und bei ihrem Zusammenstürzen wieder in aktuelle Energie (der Wärme, des Schalles) umsetzen lassen? Wie groß wird L für den Würfel, d. h. $a = b = c$? — Vergleich mit der größeren oder geringeren potentiellen Energie, die sich einem bestimmten Stoffe (Metall, Glas, Holz) beim Elektrisieren durch Reiben erteilen lassen.



Anleitung: Liegt das Prisma auf der größten Fläche (a, b), so liegt der Schwerpunkt in der Höhe $\frac{c}{2}$. Wird dann das Prisma durch Drehen um die Kante auf die kleinste Fläche (b, c) gestellt, so liegt der Schwerpunkt in der Höhe $\frac{a}{2}$. ist also um $\frac{a-c}{2}$ gehoben worden. Wird auf dieses unterste Prisma ein zweites gleicher Lage aufgesetzt, so ist sein Schwerpunkt noch um a cm höher, also $\frac{a-c}{2} + a$ gehoben worden, ebenso der Schwerpunkt des dritten um $\frac{a-c}{2} + 2a$, ... der des n ten um $\frac{a-c}{2} + (n-1)a$. Die Hebarbeit ist also

$$p \left[n \cdot \frac{a-c}{2} + a(1+2+3+\dots+n-1) \right] = p \left[n \cdot \frac{a-c}{2} + a \cdot \frac{(n-1)n}{2} \right].$$

Wird hier n sehr groß angenommen, so ist die Arbeit $p n \cdot \frac{a n}{2} = \frac{P A}{2}$.

1. LA 56 bis 61). — Es kostet also das Erbauen der Türme von den Höhen B, C annähernd die Arbeiten $\frac{1}{2} P \cdot A, \frac{1}{2} P \cdot B, \frac{1}{2} P \cdot C$; und dies sind auch die Zahlen der in Bezug auf die Ausgangslage aufgespeicherten potentiellen Energie.

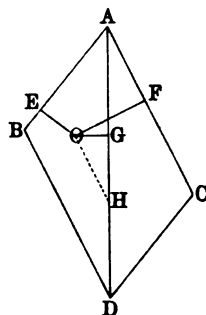
War die gegebene Masse zu n gleichen Würfeln verarbeitet, so ist die dieser Masse durch Auftürmen günstigenfalls zu erteilende Energie kleiner, als bei einer anderen rechtwinkligen parallelepipedischen Gestalt der einzelnen Körper. — Nach dieser Analogie können wir uns vorstellen, daß demselben Äther, der zwischen Moleküle von leicht elektrisierbaren Stoffen eingebettet ist, größere elektrische Energie (gleichsam ein weniger stabiler Gleichgewichtszustand) sich erteilen und hier in ihm auch größere Energie aufspeichern läßt, als dem Äther in schwer elektrisierbaren Stoffen.

76. Zu beweisen VARIGNONS Satz, daß in Bezug auf jeden Punkt der Ebene (nicht nur für Punkte der Diagonale) des Kräfteparallelogramms das Moment der Resultierenden gleich ist der (algebraischen) Summe der Momente der Komponenten.

Anleitung: Es sei O ein beliebiger Punkt in der Ebene des Kräfteparallelogramms, $OE \perp AB$, $OF \perp AC$, $OG \perp AD$, und überdies $OH \parallel BD$ (Fig. 143).

Dann ist $\triangle AOC = \triangle AHC = \triangle AHB$ (weil die Seiten aus B und C auf AH einander gleich sind). Ferner ist

Fig. 143.



$$\triangle AHB = \triangle AOB + \triangle BOH + \triangle AOH$$

$$= \triangle AOB + \triangle DOH + \triangle AOH$$

$$\triangle AOC = \triangle AOB + \triangle AOD$$

$$\triangle AOD = \triangle AOC - \triangle AOB$$

$$AD \cdot OG = AC \cdot OF - AB \cdot OE.$$

Da der Drehungssinn von AB in Bezug auf den Punkt O entgegengesetzt ist dem Drehungssinn von AD und AC , ist das letzte Glied negativ.

77. Zu beweisen, daß für die Drehung um eine fixe Achse eines starren Systems die Gleichung

ist, sind von den Kräften die in jene Ebene fallenden Komponenten — Wird durch jenen Punkt eine Drehungsachse normal zu gebracht, so bringt jede der Kräfte für sich eine Drehung um (Kräfte, die nicht in der zur Achse normalen Ebene liegen, bringen Drehungen auch noch eine Verschiebung längs der Achse hervor, Hebelwirkung als solcher abgesehen wird). Nur wenn das Resultierenden in Bezug auf jene Achse 0 ist, halten die einander an dem Hebel das Gleichgewicht. In besonderen Fällen geschieht, daß in dem Kraftmoment ka der Resultierenden Kraft k aus allen einzelnen Kräften für sich $= 0$ ist, aber (wenn nämlich die Kräfte entweder zu beiden Seiten von und mehr oder minder nach derselben Seite gerichtet sind; oder untereinander parallele Komponenten aufweisen (Verallgemeinerung Hebels) oder wenn sie auf derselben Seite des Drehungspunktes minder entgegengesetzten Seiten gerichtet sind (Verallgemeinerung Hebels)) herrscht Gleichgewicht, wenn der Kraftarm $a = 0$ ist. Resultierende durch jene Achse selbst hindurchgeht.

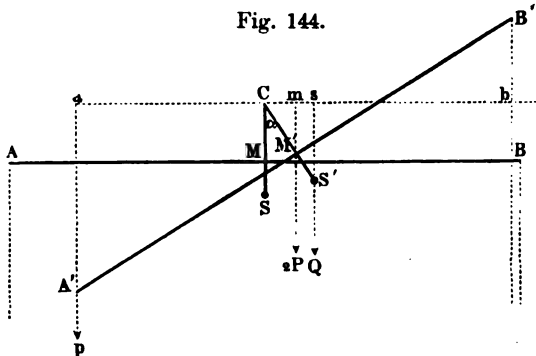
- § 30. 78. Bordas Doppelwägung erlaubt mittels einer richtigen, aber empfindlichen Wage und eines richtigen richtig zu wägen; wie?

Anleitung: Hat ein Körper das richtige Gewicht P und einmal P_1 , dann bei Vertauschung des Körpers und der Gewichte muß, wenn $P = \psi P_1$ ist, $P = \frac{1}{\psi} P_1$ sein, wo der Faktor ψ das Maß der Unrichtigkeit der Wage ist. Dann ist $P \cdot P = P_1 \cdot P_1$, also

- § 29. 79. Die Beziehung zwischen dem Ausschlag einer Wage und dem Übergewicht ohne die spezielle An-

greifenden gleichen Belastungen von je Pg kann man sich im Durchschnittspunkte M angreifend denken. Wird die Wage durch das Übergewicht p um den Winkel α verdreht, so greift $2P$ in M' an, und es besteht somit zwischen den statischen Momenten die Gleichung $p \cdot Ca = Q \cdot Cs + 2P \cdot Cm$ oder $p(a \cos \alpha - h \sin \alpha) = Q \cdot b \sin \alpha + 2P \cdot h \cos \alpha$.
 Aus $\operatorname{tg} \alpha = \frac{pa - 2Ph}{Qb + ph}$
 ergibt sich für $h = 0$ wieder der Wert der Gl. (1). S. 133.

Fig. 144.



VIII. Mechanische Maschinen.

80. Mit welchem Rechte gilt uns die Gleichgewichtsbedingung an einer (einfachen oder zusammengesetzten, aber bloß mechanische, nicht kalorische, elektrische u. s. w. Kräfte verwertenden) Maschine zugleich auch als Arbeitsbedingung?

Antwort: Ist z. B. ein Hebebaum gemäß der Gleichgewichtsbedingung $Pp = Qq$ belastet und ist er in Ruhe, so muß für kürzere oder längere Zeit eine andere Kraft $P' > P$ angewendet werden, um ihn überhaupt in Bewegung zu setzen, damit es zu dem für das „Arbeiten“ wesentlichen Verschieben komme. Ist dabei P' nur „etwas“ größer als P , so wird die erzielte Winkelbeschleunigung nur eine kleine sein und es wird erst nach längerer Zeit eine mäßig große Winkelgeschwindigkeit des Hebebaumes zustande gekommen sein. — Man beachte aber, daß die Gleichgewichtsbedingung $Pp = Qq$ überhaupt nicht nur für den ruhenden, sondern ebenso auch für den mit einer beliebig kleinen oder großen konstanten Winkelgeschwindigkeit versehenen Hebebaum gilt. Während einer solchen konstanten (stationären) Bewegung werden dann von den Angriffspunkten der Kraft und der Last Wege gemäß $S:s = p:q$ zurückgelegt und es folgt also aus der Gleichgewichtsbedingung $Pp = Qq$ auch die Arbeitsbedingung $PS = Qs$. — Der in der Praxis gewöhnliche Fall, daß der Hebebaum anfänglich in Ruhe ist und erst durch die Kraft $P' > P$ in Bewegung gesetzt, d. h. beschleunigt werden muß, führt theoretisch wieder auf LA 55 zurück. Wie dort, sind auch hier die durch die veränderliche Kraft P (im Anlauf $P' > P$, im Endlauf $P'' < P$) verrichtete Arbeit und die durch die konstante Last Q verbrauchte Arbeit einander nur dann gleich, wenn der Hebebaum im Endzustande wieder zur Ruhe gekommen ist (allgemeiner: wenn er schließlich wieder seine anfängliche Geschwindigkeit und somit seine kinetische Energie erhalten hat).

Für den Flaschenzug ist die entsprechende Betrachtung in § 30, S. 139 auch mit Rücksicht auf die zu überwindende Reibung durchgeführt worden, und sie ist leicht auf alle Maschinen zu übertragen.

Bemerkung: Völlig unzureichend ist es, die Verwendung z. B. des Hebels zum Heben von Lasten aus der Gleichgewichtsbedingung so zu erklären, daß man

gewichte ein Zusammenwirken der „Last“ und „Last“ (sowie
keit“ des „Unterstützungspunktes“ darstellenden Kräfte) mit d
Teilchen der Hebelstange wirkenden Molekularkräften erf
könnte es scheinen, als sei die Fiktion einer bloßen „starr
Dicke eine überhaupt wertlose, weil sie nicht nur die wirkliche
Verhältnisse nicht wiedergebe, sondern ihnen geradezu wider
Bedenken ist zu erwidern, daß die Einführung des Begriffes
zunächst keinen anderen wissenschaftlichen Zweck hat, als fü
Drehmomente die Kraftarme darzustellen; bei diesen aber k
Tat nur auf die Länge an und somit gar nicht auf die Dicke
und die zwischen deren Teilchen wirkenden Kräfte. — Dagege
die physikalische Betrachtung der wirklichen Vorgänge an ei
unvollständig, wenn man sich auf die schließliche Gleichheit d
beschränken und nicht auf die über das einfache Hebelgesetz
Fragen eingehen wollte; vor allem, wie denn z. B. die Wirkung
überträgt auf die Teile der Hebelstange, an denen die „Last
vollständige Beschreibung und Erklärung der durch das Ang
eingeleiteten Vorgänge hätte sogar darauf einzugehen, daß
Hebelstange, da diese nie vollkommen starr, sondern immer me
elastisch ist, Wellenbewegungen (§ 58, S. 222) bis ans e
Stange fortpflanzen, dort reflektiert werden und erst durch In
seits und Umsatz in Wärme andererseits zu einem Ruhe
können, den man meistens als den einfachsten Fall des Gleichg
auffaßt (— in Wahrheit ist für diesen aber nur konstante Gese
stationären Ganges erforderlich; vgl. LA 55 u. 80). — I
Hinsicht liefse die bloße Fiktion des „mathematischen“ Hebel
ihn sich beschränkende Hebelgesetz tiefere Einsichten zu w
denn da das Hebelgesetz einen besonderen Fall der Gesetze für d
setzung von Kräften an starren Systemen bildet, d
setzung aber im Falle paralleler Kräfte sich der vorübergehen
der beiden Hilfskräfte $+H$, $-H$ (Fig. 94, S. 117) bedient, so n
werden, daß z. B. bei einer sehr dünnen Stange diese Hilfskr

materielle Achse ist, sowie der sie unterstützenden Körper) eingegangen wird. — Es ist aber eben wegen der hiermit auftretenden Verwickelungen, deren mathematische Behandlung selbst überall schon wieder das Gesetz der statischen Momente voraussetzt, um so klarer ersichtlich, wie wertvoll trotz jener Einwendungen die Fiktion des mathematischen Hebels ist und bleibt, d. h. das Abstrahieren von allen anderen Umständen bis auf die Länge der Kraftarme. — Was insbesondere das Gewicht wirklicher Hebelarme betrifft, so wird es unwirksam, wenn die Drehachse durch den Schwerpunkt geht; in jedem anderen Falle sind die Gewichte der Hebelarme ähnlich in Rechnung zu ziehen, wie es die Beispiele von den Wagebalken § 29 (S. 133) und LA 79 gezeigt haben.

82. Inwieweit trifft die theoretische Zurückführung der Rolle und des Wellrades auf den Hebel das Wesentliche in Einrichtung und Gebrauch jener Vorrichtungen?

Anleitung: Die virtuellen Verschiebungen (§ 30) haben bei den für Rolle und Wellrad substituierten Hebeln dasselbe Verhältnis, wie in Wirklichkeit. — Denkt man, nachdem Gleichgewicht hergestellt ist, die Schnur mit der Rolle fest verbunden, so muß das Gleichgewicht bestehen bleiben; dies ist aber nur möglich, wenn das Hebelgesetz erfüllt ist. — Mehr Einsicht in das Wesen des Vorgangs gewinnt man, wenn man das Seil selbst als Vermittler der Kraftwirkung auffaßt; die drehbare Rolle dient dann nur dazu, die Reibung beim Gleiten durch Reibung beim Rollen zu ersetzen.

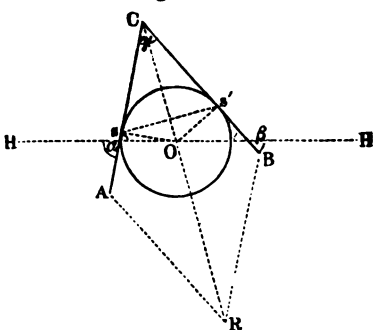
83. Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung für die Rolle (beweglich oder fix, bei nicht parallelen oder parallelen Schnüren) abzuleiten.

Anleitung: Die gleichen Kräfte $CA = CB = P$ bilden mit der Horizontalen die Winkel α und β , die Resultierende $CR = Q$ muß im Fall des Gleichgewichts durch die Rollachsen O gehen (Fig. 145). Aus ähnlichen Dreiecken folgt: $CR : CA = ss' : sO$, oder

$$Q : P = 2r \cos \frac{\gamma}{2} : r \text{ oder}$$

$$P = \frac{Q}{2 \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{Q}{2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2}}.$$

Fig. 145.



Die geometrischen Verhältnisse der Fig. 145 sind physikalisch zu verwirklichen, wenn die Achse der Rolle statt in festen Lagern etwa auf einer geschlitzten horizontalen Ebene beweglich ist; um die gewöhnlichen Verhältnisse der beweglichen Rolle zu erhalten, denke man Fig. 145 umgekehrt, die Last Q in der Richtung OC' nach abwärts, die Kraft P bei A aufwärts ziehend und das Seil bei B befestigt.

84. Die Gleichgewichtsbedingung für den Differentialflaschenzug (und den Potenzflaschenzug) aufzustellen.

Anleitung: Zieht man bei P (Fig. 146) um eine Strecke s abwärts, so wird die größere feste Rolle um die Bogenlänge s gedreht, von der kleineren

festen Rolle wickelt sich gleichzeitig ein Stück $\frac{s \cdot r}{R}$ ab; daher wird die Gesamtlänge der Seilstücke, die die bewegliche Rolle tragen, um $s - \frac{s \cdot r}{R} = s \cdot \frac{R-r}{R}$ kürzt, also die Last Q um $\frac{s \cdot (R-r)}{2R}$ gehoben. Mithin $P \cdot s = Q \cdot \frac{s \cdot (R-r)}{2R}$.



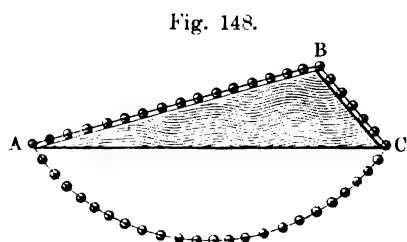
Weil hier die Differenz $R-r$ im Zähler und daher auch das Verhältnis $P:Q$ beliebig gemacht werden kann, heißt diese Vorrichtung Differentialflaschenzug. (In Wirklichkeit sind an den Seils Ketten angebracht, das Gleiten zu vermeiden.)

Wird die bewegliche Rolle (Fig. 122, S. 135) statt z. B. durch die Hand wieder durch eine bewegliche Rolle, diese wieder durch eine u. s. f. gehoben, so bedarf es hier der Kräfte $\frac{1}{4} Q, \frac{1}{8} Q, \dots, \frac{1}{2^n} Q$.

daher der Name Potenzflaschenzug (Fig. 147; doch ist dieser unhandsam nicht im Gebrauch).

85. Stevins Ableitung der Gleichgewichtsbedingung für die schiefe Ebene

Anleitung: Da der Satz vom Kräfteparallelogramm, aus dem wir heute das Gleichgewicht an der schiefen Ebene am natürlichsten erklären, zur Zeit GALILEI und seines älteren Zeitgenossen STEVIN nicht bekannt war, so half sich STEVIN durch ein Gedankenexperiment, das Fig. 148 veranschaulicht: Wir erwarten nämlich von der über das dreieckige Prisma ABC gelegten Kette, daß sie weder im Sinne ABC noch CBA „von selbst“ in Bewegung geraten werde (Antezipation des Satzes von der Unmöglichkeit eines perpetuum mobile oder des Satzes von der Erhaltung der Arbeit). Da also auch der Kettenteil AC für sich im Gleichgewicht ist, so muß das Bestreben zu sinken, d. h. über die verschiedenen geneigten Ebenen herabzugleiten, gleich sein für die Kettenteile BA und BC . Da dies nun schiefe Ebenen von gleicher Höhe und verschiedenen Längen sind, so müssen die auf je eine Kugel der Kette längs der schiefen Ebene wirkenden Kräfte sich verkehrt verhalten wie die Anzahl der Kugeln, also auch verkehrt wie die Längen der schiefen Ebenen selbst.



Ist BC vertikal, so folgt speziell $\frac{P}{Q} = \frac{h}{l}$ oder $Q = P \sin \epsilon$.

86. Die Gleichgewichtsbedingung für den Keil abzuleiten.

§ 30.

Anleitung: Wird von der Reibung zunächst ganz abgesehen, so entspricht dem Vorgange z. B. beim Spalten eines Holzblockes (Fig. 149) am besten, wenn man die zu überwindenden Kohäsionskräfte Q des Holzes, die den Keil herauszuspinnen suchen, als normal zu den Seiten des Keiles wirkend denkt. Dagegen würden

B. zwei Körper mit entsprechenden Führungen (Fig. 150) normal gegen die Symmetrale AB des Keiles wirken. Ist der Winkel des Keiles 2ϵ , so entsprechen die beiden Fälle den Figg. 48 und 49, S. 67, wenn wir uns denken, als die Symmetrieebene des Keiles unbeweglich sei und der beweglichen wagerechten Unterstüßungsfläche der schiefen Ebene entspreche. Da aber der Keil von beiden Seiten herdrückt wird, so gilt im ersten Falle $\frac{P}{2} = Q \sin \epsilon$, im

zweiten Falle $\frac{P}{2} = Q \tan \epsilon$; in Worten?

Durch die Reibung wird aber dieses theoretische Verhältniß bei den praktischen Anwendungen (und zwar sowohl kinetischer, wie beim Holzspalten, als auch in statischer, wie beim Befestigen mittels Keile) fast ganz verdeckt.

87. Einrichtung und Gebrauch der Schraube geometrisch, phoronomisch, dynamisch und energetisch zu erläutern.

Anleitung: Geometrisch — vgl. math. Anh. 25.

Phoronomisch — vgl. § 26. — Dabei ist die Bewegung längs der Achse eine rein fortschreitende, die nach Abzug dieser Bewegung übrig bleibende eine rein drehende. Denken wir uns die Schraubenmutter als fest, entspricht einem Fortschreiten um die Höhe h eines Schraubenganges eine Drehung um den Umfang u eines Schraubenganges.

Dynamisch ergibt sich die Gleichgewichtsbedingung $P:Q = h:u$, wenn wir uns die Achse der Schraube als vertikal und Q längs der Achse wirkend denken. Falls nämlich dann die Spindel reibungslos in der Mutter gleiten könnte, würde durch den Zug von Q die Spindel längs der Gänge der Mutter wie über schiefe Ebenen herabzugleiten suchen, und der hierzu erforderlichen Drehung wirkt die tangential, also wagrecht am Umfang der Spindel angreifende Kraft entgegen. Es gilt also die Gleichgewichtsbedingung für die parallel der Basis der schiefen Ebene angreifende Kraft (§ 18, Gl. 4): $P:Q = h:b$, wobei $b = u$.

Energetisch ergibt sich dieselbe Gleichgewichtsbedingung daraus, daß gemäß der phoronomischen Verschiebungen (s. oben) einem Lastweg h der Kraftweg u entspricht, und $P \cdot u = Q \cdot h$.

Näheres zur Mechanik der Drehbewegungen.

88. Man forme aus folgenden Zahlenangaben von Umdrehungszeiten (Rotationsdauern), Umdrehungszahlen (Tourenzahlen) und

Fig. 149.

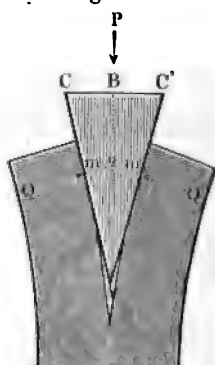
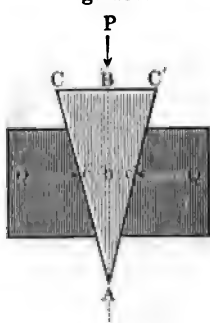


Fig. 150.



§ 30.

§ 31.

Winkelgeschwindigkeiten (§§ 12, 31) numerische Aufgaben
den allgemeinen Formeln $n = \frac{1}{T}$ und $\alpha = \frac{2\pi}{T} = 2\pi n$. (Vgl. LA

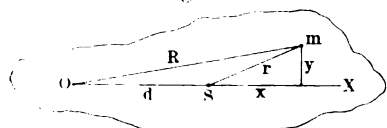
	T sec	n sec ⁻¹	n sec
Sekundenzeiger	1 Minute	$\frac{1}{60} = 0,0167$	0,167
Minutenzeiger	1 Stunde	$\frac{1}{3600} = 0,000278$	0,001
Stundenzeiger	12 Stunden	$\frac{1}{43200} = 0,000023148$	0,000
Erde	1 Sterntag	$\frac{1}{86400} = 0,000011574$ (in 1 Sternsekunde)	0,000 (Sterns)
Sonne	etwa 25 Tage	—	—
Schleifstein	" 1 Sek.	etwa 1	etwa 1
Schiffsschraube	1 bis $\frac{1}{2}$ "n	1 bis 2	6 bis
Dynamomaschine, große	$\frac{1}{2}$	2	122
Dynamomaschine, kleine	$\frac{1}{20}$	20	12
Lavalsche Dampfturbine	$\frac{1}{100}$ bis $\frac{1}{300}$	100 bis 500	628 bis
Foucaults Spiegel (§ 122)	$\frac{1}{600}$	800	502

IX. Massenmomente (Trägheitsmomente).

§ 82. Vorbemerkung: In den LA 89 bis 95 seien Linien, Flächen und Körper als homogen mit Masse von der Dichte d belegt vorausgesetzt. Die Masse des Gebildes sei Mg und sie sei in eine sehr große Anzahl n gl. Elemente m geteilt, die die Abstände $\rho, 2\rho, 3\rho \dots$ von der Drehachse haben. Die Berechnungen der Trägheitsmomente laufen dann teils hinaus in die Summierung der Reihen $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2$ (auch $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \neq \frac{n^4}{4}$; $1^4 + 2^4 + \dots + n^4 \neq \frac{n^5}{5}$; ... Anh. Nr. 10) lassen sich Summierungen umgehen durch Kunstgriffe, wie nach Fig. 160 lassen sich mittels des allgemeinen Satzes LA 89 die Massenmomente auf berechnete zurückführen. — Man gebe die jeweilige Lage der Achse X des Gebilde nach den Figuren 151 bis 161 in Worten an.

89. Ein Körper von der Masse Mg habe in Bezug auf eine durch den Schwerpunkt S gehende Achse das Massenmoment \mathfrak{M}_s , in Bezug auf eine ihr im Abstände d cm parallele Achse das Massenmoment \mathfrak{M}_0 . — Zu zeigen, daß $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_s + Md^2$.

Fig. 151.



Ableitung: $\mathfrak{M}_0 = \sum m R^2$; $\mathfrak{M}_s = \sum m r^2$ (Fig. 151, deren Zeichenebene irgend eine der beiden parallelen Achsen normale sei). — Es ist $R^2 = y^2 + (x+d)^2 = y^2 + 2xd + d^2 = r^2 + 2xd + d^2$. — $\sum m R^2 = \sum m r^2 + \sum m \cdot 2xd + \sum m d^2$

$m \cdot 2 \cdot x \cdot d = 2 d \sum m \cdot x = 0$, weil $\sum m \cdot x = 0$ (LA 70). — Ferner $\sum m d^2 = d^2 \sum m$
 $M d^2$. — Somit $\sum m R^2 = \sum m r^2 + M d^2$.

Speziellere und numerische Anwendungen in LA 97, 98 u. s. w.

90. Berechnung von Massenmomenten einfach gestalteter Massen: § 32.
Strecke (Fig. 152) und **Rechteck** (Fig. 153): $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M l^2$ (1).

Beweis: Denken wir uns die Länge l unterteilt in sehr kurze, gleiche Strecken ϱ , und denken wir uns die Masse m des ersten Elementes im Abstände ϱ , die des nächsten in 2ϱ , des dritten in 3ϱ . . . cm von der Achse vereinigt, so ist:

$$= m \varrho^2 + m (2\varrho)^2 + m (3\varrho)^2 + \dots + m (n\varrho)^2 \\ = m \varrho^2 \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

$$\neq m \varrho^2 \cdot \frac{n^3}{3} = \frac{1}{3} (mn) (n\varrho)^2 = \frac{1}{3} M l^2.$$

Das Massenmoment \mathfrak{M}' einer Strecke

(Fig. 154) von der Länge $L = 2l$ cm mit der Masse $M' = 2M$ in Bezug auf die Streckensymmetrale setzt sich zusammen aus den nach Gl. (1) berechneten Massenmomenten der beiden Hälften

$$\mathfrak{M}' = 2 \cdot \frac{1}{3} M \cdot l^2 = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (2M) \cdot \frac{1}{4} (2l)^2 = \frac{1}{12} M' L^2 \dots (2)$$

Dies ergibt sich auch nach LA 89 aus Gl. (1); denn es entsprechen einander

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} = \frac{1}{3} M' L^2, \quad \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}', \quad d = \frac{L}{2}.$$

$$\text{so} \quad \mathfrak{M}_s = \mathfrak{M}_0 - M' d^2 = \frac{1}{3} M' L^2 - M' \frac{L^2}{4} = \frac{1}{12} M' L^2.$$

Wesentlich anders gestaltet sich die Berechnung für das Massenmoment des Rechtecks, wenn die Drehungsachse in Ebene des Rechtecks normal ist (Fig. 155). Sind die Dimensionen des Rechtecks a cm und b cm, so läßt es sich parallel zur Seite b in Streifen von der Länge b und der Breite ϱ zerlegen, die von der Achse XX die veränderlichen Abstände $\varrho, 2\varrho, 3\varrho \dots n\varrho = \frac{a}{2}$

haben. Ist die Masse eines solchen Streifens m , so hat er in Bezug auf seine eigene Schwerpunktsachse $X'X'$ das Massenmoment $m' = \frac{1}{12} m b^2$. In Bezug auf die Achse XX hat also der k^{te} Streifen (nach LA 89) das Massenmoment $= m' + m (k\varrho)^2$. Für das halbe Rechteck rechts von XX ist also das Massenmoment: $\frac{\mathfrak{M}}{2} = n m' + m \varrho^2 (1^2 + 2^2 + \dots + n^2)$. Für ein sehr großes n ist dann

$$\frac{\mathfrak{M}}{2} = n \cdot \frac{1}{12} m b^2 + m \varrho^2 \frac{n^3}{3} = n m \cdot \left[\frac{b^2}{12} + \frac{(n\varrho)^2}{3} \right] = \frac{M}{2} \left[\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{3} + \frac{b^2}{12} \right],$$

hier für das ganze Rechteck $\mathfrak{M} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2)$. — (Anwendung LA 98.)

An die Grundformel für den einzelnen Punkt $m = m r^2$ schlossen sich ferner unmittelbar die Massenmomente für

Kreislinie (Fig. 156) und Zylindermantel (Fig. 157): $\mathfrak{M} = Mr^2 \dots$

Beweis: Da hier r konstant, so ist $\sum mr^2 = r^2 \sum m = Mr^2$.

Dagegen Kreislinie (Fig. 160): $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} Mr^2 \dots (4)$

Hier gelingt die Summierung, indem man je zwei voneinander um $\frac{\pi}{2}$ stehende Massenteilchen $m_1 = m_2 = m$ des Halbkreises zusammenfaßt (Fig. 160). Denn da $mx^2 + my^2 = m(x^2 + y^2) = mr^2$, so ist für $\frac{n}{2}$ solche Paare

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{2} (m + m + \dots + m) r^2 = \frac{1}{2} Mr^2. \text{ — Ähnlich:}$$

Kreisscheibe (Fig. 158) und Vollzylinder (Fig. 159): $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} MR^2 \dots$

Hier ist zwar für je einen schmalen, ringförmigen Streifen das Moment $m = mr^2$ nach (3) zu berechnen; aber die Umfänge und daher



Fig. 157.

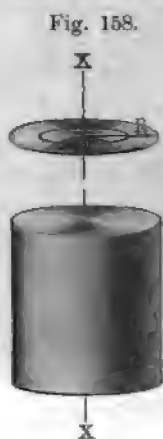


Fig. 159.

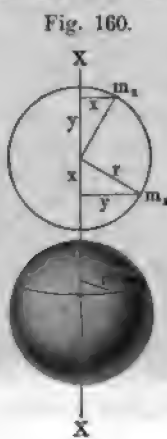


Fig. 161.

die Massen der einzelnen Ringe nehmen selbst proportional dem Radius r , daher die Momente der einzelnen Ringe proportional r^3 sind. Ist $R = n\rho$ der äußere Radius der Scheibe des Zylinders, h die Höhe der Scheibe (bzw. die Höhe des Zylinders), so ist $M = R^2 n \pi h$. d. h. — A Scheibe ist für den Ring von der Breite ρ und Radius $n\rho$ die Ringmasse $m = 2(n\rho)\pi \rho h$ also $m = 2(n\rho)\pi \rho h d$

$$= 2\rho^4 \pi h d \cdot n^3 \text{ und } \sum m = 2\rho^4 \pi h d \cdot \sum n^3 = 2\rho^4 \pi h d \cdot \frac{n^4}{4} = \frac{1}{2} (n\rho)^4$$

$$= \frac{1}{2} (n\rho)^2 \pi h d \cdot (n\rho)^2 = \frac{1}{2} R^2 \pi h d \cdot R^2 = \frac{1}{2} MR^2.$$

Ein Ring von endlicher Breite $\delta = R - r$ hat daher $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} (R^4 - r^4)$
 $= \frac{1}{2} (R^2 - r^2) \pi h d (R^2 + r^2) = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2) \dots (5a).$

Kugel (Fig. 161): $\mathfrak{M} = \frac{2}{5} MR^2.$

Beweis: Die Kugel werde zerlegt in Kreisscheiben normal zur Achse von der Dicke h und dem wechselnden Radius r ; dann ist für je eine Scheibe $m = r^2 \pi \cdot h \cdot d$ und $m = \frac{1}{2} (r^2 \pi \cdot h \cdot d) r^2 = \frac{1}{2} \pi h d \cdot r^4$. — Für die k te Scheibe vom Kugelmittelpunkt an ist $r^2 = R^2 - (kh)^2$, also $r^4 = R^4 - 2R^2(kh)^2 + (kh)^4$. — Für die Halbkugel ist dann:

$$\sum_{k=1}^n m = \frac{1}{2} \pi h d [n \cdot R^4 - 2R^2 h^2 (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + h^4 (1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4)]$$

für die ganze Kugel ist also:

$$\mathfrak{M} = \pi h d \left(n \cdot R^4 - 2R^2 h^2 \cdot \frac{n^3}{3} + h^4 \cdot \frac{n^5}{5} \right) = \pi \cdot n h \cdot d [R^4 - \frac{2}{3} R^2 \cdot (nh)^2 + \frac{1}{5} (nh)^4]$$

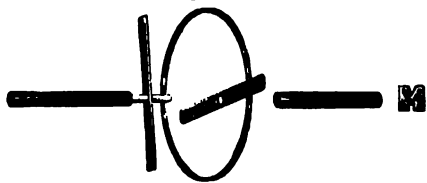
und wegen $nh = R$ ist:

$$\mathfrak{M} = \pi \cdot R \cdot d \cdot R^4 (1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}) = \pi R^5 d \cdot \frac{2}{15} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} \pi R^3 \cdot d \cdot R^2 = \frac{2}{5} MR^2.$$

91. Ein zerlegbares Rädchen der Atwoodschen Fallmaschine besteht aus einem ringförmigen Radkranz vom Radius r cm und der Masse m_1 g, aus Speichen von der Gestalt rechteckiger Plättchen mit der Länge $2r$ cm und der Gesamtmasse m_2 g und aus der zylindrischen Achse vom Halbmesser ρ cm und der Masse m_3 g (Fig. 162). Eine wie grofse Masse $2\mu'$ ist dann zur Masse 2μ der beiden unbelasteten Träger hinzuzurechnen?

Anleitung: 1. Für den Radkranz ist $m_1 = m_1 r^2$. Z. B. für $m_1 = 19$ g und $r = 5$ cm ist $m_1 = 475$ g cm². Es wäre einfach die Masse des Radkranzes in die der Träger (also zu je einem Träger noch $9\frac{1}{2}$ g) einzurechnen, falls Speichen und Achse als massenlos angesehen werden dürften. Es ist aber 2. für die Speichen $m_2 = \frac{1}{8} m_2 r^2$. Da die Masse je einer Speiche nur 1 g, also $m_2 = 2$ g, so ist $m_2 = 16\frac{2}{3}$ g cm², somit nur $3\frac{1}{2}$ Proz. von m_1 . Dagegen ist 3. für die zylindrische Stahlachse zwar $m_3 = 100$ g, aber wegen $\rho = \frac{1}{4}$ cm (d. h. der Durchmesser der Achse $\frac{1}{2}$ cm) ist $m_3 = \frac{1}{2} m_3 \rho^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (\frac{1}{4})^2 = 3\frac{1}{8}$ g cm², trotz der im Vergleich zur Masse des Radkranzes bedeutenden (fast fünf-fachen) Masse der Achse ihr Massenmoment doch nur $\frac{2}{3}$ Proz. vom Massenmoment des Radkranzes; also zusammen mit dem der Speichen $(3\frac{1}{2} + \frac{2}{3}) = 4\frac{1}{6}$ Proz. Mit anderen Worten: Wenn die Masse von Speichen und Achse in den Radkranz übertragen wäre, gäbe dies hier nur einen Massenzuwachs von $\frac{16\frac{2}{3} + 3\frac{1}{8}}{25} = \frac{19}{24}$ g, und es sind also zu je einem Träger statt der $9\frac{1}{2}$ g einzurechnen $(9\frac{1}{2} + \frac{19}{48})$ g $\neq 10$ g.

Fig. 162.



92. Numerische Auswertung der bei den Versuchen mit dem Drehungs- und Trägheitsmomentenapparat (vgl. Fig. 140, S. 147) auftretenden Größen: Massenmoment, Drehmoment und Winkelbeschleunigung (aus dieser dann Bahnbeschleunigung des Fadens und Fallstrecken der Träger).

Anleitung: Die Kreisscheiben haben die Halbmesser $a_1 = 5$ cm und $a_2 = 10$ cm. Ihre Dicken sind so gewählt, daß die Massen gleich sind 50 bzw. 200 g. Die Massenmomente sind (nach $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} M a^2$) 625 bzw. 10000 g cm². Die Stäbe sind Aluminiumstreifen von $2l = 44$ cm Gesamtlänge (22 cm von der Achse an), 0,3 cm Dicke und 2 cm Breite. Die Masse je eines Stabes ist 60 g, sein Massenmoment (nach $\frac{1}{3} M l^2$) 9680 g cm², genauer 9700 (nach $\mathfrak{M} = \frac{1}{3} M (l^2 + b^2)$, wo $b = 1$ cm). Es kommen noch hinzu die Massenmomente der Stahlachsen von $r = 0,3$ cm und $m = 27$ g, sowie zweier die Holzscheiben an den Achsen haltenden Messingscheibchen von $r = 1,4$ cm und zusammen $m = 21$ g. Für sie ist (nach $m = \frac{1}{2} m r^2$) m nur 1,22 bzw. 20,58, also zusammen 21,8 g cm². Wir können also die Massenmomente abrunden auf $2 \cdot 10^4$ und $3 \cdot 10^4$ g cm²; nämlich:

Für das kleine Gestell: $625 + 2 \cdot 9722 \neq 20000$ g cm²; Diff.: > 69 , d. i. 0,3 Proz., für das grofse Gestell: $10000 + 2 \cdot 9722 \neq 30000$ g cm²; Diff.: < 556 , d. i. 2 Proz.

Diese Abrundungen rechtfertigen sich dadurch, daß infolge des Schliffes Massen von 60 g durchschnittlich noch etwas mehr von der Achse abstecken.

An den Schlitten lassen sich beliebige Massen (m) in beliebigen Abständen (r) von der Achse festklemmen; ihre Massenmomente (mr^2) werden dann zu der Gestelle einfach addiert.

Um den Umfang jeder Scheibe ist ein Faden geschlungen, an dem ein Gewicht von der Masse $\mu = 5 \text{ g}$ hängt, und an dem also die Schwere mit einer Kraft von 5.981 Dyn angreift. Auf ihn können noch beliebige weitere Massen m werden, so daß das Drehmoment $= (\mu + m) g \cdot a$ (Dyn, cm).

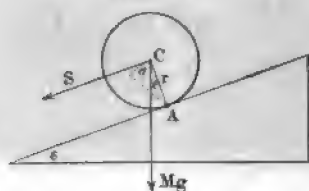
Die Winkelbeschleunigung der Gestelle und die Bahnbeschleunigung des Fadens berechnen sich gemäß des Versuchs § 31, S. 141 und sind durch die Versuche über die Fallstrecken der Träger zu bestätigen.

§ 2, 32.

93. Zu beweisen, daß die Beschleunigung beim Rollen der schiefen Ebene für den Zylindermantel nur $\frac{1}{2}$, für den Vollzylinder $\frac{2}{3}$, für die Kugel $\frac{5}{7}$ der Beschleunigung beim Gleiten ist.

Anleitung: Wird durch die genannten rollenden Körper eine vertikale Linie gelegt, so legt der Mittelpunkt C (Fig. 163) des Schnittkreises in jedem Zeit

Fig. 163.



sec längs CS die Strecken $s = \frac{g}{2} t^2$

Dabei läßt sich s als Bogen σ eines Kreises mit dem Radius r auffassen, dessen Mittelpunkt der augenblickliche Berührungspunkt A ist. Das Rollen läßt sich also als eine Drehung auffassen, deren Winkelbeschleunigung

ist und bewirkt wird durch das Drehmoment $Mg \cdot r \sin \epsilon$. Da A keine Schwerpunktsachse ist, so hat das Massenmoment \mathfrak{M} Bezug auf A den Wert $\mathfrak{M} + Mr^2$, also

$$\beta = \frac{Mg \sin \epsilon}{\mathfrak{M} + Mr^2} \quad \text{und} \quad b = r\beta = \frac{Mr^2}{\mathfrak{M} + Mr^2} \cdot g \sin \epsilon = q \cdot g,$$

wo $g \sin \epsilon = g_\epsilon$ und $\frac{Mr^2}{\mathfrak{M} + Mr^2} = q$ ein jedenfalls verkleinernder Faktor.

Nach LA 90 ist für den Zylindermantel $\mathfrak{M} = Mr^2$, also $q = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

für den Vollzylinder $\mathfrak{M} = \frac{1}{2} Mr^2$, „ $q = \frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

für die Kugel $\mathfrak{M} = \frac{2}{5} Mr^2$, „ $q = \frac{1}{1+\frac{2}{5}} = \frac{5}{7}$

94. Eine Holzscheibe, die an einer Stelle der Peripherie mit Bleimasse B beschwert ist, läuft, auf eine schiefe Ebene vom Neigungswinkel ϵ gestellt, bergan. Unter welcher Bedingung und mit welcher Beschleunigung?

Antwort: Bei der augenblicklichen Stellung der Scheibe nach Fig. 164 wirkt die Schwerkraft mit dem Drehmomente $Mg(s \sin \varphi - r \sin \epsilon)$ in Bezug auf die Achse A im Sinne einer Aufwärtsbewegung. Für diesen Augenblick ist

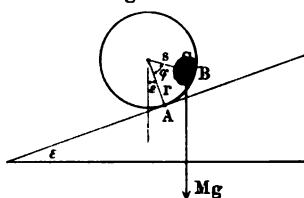
$$\beta = \frac{M(s \sin \varphi - r \sin \epsilon)}{\mathfrak{M} + Mr^2} \cdot g.$$

$s \neq r$ und $\mathfrak{M} = Ms^2 \neq Mr^2$ ist, so folgt:

$$\beta = \frac{Ms(\sin \varphi - \sin \epsilon)}{2Mr^2} g \text{ und } b = \frac{g}{2} (\sin \varphi - \sin \epsilon).$$

erbei ist b mit φ veränderlich und wird in dem Augenblicke Null, wo $\varphi = \epsilon$, h. wo der zum Schwerpunkt S gezogene Radius der Scheibe normal zur tiefen Ebene steht. (Was für ein Verhalten der Scheibe entspricht einem negativen φ ?)

Beim „berganlaufenden Doppelkegel“ (Versuch) wegen des variablen r die Rechnung noch verwickelter. Wesentlich ist das Sinken des Schwerpunktes zugleich mit seiner geometrischen Achse, ange das Rollen nach aufwärts in einem Abwickeln mer kleinerer Querschnittsumfänge besteht.



95. Die Welle eines Rädchens (z. B. von der Fallmaschine oder a Achse der Scheiben Fig. 165) ist auf das Schienenpaar aufgesetzt, und an der Welle wirkt mittels Fadens ein Gewichtchen von μg . Unter welcher Bedingung und mit welcher Beschleunigung tritt trotz Sinkens des Gewichtchens ein Berganrollen des Rädchens ein?

Antwort: Zum Drehmoment der Schwerkraft $Mg \cdot r \sin \epsilon$ in Bezug auf die augenblickliche Achse A tritt noch das Moment der Kraft μg im Betrage von

$r(r - r \sin \epsilon) = 2\mu g r \sin^2 \frac{\epsilon}{2}$. Die Winkelbeschleunigung des Systems ist somit, und zwar im Sinne der Drehung infolge der Schwerkraft:

$$\beta = \frac{Mgr \sin \epsilon - 2\mu g r \sin^2 \frac{\epsilon}{2}}{\mathfrak{M} + Mr^2}.$$

bald $2\mu g r \sin^2 \frac{\epsilon}{2} > Mgr \sin \epsilon$ oder $\mu \sin^2 \frac{\epsilon}{2} > M \cos \frac{\epsilon}{2}$

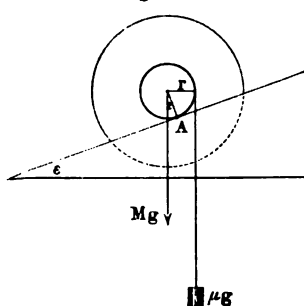
, wird β negativ, d. h. die Drehung erfolgt entgegen der Drehung der Schwerkraft, also das Rädchen läuft bergan mit der Beschleunigung

$$b = \frac{(\mu \tan^2 \frac{\epsilon}{2} - M) r^2}{\mathfrak{M} + Mr^2} \cdot g \sin \epsilon.$$

Ist das Trägheitsmoment der (dünnen) Speichen gegen das des (massigen) Radkranzes zu vernachlässigen, und ist $I = Kr$, so ergibt sich:

$$= \frac{1}{2} m r^2 + (M - m) K^2 r^2 \text{ und damit } b = \frac{\mu \tan^2 \frac{\epsilon}{2} - M}{(\frac{1}{2} - K^2) m + (1 + K^2) M} \cdot g \sin \epsilon.$$

Fig. 165.



• Physisches Pendel. Drehschwingungen im allgemeinen.

96. Die Abhängigkeit zwischen Schwingungsdauer und Neigungswinkel bei MACHS Neigungspendel (Fig. 166) zu entwickeln.

Anleitung: Bei wagrechter Drehungsachse unterliegen die einzelnen Massenpunkte den Schwerebeschleunigungen g bzw. $g \sin \psi$. Wird die Drehungs-

achse aus der wagrechten Lage um ν^0 geneigt, so sind die entsprechenden Beschleunigungskomponenten nur mehr $g \cos \nu$ bzw. $g \sin \psi \cdot \cos \nu = g \cos \nu$.

Fig. 166.



Daher ist auch die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (\text{wo } l \text{ die reduzierte Pendellänge}$$

annimmt $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \nu}}$. Soll z. B. $T_0 =$

sein, so muß $\cos \nu = \frac{1}{4}$, also $\nu = 75^\circ 31'$.

97. Die Formel für die Schwingungsdauer des physischen zusammengesetzten Pendels zu spezialisieren für die mathematischen (punktuellen) Pen

Ableitung: In $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{M}}{Mgd}}$ wird für ein Pendel mit nur einem Massenpunkt m und der Pendellänge l :

$$\mathcal{M} = ml^2, \quad M = m, \quad d = l; \quad \text{also } T = 2\pi \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

98. Der Stab des Apparates für starre Systeme (Fig. 82 (S. 141 (S. 148)), habe die Dimensionen $a = 50 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = \frac{1}{2} \text{ cm}$, Dichte $d = 8,01 \text{ g cm}^{-3}$. Wie groß ist sein Massenmoment \mathcal{M} , für eine zu c parallele Schwerpunktsachse, wie groß sind seine Massenmomente für eine in irgend welchen anderen Löchern angebrachte Drehungsachse und wie groß die zugehörigen Schwingungsdauern? (Vgl. LA 10

Antwort: Die Masse $M = abc \cdot d = 400,5 \text{ g} \approx 400 \text{ g}$ (diese Annäherung schon mit Rücksicht auf die Massenverluste bei den Bohrungen). Ferner ist

$$\mathcal{M}_s = \frac{M}{12} (a^2 + b^2) = 83738 \approx 84000 \text{ g cm}^2$$

(diese Annäherung mit Rücksicht auf die vorspringenden Ösen an den Enden). Für eine Drehungsachse, die z. B. in $x = 20 \text{ cm}$ Abstand von der Schwerpunktsachse in der Längssymmetrale des Stabes angebracht ist, ist $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_s +$

also für die abgerundeten Werte von M und \mathcal{M}_s ist $\mathcal{M}_0 = 244000 \text{ g cm}^2$.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathcal{M}_0}{Mg}} = 2\pi \sqrt{\frac{244000}{400 \cdot 981 \cdot 20}} = 1,11 \text{ sec.}$$

12. 3.

99. Eine homogene Kugel von $r \text{ cm}$ Halbmesser sei $L \text{ cm} = n$ (wo $n > 1$) oberhalb des Kugelmittelpunktes mittels eines Fadens (Drahtes) aufgehängt. Zu zeigen, daß für dieses physische Pendel der Schwingungsmittelpunkt um $\lambda = \frac{2}{5n} r \text{ cm}$ unterhalb des Kugelmittelpunktes liegt, wenn a) die Masse m des Fadens als gegen die Kugel

M der Kugel verschwindend angenommen wird. b) Was ändert sich an dem Ergebnis, wenn $m = \frac{1}{k} M$ (wo $k > 1$)?

Anleitung: a) Die reduzierte Pendellänge ist allgemein $l = \frac{\mathfrak{M}}{M d}$. Ferner ist für eine nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse das Trägheitsmoment $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_s + M d^2$. Für die Kugel ist $\mathfrak{M}_s = \frac{1}{2} M r^2$, also $\mathfrak{M}_0 = \frac{1}{2} M r^2 + M L^2$. Somit $l = \frac{M(\frac{1}{2} r^2 + L^2)}{M L} = L + \frac{1}{2} \frac{r^2}{L} \dots (1)$. — Ist also $L = n r$, so ist

$\lambda = \frac{1}{2} \frac{r}{n}$, d. h. in je größerem Abstände von ihrem Mittelpunkte die Kugel aufgehängt ist, um so weniger kommt der Schwingungsmittelpunkt unter den Kugelmittelpunkt zu liegen, aber erst für $n = \infty$ (d. h. wenn der Kugelhalbmesser verschwindend klein ist gegenüber der Fadenlänge) wird $\lambda = 0$, und der Mittelpunkt ist wirklich Schwingungsmittelpunkt (also es wäre das physische (zusammengesetzte) Pendel in ein mathematisches (punktuelles, einfaches) übergegangen).

b) Ist der Faden nicht masselos, so ändert sich die reduzierte Pendellänge in $l' = \frac{\mathfrak{M}'}{M' d'}$, wo nach dem Satze über die statischen Momente $M' d' = (M + m) d = M L + m \frac{L - r}{2}$, und nach LA 89 ist $\mathfrak{M}' = \frac{1}{2} m (L - r)^2 + \frac{1}{2} M r^2 + M L^2$.

$$\text{Daher ist: } l' = \frac{\frac{1}{2} m [(n-1)r]^2 + \frac{1}{2} k m r^2 + k m (n r)^2}{\frac{1}{2} m (n-1)r + k m n r} = \frac{\frac{1}{2} (n-1)^2 + \frac{1}{2} k + k n^2}{\frac{1}{2} (n-1) + k n} r. \quad (2)$$

Z. B. für eine Kugel von 5 kg und einen Draht von 10 g ist $k = 500$; bei einem Halbmesser der Kugel von 10 cm und einer Drahtlänge von 5 m, also einem Abstände des Aufhängepunktes vom Kugelmittelpunkt von 5,1 m ist $n = 51$. Dann wird $l = 50,99 \cdot r$; der Schwingungsmittelpunkt liegt also 0,01 $\cdot r$, d. i. 1 Proz. des Kugelhalbmessers oberhalb des Kugelmittelpunktes.

Spezialfälle zu Gl. (2): a) Für einen besonderen Wert von k (d. h. bei einem bestimmten Verhältnis der Massen von Faden und Kugel) kann nun auch wieder der Schwingungsmittelpunkt in den Kugelmittelpunkt fallen. Dann ist nämlich $l = L = n r$, oder $\frac{\frac{1}{2} (n-1)^2 + \frac{1}{2} k + k n^2}{\frac{1}{2} (n-1) + k n} r = n r$, und es muß k zu n in der Beziehung $\frac{1}{2} k = \frac{1}{2} (n-1)(n+2)$ stehen.

β) Nehmen wir in Gl. (2) wieder $k = \infty$, d. h. die Fadenmasse wieder verschwindend gegen die Kugelmasse, so wird wieder:

$$\frac{\frac{1}{2} \frac{(n-1)^2}{k} + \frac{1}{2} + n^2}{\frac{1}{2} \frac{(n-1)}{k} + n} r = \frac{\frac{1}{2} + n^2}{n} r = n r + \frac{2}{5n} r = L + \lambda; \text{ in Worten?}$$

100. In der Gleichung für die reduzierte Pendellänge ist das \mathfrak{M}_0 in Bezug auf die Pendelachse zu ersetzen durch das Massenmoment \mathfrak{M}_s in Bezug auf eine zur Pendelachse parallele Schwerpunktsachse.

$$\text{Ableitung: } l = \frac{\mathfrak{M}_0}{M d} = \frac{\mathfrak{M}_s + M d^2}{M d} = \frac{\mathfrak{M}_s}{M d} + d.$$

in Bezug auf sie die Schwingungsdauern einander gleich sind, zierten Pendellängen $l = l'$. — Behauptung: Diese reduzierte zugleich der Schneidenabstand ab ; also wenn die Abstände Schwerpunkte $aS = d$, $bS = d'$, so ist zu beweisen $l = l' =$ Die allgemeine Beziehung $(l-d)d = (l'-d')d'$ (LA 101) wird $(l-d)d = (l'-d')d'$, was nur sein kann, wenn $l = d +$ $= ld' - d'^2$; $ld - ld' = d^2 - d'^2$; $l(d-d') = (d+d')(d$ Schluss auch für $d = d'$?].

§ 33. **103. Den Satz vom Reversionspendel für seinen Endpunkt und dann um den zugehörigen Schwerpunkt schwingenden homogenen geraden Stab zu**

Anleitung: Der Stab habe die Länge L cm und die Masse M . Die reduzierte Pendellänge in Bezug auf den Endpunkt sei l , in Bezug auf den „Schwingungsmittelpunkt“ l' . Dann ist $l = \frac{\mathfrak{M}_0}{Md} =$ Ferner für einen Drehungspunkt im Abstände $\frac{1}{2}L$ vom Ende, als Drehpunkt ist $\mathfrak{M}_0 = M \frac{L^2}{12} + M \frac{L^2}{36} = \frac{1}{3} ML^2$. Somit $l' = \frac{1}{3} \frac{L^2}{d}$

Numerisches Beispiel und Versuch nach LA 98.

§ 33. **104. Die Gleichung $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{\theta}}$ für Drehschwingungen**

Anleitung: Während in der Gleichung $\omega = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}_0}$ für $\mathfrak{R} = -I\ddot{\alpha}$ gewesen war, ist für den einfacheren Fall der Drehschwingung das Kraftmoment direkt proportional dem Verdrehungswinkel α (wo das „—“ bedeutet, dass die Winkel von der Ruhelage aus gezählt werden). Durch beiderseitige Multiplikation mit \mathfrak{M}_0 (dem Abstand eines beliebigen Punktes von der Drehungsachse) erhält man $\mathfrak{M}_0 \omega = -I\ddot{\alpha}$. Für die Drehschwingung gilt $\omega = \frac{2\pi}{T}$, also $\frac{2\pi}{T} = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}_0}$. Setzt man $\mathfrak{R} = -I\ddot{\alpha}$ ein, so erhält man $\frac{2\pi}{T} = \frac{-I\ddot{\alpha}}{\mathfrak{M}_0}$. Multipliziert man mit \mathfrak{M}_0 , so erhält man $\frac{2\pi}{T} \mathfrak{M}_0 = -I\ddot{\alpha}$. Für die Drehschwingung gilt $\ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha$, also $\frac{2\pi}{T} \mathfrak{M}_0 = I\omega^2 \alpha$. Da α beliebig ist, gilt $\frac{2\pi}{T} \mathfrak{M}_0 = I\omega^2$. Setzt man $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ein, so erhält man $\frac{2\pi}{T} \mathfrak{M}_0 = I \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$. Multipliziert man mit T^2 , so erhält man $2\pi \mathfrak{M}_0 = I \frac{2\pi}{T}$. Dividiert man mit 2π , so erhält man $\mathfrak{M}_0 = \frac{I}{T}$. Setzt man $\mathfrak{M}_0 = \frac{I}{T}$ in die Gleichung $\omega = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}_0}$ ein, so erhält man $\omega = \frac{\mathfrak{R}}{I/T} = \frac{\mathfrak{R}T}{I}$. Setzt man $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ein, so erhält man $\frac{2\pi}{T} = \frac{\mathfrak{R}T}{I}$. Multipliziert man mit T , so erhält man $2\pi = \frac{\mathfrak{R}T^2}{I}$. Setzt man $\mathfrak{R} = -I\ddot{\alpha}$ ein, so erhält man $2\pi = \frac{-I\ddot{\alpha}T^2}{I}$. Dividiert man mit $-I$, so erhält man $2\pi = -\ddot{\alpha}T^2$. Multipliziert man mit -1 , so erhält man $-2\pi = \ddot{\alpha}T^2$. Setzt man $\ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha$ ein, so erhält man $-2\pi = -\omega^2 \alpha T^2$. Dividiert man mit $-\alpha$, so erhält man $2\pi = \omega^2 T^2$. Setzt man $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ein, so erhält man $2\pi = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 T^2$. Multipliziert man mit T^2 , so erhält man $2\pi T^2 = 4\pi^2$. Dividiert man mit 2π , so erhält man $T^2 = 2\pi$. Setzt man $T = \sqrt{2\pi}$ ein, so erhält man $\sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$. Multipliziert man mit $\sqrt{2\pi}$, so erhält man $2\pi = 2\pi$. Setzt man $\mathfrak{M}_0 = \frac{I}{T}$ in die Gleichung $\omega = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{M}_0}$ ein, so erhält man $\omega = \frac{\mathfrak{R}}{I/T} = \frac{\mathfrak{R}T}{I}$. Setzt man $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ein, so erhält man $\frac{2\pi}{T} = \frac{\mathfrak{R}T}{I}$. Multipliziert man mit T , so erhält man $2\pi = \frac{\mathfrak{R}T^2}{I}$. Setzt man $\mathfrak{R} = -I\ddot{\alpha}$ ein, so erhält man $2\pi = \frac{-I\ddot{\alpha}T^2}{I}$. Dividiert man mit $-I$, so erhält man $2\pi = -\ddot{\alpha}T^2$. Multipliziert man mit -1 , so erhält man $-2\pi = \ddot{\alpha}T^2$. Setzt man $\ddot{\alpha} = -\omega^2 \alpha$ ein, so erhält man $-2\pi = -\omega^2 \alpha T^2$. Dividiert man mit $-\alpha$, so erhält man $2\pi = \omega^2 T^2$. Setzt man $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ein, so erhält man $2\pi = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 T^2$. Multipliziert man mit T^2 , so erhält man $2\pi T^2 = 4\pi^2$. Dividiert man mit 2π , so erhält man $T^2 = 2\pi$. Setzt man $T = \sqrt{2\pi}$ ein, so erhält man $\sqrt{2\pi} = \sqrt{2\pi}$. Multipliziert man mit $\sqrt{2\pi}$, so erhält man $2\pi = 2\pi$.

XI. Arbeit und Energie bei Rotationen.

105. Einem ruhenden System werde eine Winkelgeschwindigkeit α § 32. um eine Achse erteilt, in Bezug auf die dem System das Massenmoment \mathcal{M} zukommt; zu zeigen, daß das Überwinden des Beharrungswiderstandes gegen Winkelbeschleunigungen die Arbeit $A = \frac{1}{2} \mathcal{M} \alpha^2$ kostet.

Vorbemerkung: Es sei in dieser und der folgenden Aufgabe als einfachster Fall vorausgesetzt, daß aus der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit 0 durch konstante Winkelbeschleunigung β die schließliche Winkelgeschwindigkeit α werde.

Anleitung: Sind es beliebige Kräfte k mit beliebigen Kraftarmen a , die an den beliebigen Massen m mit beliebigen Massenarmen r angreifen, so ist doch immer

$$\beta = \frac{\sum k a}{\sum m r^2} = \frac{R}{\mathcal{M}}, \text{ wo dann eine Kraft } R \text{ direkt an einer Masse } \mathcal{M} \text{ mit dem Arme } r = 1 \text{ cm angreifend gedacht werden kann. — Dann ist } A = R \cdot \sigma = \mathcal{M} \beta \cdot \frac{\alpha^2}{2\beta} = \frac{1}{2} \mathcal{M} \alpha^2$$

(analog der Arbeit für den Massenpunkt [§ 22, S. 88] $A = k \cdot s = m b \cdot \frac{v^2}{2b} = \frac{1}{2} m v^2$);

denn für $r = 1$ ist $\sigma = \frac{1}{2} \beta t^2 = \frac{1}{2} (\beta t) \cdot t$ und $\alpha = \beta t$, woraus $\sigma = \frac{\alpha^2}{2\beta}$

(analog den Gleichungen [§ 6] $s = \frac{1}{2} b t^2 \dots \dots \dots s = \frac{v^2}{2b}$).

106. Zu zeigen, daß ein System vom Massenmoment \mathcal{M} und von § 32. der Winkelgeschwindigkeit α die lebendige Kraft $A = \frac{1}{2} \mathcal{M} \alpha^2$ hat.

Anleitung: Für einen einzelnen Massenpunkt ist $l = \frac{1}{2} m c^2 = \frac{1}{2} m (\alpha r)^2 = \frac{1}{2} m r^2 \cdot \alpha^2 = \frac{1}{2} m \cdot \alpha^2$. — Da ferner für alle Massenpunkte des rotierenden Systems α konstant ist, so ist $A = \sum \frac{1}{2} m \alpha^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 \sum m = \frac{1}{2} \mathcal{M} \alpha^2$ (ebenso wie für die Translation $L = \sum \frac{1}{2} m c^2 = \frac{1}{2} c^2 \sum m = \frac{1}{2} M c^2$).

Aus den Ergebnissen von LA 105 und 106 folgt wieder $A = A$; in Worten?

Zusatz: Für diese energetischen Beziehungen bei Drehungen starrer (auch flüssiger oder gasförmiger) Punktsysteme bilden den einfachsten Grenzfall die Kreisungen von Massenpunkten. — Z. B. a) Eine Kastanie, an eine Schnur gefädelt, die an beiden Enden gehalten und mittels der die Kastanie in Kreisung versetzt wird, kreist rascher, wenn durch Ziehen an den Schnurenden der Kreis verkleinert wird; warum? — Antwort: Wenn eine Masse von m Gramm zuerst einen Kreis von r cm mit $\alpha \text{ sec}^{-1}$ Winkelgeschwindigkeit, dann einen Kreis von r_1 cm mit $\alpha_1 \text{ sec}^{-1}$ durchläuft, so besteht die Energiegleichung $\frac{1}{2} m (r \alpha)^2$

$= \frac{1}{2} m (r_1 \alpha_1)^2$, also $\alpha_1 = \frac{r}{r_1} \alpha$. (Wie ergibt sich diese Beziehung ohne Verwendung der Energie, bloß aus der Erhaltung der Bahngeschwindigkeit bei kleiner werdendem Radius des Kreises? — Versuch an Galileis Hemmungspendel, wenn sich die Schnur um den Stift schlingt). — b) Ein Luftring (z. B. die Luft um den 60. Breitengrad herum), der mit einem gegebenen Parallelkreis gleiche Winkelgeschwindigkeit hatte, werde gegen den Äquator hin um ein Stückchen (etwa 1°) verschoben. 1. Wie ändert sich seine Winkelgeschwindigkeit? 2. Um wieviel unterscheidet sich dieselbe von der Winkelgeschwindigkeit des erreichten Parallelkreises? Antwort: Da die den Ring verschiebenden Kräfte senkrecht gegen die vorhandenen, den Ring vergrößernden Verschiebungen gerichtet sind, leisten sie

keine Arbeit. Der Vergrößerung des Ringes wird ferner ein merkliches Stand (abgesehen von einer Komponente der Schwerkraft) nicht geleistet, auch Arbeitsleistung in den Verschiebungsrichtungen nicht stattfindet. Änderung der Bewegungsenergie findet demnach ebenfalls nicht statt, und Veränderung der Winkelgeschwindigkeit $\alpha_1 - \alpha = \frac{r}{r_1} \alpha - \alpha = \dots$
 — (Über die relative Geschwindigkeit gegen die Erdoberfläche östlicher Richtung vgl. LA 109.)

24 83, 82

107. Eine wie große Energie der Bewegung hätte sich in Energieformen (z. B. in Wärme) umzusetzen, falls die Erde (als Kugel von der Masse $m = 5,963 \cdot 10^{27}$ g gedacht) a) in jährlichen Umlauf um die Sonne, b) in ihrer täglichen Drehung um ihre Achse plötzlich oder allmählich ganz aufgehalten würde.

Anleitung: Die kinetische Energie der jährlichen Translation $L = \frac{Mv^2}{2}$, wo die Masse der Erde $M = 5,963 \cdot 10^{27}$ g, $v = 29,468$ km $= 2,9468 \times 10^6$ cm sec $^{-1}$. Hiernach $L = 2,589 \times 10^{40}$ Erg $= 6,209 \cdot 10^{22}$ Cal.

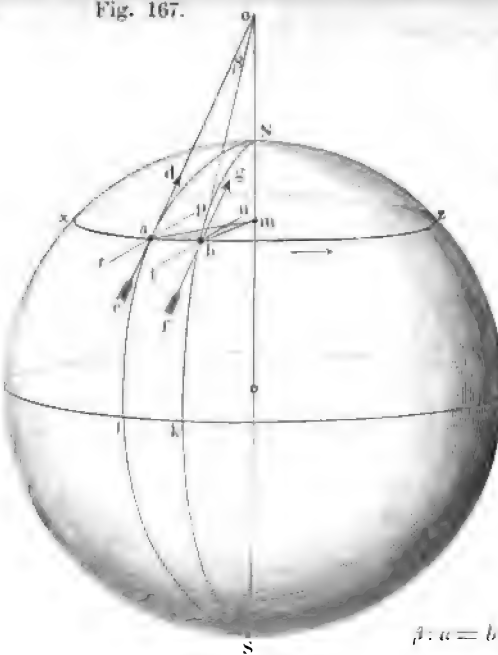
Die kinetische Energie der täglichen Rotation:

$$J = \frac{MR^2 \cdot \alpha^2}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \cdot MR^2 \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = 3,832 \cdot 10^{33}$$

XII. Sogenannte ablenkende Kraft der Erdrotation

24 54.

Fig. 167.



108. Es ist bei Foucaultschen Verschiebung allgemeine Gleichung

$$\psi = 15^\circ \cdot \sin \varphi$$

für den Verdrehungswinkel pro Stunde in der geographischen Breite φ° abzulesen.

Anleitung: Es bezeichne a einen bestimmten Zeitpunkt, das Pendel in der Richtung des Meridians ed (Fig. 167) schwingen. Binnen einer bestimmten Zeit sei der der Lage des Pendels entsprechende Punkt a der Erdoberfläche in den Raum nach b gerückt. Der Verdrehungswinkel ist dann $\angle boa = \beta^\circ$. Für eine sehr kleine Zeit steht β° in der Beziehung

$$\beta : a = bm : bo \quad \text{oder} \quad \beta = a \cdot \frac{bm}{bo} = a \cdot \sin \varphi$$

dieselbe Beziehung auch noch besteht, wenn das Pendel anfänglich nicht in der Ebene des Meridians geschwungen hat (was aber streng nur durch eine nähere Einleitung auf die Zerlegung und Zusammensetzung von Rotationen zu zeigen wäre) und für 1 Stunde $\alpha = 15^\circ$, so gilt für den zugehörigen Wert $\beta = \psi = 15^\circ \sin \varphi$.

109. Die westöstliche Abweichung a) von nordsüdlichen (südausgerichteten) Strömungen der Luft und des Wassers (analog die Abweichung der Geschosse u. dergl.) zu erklären. — Desgleichen b) die westöstliche Abweichung b) für (lotrecht) fallende Körper.

Anleitung: Zu a). Ist R der Erdradius, α die Winkelgeschwindigkeit der Erdrotation, so sind in den geographischen Breiten φ_1 und φ_2 die westöstlichen Geschwindigkeiten eines Punktes der Erdoberfläche längs des Breitengrades $R \sin \varphi_1$ und $R \sin \varphi_2$. Daher findet (an der Nordhalbkugel der Erde) beim nordsüdlichen Abfließen eines Wasser- oder Luftteilchens eine Zunahme der Relativgeschwindigkeit gegen die Erdoberfläche im Betrage $\delta = R \alpha (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)$ statt; war v die nordsüdliche Geschwindigkeit jenes Abfließens, so ist die ganze Relativgeschwindigkeit des Teilchens gegen die Erdoberfläche $\sqrt{\delta^2 + v^2}$. —

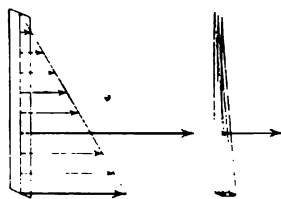
Zu b). Von einem Punkt in der Höhe h oberhalb des Äquators werde ein Körper frei fallen gelassen. Er hat dann schon im Zeitpunkte des Anfangs der Bewegung eine westöstliche Geschwindigkeit, entsprechend dem Radius $(R + h)$ der Winkelgeschwindigkeit α , somit der Bahngeschwindigkeit $(R + h)\alpha$; er bringt er beim Fallen an die Erdoberfläche mit, deren Teile eine Geschwindigkeit $R\alpha$ haben. Er hat somit eine Relativgeschwindigkeit gegen den Fußpunkt des Ausgangspunktes im Betrage $(R + h)\alpha - R\alpha = h\alpha$. (Diese Berechnung ist nur erste Annäherungen; nach KIRCHHOFF ist die Ablenkung proportional $h^{3/2}$.) Entsprechend der Rechnung (und somit als ein direkter Beweis für den ersten Lehrsatz der Kopernikanischen Lehre, S. 571) ergab sich bei BENZENBERGS Fallsuchen am Michaelisturme zu Hamburg (1804) für $h = 76$ m eine östliche Abweichung von 9 mm. — (Zu solchen westöstlichen kommen nach der genaueren Theorie noch viel kleinere nordsüdliche Abweichungen). — Was ändert sich am Vorgang, wenn der Körper statt von einem Turm in einen Schacht fällt?

XIII. Hydromechanik.

110. Zu zeigen, daß der Seitendruck einer vertikalen Rechtecksfläche im ersten Drittel der Höhe angreift (Fig. 168).

Anleitung: Die Aufgabe steht in Analogie zum Satz über den Schwerpunkt des Dreiecks. Man denkt sich dabei gewöhnlich ein dreieckiges, überall gleich dickes, homogenes Brettchen auf einer Messerschneide balanciert, die parallel zu einer Seite im ersten Drittel der Höhe angebracht ist. (Fig. 168.)

Man kann sich aber auch ein Stäbchen denken, an dem einen Ende einen rechteckigen Querschnitt hat und von da zum anderen Ende an Dicke allmählich abnimmt, so daß es an diesem Ende eine scharfe Kante hat, die zu den Kanten jener Rechtecksfläche parallel ist. Auch dieses Stäbchen müßte im ersten Drittel seiner Länge unterstützt sein, damit es im Gleichgewichte gegen die Schwerkraft sei. Wie nun hier die Schwerkraft angreift, das zeigt die folgende Figur.

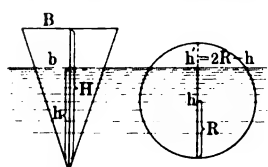


kalen Abstände gilt $H:h = S:s$. wegen $Hs = hS$ oder sHs zwar der für die Tiefe, in der sich jene Achse befindet, gerechnet (und daher auch der Innendruck) für beide Flüssigkeitssäulen man könnte glauben, daß daher die Klappe in Ruhe bleiben aber keineswegs der Fall, ob nun die Achse als durch den Schwerpunktfläche gehend oder höher oder tiefer angenommen wird. Den Angriffspunkt des Seitendruckes jener Säulen bildet sich in paar, das jene Klappe so lange dreht, bis sie wagrecht liegt. (I nimmt auf beiden Seiten der vertikal gedachten Trennungsfläche für die er als gleich angenommen worden war, nach aufwärts unterschiedenem Maße ab, bzw. zu.) — Daß nur eine wagrechte der verschieden dichten Flüssigkeiten dem Gleichgewichte entspricht eindringlich, wenn man an die Übertragung des Gesetzes kommunikationsgefäße auf den Torricellischen Versuch und das B Hier ist ja die Trennungsfläche zwischen Luft und Quecksilber, silberspiegel im offenen Gefäß, immer nur wagrecht.

§ 40. 112. Die Tiefe des Einsinkens homogener Körper in Flüssigkeiten zu berechnen.

Anleitung: Es sei das spezifische Gewicht des eintauchenden der Flüssigkeit $S > s$.

Fig. 169. Fig. 170.



Erstes Beispiel: Ein gerade Basis B und der Höhe H (Fig. 169) vertikaler Achse und abwärts gekleidet zur Höhe h ein. Dann geben $\frac{1}{3} B h$ und $b = \frac{h^2}{H^2} B$, eine rein kubische für $h = H \sqrt[3]{\frac{s}{S}}$.

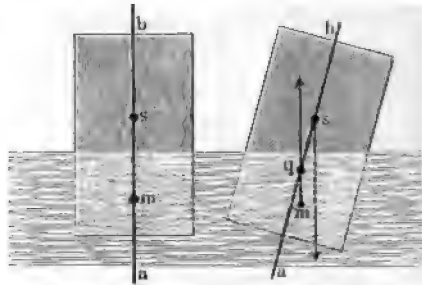
Zweites Beispiel: Für die Kugel (Fig. 170) vom Radius R ist $\frac{1}{3} \pi R^3 s = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h) S$ für h die gemischt kubische

nn s unterhalb m läge (was bei homogenen Körpern unmöglich ist). Aber auch nn s oberhalb m liegt, ist stabiles Schwimmen möglich. Der Körper sei aus der ersten Lage herausgebracht, so daß der Angriffspunkt des Auftriebes m (Fig. 172) an eine andere Stelle im Körper als vorher rückt. Dann fallen

Richtungen von Auftrieb und von der Richtung des Körpers nicht mehr in eine Gerade, die beiden Kräfte bilden vielmehr ein Drehpaar, das den Körper in die Anfangslage zurückbringt. Wenn der Körper weiter von ihr weg dreht, je nachdem die durch m gezogene Senkrechte die Mittellinie ab des Körpers unterhalb oder oberhalb des Schwerpunktes schneidet. Die Lage dieses Schnittpunktes ist demnach für das stabile Schwimmen maßgebend. Er heißt Metacentrum. Ein Körper schwimmt stabil, wenn der Schwerpunkt tiefer als das Metacentrum liegt.

Fig. 171.

Fig. 172.



114. Konstruktion der Skalen an Skalenaräometern.

§ 41.

Anleitung: a) Ist das Aräometer eine überall gleich weite, mit Quecksilber bewehrte Röhre, so bezeichnet man die Stelle, bis zu der das Instrument in Wasser einsinkt, mit 100, teilt das unterhalb gelegene Stück der Röhre in 100 gleiche Teile und trägt eben solche Teile nach oben hin auf. Sinkt in einer anderen Flüssigkeit das Instrument z. B. bis 125, so verhalten sich die Volumina dieser Gewichte von Flüssigkeit und Wasser wie 125 : 100, also die Gewichte dieser Volumina wie 100 : 125, daher $s = \frac{100}{125} = 0,8$, allgemein $s = \frac{100}{n}$.

b) Hat das Aräometer die Gestalt Fig. 168 (S. 168), so bringt man in die Röhre etwas Quecksilber, so daß das Gewicht p beträgt und das Instrument bis zu einer Marke einsinkt; diese Stelle bezeichnet man mit 50. Darauf vermehrt man das Gewicht durch Hinzufügung von Quecksilber auf $2p$, $3p$, bezeichnet die entsprechenden Marken mit 100 und 150 und teilt die Zwischenräume in je 50 gleiche Teile. Das zwischen 50 und 100 liegende Volumen ist die Hälfte des Volumens, das von dem Instrument verdrängt wird, wenn es bis 100 einsinkt; der Raum zwischen zwei Teilstrichen ist also $\frac{1}{100}$ dieses Volumens. Man gibt zum Schluß dem Instrument das Gewicht $2p$ und verschließt es. Taucht das Instrument nun in einer anderen Flüssigkeit bis zum Teilstrich 80 ein, so verhalten sich die verdrängten Volumina wie 80 : 100, also $s = \frac{100}{80} = 1,25$, allgemein $s = \frac{100}{n}$.

115. TORRICELLIS Satz über die Ausflufsgeschwindigkeiten § 42. kinematisch zu erläutern.

Anleitung: Die Flüssigkeitsteilchen treten durch eine Bodenfläche (Fig. 173) hindurch wie frei fallend, sondern wie durchgepreßt. Ist die Fläche der Bodenöffnung $ab = \beta \text{ cm}^2$, die Höhe eines darüber stehenden Flüssigkeitsmasses $ac = h \text{ cm}$, so ist das Gewicht dieses Prismas $p = \beta \cdot h \cdot \text{sg}$. Die Masse

116. Wieviel Energie setzt sich aus potentieller i um, wenn ein prismatisches Gefäß von der Basis b m Höhe H m mit einer Flüssigkeit vom spezifischen Ge (und der Dichte d gcm⁻³) gefüllt ist, sich durch eine entleert? Welcher Fallhöhe x entspricht diese kinetisch

Anleitung: Die zum Vollpumpen des Gefäßes vom Boden Arbeit ist $A = \frac{1}{2} b H^2 d$ g m (LA 58); ihr ist daher maßzahlen Gesamtmenge der beim Sinken auf das Niveau der Bodenöffnung kinetischen Energie.

Um die Fallhöhe zu ermitteln, von der die Masse $b H d$ müssen, um mit der hierbei erlangten Endgeschwindigkeit v die g Energie zu gewinnen, setzen wir $\frac{1}{2} b H^2 d g = \frac{1}{2} b H d v^2$, wor Im Vergleiche zu der dem Torricellischen Ausflusgesetz entsprechende Geschwindigkeit $V = \sqrt{2 H g}$ ersieht man wieder, daß $x = \frac{H}{2}$ ist ganze Masse nur zur halben Höhe gehoben gewesen und von d

§ 42. **117.** Die gegenseitige Einwirkung zweier Wirbelringe zu beschreiben und zu erklären.

Anleitung: Wenn eine in Wirbelbewegung begriffene F nicht von festen Gefäßwänden, sondern selbst wieder von Flüssigkeit ist, so treten in dieser Umgebung des Wirbels Zirkulationen es, durch die zwei in derselben Flüssigkeit vorhandene Wirbelfältiger Weise aufeinander einwirken, insbesondere auch Anz Abstosungen aufeinander auszuüben scheinen. Einige der einfachen solcher Art sind die folgenden:

Es sollen w_1 und w_2 (Figg. 174 und 175) die Querschnitte der einige Wirbelfäden, deren Achsen senkrecht auf der Zeichenebene die beigezeichneten kleinen Pfeile den Drehungssinn jedes Wirbels dar

der Drehungssinn innerhalb der beiden Wirbel entgegengesetzt (Fig. 175), so nehmen sie zusammen eine fortschreitende Bewegung (**Translation**) durch die umgebende Flüssigkeit hindurch an.

Fig. 174.

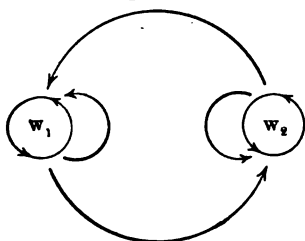
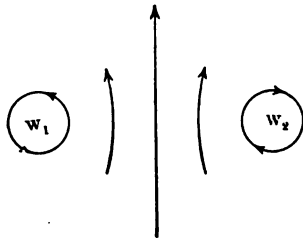


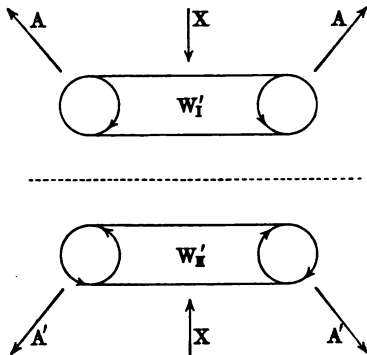
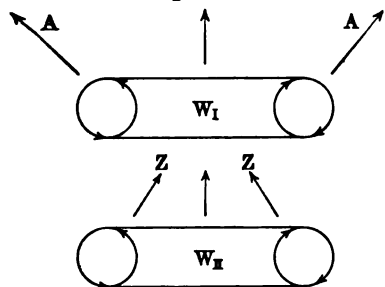
Fig. 175.



Sind die Wirbelfäden nicht, wie bisher angenommen, solche von geradlinigen Achsen, sondern sind sie **Wirbelringe** (wobei in Figg. 176 und 177 die kleinen

Fig. 176.

Fig. 177.



Kreise mit den Pfeilen Querschnitte durch den Ring darstellen), so treten folgende Relativbewegungen der beiden Wirbelringe gegeneinander ein: Haben die Ringe gleichen Drehungssinn (Fig. 176), so übt der Ring W_1 durch die Zirkulation seiner Umgebung auf den Ring W_2 längs dessen ganzem Umfang Einwirkungen im Sinn der Pfeile A aus, der Ring W_2 hingegen auf W_1 Einwirkungen im Sinn der Pfeile ZZ . Deshalb erweitert sich der Ring W_1 und verengt sich der Ring W_2 . Nun ist mit einer Erweiterung eines Wirbelringes eine Verkleinerung, mit einer Verengung eine Vergrößerung seiner fortschreitenden Bewegung verbunden (wie HELMHOLTZ aus den Gleichungen solcher Bewegungen abgeleitet hat und wie es sich durch Beobachtung an Wirbelringen bestätigt). So kommt es, daß der Ring W_1 durch den Ring W_2 hindurchschlüpft, welches Spiel sich dann wiederholt, indem der durchgeschlüpfte Ring sich erweitert, der andere sich verengt und wieder durch den vorderen hindurchschlüpft u. s. f. (also wieder eine Art Anziehung, nämlich fortwährende Durchdringung, wobei doch jeder Ring ein „Individuum“ bleibt, ähnlich den „Atomen“). — Zwei Wirbelringe aber von entgegengesetztem Drehungssinn der einzelnen wirbelnden Teilchen (Fig. 177) erweitern einander gegenseitig im Sinne der Pfeile AA und $A'A'$. Wenn sie Bewegung im Sinne der Pfeile XX gegeneinander gehabt haben, so verlangsamen sie gegenseitig ihre Bewegung und es ist also, wie wenn sie sich gegenseitig abstießen (ähnlich zwei festen elastischen Körpern).

XIV. Aeromechanik.

- § 44. 118. a) Die Größe des Luftdruckes bei 76 cm Quecksilberhöhe zu berechnen. — b) Zu zeigen, daß, wenn als Normalbarometer (statt 76 cm) 75 cm gewählt worden wäre, der entsprechende Druck sehr (wie?) nahe $= 10^6 \text{ Dyn} = 1 \text{ Megadyn}$ wäre.

Anleitung: Zu a). Wird als Wert der Dichte des Quecksilbers $13,6 \text{ g/cm}^3$ angenommen, so ist die Masse der Quecksilbersäule $76 \times 13,6 = 1033,6 \text{ g}$, ihr Gewichtsdruck ist $1 \text{ at} = 76 \times 13,6 \text{ g per cm}^2 = 1033,6 \text{ g cm}^{-2}$. — Für genaueren Wert der Dichte des Quecksilbers 13,595 wird $1 \text{ at} = 1033,22 \text{ g/cm}^2$.

Zu b). Es ist $75 \times 13,595 = 931 \text{ Dyn} = 1000252,125 \text{ Dyn} \neq 10^6$.

- § 44. 119. Die wesentlichsten Barometerkorrekturen an einem numerischen Beispiel zu begründen.

Beispiel: Ist bei einem Gefäßbarometer mit Messingskala die abgelesene Höhe der Quecksilbersäule h , die Temperatur t , die Kapillardepression K , Spannung der Quecksilberdämpfe τ , so ist der korrigierte Barometerstand

$$b = \frac{h}{1 + 0,000162 \cdot t} + K + \tau \approx h - 0,000162 \cdot h \cdot t + K + \tau.$$

Das subtraktive Glied $0,000162 \cdot h \cdot t$ ergibt sich so: Die Höhe der Quecksilbersäule bei 0° ist $h_0 = h (1 - 0,000181 \cdot t) = h - 0,000181 \cdot h \cdot t$. Aber wegen der Ausdehnung der Messingskala ist diese Höhe zu gering: da für Messing $\alpha = 0,000019$, so folgt $b = h - 0,000181 \cdot h \cdot t + 0,000019 \cdot h \cdot t$.

Die Größe K wird aus Tabellen entnommen, die durch direkte Messung gewonnen sind; für eine Röhrenweite von 10 mm ist $K = 0,20 \text{ mm}$.

Die Größe τ wird für 20° C. zu $0,02 \text{ mm}$ angenommen.

Zeigt also z. B. ein Barometer 732,4 mm bei 15° C. , so ist unter Berücksichtigung von K und τ der reduzierte Barometerstand

$$\frac{732,4}{1 + 0,000162 \cdot 15} = 730,62 \text{ mm.}$$

- § 45. 120. Welchen numerischen Wert, welche Maßeinheit und welche Dimension hat im Ausdruck für Boyles Gesetz $p v = \text{Konst}$ die Größe Konst für 6 cm^3 Luft bei 76 cm Druck und 0° C. ?

Antwort: $p = 1033,6 \text{ g} = 1033,6 \cdot 981 \text{ Dyn}$, daher $p v = 1033,6 \cdot 981 \cdot 6 \text{ Dyn cm}^3$, Dimension $\text{cm sec}^{-2} \text{ g} \cdot \text{cm}^3$, somit $\text{Konst} = 6083769,6 \text{ cm}^4 \text{ sec}^{-2} \text{ g}$.

- § 45. 121. Zu zeigen, daß die graphische Darstellung für Boyles Gesetz die gleichseitige Hyperbel ist.

Anleitung: Ist in Fig. 178 der äußere Druck als Abszisse, das Volumen als Ordinate aufgetragen, so entspricht der Gleichung $p v = \text{Konst}$ dieselbe Gleichung wie der Gleichung $x y = \text{Konst}$ oder $y = \frac{\text{Konst}}{x}$. Daß dies eine gleichseitige Hyperbel ist, zeigt die Transformation auf ein um 45° geneigtes System mit demselben Ursprung, wobei sich ergibt $x'^2 - y'^2 = 2 \text{ Konst}$. (Math. Anh. 23.)

Zusatz: Da beim Zusammendrücken eines Gases die verbrauchte mechanische Arbeit in Form von Wärmemengen auftritt, die den Wärme

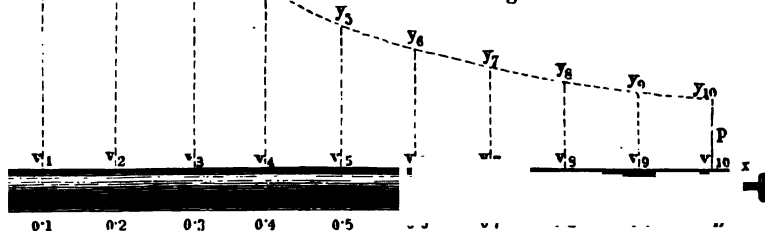
ases und hiermit seine Spannung erhöhen würden, so ist bei dem in Fig. 178 dargestellten Versuche noch besonders dafür zu sorgen, daß das Gas auf konstantem Wärmegrade erhalten (d. h. die beim Verdichten auftretende Wärmemenge beseitigt) werde. Obige Kurve wird daher insbesondere als „isothermische“ bezeichnet. (Vgl. dagegen über „adiabatische“ Volum- und Temperaturänderung LA 225). — Vgl. ferner die gleichseitigen Hyperbeln in Fig. 86, S. 763; Figg. 190 und 191, S. 895.

122. Warum fand ARISTOTELES beim Wägen der zu § 46. erst entleerten und dann mit Luft gefüllten Tierblase das Gewicht der vollen Blase etwas größer, trotz des vergrößerten Auftriebes?

Antwort: Weil er, um die Blase straff zu bekommen, Luft von größerer Dichte als die der äußeren Luft ist, einblasen mußte.

123. a) Man zeige, daß beim Luftdrucke §§ 46, 190, 197. von 76 cm Quecksilberstand das Gewicht einer 10 m hohen homogen gedachten Luftsäule sehr

Fig. 178.



1 vom ganzen Luftdrucke beträgt. — b) Wie hoch müßte eine 800 m hohe Atmosphäre von der Temperatur 0° reichen, um bei der Dichte von 1,293 g cm⁻³ den Luftdruck 1033,6 g cm⁻² zu erzeugen?

Anleitung: Zu a). Da 1 Liter = 1 dm³ = 1000 cm³ = 1 cm² × 10 m, so hat Luftsäule von 1 cm² Grundfläche und 10 m Höhe die Masse von 1,293 g und Gewicht von 1,293 g bei 76 cm Quecksilberdruck. Für den entsprechenden Luftdruck ist aber 1033,6 g : 1,293 g ≠ 800.

Es herrscht dann z. B. am oberen Ende der 10 m hohen Säule nur mehr ein Luftdruck von 1033,6 × $\frac{799}{800}$, wieder 10 m höher nur mehr 1033,6 × $\left(\frac{799}{800}\right)^2$ u. s. f.

Zu b). Es ist $\frac{1033,6}{1,293} \cdot 10 \text{ m} = 7994 \text{ m} \neq 8 \text{ km}$ (statt der 80 km, die aus der atmosphärischen Strahlenbrechung erschlossen sind, vgl. § 190, S. 614).

- § 46. 124. Wie ergibt sich der numerische Wert des Koeffizienten $A = \frac{h}{-\log q} \neq 18400 \text{ m}$ in der schematischen Formel für die barometrische Höhenmessung?

Anleitung: Dieser Koeffizient A läßt sich auf zwei Arten ermitteln: erstens theoretisch, zweitens empirisch.

1. Theoretisch: War $b_0 = 76 \text{ cm}$ und nehmen wir der Reihe nach Schichten von $h = 10 \text{ m}$, $h' = 1 \text{ m}$, $h'' = 1 \text{ dm}$, $h''' = 1 \text{ cm} \dots$, so erhält man die zugehörigen Werte von $q, q', q'', q''' \dots$ nach LA 123 und mit Hilfe der vielstelligen Logarithmen die zugehörigen Werte von $A, A', A'', A''' \dots$

$h = 10 \text{ m}$	$h' = 1 \text{ m}$	$h'' = 0,1 \text{ m}$	$h''' = 0,01 \text{ m}$
$q = \frac{799}{800}$	$q' = \frac{7999}{8000}$	$q'' = \frac{79999}{80000}$	$q''' = \frac{799999}{800000}$
$A = 18409,4$	$A' = 18418,6$	$A'' = 18420,5$	$A''' = 18420,9$

Man erkennt, daß sich diese Werte einer Grenze nähern. Für die dünnen Schichten (also für die stetige Verdünnung der Luft nach oben) stellt sich als Grenzübergang (ähnlich der Rechnung für organische Verzinsung Nr. 17) in der Gleichung $b = b_0 \cdot q^n$ zunächst bei $h = 10 \text{ m}$ und $q = \frac{799}{800}$ die Beziehung $b = b_0 \left(1 - \frac{1}{800}\right)^n$. An ihre Stelle tritt für h'

$$b = b_0 \left(1 - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{800}\right)^{10n} = b_0 \left[\left(1 - \frac{1}{800}\right)^{10} \right]^n. \quad \text{— Für } h'' = 0,1$$

$b = b_0 \left[\left(1 - \frac{1}{800}\right)^{100} \right]^n$ u. s. f. Wird hier als Nenner und Exponent der ersten, zweiten . . . Potenz von 10 die ins Unendliche wachsende Zahl genommen, so wird $b = b_0 \cdot e^{-\frac{1}{800} \cdot n}$. Hier war und ist überall $n = \frac{h}{10}$

und daher schließlich $b = b_0 \cdot e^{-\frac{H}{8000}}$.

Hieraus folgt weiter $H = 8000 (\log nat b_0 - \log nat b)$ oder in Briggschen Logarithmen $H = 8000 \times 2,3026 (\log b_0 - \log b)$, wo jetzt $A = 8000 \times 2,3026 =$

Wird statt $q = \frac{799}{800}$ genauer $1 - \frac{1,29305}{1033,3}$ angenommen, so wird $A =$

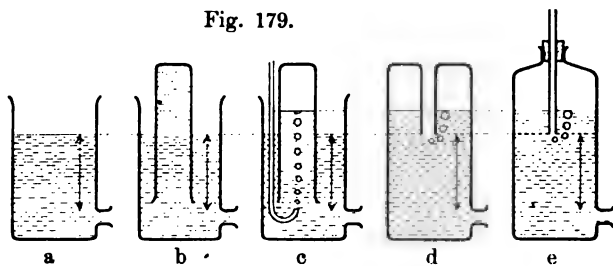
2. Empirisch: Sind für zwei Orte die Barometerstände b_0 und b gemessen, und ist überdies deren Höhenunterschied H trigonometrisch gemessen, so ergibt sich aus der schematischen Formel durch Einsetzung dieser drei Werte als bekannter Größen der Wert von $\frac{h}{-\log q}$ als der der Unbekannte.

- § 47. 125. Die Wirkung von Mariottes Flasche durch Analogie mit der pneumatischen Wanne zu erklären (Fig. 179, a bis e).

Anleitung: Man beachte, daß, wenn in der pneumatischen Wanne ein Gas oder in beliebigem Abstand von ihm ein gewisser Boden-, bzw. Seitenraum herrscht, dieser nicht verändert wird, wenn in die Wanne ein ganz oder teilweise mit Wasser gefüllter Glaszylinder getaucht wird; denn die oberhalb des

der Wanne stehende Flüssigkeitssäule wird vom äußeren Luftdruck getragen trägt nichts zum Druck auf die tieferliegende Schicht bei. In MARIOTTES Flasche spricht dann die der Luft in Verbindung stehende röhre dem den Zylinder umgebenden Raum, und umkehrt dem oben geschlossenen Zylinder die sonst allseitig verschlossene Flasche.

Fig. 179.



XV. Mechanik der sogenannten Molekularwirkungen.

126. Zu zeigen, daß HOOKES Elastizitätsgesetz und BOYLES (MARIOTTES) Gasgesetz für sehr kleine Änderungen von Spannung und Volumen auf die gemeinsame Form der Arbeitsgleichung $(p' - p)v$ führen.

Anleitung: Aus dem Gesetz für die zug- (druck-) elastische Längenveränderung $l = k \frac{L}{q} p = \frac{\text{konst}}{q} p$ folgt $lq = \text{konst} \cdot p$. Hier ist $lq = v$ die Volumenänderung, die durch die Längenveränderung herbeigeführt wurde (von der Kontraktion abgesehen); also $v = \text{konst} \cdot p$. Für einen anderen Zug (Druck) p' $v' = \text{konst} \cdot p'$, so daß $v' - v = \text{konst} (p' - p)$ oder $v' - v = \frac{v}{p} (p' - p)$, aus $(v' - v)p = (p' - p)v$. — Ähnlich läßt sich nun auch BOYLES Gesetz $PV = P'V'$, wo in $P' = P + p$ und $V' = V - v$ die Größen p und v zuzumengehörige kleine Veränderungen des Druckes und des Volumens darstellen, so schreiben: $V(P + p) = (V - v)(P + p) = VP - vP + Vp - pv$, wo das letzte Glied klein ist im Vergleiche zu den übrigen Gliedern, daher $vP = Vp$ $pv = \frac{V}{P} p = \text{konst} \cdot p$, woraus wieder $(v' - v)p = (p' - p)v$.

In HOOKES wie in BOYLES Gesetz bedeutet p den Druck per cm^2 , der bei kleinen Änderungen des Volumens (von v auf v' , also um $v' - v$) konstant bleibt. Für ein Flächenelement von $\beta \text{ cm}^2$ entfällt ein Druck von $p\beta$ Dyn, der bei einer kleinen Verschiebung um $l \text{ cm}$, d. i. bei einer kleinen Volumenveränderung $v' - v$ die Arbeit $(v' - v)p$ leistet.

127. Das Seitenverhältnis für den rechteckigen Balken größter Zugungsfestigkeit, der aus einem zylindrischen Stamme geschnitten werden kann, zu berechnen und zu konstruieren.

Anleitung: Für die Biegezugsfestigkeit F eines rechteckigen Balkens ergibt sich aus theoretischen Gründen, die auch durch die Experimente bestätigt werden, F einfach proportional der Breite x und der zweiten Potenz der Höhe h (Fig. 180) an. Es ist also $F = kxh^2$, worin k eine Konstante und $xh^2 = y$ eine der als unabhängig veränderlich gedachten Breite x abhängig veränderliche Größe ist. Um zu ermitteln, für welchen Wert von x ein Maximum von y

eintritt, setzen wir $y = xh^2 = x(d^2 - x^2) = xd^2 - x^3$, woraus für einen schwindend kleinen Zuwachs $x' - x$ folgt $\frac{y' - y}{x' - x} = d^2 - 3x^2$. Die Maxi-

Fig. 180.



bedingung ist dann, daß einer Veränderung des x kein Zuwachs des y mehr entspricht, also $d^2 - 3x^2 = 0$, 9

$$x = \frac{d}{\sqrt{3}} \text{ und } h = \sqrt{d^2 - \frac{d^2}{3}} = d\sqrt{\frac{2}{3}} = x\sqrt{2} \text{ folgt}$$

Letztere Beziehung zwischen h und x wird konstruiert, indem man den Durchmesser d des Kreises (des Balkenquerschnitts) in drei gleiche Teile teilt und in den Teilungspunkten die rechten nach Fig. 180 errichtet.

- § 56. 128. Welche mechanische Arbeit entgegen der Kraft der Oberflächenspannung wird verbraucht, um einen Tropfen in zwei (gleiche) Tropfen zu zerstoßen? (Vgl. LA. 154.)

Anleitung: Es sei der Radius je einer der zwei gleichen Flüssigkeitskugeln also ihre Oberfläche $4\pi\rho^2$, ihr Volumen $\frac{4\pi\rho^3}{3}$. Dann hatte die ursprüngliche Kugel das Volumen $2 \cdot \frac{4\pi\rho^3}{3}$ und die Oberfläche $2 \cdot 4\pi\rho^2$. Der Zuwachs an Oberfläche beim Zerspalten ist also $4\pi(2 - \sqrt[3]{4})\rho^2$. Da man nun die Arbeit, die Vergrößerung der Flüssigkeitsoberfläche um 1 cm^2 erforderlich als **Kapillaritätskonstante** α bezeichnet, so erfordert das Zerspalten in zwei Kugeln von je $\rho \text{ cm}$ Halbmesser die Arbeit von $4\pi(2 - \sqrt[3]{4})\rho^2 \cdot \alpha \text{ Erg}$ [ebenso Zerspalten in n gleiche Kugeln die Arbeit $4\pi(n - \sqrt[3]{n})\rho^2 \cdot \alpha \text{ Erg}$].

Für Wasser ist $\alpha = 77,09$ (bei 0° C.); also erfordert das Zerstoßen eines Tropfens in zwei (10, 100, 1000) Tröpfchen von je 1 mm Radius die mechanischen (kalorischen) Arbeiten von 4 (51,9; 760; 8718) Erg. — Für Quecksilber ist $\alpha = 540$ (bei 20° C.).

- § 58. 129. Zu zeigen, daß bei dem Stoß unelastischer Körper Verlust an kinetischer Energie eintritt.

Anleitung: Die kinetische Energie nach dem Stoß ist

$$\begin{aligned} \frac{(m_1 + m_2)c^2}{2} &= \frac{m_1 + m_2}{2} \cdot \frac{m_1^2 c_1^2 + m_2^2 c_2^2 + 2m_1 m_2 c_1 c_2}{(m_1 + m_2)^2} \\ &= \frac{m_1^2 c_1^2 + m_2^2 c_2^2 + 2m_1 m_2 c_1 c_2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1^2 c_1^2 + m_1 m_2 c_1^2}{2(m_1 + m_2)} + \frac{m_2^2 c_2^2 + m_1 m_2 c_2^2}{2(m_1 + m_2)} \\ &\quad - \frac{m_1 m_2 (c_1 - c_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2} - \frac{m_1 m_2 (c_1 - c_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \end{aligned}$$

Das letzte Glied stellt den Verlust dar.

- § 58. 130. Für elastische Kugeln von ungleicher (von gleicher) Masse die Geschwindigkeiten nach dem Stoß zu berechnen.

Anleitung: Die Massen der Kugeln A und B seien m_1, m_2 , ihre Geschwindigkeiten (in derselben Richtung) $c_1 > c_2$. Während der Berührung gebe A die Bewegungsgröße $m_1(c_1 - v)$ ab, während B die gleiche Bewegungsgröße aufnimmt.

Infolge der Elastizitätswirkung erfährt jede Kugel einen Rückstoß, der dem der anderen erteilten Stoß gleich ist. Daher ist nach beendetem Stoß

für A der Verlust an Bewegungsgröße $2 m_1 (c_1 - v)$,

„ B „ Gewinn „ „ $2 m_2 (v - c_2)$

und für A die Geschwindigkeit nach dem Stoß: $V_1 = c_1 - 2(c_1 - v) = 2v - c_1$

„ B „ „ „ „ „ : $V_2 = c_2 + 2(v - c_2) = 2v - c_2$.

Da hierin (nach §§ 16 und 58) $v = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2}$, so ist

$$V_1 = \frac{(m_1 - m_2) c_1 + 2 m_2 c_2}{m_1 + m_2} \quad V_2 = \frac{(m_2 - m_1) c_2 + 2 m_1 c_1}{m_1 + m_2}.$$

Ist $m_1 = m_2$, so vertauschen die Kugeln ihre Geschwindigkeiten.

131. Zu zeigen, daß bei dem Stoß elastischer Körper kein Verlust an kinetischer Energie eintritt.

Anleitung: Durch Einsetzen von V_1 und V_2 (aus LA 130) ergibt sich:

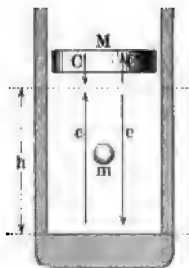
$$\begin{aligned} \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} &= \frac{m_1}{2} \frac{[(m_1 - m_2) c_1 + 2 m_2 c_2]^2}{(m_1 + m_2)^2} + \frac{m_2}{2} \frac{[(m_2 - m_1) c_2 + 2 m_1 c_1]^2}{(m_1 + m_2)^2} \\ &= \frac{1}{2(m_1 + m_2)^2} [m_1 (m_1 - m_2)^2 c_1^2 + 4 m_1 m_2 c_1 c_2 (m_1 - m_2) + 4 m_1 m_2^2 c_2^2 \\ &\quad + m_2 (m_1 - m_2)^2 c_2^2 + 4 m_1 m_2 c_1 c_2 (m_2 - m_1) + 4 m_1^2 m_2 c_1^2] \\ &= \frac{1}{2(m_1 + m_2)^2} [(m_1 - m_2)^2 (m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2) + 4 m_1 m_2 (m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2)] \\ &= \frac{m_1 c_1^2 + m_2 c_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} [(m_1 - m_2)^2 + 4 m_1 m_2] = \frac{m_1 c_1^2}{2} + \frac{m_2 c_2^2}{2}. \end{aligned}$$

132. Die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie $p v = \frac{n m u^2}{3}$ §§ 57, 58, 83. abzuleiten. (Vgl. LA 152.)

Anleitung: Vorbildlich für das „dynamische Gleichgewicht“ (S. 216), aus dem wir die Spannkraft eines Gases nach der kinetischen Gastheorie erklären, sei die annähernde Ruhe z. B. eines Buches vom Gewichte Q , gegen das wir von unten hinreichend schnell und stark mit den Fingern trommeln. — Im folgenden soll die Ableitung der Formel nur für drei einfachste Fälle von Formen des Gefäßes durchgeführt und an der Übereinstimmung der Resultate ersichtlich gemacht werden, daß für jene Grundgleichung die Gestalt des Gefäßes überhaupt unwesentlich ist (was sich auch streng allgemein beweisen läßt).

I. In einem vertikalen, zylindrischen Gefäße (Fig. 181) befinde sich h cm über der Bodenfläche ein wagrechter Kolben von der Masse Mg und dem Gewichte $Q = Mg$ Dyn. Gegen den sinkenden Kolben pralle eine sehr kleine Kugel von der Masse mg , die als vollkommen elastisch angenommen wird, so daß sich nach der Berührung des Zylinders die vertikale, aufwärts gerichtete Geschwindigkeit c cm sec⁻¹ in eine ebenso große vertikal abwärts gerichtete umkehrt. Dabei sei c so groß, daß von der Schwerebeschleunigung beim Auf- und Abfliegen des Kugelchens abgesehen werden kann. Dagegen sei die Bewegung des Kolbens M die eines vertikal aufwärts geworfenen und dann wieder infolge seiner Schwere sinkenden Körpers. Zwischen

Fig. 181.



II. Ist das Gefäß ein prismatisches von den Dimensionen $q = lb$, somit $p \cdot lb = \frac{1}{h} mc^2$ oder $p \cdot lbh = mc^2$ oder $pv =$ sich an den Stößen statt nur eines Kugelchens n (gleiche oder von gleichen oder ungleichen Geschwindigkeiten c), so verallgemeinert die Gleichung zu $pv = \Sigma mc^2$.

Bisher war angenommen, daß die Geschwindigkeit c normal auf die Kolbenfläche gerichtet sei. Nehmen wir dagegen an, daß die Geschwindigkeit c normal gegen die Wandflächen die Komponenten c_1, c_2, c_3 haben, wo $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = c^2$, so gilt für jede der drei zu den rechteckigen Seitenwänden des Gefäßes $pv = \Sigma mc_1^2$, $pv = \Sigma mc_2^2$, daher $3pv = \Sigma m(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) = \Sigma mc^2$ und also $pv = \frac{1}{3} \Sigma mc^2$.

III. Das Gefäß sei eine innen vollkommen glatte Hohlkugel vom Radius R . Zuerst werde angenommen, daß alle Kugelchen durch den Punkt C (Fig. 182) gehen.

Zwischen zwei Stößen wird zurückgelegt die Wegstrecke . . . dieses Zurücklegen erfordert die Zeit . . .

in der Zeiteinheit ist die Anzahl der Stöße . . .

die bei einem Stoße übertragene Bewegungsgröße ist . . .

daher die in der Zeiteinheit übertragene Bewegungsgröße . .

und von N Molekülen in der Zeiteinheit . . .

auf je 1 cm^2 entfällt von dieser Wirkung . . . $\frac{1}{4\pi R^2}$

Da hier $\frac{4\pi}{3} R^3 = v$ das Volumen der Kugel ist, so ergibt sich

Fig. 182. für den auf 1 cm^2 entfallenden Druck . .

Bewegt sich ein Teilchen nicht durch den Punkt C . .

unabhängig von α , also auch überhaupt unabhängig von der Bewegungsrichtung der an die Innenfläche prallenden Teilchen.

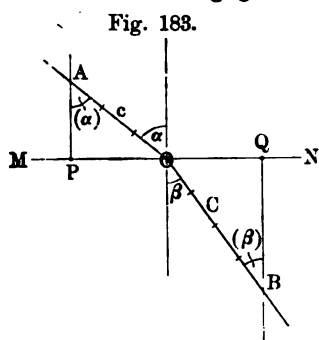
Ist die Hohlkugel innen nicht glatt (und ebenso das Prisma und der Zylinder), so werden durch die Rauigkeiten zwar einzelne Abweichungen von der angenommenen regelmäßigen Reflexion eintreten, aber sie werden nach verschiedenen Richtungen durchschnittlich gleich oft vorkommen und sich demnach gegenseitig im Gesamtergebnisse ausgleichen. —

Da in einem homogenen Gase zwar alle Moleküle als gleich vorausgesetzt werden, ihre Geschwindigkeiten aber im allgemeinen sehr verschieden sein müssen, so läßt sich die Gesamtmasse $Nm = M$ schreiben, wo N die Gesamtzahl aller dieser gleichen Moleküle (und M nicht obige Kolbenmasse) ist. Bedeutet überdies u^2 den Mittelwert aller untereinander sehr verschiedenen Geschwindigkeitsquadrate, so wird schließlich $pv = \frac{Nm u^2}{3} = \frac{M u^2}{3} = \frac{2}{3} L$, wo $L = \frac{M u^2}{2}$ die lebendige Kraft der mittleren fortschreitenden Bewegung aller Teilchen ist.

133. Welche Annahmen müssen über die Geschwindigkeiten beim § 59, 123. Übergang eines Punktes aus einem widerstehenden Mittel in ein anderes gemacht werden, damit für die hierbei eintretende plötzliche Veränderung der Richtung das Sinusgesetz der Brechung gilt?

Anleitung: Es sei in Fig. 183 MN die Trennungsfläche zweier Mittel, die der Bewegung desselben Körpers solche Widerstände leisten, daß sich seine Geschwindigkeiten dies- und jenseits MN z. B. verhalten wie $c : C = 3 : 4$. Dabei bleiben die Bewegungskomponenten $PO = OQ$ längs MN beim Übergang ungeändert. Dann ist

$$\frac{AO}{OB} = \frac{3}{4} = \frac{PO}{OQ}; \text{ daher } \frac{AO}{OQ} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{3}.$$



Bemerkung: Die Emissionstheorie des Lichtes hatte, um zu dieser Formel $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{4}{3}$, wie sie dem Übergang eines Lichtstrahls aus Luft in Wasser entspricht, zu gelangen, annehmen müssen, daß ein „Lichtteilchen“ sich in der Luft mit der kleinen Geschwindigkeit c , im Wasser mit der großen Geschwindigkeit C bewege, damit die geometrische Konstruktion und Rechnung die tatsächliche Brechung zum Einfallslot liefere. — Die hier der Theorie zuliebe fingierten Vorgänge lassen sich mehr oder weniger gut physikalisch nachahmen, indem z. B. ein Zwirnrollchen über ein geeignetes Brett rollt, dessen eine Hälfte glatt, die andere rau ist.

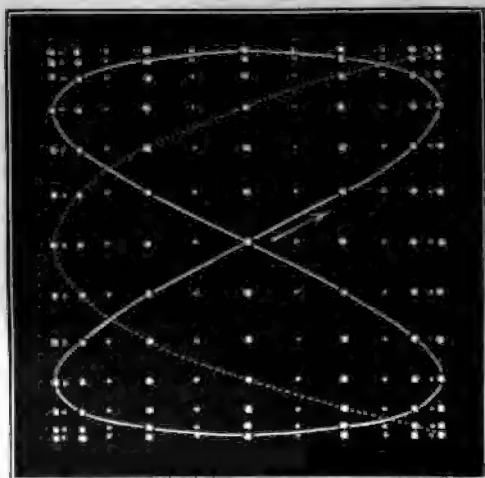
XVI. Schwingungen und Wellenbewegungen.

134. Die Gleichungen der LISSAJOUSCHEN Figuren zu berechnen. § 62.

Anleitung. Erstes Beispiel: Für die 8 förmige Figur (Fig. 184) sei T die Schwingungsdauer nach der wagrechten Richtung (X-Richtung); dann ist die Schwingungs-

dauer nach der lotrechten (Y-) Richtung $2T$; die Amplituden sind in V einander gleich, allgemeiner seien sie a und b . Die Weg-Zeit-Gesetze der Schwingungen lauten dann $x = a \sin \frac{2\pi}{T} t$ und $y = b \sin \frac{2\pi}{2T} t$. Setzt man $\frac{2\pi}{T} t = \varphi$, so ist einerseits $x = a \sin \varphi$ und $\sin \varphi = \frac{x}{a}$, andererseits $y = b \sin \frac{\varphi}{2}$. Hieraus nach einigen Transformationen $y = \frac{b}{\sqrt{2a}} \sqrt{a - x}$ $= \frac{b}{2\sqrt{a}} (\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x})$, wobei die Wurzeln mit Doppelzeichen (freier Kombination) gelten. — Spezialisierungen für $x = 0$ ($y = 0, \pm b$), $x = +a$ ($y = \frac{b}{\sqrt{2}}$) u. s. f. — Zu zeigen, daß sich die 8förmige Figur auch

Fig. 184.



wenn man das arithmetische Mittel bildet aus den Ordinaten der im folgenden zweiten Beispiel behandelten parabolischen Kurve und der zu ihr symmetrischen (von der linken unteren Ecke zur rechten oberen Ecke).

Zweites Beispiel: Die parabolische Figur (in Fig. 184 punktiert) ist das Ergebnis der Schwingungsdauern $1:2$; da es aber hier unregelmäßig ist, die Phase beider Schwingungen nicht ausgehen von der rechten unteren Ecke, also der positiven Lage beider Schwingungen zählen, so ist

$$x = a \cos \frac{2\pi}{T} t = a \cos \varphi, \quad y = b \cos \frac{2\pi}{2T} t = b \cos \frac{\varphi}{2} = b \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{2}}$$

woraus $y = \frac{b}{\sqrt{2a}} \sqrt{a + x}$. — Spezialisierungen für $x = -a$ ($y = 0$), $x = 0$ ($y = \pm \frac{b}{\sqrt{2}}$), $x = a$ ($y = \pm b$) u. s. f. (Daß die Kurve eine geometrische Parabel zweiten Grades ist, ergibt sich, wenn wir sie auf ein System von Transformationsformeln $x = x' - a$, $y' = y$ beziehen, wobei

$y' = \pm \frac{b}{\sqrt{2a}} \sqrt{x'}$, somit der Parameter $p = \frac{b^2}{4a}$.)

Drittes Beispiel: Für die doppelt verschlungene Figur in Fig. 246 (S. 23) entsprechend den Schwingungsdauern $4:5$, wird $x = a \cos 5\omega$ und $y = b \cos 4\omega$. (Hier würde die Elimination von ω schon zu einer verwickelten Gleichung zwischen x und y führen, weshalb es sich empfiehlt, die beiden vorstehenden Gleichungen gesondert zur Charakterisierung der Kurve zu verwenden (ähnlich wie die Doppelgleichung der Zykloide im math. Anh. Nr. 24).)

Auch die sternförmige Figur, wie sie z. B. das Foucaultsche Pendel infolge der allmählich gegen die Erde sich drehenden Schwingungsebene beschreibt, kann man sich ebenfalls hervorgegangen denken aus zwei Sinusschwingungen von etwas verschiedener Schwingungsdauer.

135. Zu begründen, warum in Longitudinalwellen, deren Elongationen dem Gesetz der Sinusschwingungen folgen, stetige Verdichtungen und Verdünnungen ebenfalls nach dem Sinusgesetz mit einer Phasenverschiebung von $\frac{\lambda}{4}$ bzw. $\frac{T}{4}$ eintreten.

Anleitung: Dafs eine solche Verschiebung um $\frac{\lambda}{4}$ besteht, ist besonders auffallend zu ersehen aus Fig. 254 (S. 237), wenn man sie so betrachtet, wie es der Fortpflanzung einer Longitudinalwelle entspricht (d. h. um 90° gegen die gewöhnliche Lage des Buches verdreht): hier rücken nämlich die Punkte überall dort am meisten zusammen bzw. auseinander, wo die Elongation Null ist. — Dafs ferner diese Verdichtungen und Verdünnungen selbst nach dem Sinusgesetz zu- und abnehmen, läfst sich leicht anschaulich machen mittels der kurbelartigen Drähte in dem Nebenapparat zu Machs Wellenmaschine (Fig. 252, S. 235). Wären nämlich diese nicht nach einer Sinuskurve, sondern nach einer aus geraden Stücken bestehenden Zickzacklinie (markiert durch die kleinen Knöpfchen unterhalb der Konkavplättchen) angeordnet, so würden beim Umlegen dieser Drähte in die longitudinale Lage die Dichtigkeiten in der Reihe der Pendelkugeln sich unstetig verändern. Aus Fig. 253a und 253c ist aber unmittelbar ersichtlich, dafs und warum bei umgelegten Sinusordinaten an den Enden und in der Mitte die grössten Dichtigkeitswechsel, aber keine Bewegungen der Pendelkugeln stattfinden, und warum die Dichtigkeitswechsel nicht unstetig, sondern stetig ineinander übergehen. — Rechnerisch ist das Maß der Verdichtungen gegeben durch den Unterschied $y' - y$ der Elongationen zweier benachbarter Punkte, bezogen auf den Unterschied $x' - x$ ihrer Abstände vom Nullpunkt der Punktreihe; also $\frac{y' - y}{x' - x} = \left[a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x'}{\lambda} \right) - a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] : (x' - x)$, welcher Ausdruck für $x' = x$ übergeht in $\frac{y' - y}{x' - x} = -\frac{2\pi}{\lambda} \cdot a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$. Vgl. die Verschiebung der Kurven für Sin und Cos um 90° math. Anh. Nr. 19.

136. Die Gl. transversaler stehender Sinuswellen aufzustellen. § 68.

Anleitung: Nach math. Anh. Nr. 19 ist die Gleichung der allgemeinen Sinuskurve $y = a \sin \frac{x}{b} \dots (1)$, wobei a die Höhe der Sinuskurve und $\frac{\pi}{2} b$ die Basis für den ersten Quadranten darstellt. In einer transversalen stehenden Sinuswelle ist dann a die grösste Elongation, die ein Teilchen überhaupt erfährt. Für den Zeitpunkt $t = \frac{T}{4}$, in dem alle Teilchen gleichzeitig ihre Grenzlagen erreichen, ist die Gleichung der Wellenkurve (in Fig. 185 ausgezogen) $Y = a \sin \frac{\pi x}{\lambda}$, weil an die Stelle von $\frac{\pi}{2} b$ jetzt $\frac{\lambda}{2}$ tritt, so dafs $b = \frac{\lambda}{\pi}$ und $\frac{x}{b} = \frac{\pi x}{\lambda}$ ist. (Gemäß dem Gebrauche, bei stehenden Wellen schon einen Berg oder ein Tal als Wellenlänge

erstens die phoronomische Periodizität des Größer- und und Negativ-) werdens der Elongation jedes Punktes mit der schreitenden Zeit und zweitens die geometrische Periodizität der Abfolge von Wellenberg und Wellentälern längs der Abszisse.

Das Hervorgehen stehender Wellen aus der Interferenz (vgl. Fig. 259, S. 243) spricht sich aus in der identischen Gleichung

$$a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) = 2a \sin 2\pi \frac{t}{T} \cdot \cos 2\pi \frac{x}{\lambda}$$

§ 64.

137. NEWTONS Gleichung $C = \sqrt{e:d} \text{ cm sec}^{-1}$ für Zungengeschwindigkeit von Longitudinalwellen abzuleiten.

Anleitung: In dieser Gleichung bedeutet e den **Elastizitätsmodul** des elastischen Stoffes, durch den sich die Welle fortpflanzt. Ferner d die **Längendichte** des Stoffes, d. i. die beim Querschnitt $q = 1 \text{ mm}^2$ und der Länge $L = 1 \text{ m}$ entfallende Masse des Stoffes. — Denken wir uns ein elastisches Stoffe oder Medium ein Prisma vom Querschnitt $q = 1 \text{ mm}^2$ und der Länge nach abgeteilt in Prismen von je $L \text{ m}$ Länge. Eine Kraft von $p \text{ Dyn}$ an der Stirnfläche eines solchen Prismas ziehen so würde eine Verlängerung oder Verkürzung l eintreten, die gemäß

$$l = k \frac{L}{q} p \text{ für } q = 1 \text{ und } k = \frac{1}{e} \text{ ergibt } l = \frac{1}{e} L p \text{ oder } p = \frac{e}{L} l$$

Gleichung besagt also, eine wie große Kraft angebracht werden muß, um ein Prisma in dem statischen Zustande des Verlängert- oder Verkürzt zu halten, wobei sein anderes Ende als unbeweglich gedacht wird. Lassen wir diese Kraft an dem elastischen Prisma angreifen, so haben wir die Zustände zu verfolgen, die hierdurch im elastischen Medium eintreten (so z. B., indem wir an Jollys Federwaage ein Gewichtchen anhängen, so gleich eine Wellenbewegung eingeleitet wird, die die Spiralfeder und ins Unendliche ginge, wenn die Spiralfeder selbst unendlich lang wäre. Wirklichkeit dagegen an der Aufhängestelle umkehrt und nach unten hin abnimmt und Herlaufen und Bilden stehender Wellen zum angezeigten

innerhalb der Verkürzung (Verlängerung) l liegende Teil des Mediums verdichtet (verdünnt) wird, verschiebt sich sein Schwerpunkt um $\frac{l}{2}$, und die als konstant angenommene Kraft p leistet, hierbei die Arbeit $p \cdot \frac{l}{2} = e \cdot \frac{l}{L} \cdot \frac{l}{2}$. Dieser Arbeit ist die lebendige Kraft $\frac{1}{2} M c^2$ gleich, die die Masse $M = d \cdot L$ empfängt, wobei c die mittlere Geschwindigkeit der beim Verdichten (Verdünnen) verschobenen Teilchen ist. Dieses c ist aber nicht schon die Fortpflanzungsgeschwindigkeit C der Welle selbst; vielmehr gilt $c:C = l:L$, da binnen der nämlichen Zeit, in der die Wellenbewegung um L fortschreitet, die Massenbewegung nur in der Verschiebung um l besteht. Somit $e \cdot \frac{l}{L} \cdot \frac{l}{2} = \frac{1}{2} (d \cdot L) \left(\frac{l}{L} \cdot C \right)^2$, also $C = \sqrt{e:d}$.

Bemerkung: Diese Ableitung gilt für aperiodische wie für periodische Wellen, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist also schon deshalb unabhängig von der Schwingungsdauer und Schwingungszahl (denn bei aperiodischen Wellen sind diese Größen überhaupt gegenstandslos).

Numerisches Beispiel: Für trockene Luft von 0°C . ist $e = 1033,6 \times 981 \neq 10^6$ Dyn; ferner $d = 0,001293 \text{ g cm}^{-3}$, woraus $C \neq 28000 \text{ cm} = 280 \text{ m}$. Es ist also dieser von NEWTON gefundene theoretische Wert im Vergleich zum experimentell gefundenen 333 im Verhältnis $1:1,19 \dots \neq 1:\sqrt{1,41} \dots$, welche Nichtübereinstimmung von LAPLACE als Folge der die mechanischen Verdichtungen und Verdünnungen begleitenden thermischen Veränderungen erklärt wurde (§ 92, S. 313.)

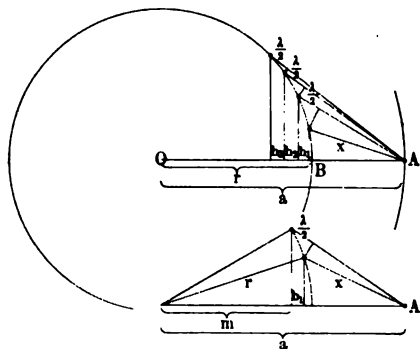
138. Durch Rechnung zu zeigen, daß sich bei der Ausbreitung § 66. einer Kugelwelle die sekundären Wellen durch Interferenz insoweit aufheben, als es HUYGENS' Prinzip entspricht.

Anleitung: Das primäre Erregungszentrum O habe eine Kugelwelle vom Radius $r \text{ cm}$ ausgesendet; jeder ihrer Punkte werde ein sekundäres Erregungszentrum und die von ihnen ausgehenden sekundären Kugelwellen interferieren an jeder Stelle des äußeren Raumes, z. B. bei einem Punkte A für $OA = a \text{ cm}$. FRESNEL hat nun gezeigt, daß das Ergebnis dieser Interferenz ein solches ist, als ob sich nur von der Kugelkappe der primären Welle bei B die sekundäre Erregung (also gleichsam nur die primäre Welle direkt) fortpflanze, wogegen sich die Wirkungen aller Kugelzonen, deren Ränder um je $\frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, 3\frac{\lambda}{2} \dots$

weiter von A abliegen, gegenseitig aufheben, indem je eine Zone das arithmetische Mittel der beiden ihr anliegenden ist. Dieser geometrische Kernsatz von FRESNELS höheren Rechnungen läßt sich aber elementar so beweisen:

In Fig. 186 ist $x^2 = r^2 + a^2 - 2a(m + h_1)$ und $\left(x + \frac{\lambda}{2}\right)^2 = r^2 + a^2 - 2am$, woraus durch Subtraktion $\lambda x + \frac{\lambda^2}{4} = 2ah_1 \dots (1)$. Ersetzen wir hier x durch

Fig. 186.



$x + \frac{\lambda}{2}$ und dann durch $x + 2\frac{\lambda}{2}$, und nennen wir die entsprechenden Höhen Zonen h_1 und h_2 , so wird $\lambda(x + \frac{\lambda}{2}) + \frac{\lambda^2}{4} = 2ah_1$ und $\lambda(x + 2\frac{\lambda}{2}) + \frac{\lambda^2}{4} = 2ah_2$, woraus sogleich folgt $h_2 = \frac{h_1 + h_2}{2}$ oder $h_2 - h_1 = h_2 - h_1$.

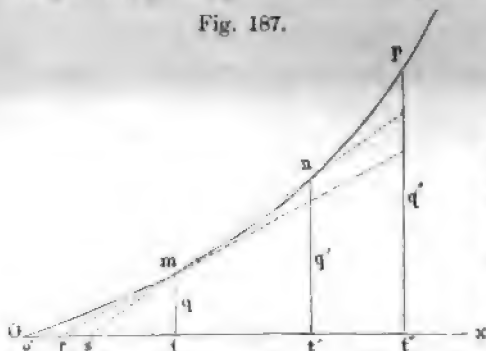
Somit: Wenn wir (in denselben Annäherungen wie FRESNEL) annehmen, die mittlere der drei Zonen von der Höhe h_2 und also der Fläche $\varepsilon_2 = 2$ vom Punkte A sekundäre Wellen entsendet habe, so werden die Zonen $\varepsilon_1 = 2$ und $\varepsilon_3 = 2r \approx h_2$ Wellen mit einem Gangunterschied von $\frac{\lambda}{2}$ entsenden, und Ergebnis der Interferenz wird, wenn wir von den kleinen Unterschieden der stände verschiedener Punkte der Zonen von A absehen und die Wirkung proportional der schwingenden Masse, also auch proportional den Zonenflächen setzen, für je eine Zone und ihre beiden Nachbarn gleich Null sein.

XVII. Wärmelehre.

§ 72. 139. Allgemeine Maßformeln für die mittlere spezifische Wärme und die wahre spezifische Wärme aufzustellen.

Anleitung: Wäre für je einen bestimmten Stoff die spezifische Wärme in Temperaturregionen genau konstant, so ließe sie sich darstellen durch eine

Fig. 187.



Geraden, in der längs der Abscissenachse OX (Fig. 187) die Temperaturen $0t$ aufgetragen sind, wo die Ordinaten q die Wärmemengen bedeuten. Da aber Erwärmung von t° auf t'° C. nicht genau, sondern nur annähernd $m(t' - t)$ cal. erforderlich sind, ist die graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen Temperaturgrad und Wärmemenge bei den meisten Stoffen eine von der Geraden mehr oder weniger abweichende Kurve. Dabei bildet die

$\frac{q' - q}{t' - t}$ ein Maß der mittleren spezifischen Wärme zwischen t und t' ; und Grenzwert dieses Bruches (vgl. math. Anh. Nr. 13) für $t' = t$ ist das Maß der wahren spezifischen Wärme bei t° C. — Da übrigens die Abweichungen von der Geraden fast immer nur sehr klein sind, so braucht das Intervall t bis t' nicht immer verschwindend klein genommen zu werden, sondern meist wird $t' = (t + 1)^\circ$ C. gewählt, und es ist dann $\frac{q' - q}{(t + 1) - t} = q' - q$ das Maß für die spezifische Wärme bei der Temperatur t° C., deren Maßzahl gleich ist der Zahl von Grammcalthorien, die erforderlich sind, um 1 g des Stoffes von t° ($t + 1)^\circ$ C. zu erwärmen.

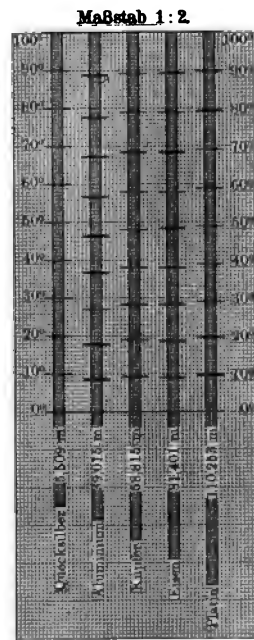
§ 73. 140. Durch Zeichnung ersichtlich zu machen, daß und inwieweit die Ausdehnung verschiedener Stoffe in verschiedenen

Temperaturregionen nicht gleichen Schritt hält mit der Ausdehnung des Quecksilbers.

Anleitung: Durch direkte Beobachtung des Verhaltens verschiedener Stoffe bei verschiedenen Temperaturen hat sich für sie ergeben, daß an Stelle der Gleichung für die lineare (und entsprechend auch für die kubische) Ausdehnung $l = l_0 (1 + \alpha t)$ in besserer Annäherung gesetzt werden kann $l' = l_0 (1 + \alpha t + \beta t^2)$. Nach MATTHIESSEN haben die Koeffizienten α und β die in der Tabelle angegebenen

Fig. 188.

	Quecksilber	$\alpha = 2221 \cdot 10^{-8}$ $\beta = 342 \cdot 10^{-10}$	$\alpha = 1596 \cdot 10^{-8}$ $\beta = 102,5 \cdot 10^{-10}$	$\alpha = 1136 \cdot 10^{-8}$ $\beta = 92,5 \cdot 10^{-10}$	$\alpha = 868 \cdot 10^{-8}$ $\beta = 39 \cdot 10^{-10}$
100°	100	100,0	100,0	100,0	100,0
0°	90	88,8	89,4	89,3	89,6
80°	80	77,9	79,0	78,8	79,3
70°	70	67,3	68,7	68,4	69,1
60°	60	56,9	58,6	58,2	59,0
50°	50	46,7	48,5	48,1	48,9
40°	40	36,8	38,4	38,2	39,0
30°	30	27,2	28,6	28,4	29,1
20°	20	17,9	19,0	18,8	19,3
10°	10	8,8	9,5	9,3	9,6
0°	0	0	0	0	0
	Quecksilber 5,509 m	Aluminium 39,015 m	Kupfer 58,815 m	Eisen 81,401 m	Platin 110,253 m



Werte, wonach dann wieder die Ausdehnungen für 10 zu 10° berechnet und in beistehender Fig. 188 miteinander auf folgende Weise anschaulich vergleichbar gemacht worden sind: Für Quecksilber entsprechen einer Temperaturzunahme von je 10° Verlängerungen von je 10 mm; dies geschähe (abgesehen von der Ausdehnung des Glases überhaupt, also auch der verschiedenen Glassorten von Quecksilberthermometern) an einer 5,509 m langen Quecksilbersäule. Ebenso ist dann für die angeführten übrigen Stoffe diejenige Länge einer Stange (z. B. bei Aluminium 39,015 m) bei 0° C. angenommen, die sich bis 100° C. um 100 mm verlängert.

141. Numerische Durchführung eines Versuches mit dem Wasser- § 73. dilatometer (Fig. 283, S. 266).

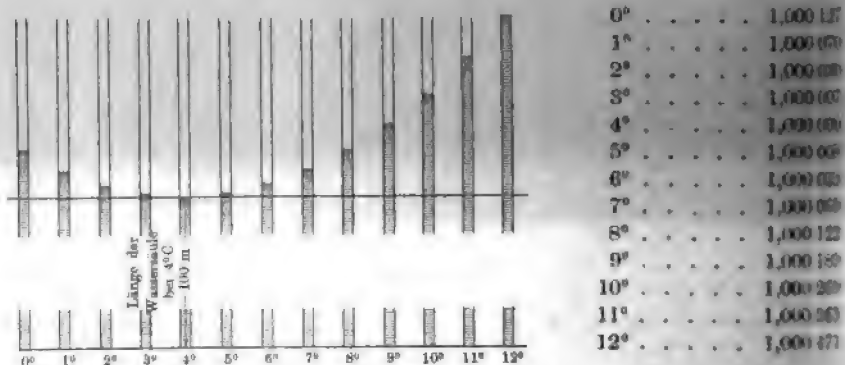
Anleitung: Eine Hohlkugel von etwa 6 cm Durchmesser geht in eine dickwandige Kapillarröhre von 24 cm Länge über und ist mit einem seitlichen Tubulus versehen, durch den ein Thermometer bis zur Mitte der Kugel eingeführt ist. Die Kugel und Röhre sind mit destilliertem, luftfreiem Wasser gefüllt, über dem sich ein Faden farbiger Flüssigkeit als Marke befindet. Überdies aber ist in der

Kugel soviel Quecksilber beigegeben, daß die Ausdehnung des Glases kompensiert wird (nach der Gleichung $x : V = x_1 : x$, wo x das Volumen des Quecksilbers, V das Volumen des Glases, x_1 und x die kubischen Ausdehnungskoeffizienten von Quecksilber und Glas (von 0° bis 100°) sind, also $x \neq \frac{1}{30}$, $x_1 \neq \frac{1}{100}$, also $x \neq \frac{1}{3} V$). — Es war $V = 114 \text{ cm}^3$ bei 0°, die Weite der Röhre $0,038 \text{ cm}^3$ per 1 cm Länge. Bei Weglassung der Quecksilberkompensation sinkt die Marke in der Röhre um 6 cm bei Erwärmung von 0° bis 4°. Da hierbei das Glas sich um $0,000\,024 \cdot 114,4 \text{ cm}^3 = 0,0109 \text{ cm}^3$ erweitert, so hätte die Flüssigkeit nur um 3 cm zurückgehen dürfen, die übrigen 3 cm entfallen also auf die Zusammensziehung des Wassers zwischen 0° und 4° C.

- § 78. 142. Durch Zeichnung die verhältnismäßigen Größen der Volumsänderungen des Wassers in der Nähe des Dichtemaximums ersichtlich zu machen.

Anleitung: Eine Wassersäule, die bei 4° C. 1 m lang ist, ist z. B. bei 0° 1,000 127, bei 8° 1,000 122 m lang (von der Ausdehnung der Röhrenwandungen abgesehen). Daher verlängert sich z. B. eine Säule, die bei 4° C. 100 m lang ist, bei 8° um 1,22 cm. Diesen und den übrigen Zahlen der Tafel entspricht dann Fig. 189.

Fig. 189.



Für die unverhältnismäßig größere Ausdehnung des Wassers beim Gefrieren vgl. Fig. 284, S. 266.

- § 79. 143. Numerische Durchführung eines Versuches mit Melde's Röhre für Boyle-Mariottes Gesetz.

Anleitung: Durch eine Quecksilbersäule von der Länge l (die also auch = Maß des Gewichtes p gibt) wird in einem kalibrierten Barometerrohr eine Luftsäule eingeschlossen, deren Länge von L_0 bis L_n zunimmt, wenn die Röhre von der anfänglichen Lage mit der Mündung nach oben allmählich mit der Mündung nach unten gewendet wird. Es ergaben sich z. B. bei $l = 24,5 \text{ cm}$ folgende Werte

Öffnung nach oben . .	$P = b + p = 99,7 \text{ cm}$	$L = 10,8 \text{ cm}$	$L \cdot P = 1077$
Röhre wagerecht . . .	$b = 75,2 \text{ cm}$	$= 14,3 \text{ cm}$	$= 1075$
Öffnung nach unten . .	$b - p = 50,7 \text{ cm}$	$= 21,3 \text{ cm}$	$= 1069$

- § 74. 144. Die graphische Darstellung von Boyle-Gay-Lussacs Gesetz (Figg. 190, 191) zu erläutern.

Anleitung: Da dieses Gesetz eine Beziehung zwischen den drei veränderlichen Größen Druck, Volumen und Temperatur enthält, so ist seine graphische

Fig. 190.

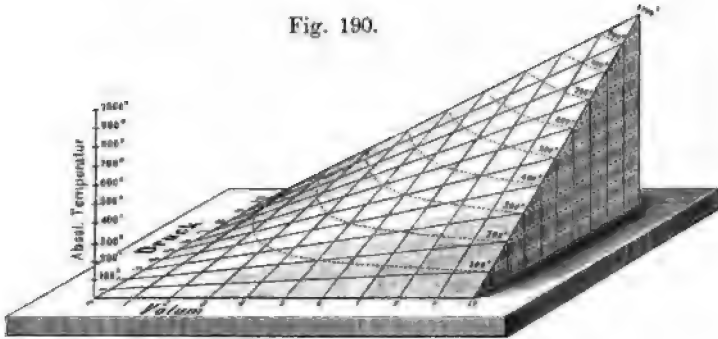
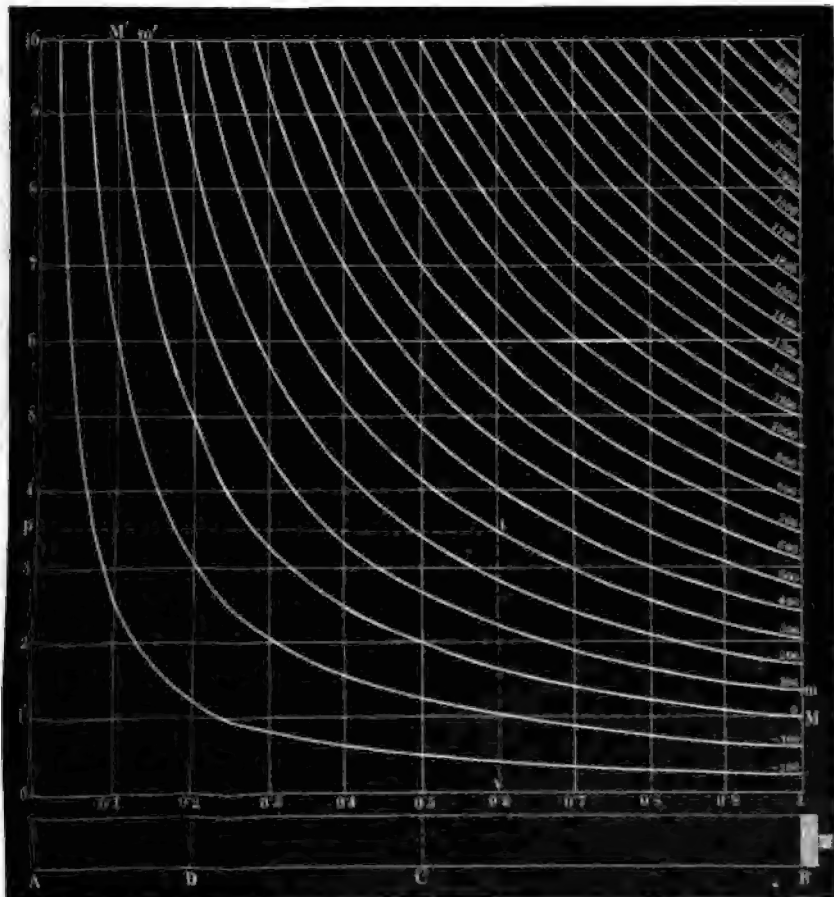


Fig. 191.



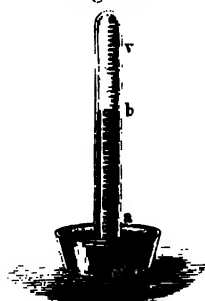
von 1,293 kg bei 0° C. und 76 cm Quecksilberdruck entsprechend hat, so ist $R = \frac{10\,333}{1,293 \cdot 272,5} = 29,3$; wobei $T = 272,5^\circ$ abs. Temp.

Zu b): Das Normalgewicht eines Gases (§§ 46, 211) läßt sich leicht der Gasmenge auffassen, die denselben Raum v bei gleicher Temperatur T einnimmt, wie 1 g des Normalgases. Aus sich für $v = 22\,400\text{ cm}^3$, $p = 1013200\text{ Dyn}$ und $T = 273^\circ$ der Wert

§ 74. **146. Ein Zahlenbeispiel für die Reduktion der auf den Normalzustand durchzuführen.**

Anleitung: Es sei von einer gegebenen Gasmenge das Volumen $V_{p,t}$ bei dem Drucke p und der Temperatur t gegeben. Das Volumen $V_{n,0}$ derselben Gasmenge bei dem Normaldrucke von 76 cm und der Temperatur 0° C. ergibt sich aus der Gleichung $\frac{V_{p,t} \cdot p}{272,5 + t} = \frac{V_{n,0} \cdot 760}{272,5}$.

Fig. 192.



Es seien z. B. in einer kubisierten Gasmenge über Quecksilber aufgefaßt. Es sei $t = 15^\circ$, die Höhe der Quecksilbersäule als Barometerstand sei an einer Messingskala abgelesen, so daß der reduzierte Barometerstand beträgt (LA 119). Mit Rücksicht auf den Koeffizienten des Quecksilbers 0,000 181 entspricht die abgelesene Quecksilberhöhe $ab = 200,6\text{ mm}$.

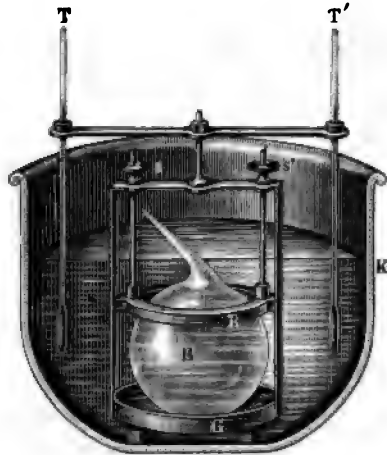
Quecksilbersäule $\frac{200,6}{1 + 0,000\,181 \times 15} = 200,0$
steht daher unter dem Druck $760 - 200,0 = 560,0$
Das reduzierte Gasvolumen ist daher $\frac{25,2}{560,0}$

gebrochen und der mit Wasser gefüllte Ballon gewogen, so zeigen Ballon (einschließlich der Spitze) und Wasser M g. Endlich zeige der vom Wasser entleerte und mit Luft gefüllte Ballon m g. — Ist die Dampfmenge im Kolben D , die Luftmenge L , so ist $D - L = m_1 - m$. Daher hätte die **Dampfdichte** $d = \frac{D}{L}$

den Wert $\frac{m_1 - m + L}{L} = \frac{m_1 - m}{L} + 1$, wenn Dampf und Luft bei $t_1^\circ \text{C.}$ und b_1 mm gemessen worden wären. Ist hierbei die Dichte der Luft λ_1 , so wäre $L = \lambda_1 (M - m)$, also $d = \frac{m_1 - m}{M - m} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + 1$. Da aber der Dampf bei $t^\circ \text{C.}$ und b mm eingeschlossen wurde, so ist schliesslich

$$d = \left[\frac{m_1 - m}{M - m} \cdot \frac{1}{\lambda_1} + 1 \right] \frac{b_1}{b} \cdot \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}.$$

Fig. 193.



148. Aus der Dampfdichte des Wassers ($0,622 \neq \frac{5}{8}$) und der § 77. relativen Dichte der Luft in Bezug auf Wasser (= 0,001 293) die Dichte $\frac{1}{1700}$ des Wasserdampfes von 100°C. in Bezug auf Wasser von 0°C. abzuleiten.

Anleitung: $0,001\,293 \times \frac{5}{8} \times \frac{273}{373}$. — Genauer: $\frac{0,001\,293 \cdot 0,622}{1,367} = \frac{1}{1699,7}$.

149. Bei den Versuchen über das Sieden des Wassers unter dem Rezipienten der Verdünnungsluftpumpe oder im umgekehrten Kochkolben u. dgl. ist es leicht, das Wasser auch noch bei 40°C. , 30°C. zum Wallen zu bringen. Würde dies auch noch bei 0° gelingen?

Anleitung: Ja; aber da die Spannung des Wasserdampfes hier nur 4 mm Quecksilberdruck beträgt, könnten sich Dampfblasen in einer Tiefe von $13,6 \times 4 \text{ mm} = 54,4 \text{ mm}$ unter dem Wasserspiegel jedenfalls nicht mehr entwickeln. — Beim „Geysirphänomen“ wird das Wasser im tiefen Schacht bis weit über 100°C. erhitzt.

150. Die Begriffe „kritischer Punkt“ („kritische Temperatur“, § 77. „kritischer Druck“, „kritisches Volumen“) graphisch zu erläutern.

Anleitung: In Fig. 194 stellt die Abszisse oc das Volumen von Flüssigkeit und Gas zusammengekommen, die Ordinaten die je einem Volumen entsprechende Spannkraft dar. Wird also ein nicht gesättigter Dampf von b her bei einer bestimmten, noch nicht zu hohen Temperatur zusammengedrückt, so wächst (gemäß der untersten ausgezogenen Kurve) anfangs die Spannkraft, dann tritt Kondensation ein, weshalb bei weiterer Volumenverkleinerung die Spannkraft des nun gesättigten Dampfes sich nicht mehr ändert. Ist endlich aller Dampf in Flüssigkeit übergegangen und wird auch diese noch zusammengepresst, so steigt

Darstellung nicht mehr eine Kurve, sondern eine Fläche. Dabei stellt die Gerade (10 bis 1000°), die die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks an der rechten Stirnfläche bildet, die Proportion der absoluten Temperatur und Druck dar, also das Gay-Lussac'sche Gesetz. Dagegen stellen die auf die horizontale Fläche projiziert gezeichneten Hyperbeln die Beziehung zwischen Volumen und Druck (Mariotte'sche Gesetz) für sich; vgl. Fig. 191 mit Fig. 190 und 192.

- § 74. 145. In der Gasgleichung $p v = R T$ die Konstante R auszuwerten a) für Luft, b) für das Normalgewicht eines Gases.

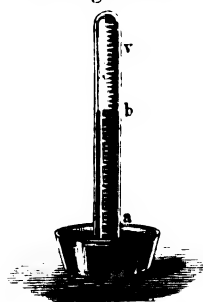
Anleitung. Zu a): Da 1 m³ Luft die Masse von 1,293 kg bei 0° C. und 76 cm Quecksilberdruck entspricht, so ist $R = \frac{10333}{1,293 \cdot 272,5} = 29,3$; wobei $T = 272,5^\circ$ abs.

Zu b): Das Normalgewicht eines Gases (§§ 46, 211) lässt sich leicht der Gasmenge auffassen, die denselben Raum v bei gleicher Temperatur T einnimmt, wie 1 g des Normalgases. Es sei für $v = 22\,400$ cm³, $p = 1013200$ Dyn und $T = 273^\circ$ der

- § 74. 146. Ein Zahlenbeispiel für die Reduktion auf den Normalzustand durchzuführen.

Anleitung: Es sei von einer gegebenen Gasmenge d der Druck p und der Temperatur t gegeben. Das Volumen V_a beim Normaldruck von 76 cm und der Temperatur 0° C. ist durch die Gleichung $\frac{V_{p,t} \cdot p}{272,5 + t} = \frac{V_{n,0} \cdot 760}{272,5}$ gegeben.

Fig. 192.



Es seien z. B. in einer kubischen Gasflasche über Quecksilber a) die Temperatur $t = 15^\circ$, die Höhe der Quecksilbersäule als Barometerstand sei an einer Messung abgelesen, so dass der reduzierte Barometerstand beträgt (LA 119). Mit Rücksicht auf den Koeffizienten des Quecksilbers 0,000181 pro Grad Celsius lesen die Quecksilbersäule $ab = 200,6$ mm.

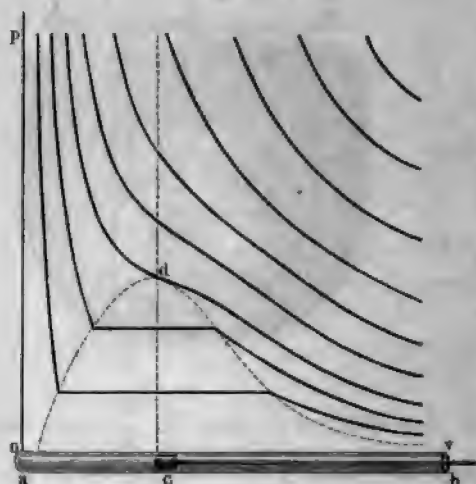
$$\begin{aligned} \text{Quecksilbersäule} &= \frac{200,6}{1 + 0,000181 \times 15} = 199,2 \\ \text{steht daher unter dem Druck} &= 730,62 \text{ mm} \\ \text{Das reduzierte Gasvolumen ist daher} &= \frac{25,2}{1 + 0,00367 \times 15} = 23,56 \end{aligned}$$

- § 77. 147. Die Formel zur Bestimmung von Dampfdruck.

Anleitung: Im Glasballon Fig. 193 sei die Flüssigkeit zu bestimmen ist, bis zum völligen Erfüllen des Ballons mit der heißen Bad erhitzt, worauf die Spitze zugeschmolzen wird; die Temperatur t° C. und der Barometerstand b mm. Durch Wägen der Temperatur von t_1° C. und dem Barometerstande b_1 mm zeigt zusammen die Masse m_1 g; wird dann die Spitze unter Wasser

ihre Spannung sehr rasch an. — Werden die Veränderungen gleicher Art höherer Temperatur vorgenommen, so ist die Spannung des gesättigten Dampfes größer, aber sie bleibt konstant (entsprechend der nächst höheren ausgehenden Geraden) nur für ein kleineres Volumenintervall. Bei noch höherer Temperatur

Fig. 194.



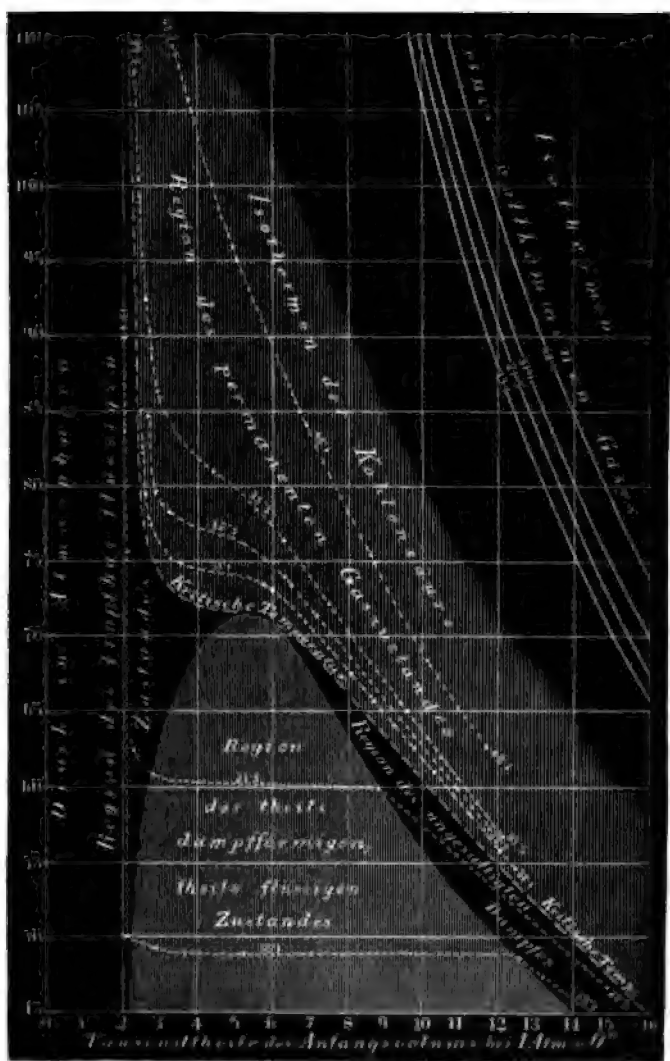
so zeigt es eine Spannung von 45 at; beim Volumen von $12,2 \cdot 10^{-3}$ Spannung von 49 at, und bei dieser beginnt die Kondensation; und da mit das Kohlendioxyd ein gesättigter Dampf geworden und das Maximum der Spannkraft für diese Temperatur erreicht hat, so entspricht einer Verkleinerung des Volumens keine Steigerung des äußeren und inneren Druckes. Ist alles Gas in flüssiges Kohlendioxyd übergegangen, so hat dieses nur $2 \cdot 10^{-3}$ des Anfangsvolumens, und eine weitere Zusammendrückung der Flüssigkeit erfordert nun wie bei allen Flüssigkeiten viel größere Kräfte. — Bei einer niedrigeren Temperatur, z. B. $21,5^\circ$, beginnt die Verflüssigung, wenn $8,7 \cdot 10^{-3}$ des Anfangsvolumens und 60 at erreicht sind. Bei $31,0^\circ$ C. entspricht einer Steigerung Druckes bis 73 at Volumenverminderung auf $6 \cdot 10^{-3}$. Von da ab nimmt das Volumen rasch ab, ohne daß sich der Druck viel über 73 at mehr steigern kann (dies also wieder entsprechend dem Konstantwerden der Spannung beim Sättigungspunkt eines Dampfes), aber eine Kondensation des Gases findet nicht statt. Es liegt also die Temperatur von $31,1^\circ$ schon über der kritischen Temperatur des Kohlendioxyds. Diese selbst gibt ANDREWS mit $30,92^\circ$ C. und ihr entsprechenden kritischen Druck mit 77 at (das kritische Volumen $6,6 \cdot 10^{-3}$) an; d. h. bei $30,92^\circ$ C. läßt sich auch durch noch so großen äußeren Druck die Spannkraft des Kohlendioxyds nicht über 77 at steigern, ohne daß bei diesem überhaupt zu erreichenden Maximum der Spannkraft wirkliche Kondensation einträte.

§ 83. 151. Welche Beziehung stellt die Grundgleichung $p v = \frac{M u^2}{3}$

kinetischen Gastheorie zwischen der Mechanik der Molekularwirkung und der kinetischen Wärmehypothese her? (Vgl. LA 132.)

Antwort: In LA 132 wurde die Gleichung $pv = \frac{1}{2}Mu^2$ aus lauter rein mechanischen Annahmen und mechanischen Gesetzen abgeleitet; sie ist also insoweit selbst eine rein mechanische. Da nun aber das mechanische Verhalten des Gases, nämlich seine mechanische Spannung, ganz ebenso wie durch

Fig. 195.



2 mechanischen Vorgang der Volumverkleinerung auch durch den thermischen Vorgang der Temperaturerhöhung bewirkt werden kann, so ist es eine logisch gerechtfertigte Hypothese, auch jene Veränderung des thermischen Zustandes selbst in mechanischen Veränderungen des Gases allein begründet zu denken. Und

weil nach der Hypothese des dynamischen Gleichgewichtes die vergrößerte mechanische Spannung des Gases durch nichts anderes als durch die lebendige Kraft der Gasteilchen erklärt werden soll, so führt die Verfolgung des hypothetischen Gedankens dazu, auch den thermischen Zustand, die Temperatur des Gases, aus der lebendigen Kraft der Gasteilchen zu erklären.

Hätten alle Teilchen dieselbe Geschwindigkeit c , so würde $\frac{mc^2}{2}$ aus der Temperatur des Gases bilden; und zwar der absoluten Temperatur dem Grenzwert $c = 0$ die mechanische Spannung $p = 0$ entspräche einem fiktiven Zustande der Spannung 0 die absolute Temperatur des Gases berechnet würde. — In Wahrheit verlangt übrigens die Hypothese des dynamischen Gleichgewichtes keineswegs, daß alle Gasteilchen die gleiche Geschwindigkeit haben; und um daher die Hypothese nicht mit einer entbehrlichen, also unnötigen Teilannahme zu belasten, hat statt c ein Mittelwert u der Geschwindigkeiten aller Teilchen einzutreten, und es bildet dann $\frac{mu^2}{2}$ das Maß der lebendigen Kraft der Gasteilchen.

Temperatur des Gases. In Gleichungen: Da nach der erfahrungsmäßigen Zustandsgleichung $pv = RT$, so ist nach der kinetischen Hypothese $RT = \frac{1}{3}pv$.

$$T = \frac{Mu^2}{3R} = \frac{2}{3R} \cdot \frac{Mu^2}{2} = \frac{2N}{3R} \cdot \frac{mu^2}{2}.$$

Sowie die Grundgleichung das rein mechanische MARIOTTESCHE Gesetz $pv = \text{Konst}$ enthält, so auch das rein thermische GAY-LUSSACSCHE Gesetz $p/T = \text{Konst}$. Bleibt für eine Gasmenge nebst M auch der Druck p konstant, so gelten für die mittleren Geschwindigkeiten u, u' und entsprechend für die absoluten Temperaturen T, T' wegen $v = \frac{Mu^2}{3p}$, $v' = \frac{Mu'^2}{3p}$ die Beziehungen

$$v:v' = u^2:u'^2 = T:T' = (1 + \alpha t):(1 + \alpha t').$$

§ 209. 152. Aus der Grundgleichung der kinetischen Gastheorie die Zustandsgleichung für **Avogadros Hypothese** abzuleiten.

Anleitung: Es seien für zwei Gase $p_1 v_1 = \frac{1}{3} n_1 m_1 u_1^2$ und $p_2 v_2 = \frac{1}{3} n_2 m_2 u_2^2$. Für gleiches Volumen zweier Gase bei gleichem Druck ist $p_1 = p_2$ und haben die Gase überdies gleiche Temperatur und bildet (gemäß der LA 151) $\frac{mu^2}{2}$ als mittlere lebendige Kraft je eines Gasmoleküls ein Maß der absoluten Temperatur des Gases, so ist auch $m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2$, woraus da $n_1 = n_2$; d. h. alle Gase enthalten im gleichen Volumen bei gleichem Druck gleichviel Moleküle.

§ 83. 153. VAN DER WAALS' Zustandsgleichung der wirklichen Gase

$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$ zu erläutern.

Anleitung: Das Boyle-(Mariotte)-Gay-Lussac-(Charles-)sche Gesetz $p/T = \text{Konst}$ (kurz: „die Gasgleichung“, vollständiger: die Gleichung für ideale Gase) für $T = 0$, d. h. für $t = -273^\circ \text{C.}$, ergeben $p/T = 0$, so daß entweder $p = 0$ werden müßte, was aus den Gründen des § 74 beides höchstens in erster Annäherung eintreten könnte. — Aber auch abgesehen von diesen Abweichungen bei der nie zu erreichenden Temperatur $T = 0$ verlangt



3 durch REGNAULT gefundenen Abweichungen der wirklichen Gase von dem erhalten idealer Gase, daß an der einfachen Gasgleichung $p v = R T$ Korrekturen an jeder angebracht werden. Es ist nämlich für wachsende p ($p' > p$) bei Wasserstoff $p' v' > p v$, bei allen anderen Gasen $p' v' < p v$. — Dieses Verhalten erklärt sich für die kinetische Gastheorie am einfachsten durch die Annahme, daß die Molekeln schon des Wasserstoffs einen gegen die Größe des Gefäßinnern nicht verschwindend kleinen Raum einnehmen; denn dann wird die Zahl der aneinander und somit auch an die Wand (den verschiebbaren Kolben) stoßenden Molekeln im kleineren Raum verhältnismäßig größer, als bei verschwindend kleinen Molekeln, und damit auch der Gasdruck größer. Bei anderen Gasen, z. B. für $p' = 2p$ nun $v' < \frac{v}{2}$, wo also die stoßenden Molekeln eine kleinere

Wirkung zustande bringen, als die einfachsten Annahmen der kinetischen Gastheorie voraussetzen lassen, erklärt sich dies am leichtesten durch Annahme der Bewegung der Teilchen teilweise hemmenden Kraft, einer Kohäsion innerhalb des Gases, deren Wirkung JOULE auch experimentell konstatiert hat.

Indem VAN DER WAALS diese beiden Umstände berücksichtigte, brachte er dem Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetz zwei Veränderungen an: 1. Er setzt den beobachteten Druck aus dem Druck der stoßenden Molekeln und einer Kraft zusammen, die zu diesem Druck noch hinzukommen müßte, damit der das Mariottesche Gesetz erfüllende Druck da sei; die hinzuzufügende Kraft (Kohäsion) für jedes Teilchen desto größer, je mehr andere Teilchen im gegebenen Raum auf dasselbe Teilchen einwirken, also der Gasdichte proportional, und die Gesamtkraft ist proportional der Anzahl Teilchen, somit noch einmal der Gasdichte einfach direkt, die ganze hinzuzufügende Kraft also dem Quadrate der Gasdichte direkt, dem Quadrate des Volumens verkehrt proportional; statt p kommt also $(p + \frac{a}{v^2})$. — 2. Das Volumen, welches auch bei einem noch so großen Druck nicht Null werden, sondern nur einen kleinstmöglichen Wert erhalten soll, werde $(v - b)$. Durch diese beiden Zusatzglieder wurde vortreffliche Übereinstimmung mit den besten Beobachtungen REGNAULTS und anderer über die Abweichungen der wirklichen Gase von dem mechanischen und aerothermischen Verhalten der idealen Gase erzielt.

154. Die Größe der Moleküle eines Gases (Dampfes) zu bestimmen aus der mechanischen oder kalorischen Arbeit, die zum Zerstreuen einer Flüssigkeit, entgegen den Kapillarkräften, erforderlich ist. (Vgl. LA 128.) §§ 57, 58.

Anleitung: Nach WILLIAM THOMSON erklärt sich der Wärmeverbrauch beim Verdampfen einer Flüssigkeit daraus, daß diese in äußerst feine Tröpfchen überführt wird und daher zur Vergrößerung der Gesamtoberfläche Arbeit entgegen den Kapillarkräften erforderlich ist. — Nach GUSTAV JÄGER wird auch die beständigen Stöße, die die als Tröpfchen gedachten Moleküle eines Gases oder Dampfes auf die Gefäßwände und gegeneinander ausüben, eine derartige Zerteilung der ganzen Stoffmenge hervorgebracht, daß schließlich ein stationärer Zustand eintritt; und zwar dies dann, wenn die Arbeit, die zum letzten Zerstreuen der Moleküle notwendig war, ihrer lebendigen Kraft gleich ist. — Nun wurde in LA 128 jene Arbeit für das Zerspalten einer Kugel von der Masse $2m$ in zwei gleiche Kugeln durch die Kapillaritätskonstante α und den Radius ρ je einer der kleinen Kugeln ausgedrückt. Die lebendige Kraft der großen Kugel

ist, dass auch jedem Molekül als einem Flüssigkeitskügelchen die der Flüssigkeit im ganzen zukomme, so ist $m = \frac{4\pi}{3} \rho^3 \cdot d$. Setzt von m in die obige Arbeitsgleichung ein, so ergibt sich für $\rho = 3 \left(2 - \sqrt[3]{4}\right) \cdot \frac{\alpha}{u^2 d} \approx 1,24 \cdot \frac{\alpha}{u^2 d}$. Es ergaben sich so für W_s und $d = 1$ der Halbmesser eines Wasserdampfmoleküls $25 \cdot 10^{-8}$ Schwefelwasserstoff aus $\alpha = 33,84$ und $d = 1,293$ der Halbmesser. Diese Zahlen für die Grösse der Moleküle der beiden (sowie d anderer) Gase stimmen sehr gut mit den aus ganz anderen (etwa anders unabhängigen) Methoden gefundenen überein.

XVIII. Schall.

- § 86. 155. Aus der absoluten Schwingungszahl des $a^1 =$ absoluten Schwingungszahlen beliebiger anderer Töne f schwebend temperierte Stimmung zu berechnen.

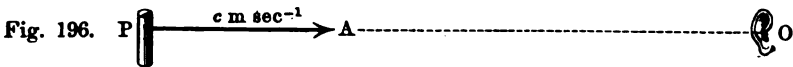
Anleitung: Da in dieser (z. B. in den modernen Klavieren) Stimmung das Intervall einer Oktav in 12 gleiche Tonschritte abgeteilt, einer einem Halbton entspricht, so ist die relative Schwingungszahl $\sqrt[12]{2} = 1,05946$, zweier Halbtöne $\left(\sqrt[12]{2}\right)^2 = 1,12246$, dreier $\left(\sqrt[12]{2}\right)^3 = 1,18921$ u. s. f. $\left[1,25992, 1,33484, 1,41421 = \left(\sqrt[12]{2}\right)^4 = \sqrt[6]{2}\right]$ für z. B. $c - f$, $1,49831 \approx$ für $\frac{3}{2}$ die Quint; $1,58740, 1,68179$ für d $1,88775, 2,00000 = 2$ für die Oktav]. — Aus diesen relativen Schwingungszahlen für eine beliebige Durtonleiter ergeben sich die absoluten Schwingungszahlen der C-Durtonleiter und ihre Halbtöne dadurch, dass hier a^1 die absolute Schwingungszahl für a^1 — h^1 $435 \times 1,05946 = 460,865$ für $h^1 = 435 \times 1,1$

Anleitung: Da in der Gleichung $C = \sqrt{e:d}$ (LA 137) $e = p$ die Spannung per Querschnittseinheit, die Dichte d die Masse der Längeneinheit per Querschnittseinheit bedeutet, so ist $C = \sqrt{p:d}$. Ferner ist $C = \frac{2L}{T} = 2L \cdot n$, woraus $n = \frac{1}{2L} \cdot C$ (denn das Andauern stehender Schwingungen kann daraus erklärt werden, daß ein Impuls, der an dem einen Ende der Saite hervorgerufen wurde, sich wiederholt, so oft die fortschreitende Welle die Saitenlänge hin und zurück mit der Geschwindigkeit C durchlaufen hat). Es ist also $n = \frac{1}{2L} \cdot \sqrt{\frac{p}{d}}$.

157. Dopplers Prinzip für Schall- und Lichtwellen zu erläutern. §§ 91, 114, 18

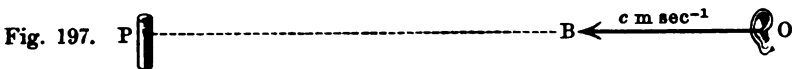
Anleitung: Ist das Ohr (wie in der Regel stillschweigend vorausgesetzt) in Bezug auf einen Tonerreger von der Schwingungszahl n in Ruhe, so langen die Schallwellen in derselben Zeitabfolge (Schwingungsdauer $T = \frac{1}{n}$) beim Ohre an, wie sie von der Schallquelle entsendet wurden. Haben dagegen Ohr und Schallquelle in Bezug aufeinander eine relative Geschwindigkeit, so ist die Abfolge des Eintreffens der Schallwellen im Ohr bei Annäherung eine raschere, bei Entfernung eine langsamere: es wird also ein höherer, bzw. ein tieferer Ton gehört, als ihn die in relativer Ruhe zum Ohre befindliche Schallquelle erregt. — Merkwürdigerweise ist es dabei nicht ganz gleichgültig, ob das Ohr O , des Beobachters ruht und die Tonquelle P sich gegen O hin bewegt (Fig. 196) oder ob O sich zur Tonquelle P hin bewegt (Fig. 197); für beides ruhende Luft vorausgesetzt (— genauer gesagt: relative Ruhe der Luft in Bezug auf die Erde, relative Bewegung der Tonquelle, bzw. des Ohres in Bezug auf die Erde).

Es sei die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles C msec⁻¹ und im ersten



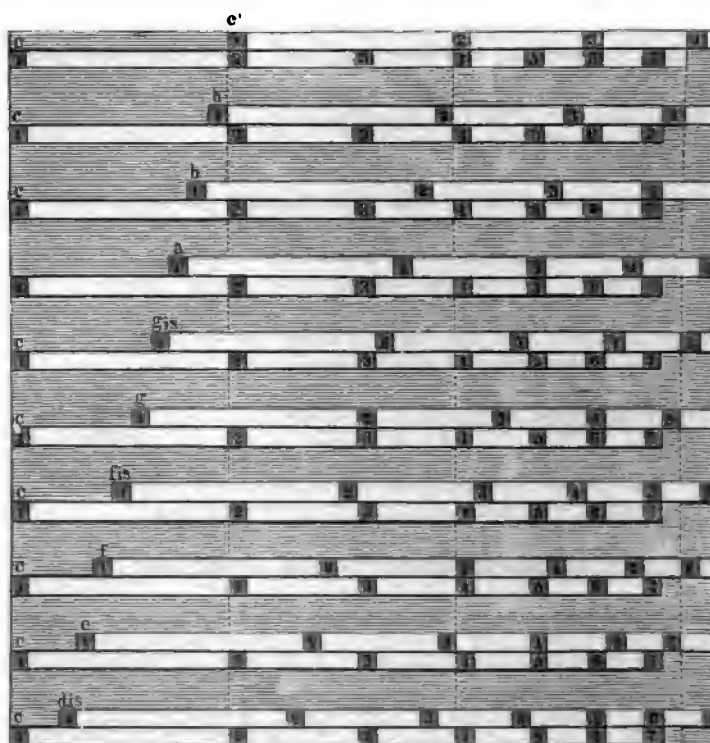
Falle der von der Tonquelle in 1 sec zurückgelegte Weg $PA = c$ m (also die Geschwindigkeit c msec⁻¹); ebenso $OB = c$ m. Es vergeht dann eine Zeit $\frac{C-c}{C} = \left(1 - \frac{c}{C}\right)$ sec zwischen dem Eintreffen der ersten und der n ten Schwingung beim Ohr, und das Ohr wird also in 1 sec von $n_1 = \frac{n}{1 - \frac{c}{C}} \dots (1)$ Schwingungen

getroffen. [Ebenso ist bei Entfernung $n_2 = \frac{n}{1 + \frac{c}{C}} \dots (2).$]



Im Falle der ruhenden Tonquelle und des bewegten Beobachters (Fig. 197) braucht der Schall $\frac{c}{C}$ sec zum Zurücklegen von OB ; während dieser Zeit entsendet die Tonquelle $n \frac{c}{C}$ Schwingungen, und das Ohr empfängt in 1 sec jetzt $n_3 = n \left(1 + \frac{c}{C}\right) \dots (3).$ [Ebenso ist bei Entfernung $n_4 = n \left(1 - \frac{c}{C}\right) \dots (4).$]

Fig. 198.



hwindigkeit zum bzw. vom Auge verändert erscheinen und zwar so, daß jede Fraunhofersche Linie gegen das violette bzw. rote Ende des Spektrums hin verschoben erscheint. In der Tat werden auch solche Verschiebungen der Spektrallinien an vielen Gestirnen beobachtet und hieraus auf eine Bewegung längs der Gesichtslinie zur Erde hin oder von ihr weg geschlossen. Ja sogar die Rotationsgeschwindigkeit von planetarischen Körpern zeigt sich darin, daß für Strahlen von einem und der anderen Hälfte des Körpers (zu beiden Seiten der Rotationsachse) die Linien in dem einen und anderen Sinne verschoben sind.

158. Zu ermitteln, welche der Obertöne von zwei gegebenen Tönen der chromatischen Tonleiter koinzidieren, und welche der Obertöne dagegen Schwebungen (Stöße) geben.

Anleitung: Nach einem Verfahren von MACH fertigt man sich zwei Leisten an, die ein- für allemal die Töne der harmonischen Reihe für je eine Klaviertaste (Fig. 198) anzeigen. Es ist dann sofort ersichtlich, daß für die Oktav (c') alle Obertöne mit Obertönen des Grundtones (c) zusammenfallen. Bei dem konsonanten Intervall Quint (g) fallen der zweite, vierte . . . Ton zusammen (nicht der dritte, fünfte . . .). Beim dissonanten Intervall eines Halbtons (cis) treten gar keine Koinzidenzen ein; und überdies stehen sich je ein Partialton des Grundtons und ein kleiner Sekund so nahe, daß sie merkliche Schwebungen geben. Aus diesen arithmetischen Verhältnissen wollte HELMHOLTZ die psychologischen Verhältnisse der Konsonanz und Dissonanz erklären; vgl. psychol. Anh. Nr. 43.

XIX. Licht.

159. Von zwei Kugeln mit den Halbmessern R cm und r cm sei eine (L) leuchtend, die andere (D) dunkel, nicht leuchtend, un durchsichtig. Lage und Größe der Schatten zu konstruieren (Fig. 199) und zu berechnen.

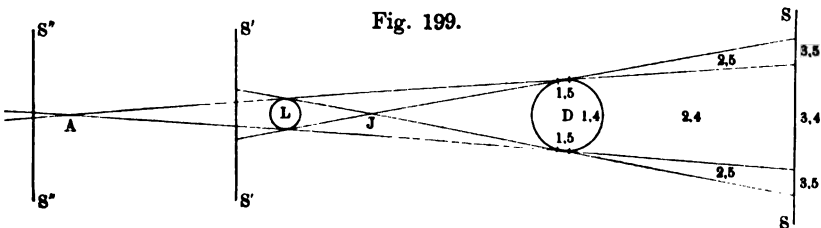


Fig. 199.

Anleitung: Man konstruiere die äußeren und inneren Tangenten an die in der Zeichenebene liegenden größten Kreise der beiden Kugeln. Dann ist B die Kugelkappe (1,4) der Kernschatten des Selbstschattens, die Gelbzone (1,5) der Halbschatten des Selbstschattens. — Sechs Kombinationen: (1,4), (1,5), (1,6); (2,4), (2,5), (2,6). — Ist die leuchtende Kugel größer als die dunkle, und liegt der Schirm außerhalb des äußeren Ähnlichkeitspunktes A , entfällt die Kombination (3,4); warum? — Länge der Schattenkegel (nach den gemeinen Formeln für die Abstände der äußeren bzw. inneren Ähnlichkeitspunkte A und J von den Kugelmittelpunkten; die Zentrale der Kugeln sei c):

$$A_L = \frac{r}{R-r} c, \quad J_L = \frac{r}{R+r} c, \quad A_D = \frac{R}{R-r} c, \quad J_D = \frac{R}{R+r} c.$$

Leitaufgaben.

Geometrische Erklärung des Spiegelsextanten.

itung: Die parallelen Strahlen, die auf den festen, zur Hälfte d
 iegel A und auf den drehbaren, ganz spiegelnden B auffallen, l
 n O die Sterne L und G in Deckung erscheinen (Fig. 200). W
 ullstellung um den Winkel β gedreht, so kommt mit L das Bild
 sternes g in Deckung, für den der $\angle GBg = 2\beta$ ist.



Fig. 200.

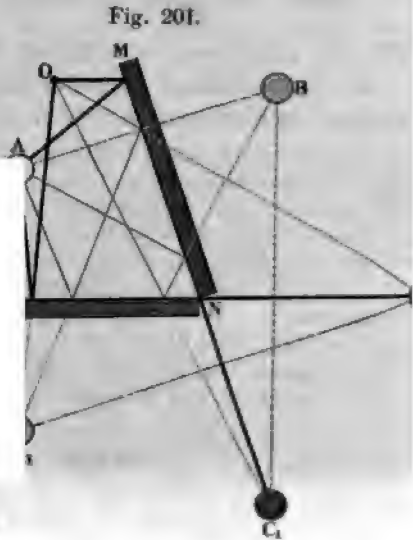


Fig. 201.

- § 102. 161. Die Entstehung der Bilder am Winkelspiegel durch Ze
 nung zu begründen.

Anleitung: In Fig. 201 ist A der gespiegelte Gegenstand, O das Auge.
 umgebe (ähnlich wie in Figg. 354, 355, S. 390) jeden der ein- oder mehrmals r
 tierten Strahlen mit denjenigen divergierenden Strahlen, die noch in die Pt
 von O (diese in beliebig übertriebenem Maßstab gezeichnet) eindringen kö

- § 102. 162. Zu zeigen, dafs und warum 1. in einem Planspiegel von
 gebener Längsausdehnung ein Mensch eine Strecke am eigenen l

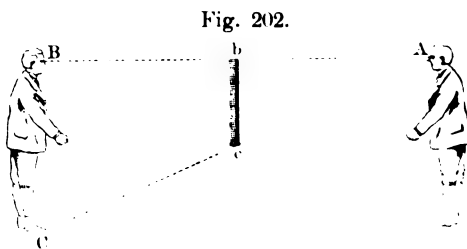


Fig. 202.

die jener Länge parallel
 doppelt so groß ist wie
 auf einmal überblicken k
 2. Warum überblicken
 dagegen z. B. in der Fass
 eines Fingerringes einen
 weitem größeren Teil der
 spiegelnden Gegenständ

Antwort. Zu 1: Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke ABC und Abc (Fig. 202).
 — Zu 2: Hielten wir den Fingerring soweit vom Auge entfernt, daß das Bild des Auges selbst in der doppelten Sehweite entsteht, so könnten wir auch von dem Auge nur ein Flächenstück von der doppelten Größe der Fassade überblicken. Wir pflegen aber den Fingerring viel näher zum Auge zu halten und die Bilder von viel entfernteren Gegenständen zu überblicken (Analogie zum Schauen durch ein Schlüsselloch).

163. Die sphärische Abweichung (Längen- und Breitenabweichung) § 108. für den Brennpunkt eines Hohlspiegels zu berechnen. (Fig. 203.)

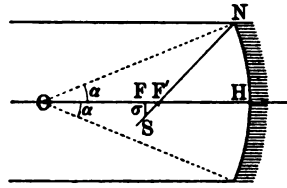
Anleitung: Der Spiegel habe den Öffnungswinkel 2α und den Öffnungsradius $HN = \rho$; es sei F der Brennpunkt der zentralen Strahlen, F' der Brennpunkt der Randstrahlen. Da $\triangle OF'N$ gleichschenkelig, und $\angle FF'S = 2\alpha$, so ergibt sich die Längenabweichung

$$OF' - OF = \lambda = f \left(\frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right)$$

die Breitenabweichung $FS = \sigma = \lambda \cdot \tan 2\alpha$.

Bei hinreichend kleinem α erhält man $\lambda \approx \frac{1}{2} f \alpha^2$, $\sigma \approx f \alpha^2$; oder wenn man $ON = r$ und $HN = \rho$ einführt, $\lambda = \frac{\rho^2}{4r}$, $\sigma = \frac{\rho^2}{2r^2}$.

Fig. 203.



164. Die Gleichung für das Brechungsgesetz $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \dots (1)$ § 104. ist nach β aufzulösen.

Auflösung: Aus $\sin \beta = \frac{1}{n} \sin \alpha \dots (2)$ folgt $\beta = \arcsin \left(\frac{1}{n} \sin \alpha \right) \dots (3)$.

Bemerkung: Da man das Zeichen \arcsin — sprich: arcus sinus — sowie die Zeichen für die übrigen cyclometrischen Funktionen \arccos , \arctg u. s. f. in der elementaren Mathematik zu vermeiden pflegt, begnügt man sich meistens, β nur mittelbar durch (2) oder (1) darzustellen; aber erst Gl. (3) stellt explizit β als abhängig von α dar.

165. Inwiefern ist PTOLÉMÄUS-KEPLERS Brechungsgesetz $\alpha = n\beta$ § 104. eine erste Annäherung an das richtige Gesetz $\sin \alpha = n \sin \beta$?

Antwort: Insoweit $\sin \alpha \neq \alpha$, $\sin \beta \neq \beta$; welche Annäherungen für die Astronomie sowohl wegen der Kleinheit der Öffnungswinkel der Linsen, wie der Kleinheit der astronomischen Strahlenbrechung sehr häufig ausreichend sind.

166. Der Einfallswinkel erfahre die sehr kleine Zunahme $\alpha' - \alpha$. § 104. Wie groß ist die entsprechende Zunahme 1. des Brechungswinkels β , 2. die Zunahme der Ablenkung $d = \alpha - \beta$? — 3. Zu zeigen, daß einer gleichmäßigen Zunahme $\beta' - \beta$ eine immer raschere Zunahme $d' - d$ der Ablenkung entspricht (Anwendung: LA 170).

Anleitung. Zu 1. Aus $\sin \alpha' = n \sin \beta'$ und $\sin \alpha = n \sin \beta$ folgt nach Subtraktion und Transformation $2 \cos \frac{\alpha' + \alpha}{2} \sin \frac{\alpha' - \alpha}{2} = n \cdot 2 \cos \frac{\beta' + \beta}{2} \sin \frac{\beta' - \beta}{2}$.

Leitaufgaben.

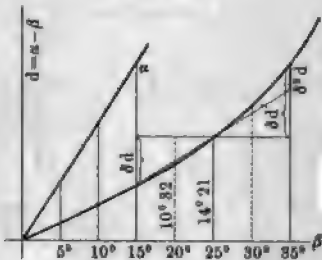
i. h. für den Grenzwert $\alpha' - \alpha = 0$) wird $\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{1 \cos \alpha}{n \cos \beta} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{n^2 - \sin^2 \alpha}}$

und für sehr kleine α (und β) wieder $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{n}$, $\alpha = n\beta$, LA 165

Zu 2. Aus $d' = \alpha' - \beta'$ und $d = \alpha - \beta$ folgt $d' - d = (\alpha' - \beta') - (\alpha - \beta) = (\alpha' - \alpha) - (\beta' - \beta) = \left[1 - \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}\right] \cdot (\alpha' - \alpha)$, woraus wieder für $\alpha' = \alpha$
 $\frac{d' - d}{\alpha' - \alpha} = 1 - \frac{1 \cos \alpha}{n \cos \beta}$. Daher $\frac{d' - d}{\beta' - \beta} = \left[1 - \frac{1 \cos \alpha}{n \cos \beta}\right] \cdot \frac{n \cos \beta}{\cos \alpha} = \frac{n \cos \beta}{\cos \alpha}$

Zu 3. Um vor allem den Sinn des Lehrsatzes 3 richtig aufzufassen, sind Zunahmen der β von 5 zu 5 Grad, sowie die zugehörigen Ablenkungen d und

Fig. 204.



α	β	$d = \alpha - \beta$	δd	δ^2
7° 30'	2° 30'	2° 35'	0°	
15 5	5 5	2 45	0 1	
22 50	7 50	3 2	0 2	
30 32	10 32	3 20	0 4	
39 21	14 21	4 14	1 2	
48 35	18 35	5 37	4 4	
59 12	24 12	10 22		
74 34	34 34			

Zunahmen dieser d in einer τ^{-1} für $n = \frac{3}{2}$. Dabei drückt

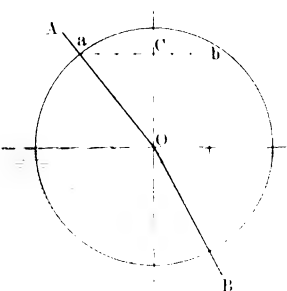
d graphisch dargestellt (Fig. 204) eine immer rascher werdende Zunahme da

darin aus, daß die Kurve (nicht nur steigt, sondern) nach oben konvex wofür sich auch sagen läßt, der Unterschied $d_3 - d_2 > d_2 - d_1$. Daß d

Eigenschaft auch noch für verschwindend kleine Änderungen der β gilt, zeigt rechnerisch so: Es seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ drei unendlich benachbarte Werte von β dafs $\beta_3 - \beta_2 = \beta_2 - \beta_1 (> 0)$. Dann sind die zugehörigen Veränderungen

Ablenkung $\frac{d_3 - d_2}{\beta_3 - \beta_2} = \frac{n \cos \beta_2}{\cos \alpha_2} - 1$, ferner $\frac{d_2 - d_1}{\beta_2 - \beta_1} = \frac{n \cos \beta_1}{\cos \alpha_1} - 1$. Hier ist $d_3 - d_2 > d_2 - d_1$, weil $\frac{n \cos \beta_2}{\cos \alpha_2} - 1 > \frac{n \cos \beta_1}{\cos \alpha_1} - 1$, oder $\frac{\cos \beta_2}{\cos \alpha_2} > \frac{\cos \beta_1}{\cos \alpha_1}$, $\cos^2 \beta_2 \cos^2 \alpha_1 > \cos^2 \beta_1 \cos^2 \alpha_2$ oder $(1 - \sin^2 \beta_2)(1 - n^2 \sin^2 \beta_1) > (1 - \sin^2 \beta_1)(1 - n^2 \sin^2 \beta_2)$ oder $(n^2 - 1) \cdot \sin^2 \beta_2 > (n^2 - 1) \cdot \sin^2 \beta_1$. — Nach Tilgung des positiven Faktors $(n^2 - 1)$ erhält man schließlich $\sin^2 \beta_2 > \sin^2 \beta_1$. Diese Ungleichung ist der Tat richtig, da $\beta_2 > \beta_1$ und $\beta_2 - \beta_1$ ein spitzer Winkel ist.

Fig. 205.



167. Mehrere Formen der Brechkonstruktion anzugeben, ihren Zusammenhang zu beweisen und ihre Vorzüge zu gründen.

Anleitung: In Fig. 363, S. 335 war l Einfallslot nötig und auch kein Teilen gegeben. Strecken z. B. nach dem Verhältnis 4:3, sondern nur ein Auftragen beliebig gleicher Strecken (was viel leichter ist als Teilen). In Fig. sind Lot und Hilfskreis gezeichnet, und es

leicht ersichtlich, daß ihr dann auch die Fig. 206 äquivalent ist. Von letzterer Konstruktion wird dann vorteilhafter Gebrauch gemacht beim Konstruieren des

Fig. 206.

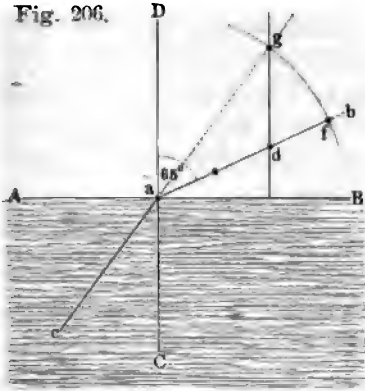
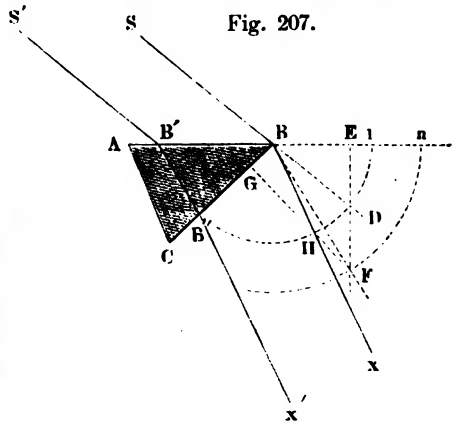


Fig. 207.

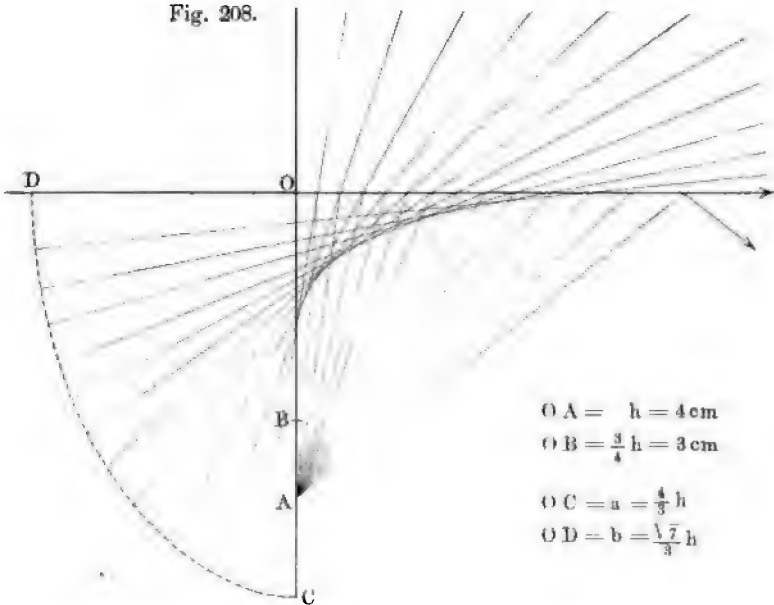


Strahlenganges in Prismen (Fig. 207), wo ein für allemal Hilfskreise mit den Halbmessern vom Verhältnis $1 : n$ vorgezeichnet werden.

168. Auf was für einer Kurve kommen die Bilder eines Punktes § 10. bei der Brechung an einer Ebene (Fig. 365, S. 337) zu liegen?

Antwort: Auf dem geometrischen Ort der Krümmungsmittelpunkte („Evolute“) einer Ellipse von den Halbachsen $OC = h \cdot n$, $OD = h \cdot \sqrt{n^2 - 1}$ (Fig. 208).

Fig. 208.



(Beweis durch höhere Rechnung; als Ersatz hierfür die Konstruktion beliebig vieler Paare sehr benachbarter Strahlen und ihrer Durchschnittspunkte $B, B' B'' B''' \dots$

reflektierte Strahl einander parallel sind; Zeichnung:

§ 106. 170. Zu beweisen, daß dem symmetrischen D das Prisma das Minimum der Ablenkung entspricht.

Beweis: Beim symmetrischen Durchgang ist $\beta_1 = \beta_2$, $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$, so entspricht einer Zunahme $\beta'_1 - \beta_1$ eine ebenso große Abnahme $\beta'_2 - \beta_2$. Ferner entspricht nach LA 166, 3 jedem Zunehmen von $d_1 = \alpha_1 - \beta_1$, das stärker ist als das Abnehmen von $d_2 = \alpha_2 - \beta_2$, das stärker ist als das Abnehmen von d_2 . Und da die gesamte Ablenkung D sich aus d_1 und d_2 zusammensetzt, so entspricht dem Wachsen von β_1 ein Zunehmen von D . — Spricht auch einem Abnehmen des β_1 ein Zunehmen des β_2 (das stärker ist als das Abnehmen des β_2), kann man sich ja als Folge des Zunehmens β_2 wegen der angenommenen Symmetrie gilt alles über β_1 , und sei sagte auch für β_2 und seine Zunahmen). Da also sowohl dem Zunehmen des dem symmetrischen Durchgang entsprechenden β als auch dem Abnehmen des β die Ablenkung D entspricht, so entspricht jenem β das Minimum des D .

§ 107. 171. Die zu einer Änderung der Gegenstandsweite a' Änderung der Bildweite $b' - b$ für Sammelspiegel linsen zu berechnen. — Zu zeigen, daß Gegenstand und Bild am nächsten im III. Linsenfälle sind.

Anleitung: Aus $\frac{1}{a'} + \frac{1}{b'} = \frac{1}{f}$ und $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ folgt $\frac{1}{a'} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b'}$ oder $\frac{b' - b}{a' - a} = - \frac{b' b}{a' a} = - \frac{f^2}{(a' - f)(a - f)}$.

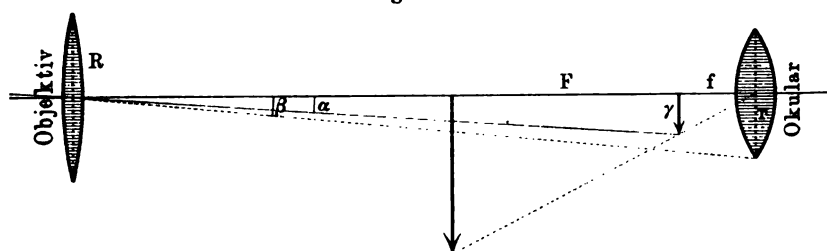
Für die Linse ist der Abstand y von Gegenstand und Bild y

Hier wird y ein Minimum, wenn für $a' = a$ der Ausdruck $\frac{y' - y}{a' - a}$

Anleitung: Die Fig. 209 ist der Fig. 393 (S. 345) so entnommen, daß der Winkel σ , unter dem ein im Mittelpunkte der Objektivlinse befindlich gedachtes Auge den Gegenstand AA' erblicken würde, noch etwas größer angenommen ist in Fig. 393. Für den Sehwinkel Σ , unter dem ein im Mittelpunkt des Okulars befindlich gedachtes Auge denselben Gegenstand AA' erblicken würde, gilt dann auf Seite 355 begründete Rechnung $v = \frac{\Sigma}{\sigma} = \frac{tg \Sigma}{tg \sigma} = \frac{\gamma:f}{\gamma:F} = \frac{F}{f}$.

Für die Objektivlinse des großen Refraktors der Wiener Sternwarte ist $= 10,4 \text{ m} = 1040 \text{ cm}$; die Öffnung des Okulars (d. i. der Halbmesser des

Fig. 209.



Okularrandes, nicht etwa der Krümmungshalbmesser der Linse!) ist $R = 33,75 \text{ cm}$.

Da der scheinbare Halbmesser des Mondes $\sigma = 0^\circ 15' = \frac{1}{4}^\circ$, so ist die lineare Abweichung γ des Halbmessers des Mondbildchens (wie es sich z. B. auf einer in der Brennebene des Okulars gebrachten photographischen Platte erzeugt) $= 1040 \text{ cm} \times tg 0^\circ 15' = 4,538 \text{ cm}$; das ganze Mondbild würde also auf der optischen Achse einen Kreis von fast 1 dm Durchmesser einnehmen.

Wie groß müßte die Öffnung r der Okularlinse sein, wenn diese das ganze Mondbild überschauen sollte? — Antwort: Für den Sehwinkel β , unter dem man sich vom Mittelpunkte der Objektivlinse aus gesehen der Halbmesser r des Okularrandes darstellt, gilt $tg \beta = \frac{r}{F+f} \neq tg 0^\circ 15' = 0,004363$. Um die ganze optische Strecke γ zu überblicken, muß $\angle \beta \geq \alpha$ sein. Es müßte daher, um mit dem Fernrohr den ganzen Mond (d. h. durch das Okular das ganze Mondbild) erblicken zu können, $r \geq 4,538 \text{ cm}$, also der Durchmesser des Okularrandes größer als 9 cm sein. — Zusatz: Bei so großem Rande wäre der kleinste mögliche Krümmungshalbmesser der Linse (wenn diese nämlich als Vollkugel gewählt würde) ebenfalls 4,538 cm; und wäre es eine symmetrische Bikonvexlinse vom Brechungsindex $\frac{3}{2}$, so wäre auch die Brennweite 4,538 cm. Hiermit wäre die Vergrößerung für ein Auge von der Sehweite 20 cm $20:4,5$, also nicht einmal die Vergrößerung 5; aber auch eine Linse für so schwache Vergrößerung ist behufs Abhaltung der Randstrahlen noch einen viel kleineren Raddurchmesser bekommen.

173. Die Gleichung für die Beleuchtungsintensität $i = \frac{J}{r^2}$ gibt $i \propto \frac{1}{r^2}$.
 $i = \infty$ für $r = 0$. Dies scheint zu heißen, daß, wenn eine Lichtquelle eine noch so kleine Leuchtkraft J besitzt, aber in unmittelbarer Berührung mit der zu beleuchtenden Fläche gebracht wird, sie hier eine größere Beleuchtungsstärke hervorrufe, als eine beliebige kräftige

Lichtquelle bei irgend welchem endlichen, wenn auch noch so kleinen Abstände. — Ähnliche Paradoxa lassen sich an die Gesetze für §

Fig. 210.



Wärme- und andere Strahlen, für das Newton'sche Gravitationsgesetz, sowie an die Coulombschen Gesetze für elektrische Ladungen und magnetische Pole. Wie sind sie zu lösen?

Anleitung: Der Formel $i = \frac{J}{r^2}$ liegt die Vorstellung zugrunde, daß die Lichtmenge, welche ein Punkt an einem auf beliebig großen oder kleinen um jenen Punkt als Mittelpunkt gelegten Kugelflächen immer dieselbe bleibe. Die Intensität J stellt dann eine Art Dichte dar, nämlich Grad der Verteilung jener Lichtmenge auf einer Kugel mit Halbmesser 1; dieser „Grad“ wird gemessen durch die des Lichtes, welche auf die Fläche 1 einer solchen Kugel bzw. entfiel. Ebenso ist i die Dichte auf einer Kugel mit r -fachen Halbmesser. Ist nun $r = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, 0$ cm, die Dichte 4, 9, ... ∞ mal größer, und es müßte, um eine Fläche 1 mit Licht von solcher Dichte zu erfüllen, 9, ... ∞ mal so große Lichtmenge vorhanden sein, als überhaupt wirklich an der Kugel von der Oberfläche 1 cm² vorhanden.

Fig. 211.

§ 124.



§ 126.

174. Die Beugung an dünnen Spalten rechnerisch zu erläutern.

Anleitung: Ist $AB = b$ der Durchmesser C der Mittelpunkt des Spaltquerschnittes, CD der Abstand des Schirmes von C , $Mm =$ Entfernung des ersten Minimums m vom Nullpunkt M (Fig. 210), so ist $Bm - Am = \lambda/2$. — $Bm^2 - Am^2 = (Bm - Am)(Bm + Am) = \lambda/2 \cdot 2D$ und da annähernd $Bm + Am \approx 2D$. $D \cdot \lambda = 2bd$, also $\lambda = \frac{2bd}{D}$.

Warum unterscheidet sich dieser Ausdruck von dem in § 124, S. 387 für die Beugung an einem schmalen Spalt gewonnenen durch den Faktor 2?

175. FRESNELS Spiegelversuch rechnerisch zu erläutern.

Anleitung: Es seien in Fig. 2 die Lichtquelle (Spalt), L' und L'' die Spiegelbilder. Damit das erste Minimum von dem Nullmaximum d cm entfernt sei,

$$L''m - L'm = \frac{\lambda}{2} \text{ sein, oder } \sqrt{D^2 + \left(\frac{b}{2} + d\right)^2} - \sqrt{D^2 + \left(\frac{b}{2} - d\right)^2} = \frac{\lambda}{2}$$

Da hier D groß ist, sowohl gegen b wie gegen d , so kann gesetzt werden

$$D \left[\sqrt{1 + \left(\frac{b+2d}{2D}\right)^2} - \sqrt{1 + \left(\frac{b-2d}{2D}\right)^2} \right] = \frac{\lambda}{2}, \text{ oder (nach } \sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x) \\ D \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b+2d}{2D}\right)^2 - 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b-2d}{2D}\right)^2 \right] = \frac{\lambda}{2}. \text{ Somit } \lambda = 2 \frac{b}{D} d.$$

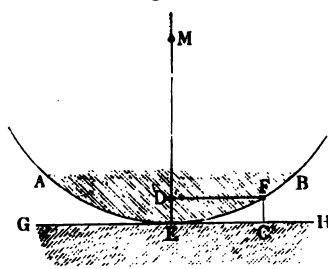
Wenn der Schirm weiter von $L'L''$ rückt, gehen die Interferenzstreifen nach Hyperbeln auseinander (vgl. hierzu auch Fig. 225, S. 241).

176. Die Dicke der Luftschicht an NEWTONS Farbenglas zu be- § 127.
rechnen.

Anleitung: Es sei in Fig. 212 AEB ein Teil der Konvexlinse, deren Krümmungshalbmesser $EM = R$ mm ist, GH die Oberfläche der ebenen Glasplatte. Dem Halbmesser eines Newtonschen Farbenringes $EC = r$ mm entspricht dann die Dicke der Luftschicht $CF = d$ mm. Es ist

$$r^2 = (2R - d)d = 2Rd - d^2 \approx 2Rd. \\ \text{Da hier } R \text{ und } r \text{ direkt meßbar sind, ergibt sich } d = \frac{r^2}{2R}.$$

Fig. 212.



XX. Elektrische Maßgrößen.

177. Folgende Veranschaulichungen der elektrischen Ladungs- § 136, 136
menge 1 st. LE (und 1 Coulomb = $3 \cdot 10^9$ st. LE), ferner des elektrischen Ladungsgrades (Potentials) 1 st. PE (und 1 Volt = $\frac{1}{300}$ st. PE) und der elektrischen Energie zu begründen:

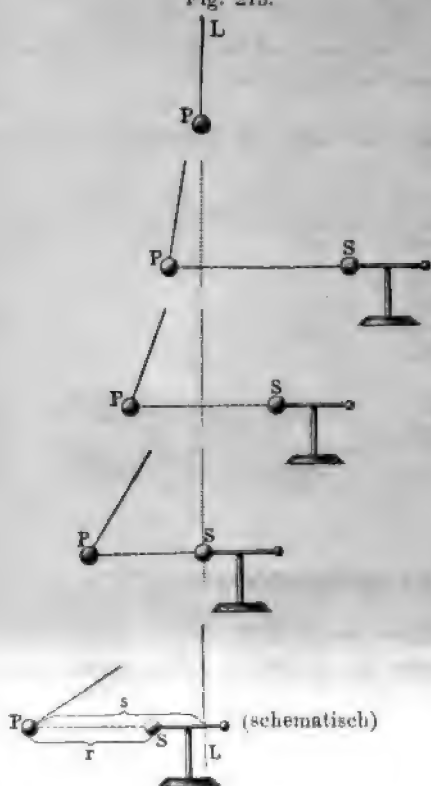
a) Zwei Kügelchen von je 1 g, die an Fäden von $l = \frac{981}{2}$ cm ≈ 5 m im selben Punkte aufgehängt sind, müssen mit je 1 st. LE geladen sein, damit sie einander bis auf 1 cm Mittelpunktdistanz abstoßen. (Zum Beweise vgl. LA 35 d). — Dabei kommt es auf den Halbmesser nicht an, da die Ladungen wie von den Mittelpunkten her wirkend gedacht werden. Sollen speziell die Kugeln von 1 g Masse 1 cm Halbmesser haben (vgl. unten b), so eignen sich vergoldete Korkkugeln, da die Dichte des Korkes $\approx \frac{1}{4}$ und $\frac{4}{3} \pi \cdot 1^3 \cdot \frac{1}{4} \approx 1$ g.

b) Wegen $E = C \cdot V$ (§ 139) und $C = r$ wird eine Kugel von 1 cm Halbmesser durch 1 st. LE auf 1 st. PE = 300 Volt (§ 149) geladen. Somit hat eine isolierte Leiterkugel (vergoldete Korkkugel, hohle oder massive Metallkugel) von 1 cm Halbmesser, die am Elektroskop ein Potential von 300 Volt zeigt, 1 st. PE; vgl. LA 182.

c) Die elektrische Energie wird praktisch gemessen durch den „Elektrizitätszähler“ (§ 172), der den Stromverbrauch in Kilowattstunden angibt. Für 1 Kilowattstunde ist der Durchschnittspreis 36 Pfennige. Da 1 Watt = 10^7 Sekundenerg (§ 22), so ist 1 Kilowattstunde = $36 \cdot 10^{12}$ Erg. — Somit ist in Geldwert $36 \cdot 10^{12}$ Erg = 36 Pfennige; oder 1 Pfennig = 10^{12} Erg; oder 1 Erg = 10^{-12} Pfennig = ein Billiontel Pfennig. (Vgl. LA 53.)

§ 125. 178. COULOMBS Abstandsgesetz $f = \frac{C}{r^2}$ für elektrische Ladungen

Fig. 213.



nach OSTRÖM'S Versuch nur
ratisch abzuleiten.

Anleitung: Auf die Größe
Kraft wird geschlossen durch die
lenkung s cm der „Pendelkugel“ P
der Lotlage L (Fig. 213), in der
erster Annäherung $f = x \cdot s$. Dann
wenn das COULOMBSsche Gesetz
als gültig vorausgesetzt ist, $x \cdot s$

oder $s \cdot r^2 = \frac{C}{x} = \text{Konst.}$ Würde

x . B. in Fig. 213, wenn die Standkugel
1 cm diesseits der Lotlage steht,
Pendelkugel P um $s = 1$ cm von
der Lotlage abgelenkt erhalten, so
dies $r = 2$ cm und $s \cdot r^2 = 4$ (cm³). Dann fordert COULOMBS
Gesetz: Zu $s = 0$ gehört $r = \infty$

$s = \frac{1}{4}$ cm gehört $r^2 = \frac{4}{1/4} = 8$ cm,

ein Abstand der Standkugel dies
der Lotlage um 2,8 cm u. s. f. —
der wirklichen Durchführung der
suche ist auf die Ladungsverluste
nicht zu nehmen, so daß im al
meinen immer nur die Resultate zu
unmittelbar aufeinander folgender
suche vergleichbar sind.

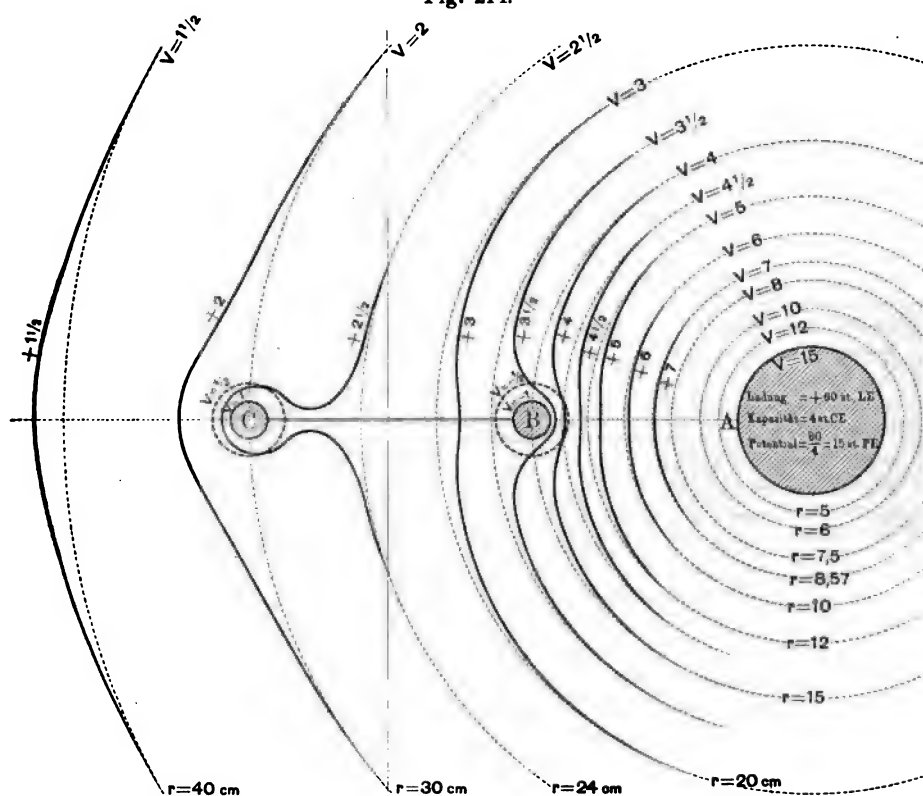
§ 126. 179. Warum gibt es nicht im selben Sinne ein mechanisches
Elektrizitätsäquivalent, wie es ein mechanisches Wärmeäquivalent gibt?

Antwort: „Mechanisches Wärmeäquivalent“ = mechanisches Äquivalent einer
Wärmemenge. — Ein Elektrizitätsäquivalent gibt es zwar auch, aber nur, wenn
Elektrizität im Sinne von Elektrizitätsgrad = elektrisches Potential genommen
wird. Dagegen können mit derselben Elektrizitätsmenge größere oder kleinere
Arbeitswerte gegeben sein, je nachdem ihr Gelegenheit gegeben ist, zu Stellen
weniger oder mehr verschiedenen Potentials abzufließen und dabei Stromarbeit
zu verrichten. — Analogie: Es gibt kein mechanisches Äquivalent einer Wassermenge,
wohl aber ein mechanisches Äquivalent der potentiellen Energie einer
Wassermenge in Bezug auf ein niedrigeres Niveau.

§ 138. 180. Es sei der influenzierende Körper eine geladene Leitkugel A , der influenzierte Körper bestehe aus zwei gleichen Leitkugeln B, C , die durch einen leitenden Draht von verschwindend



Fig. 214.



Maßstab 1 : 4

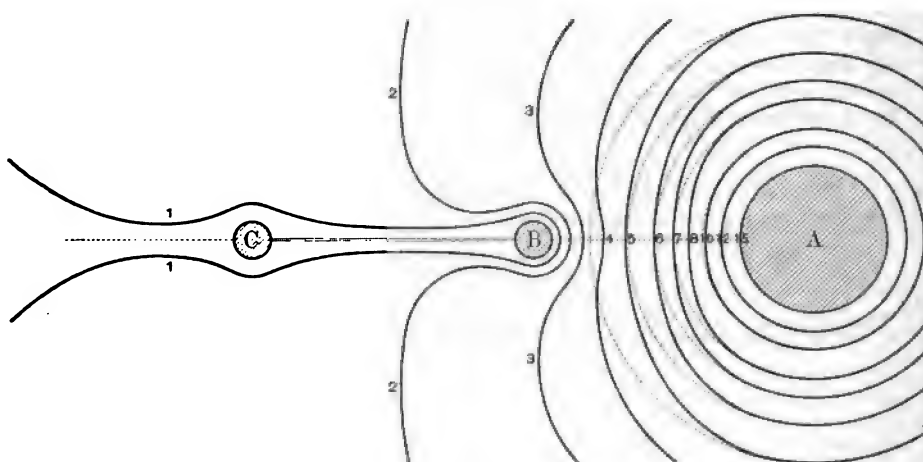


Fig. 215.

Kapazität verbunden sind. Zu erläutern, daß und wie durch die gegenseitige Nähe beider Leiter deren Niveauflächen deformiert werden, wenn der influenzierte Körper BC α) isoliert (Fig. 214), β) mit der Erde leitend verbunden (Fig. 215) ist.

Anleitung: Die Figuren sind eine im Verhältnis 1 : 4 verkleinerte Wiedergabe einer Konstruktion in natürlicher GröÙe. Die isoliert aufgestellte Kugel A hat 4 cm Radius und daher 4 st. CE (elektrostatische Kapazitätseinheiten). Sie ist mit 60 st. LE (elektrostatischen Ladungseinheiten) geladen. Dann gelten in ihrem Kraftfeld die an den ausgezogenen Kreisen angeschriebenen Potentialwerte. Die Kugeln B und C haben je 1 cm Radius und 15 cm Zentralabstand. Sie sind in die Niveauflächen mit 15 bzw. 30 cm Abstand vom Mittelpunkt der Kugel A gestellt, wo also die Potentiale 4 bzw. 2 geherrscht haben. Es werden sich also B und C , wenn sie α) isoliert sind, selbst auf die Potentiale 4 und 2 laden, was $+4$ bzw. $+2$ st. LE gehören würden, da beide Kugeln die Kapazität von 1 st. CE haben. Da nun von außen her keine Ladungen zufließen können, wohl aber eine Verteilung positiver und negativer Ladung innerhalb des Körpers BC erfolgt, so wird der elektrostatischen Grundbedingung genügt, wenn das System BC das überall gleiche Potential 3 dadurch annimmt, daß durch die Verteilung $+1$ st. LE auf C , -1 st. LE auf B auftritt. — Um weiter die durch diese neuen Ladungen herbeigeführten Veränderungen im Kraftfeld von A , B und C zu konstruieren, wird zuerst für B und C allein das zusammengesetzte Kraftfeld nach Tafel IIa, b (bei S. 109, entsprechend den roten Kurven mit entsprechend geänderten Zahlenwerten) konstruiert und dann noch einmal die Superposition dieser zusammengesetzten Potentiale für BC mit den einfachen Potentiale für A durchgeführt.

β) War das System BC mit der Erde leitend verbunden, so hat es überall das Potential 0, solange es im Kraftfeld der für sich positiv geladenen Kugel A ist. Wird nun diese weggenommen oder entladen, so zeigt BC (wenn vorher die Ableitung zur Erde beseitigt ist) nunmehr ein im Vergleich zum Potential 0 der Umgebung negatives Potential.

Man vergleiche schließlich obige beide Figuren mit Fig. 467 und Fig. 468 (wo an Stelle der Kugel A die punktuelle Ladung $+6$ und an Stelle der Doppelkugel BC die schraffierte Kugel getreten ist); sodann mit diesen beiden Paaren von Figuren wieder die Fig. 451 und 453 (wo an Stelle von A bzw. der punktuellen Ladung $+6$ jetzt die geriebene Stange K , an Stelle der Doppelkugel BC bzw. der schraffierten Kugel der Doppelzylinder A , B getreten ist).

§ 134. 181. Das den Influenzmaschinen zugrunde liegende Prinzip der Duplizierung zu erläutern.

Fig. 216.

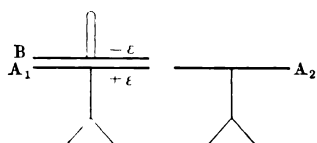
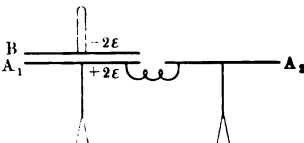


Fig. 217.



Anleitung: Von zwei Elektroskopen mit den Kollektorplatten A_1 und A_2 und der Kondensatorplatte B

(Fig. 216) empfangen

A_1 die Ladung $+\epsilon$. Wird B auf A_1 gesetzt, ableitend berührt und isoliert abgehoben, so hat B die Ladung $-\epsilon$. Nun wird B auf A_2 aufgesetzt, A_2 ab-



leitend berührt und B abgehoben, so hat auch A_2 die Ladung $+\epsilon$. Verbindet man A_1 und A_2 miteinander leitend, so haben sie nun zusammen die Ladung $+2\epsilon$. Wird B wieder auf A_1 gesetzt, so wird die Kapazität dieser Doppelplatte A_1B so groß, daß sich (fast) die ganze Ladung 2ϵ in A_1 sammelt (Fig. 217). Wird A_2 von A_1 getrennt, B ableitend berührt und abgehoben, so erhält B die Ladung -2ϵ u. s. f. Diese Duplizierung kann fortgesetzt werden, und sie liefert (infolge der beim wiederholten Abheben geleisteten Arbeit) die Ladungsmengen $+2\epsilon, +4\epsilon, +8\epsilon \dots$ in den beiden verbundenen Elektroskopen.

**182. Die Begriffe elektrisches Potential, elektrische Ladungs- §§ 132, 136, :
menge, Energie, Dichte und Spannung** (im elektrostatischen Sinne) sind durch numerische Beispiele für Leiterkugeln von gegebener Kapazität zu erläutern; z. B. für zwei Kugeln von $r = 5$ cm, $R = 10$ cm.

Anleitung: Es seien die beiden Kugeln untereinander und mit einem Elektrometer leitend verbunden, und dieses weise nach der Ladung ein Potential z. B. von $V = 3000$ Volt aus. Da 1 Volt $= \frac{1}{300}$ st. PE, so ist das gemeinsame Potential der Kugeln 10 st. PE. — Die zur Erzielung dieses Potentials erforderliche Ladungsmenge ist nach $E = CV$, also $E = Vr$, bzw. $E = VR$, § 139, für die kleine Kugel 50 st. LE; für die große 100 st. LE (also 50×2 , nicht 50×2^3 !).

Die elektrische Energie ist $A = \frac{1}{2} VE$ Erg (§ 136); sie ist daher für die kleine Kugel $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 50 = 250$ Erg, für die große 500 Erg.

Die elektrische Dichte = der Ladungsmenge auf der Flächeneinheit (gemessen durch $\delta = \frac{E}{4r^2\pi} = \frac{Vr}{4r^2\pi} = \frac{V}{4r\pi}$) beträgt für die kleine Kugel $\frac{10}{4 \cdot 5 \cdot \pi} = 0,1591$, für die große $\frac{10}{4 \cdot 10 \cdot \pi} = 0,0796$ st. Dichteeinheiten.

Die elektrostatische Spannung an einer Stelle der Oberfläche eines Leiters ist definiert als der normal gegen die Oberfläche nach außen wirkende statische Druck infolge der Abstossung der ganzen Ladung auf die Einheit der Ladungsmenge; daher ist für die Kugel das Maß der Spannung $S = \frac{E}{r^2}$ Dyn $= \frac{V}{r}$ Dyn.

Sie ist für die kleine Kugel $\frac{10}{5} = 2$ Dyn, für die große 1 Dyn (LA 35, f.).

**183. Wie lassen sich durch Maßflaschen die von einer Elek- §§ 134, 139.
trisiermaschine gelieferten Ladungsmengen in relativem und absolutem Maße messen?**

Anleitung: Gesetzt, es trete bei einem bestimmten Abstände der Kugeln in Flasche c (Fig. 472, S. 437) nach je 1 sec, bei Verbindung mit einer „kräftigeren“ Elektrisiermaschine schon nach je $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3} \dots$ sec Selbstentladung ein: wir schliessen dann, daß binnen derselben Zeit dem ganzen System Ladungsmengen zugeführt worden sind, die sich wie $1 : 2 : 3 \dots$ verhalten. — Um Messungen nicht nur im relativen, sondern absoluten Maße zu vollziehen, müßte einerseits die Kapazität der Maßflasche, andererseits durch Verbindung mit einem Elektroskop die Potentialdifferenz der Kugeln im Augenblick vor der Selbstentladung bekannt sein. Doch ist die Maßflasche heute nicht mehr ein der sonst erreichten Genauigkeit elektrischer Messungen entsprechendes Instrument.

XXI. Magnetische Maßgrößen.

§ 142. 184. Durch Zeichnung zu erläutern, daß die der Indifferenzzone eines Magnetstabes näher liegenden Teile für sich stärker magnetisch sind als die nahe den Enden liegenden.

Anleitung: Da jeder Teil des Magnetstabes (bis herunter zu den hypothetischen „Elementarmagneten“) für sich ein vollständiger Magnet ist, so ist, wenn sich nach außen als magnetische Kraft äußert, immer schon die Differenz

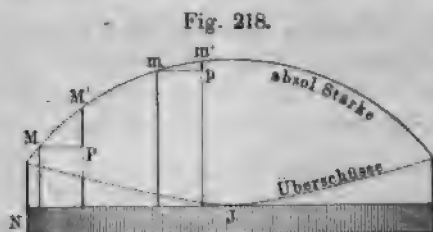


Fig. 218.

Kräfte angegebende Kurve eine Form nach Fig. 218 (Kettenlinie) hat. Obwohl die absolute Stärke die größte bei J, die kleinste bei N und S ist, so ist doch die Differenz entgegengesetzter magnetischer Kräfte bei M größer als z. B. bei m.

Fig. 219.

§ 143. 185. Wie wirkt auf eine Magnetnadel ($\nu, \sigma; l$) ein Magnetstab ($n, s; l$) aus der „zweiten Hauptlage“ (Fig. 219)

Anleitung: Es sei wieder r cm der Abstand der Mittelpunkte von Nadel und Stab. Dann sind die Abstände nach Fig. 220

$$sn = n\nu = R = \sqrt{\left(r - \frac{\lambda}{2}\right)^2 + \frac{l^2}{4}} \neq \sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}} \neq r$$

(was besagt und wie rechtfertigt sich diese doppelte Vernachlässigung?). Die Kraft ist $f_{r,s} = \frac{\mu m}{r^2} \neq \frac{\mu m}{r^2} = f_{r,n}$. Für die Fig. 220.

Resultierende F der beiden Kräfte, die somit zwar nicht ihrer Größe, wohl aber wesentlich ihrer Richtung nach verschieden sind, gilt $F : f \neq l : r$, also $F = f \frac{l}{r} = \frac{\mu m}{r^2}$

$$\text{und das Drehungsmoment } F\lambda = \frac{\mu \lambda \cdot m l}{r^2} = \frac{M_1 M}{r^2}.$$

Es ist also das der ersten Hauptlage entsprechende Drehungsmoment $F\lambda = 2 \frac{M_1 M}{r^2}$ in erster Annäherung das Doppelte des Drehungsmomentes der zweiten Hauptlage, was sich durch Versuche bestätigt, durch die also wieder ein indirekter Beweis für das Coulombsche Elementengesetz bei Polstärken erbracht ist.

§ 146. 186. Für die erdmagnetische Horizontale Intensität das Produkt $M \cdot H$ durch Schwingung

§ 146. 186. Für die erdmagnetische Horizontale Intensität das Produkt $M \cdot H$ durch Schwingung

rsuche zu bestimmen. — Für den Quotienten $M : H \neq \frac{1}{2} r^3 \operatorname{tg} \alpha$ eine bessere Annäherung zu entwickeln.

Anleitung: Ist \mathfrak{M} das Massenmoment eines schwingenden Magnetstabes, H das Kraftmoment der Horizontalkomponente (vgl. § 146), so ist (nach § 33 Ende d. LA 104) $T = 2\pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}}{MH}}$, also $MH = \frac{4\pi^2 \mathfrak{M}}{T^2}$. Hierin ist \mathfrak{M} durch Rechnung aus dem Gewicht und der Gestalt des (z. B. rein zylindrischen) Magnetstabes (oder nach Versuche über die Torsionsschwingungen eines gleichgestalteten, magnetfreien Stabes, z. B. aus Messing), $I = \frac{1}{n}$ durch Beobachtung zu bestimmen. — Der Ausdruck bedarf noch einer Korrektur wegen der bei den Schwingungen ins Spiel tretenden Torsionskraft des Fadens. Zu dem Zwecke wird dem Faden eine Drehung um α^0 erteilt und die Änderung φ^0 der Ruhelage des Magnets beobachtet, wo $\frac{\varphi}{\alpha - \varphi} = s$ das Torsionsverhältnis heißt. Es wird $MH = \frac{4\pi^2 \mathfrak{M}}{T^2(1+s)}$.

Ferner ist $\frac{M}{H} = \frac{r^3}{2} \operatorname{tg} \alpha \left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^2$, wie sich ergibt, wenn in dem Ausdrucke F (§ 143, S. 448) der Nenner $\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2$ beibehalten (nicht $\neq r^4$ gesetzt) wird. — Dabei bedeutet l genau genommen nicht die gemessene Länge des Magnetstabes ($n, s; l$), sondern den Abstand l' der Pole n, s .

187. Für die erdmagnetische Horizontalintensität das Produkt MH durch eine Hebelwage zu bestimmen (vgl. Versuch 2, § 146.)

Anleitung: In Fig. 221 bezeichne die Länge des Wagebalkens, z die Länge des Zeigers vom Drehpunkt der Wage bis zum Befestigungspunkt des Fadens, c den Abstand des Fadens von der Drehachse des Magnetstabes bei senkrechten Stellungen von Magnet, Nadel und Zeiger. Dann bringt das Herstellen des Gleichgewichts erforderliche Übergewicht p an dem einen eine Zugkraft X hervor, die den Magnetstab um 90° aus dem magnetischen Meridian verdreht hält. Es sind einander gleich die Kraftmomente einerseits $pa = Xz$, andererseits $c = MH$; somit $MH = \frac{pa}{z} \cdot c$. (Man beachte, daß sich MH auf den Stab $s; l$ der Figg. 485 und 503, nicht auf die Nadel ($\nu, \sigma; l$) bezieht.)

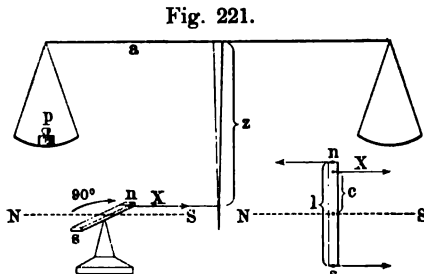


Fig. 221.

Der Quotient $\frac{M}{H}$ für den Stab wird wieder, wie nach § 146, S. 460 und wie der vorigen LA 186 aus der Ablenkung einer Nadel ermittelt.

XXII. Elektromagnetismus und Induktion.

188. Einige Versuche über die relativen Bewegungen zwischen Magneten und Magneten, speziell über die „elektromagnetischen Rotationen“ zu beschreiben und zu erklären.

Fig. 220.

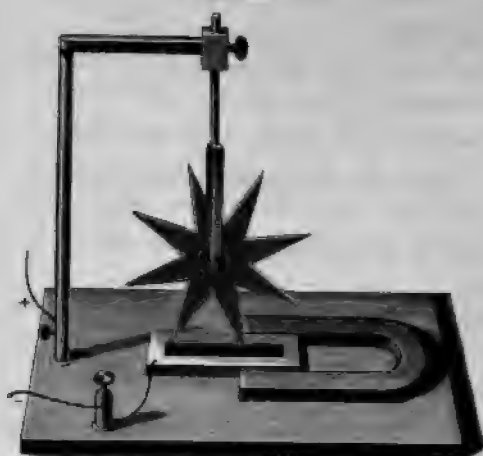


Fig. 225.



Fig. 224.

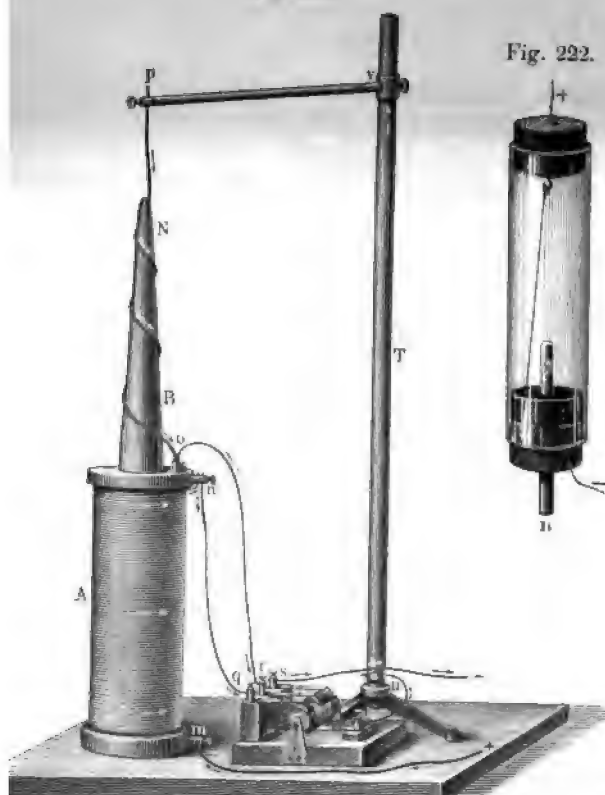


Fig. 222.



Fig. 236.



Anleitung: Um zu zeigen, daß der Erscheinung einer Bewegung des Magnetpols in Bezug auf einen Stromleiter (einfachstes Beispiel bei stets Versuch, Fall 3 in der Übersicht der Wechselwirkungen von Magneten und Strömen) umgekehrt auch eine Bewegung eines Stromleiters in Bezug auf einen Magnetpol entspricht, müssen Teile des Stromleiters beweglich gemacht werden. Dies ist z. B. der Fall bei der einfachen Vorrichtung (Fig. 222). Der Strom fließt von + zu — durch ein Stück Kupferdraht, oben aufgehängt ist und unten in Quecksilber taucht. Dieses Ende kreist dann um den Pol s des Magneten sn . — In Barlows Rädchen (Fig. 223) geht der Strom von + durch die leitende Stütze in das Rädchen, dessen Spitze in Quecksilber taucht, von dem weg der Stromleiter zu — geht. Denkt man sich die Kraftlinien um Magnetpol n zu s verlaufend, so weicht der Stromfaden, der von der Achsenbühl durch die Zacke des Rades in das Quecksilber geht, normal zur Kraftlinie ab; das Rädchen wird so durch die Wechselwirkung von Magnet und Strom in Rotation erhalten. — Nach Fig. 224 wickelt sich die biegsame, leitende Schnur po um den aus der Spule A herausragenden Eisenkern abwechselnd in dem einen und deren Windungssinne spiralig auf, je nachdem mittels des Kommutators der Strom in verschiedenen Richtungen zum Teil durch die Spule A , zum Teil durch die biegsame Schnur geschickt wird. —

Auch der Lichtstrom in Geißlerschen Röhren stellt einen beweglichen Leiter dar, der um einen Magnetkern kreist; in Fig. 225 ist der Magnet ein permanenter, in Fig. 226 ein durch die Spule M angeregter Elektromagnet.

Als einfachstes Schema, warum die Bewegung des Stromleiters um den Pol kreisförmig ist, kann Fig. 509 (S. 467) dienen, wenn wir uns die einzelnen Elemente des Kreisstromes längs des Umfanges beweglich denken. Dieses Kreisen stellt dann die Umkehrung dar zur Bewegung, die ein Magnetpol längs der kreisförmigen Kraftlinien nach Fig. 512, S. 469 ausführen würde.

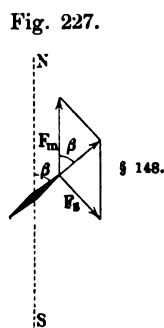


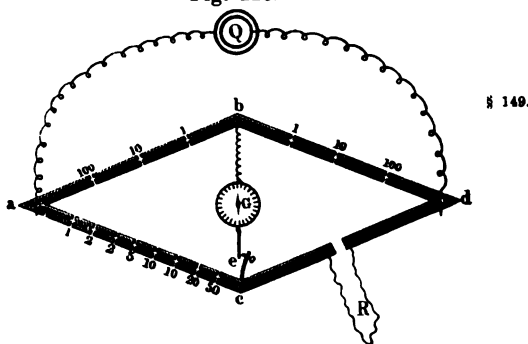
Fig. 227.

§ 148.

189. Einrichtung und Verwendung der Sinusbussole.

Anleitung: Statt daß, wie bei der Tangentenbussole, der Ring in der Ebene des magnetischen Meridians bleibt und die Nadel aus seiner Ebene durch den Strom abgelenkt wird, wird bei der Sinusbussole der aus der Ebene des magnetischen Meridians heraustretende Nadel nachgedreht, und zwar so lange, bis die Nadel in der Ebene des Ringes bleibt. Fig. 227 zeigt an, daß und warum an Stelle der Funktion Tangens die Funktion Sinus tritt.

Fig. 228.



§ 149.

190. Rechnerische Erklärung von Wheatstones Methode zur Messung von elektrischen Leitungswiderständen.

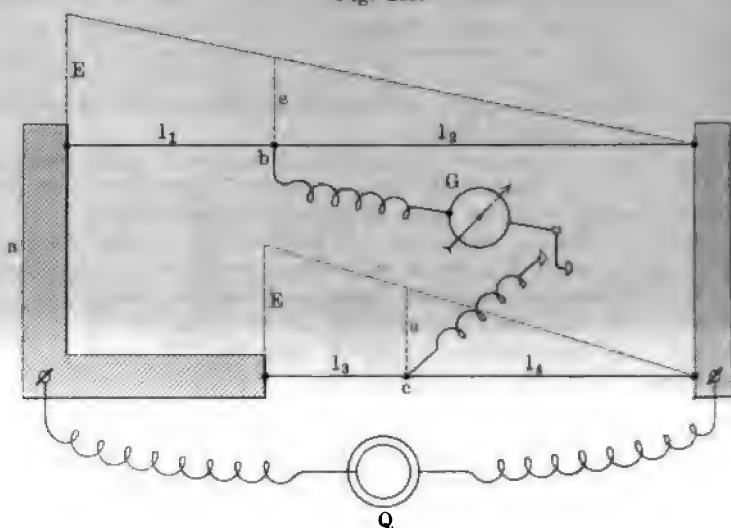
Anleitung: Von einer Batterie Q (Fig. 228) führt eine Leitung den Ecken a und d eines Metallrahmens $acdb$, so daß, wenn die Parallelogrammseiten überall

ununterbrochen wären, eine Stromverzweigung nach den Wegen $a b d$, $a c d$ eintreten würde. Wären überdies die Widerstände $a b = w_1$, $a c = w_2$, $b d = w_3$, $c d = w_4$ alle einander gleich, so würde ein in die Brücke $b c$ eingeschaltetes Galvanometer den Ausschlag Null geben. Aber auch dann wird längs $b c$ kein Strom fließen, wenn $w_1 : w_2 = w_3 : w_4$. Sind daher die Widerstände w_1 , w_2 , w_3 bekannt, so läßt sich durch Herausziehen von Stöpseln (wie beim SIEMENSschen Rheostaten) auf bestimmte Größen zu bringen, so läßt sich hieraus der Widerstand eines Leiters berechnen (die übrige Verbindung $c d$ als widerstandslos vorausgesetzt).

§ 149. 191. Graphische Erklärung von Wheatstones Brücke (Fig. 229.)

Anleitung: Mit den Polen einer Batterie Q sei das winkelförmige Kupferstück a und das gerade d verbunden, und beide seien als widerstandslos angenommen.

Fig. 229.



Zwischen a und d herrsche die Potentialdifferenz E , und der Potentialabfall dargestellt durch die beiden schiefen Geraden. a und d seien verbunden durch zwei parallele homogene Drähte, die sich nur durch die Längen $(l_1 + l_2)$ und $(l_3 + l_4)$ unterscheiden. Werden dann die Fußpunkte b und c der gleichen Ordinaten e einander durch die Galvanometerbrücke $b G c$ verbunden, so bleibt diese stromlos. Für jene Punkte b und c gilt aber gemäß der Ähnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke die Proportion $\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_3}{l_4}$. Da aber die Drähte als nur durch die Längen nicht durch den Querschnitt und spezifischen Widerstand sich unterscheidend angenommen waren, so gilt auch $\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}$.

§ 149. 192. Die Umrechnungszahlen des elektrostatischen Maßsystems in die beiden elektromagnetischen Systeme zu begründen.

Vorbemerkung. Was die Namen der drei Systeme betrifft, so sind sie drei absolute Systeme, da sie alle Größen auf Centimeter, Sekunden und Gr

ren. Dabei aber wenden die beiden theoretischen Maßsysteme die Einheiten cm, sec, g an; dagegen bleibt im praktischen oder elektro-chen Maßsystem zwar als Zeiteinheit sec , aber als Längeneinheit der Erdmeridianquadrant $= 10^9 \text{ cm}$, als Masseneinheit 10^{-11} g . — diese Umrechnungszahlen nur willkürlich sind, beruht der Unterschied dem theoretischen elektrostatischen Maßsystem (Übersichtstafel im th. S. 772, Kolonne 1) und dem theoretischen elektromagnetischen tem (Kolonne 2) auf folgenden Tatsachen:

ndem die Einheiten für die Mengen der Elektrizität und des Magnetismus Abstosungswirkungen gemäß dem COULOMBSchen Gesetz in überein-ler Weise definiert sind (so daß die Dimension der Einheit bei beiden $\text{cm}^{3/2} \text{ sec}^{-1} \text{ g}^{1/2}$ dieselbe ist), kommt als eine Erfahrung für sich noch die fs ein nach jenem elektrostatischen Maß gemessener Strom von bestimmter uf einen Pol von bestimmter Stärke nach BIOT-SAVARTS Gesetz mit er Kraft wirkt. Wird nun der Strom in dem zweiten, dem elektro-chen Maß, gemessen, so muß zwischen diesen beiden theoretischen nächst der Stromstärke, dann aber auch aller übrigen elektrischen und chen Größen, eine bestimmte Umrechnungszahl gelten.

dieser Zahl hat schon Faraday vorausgesehen, daß sie mit der Ge-igkeit des Lichtes nach Maßzahl und Dimension identisch sein werde r noch keineswegs beweist, daß die Identität sich auch auf die Qualität ung“) beider Größengattungen erstrecke, da ja sehr oft Größen ver-r Gattung gleiche Dimension haben, z. B. elektrostatische Kapazität und Widerstand im elektromagnetischen Maß und Geschwindigkeit; vgl. math. 7, S. 715). Das folgende Täfelchen zeigt, daß die Quotienten aus

Gattung der Größen	Dimension im		Quotienten
	elektro- statischen	elektro- magnetischen	
	System		
Ladungs- menge	$L^{3/2} T^{-1} M^{1/2}$	$L^{1/2} M^{1/2}$	$\frac{L}{T} = V$
Potential	$L^{1/2} T^{-1} M^{1/2}$	$L^{3/2} T^{-2} M^{1/2}$	$\frac{T}{L} = V^{-1}$
Kapazität	L	$L^{-1} T^2$	$\left(\frac{L}{T}\right)^2 = V^2$
Stromstärke	$L^{3/2} T^{-2} M^{1/2}$	$L^{1/2} T^{-1} M^{1/2}$	$\frac{L}{T} = V$
Widerstand	$L^{-1} T$	$L T^{-1}$	$\left(\frac{T}{L}\right)^2 = V^{-2}$

ensionen im elektrostatischen und elektromagnetischen System immer auf von der Dimension einer Geschwindigkeit (oder ihre reziproken Werte, drate oder reziproken Werte der Quadrate) führen. Jene GröÙe von der n v , die wir im Nächstfolgenden kurz die GröÙe v nennen wollen, haben ILHELM WEBER und KOHLRAUSCH (1856) aus Versuchen darüber ermittelt, groÙe Zahl elektrostatischer Ladungseinheiten in einem Stromleiter zur

Sei e die induzierte EMK in absoluten elektromagnetischen Potentialdifferenzen ist. Es wird also $f \cdot s = i \cdot \lambda \cdot H \cdot s = e \cdot i \cdot t$, somit $e \cdot t = H \cdot \lambda \cdot s$
 $e = H \cdot \lambda \cdot \frac{s}{t}$. Dabei ist aber $\frac{s}{t}$ die Geschwindigkeit c , mit welcher das
 Leiterstück λ durch das magnetische Kraftfeld von der Feldstärke H senkrecht zu
 Kraftlinienrichtung bewegt wird, so daß wir erhalten: $e = H \cdot \lambda \cdot c$. — Es
 bedeutet dabei $\lambda \cdot c$ die Fläche, welche das Leiterelement λ während 1 sec durch-
 schneidet; auf je 1 cm² dieser Fläche entfallen aber H Kraftlinien: somit ist die
 Maßzahl e der induzierten EMK gleich der Maßzahl $H \cdot \lambda \cdot c$ der in
 1 sec geschnittenen Kraftlinien; was zu beweisen war.

In allen Fällen, wo das Leiterstück die Kraftlinien nicht normal schneidet
 kann man auch für alle irgendwie krummlinigen Leiter läßt sich FARADAYS
 Regel ebenfalls anwenden, indem die Projektion der Leiterstücke auf die zu den
 Kraftlinien und der Bewegung normale Richtung eingeführt wird.
 Mehrere Beispiele hierfür in den beiden folgenden LA 195, 196.

Zusatz: Eine andere Erweiterung der Gleichung $e = H \lambda \cdot c$ besteht darin,
 die Bewegung des Sekundärleiters nicht mit konstanter, sondern mit ver-
 änderlicher Geschwindigkeit geschieht. Überhaupt führt der Umstand, daß
 FARADAYS Regel die elektromotorische Kraft maßzahlengleich gesetzt wird
 „per Zeiteinheit“ geschnittenen Kraftlinien, zu folgenden Analogien: Der
 Ausdruck für die Geschwindigkeiten $v = \frac{s' - s}{t' - t}$ für $t' = t$ ist analog

die Änderung der EMK und der Ladung $v_e = \frac{e' - e}{t' - t}$ für $t' = t$. Ferner

uns in LA 203 noch nützlich werden die RechnungsgröÙe $w_e = \frac{v_e' - v_e}{t' - t}$ für
 t ; diese steht zu e in derselben Beziehung wie bei der Bewegung eines Punktes
 Beschleunigung w zum Wege s .

195. Die Entstehung Ströme im Erdinduktor erklären.

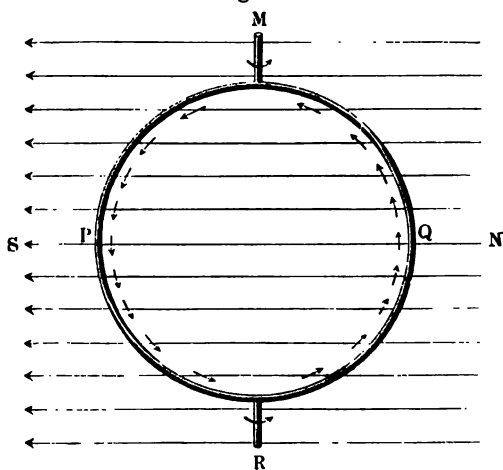
Anleitung: Stellen NS
 (Fig. 231) und die zu ihr Paral-
 lelen die Kraftlinien des homo-
 gen magnetischen Kraftfeldes

Erde dar, und wird der Ring
 Erdinduktors um die zu NS
 senkrechte Achse MR gedreht, so
 schneiden die Kraftlinien am häu-
 figsten bei P und Q, dagegen
 nicht nächst M und R ge-
 schnitten (beides angedeutet
 durch den kleineren und gröÙe-
 ren Abstand der Pfeile nächst
 dem Ring). Die Berechnung der
 an den einzelnen Stellen des

Ringes induzierten EMKe bildet einen besonderen Fall der folgenden allge-
 meineren Aufgabe:

Fig. 231.

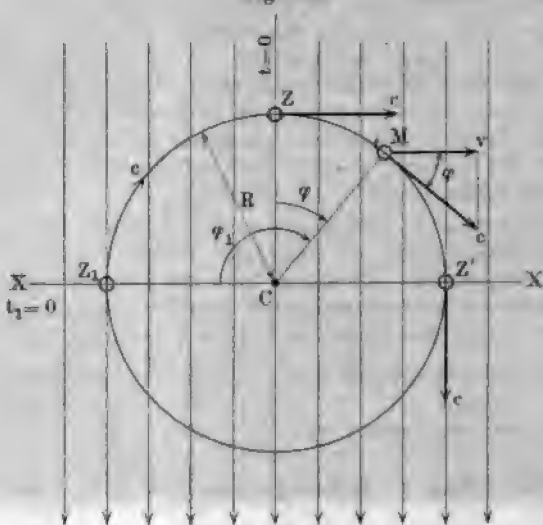
§ 151.



§ 151. 196. Die Grundgleichung für Wechselströme $e = E \cdot \cos \alpha t$ abzuleiten.

Anleitung: Wir denken uns einen geradlinigen Stromleiter von der Länge l in einem homogenen magnetischen Kraftfeld H mit konstanter Geschwindigkeit α so bewegt, daß er zu seiner ursprünglichen Lage Z

Fig. 232.



$\alpha = 0$, Fig. 232) stehen bleibt; die Drehung liege dabei in dem l R cm parallel zu der der sich also mit konstanter Umfangsgeschwindigkeit $c = R \cdot \alpha$ bewegt. Der Stromleiter bewegt sich von Z über M nach Z' zurück über Z_1 bis Z . Er schneidet die Kraftlinien senkrecht mit der Geschwindigkeit v , nun für den Punkt M die Geschwindigkeit v Maximum, nimmt allmählich ab (allgemein $v = c \cdot \cos \varphi = R \cdot \alpha \cdot \cos \varphi$) [vgl. § 12, II, Gl. (1)]. Erreicht in Z' den Wert $v = 0$. Entsprechend den Induktionsbeziehungen in den übrigen

Quadranten. — Nach FARADAYS Regel (LA 194) ist die induzierte EMK, welche beim Durchschneiden der Kraftlinien auftritt $e = H \cdot l \cdot v$ (hier ist v anstatt c zu setzen, da die Geschwindigkeit normal zur Kraftlinienrichtung fortwährend variiert). Wir setzen also für die im Punkte M induzierte EMK den Wert $e = H \cdot l \cdot R \cdot \alpha \cdot \cos \varphi$, der sein Maximum E für $\cos \alpha t = +1$, also für $t = 0$, d. i. im I. Quadranten erreicht. — Wenn der Winkel $\varphi = \alpha t$ und damit auch die Zeit t nicht von Z ausgehend zählt, sondern schon von Z_1 an ($1/4$ Periode vorher) und die entsprechenden Bezeichnungen φ_1 und t_1 einführen, so erhalten wir $\varphi_1 = 90^\circ + \varphi$, daher $\cos \varphi = \cos(\varphi_1 - 90^\circ) = \sin \varphi_1$, ferner $\varphi = \alpha \cdot t$ und $\varphi_1 = \alpha \cdot t_1$, somit $e = E \cdot \sin \varphi_1 = E \cdot \sin \alpha t_1$. Wenn wir also die Zeit t_1 von jenem Augenblicke an zählen, in dem keine Kraftlinien geschnitten werden (Z_1), dann ergibt sich die induzierte EMK die Beziehung $e = E \cdot \sin \alpha t_1$, analog der für die Zeit-Gesetz $s = a \sin \alpha t$ einer einfachen Sinusschwingung (§ 12).

§ 151. 197. Zu zeigen, daß bei einem Wechselstrom (Sinusstrom) die mittlere Stromstärke $i_m = \frac{2}{\pi} \cdot J$.

Anleitung: Sind die veränderlichen Stromstärken durch die Ordinaten einer Sinuslinie gegeben, wobei J den Maximalwert darstellen möge, so ist die mittlere Stromstärke i_m gleich der Höhe des flächengleichen Rechteckes bei gleichem Inhalt.



$\frac{1}{4}$ -Periode ($0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$) hat die Fläche der Sinuskurve von der Gleichung $= J \cdot \sin \varphi$ den Wert $F = J \cdot 1$ (mathem. Anhang Nr. 19); die Höhe i_m des gleichschenkeligen Rechteckes ergibt sich also aus $i_m \cdot \frac{\pi}{2} = 1 \cdot J$, also $i_m = \frac{2}{\pi} \cdot J$.

XIII. Beziehungen der elektrischen zu den kalorischen, chemischen und optischen Erscheinungen.

198. Zu beweisen, daß die (mechanische oder kalorische) $\S 152$.
Kundenarbeit äquivalent ist der Stromarbeit nach der Gleichung
Arbeit = Ladungsmenge \times Ladungsgrad.

Anleitung: Um eine Ladungsmenge E vom Potential Null an eine Stelle zu bringen, wo das konstante Potential V herrscht, ist eine Arbeit erforderlich im Maße $A = EV$ (— nicht $A = \frac{1}{2} EV$, wie in $\S 136$, wo das Potential erst in Null auf V zu steigern war). Diese Arbeit wird bei der Entladung wieder gewonnen. Strömt nun während einer Zeit von t sec eine Ladungsmenge E durch einen Draht von einer Stelle höheren zu einer Stelle niedrigeren Potentials, E ist die Potentialdifferenz e , so erscheint die gewonnene Arbeit in Form von Wärme; da die elektromotorische Kraft $E = it$, deren Arbeitswert $A = it \cdot e = i^2 w \cdot t$, ist die Wärmemenge per Sekunde $Q = 0,24 i e = 0,24 i^2 w$ cal.

199. Das kalorische Äquivalent A der mechanischen Arbeits- $\S 153$.
einheit (§ 82) aus der durch Erwärmung eines Leiters in einem Kalorimeter erzeugten Temperaturerhöhung per sec zu berechnen.

Anleitung: Das Kalorimeter (Fig. 546, S. 494) enthalte z. B. 200 g Wasser, dessen Wasserwert des Gefäßes sei 25 g. Durch einen (Konstantan-) Draht von R Widerstand werde 120 Sek. lang ein Strom von 3 Amp. geleitet. Die Erwärmung betrage $2,3^\circ$. — Aus $A i^2 w t = 225 \cdot 2,3$ cal. ergibt sich $A = 0,24$ cal.

200. Zu beweisen, daß die der Stromstärke günstigste Schal- $\S 155$.
ung für mehrere gleiche Elemente die ist, bei der der äußere Widerstand gleich ist dem inneren.

Anleitung: Es seien n einfache Elemente, deren jedes die elektromotorische Kraft e und den inneren Widerstand w_i hat, anfänglich alle nebeneinander geschaltet. Dann ist wegen der Vergrößerung des Plattenquerschnittes der innere Gesamtwiderstand $W_i = \frac{w_i}{n}$. Hat der äußere Schließungsleiter (einschließlich der Betrieb zu setzenden Drähte bei Telegraphen, Glühversuchen ...) den gegebenen Widerstand W_a , so ist (weil die elektromotorische Kraft e der ganzen Batterie gleich ist der je eines der n Elemente) die Stromstärke $J = \frac{e}{W_i + W_a}$. Bilden wir nun aus den n Elementen x gleiche Gruppen, so daß nunmehr je $\frac{n}{x}$ (zu einem $\frac{n}{x}$ fachen Element) nebeneinander geschaltet und diese x Gruppen hintereinander geschaltet sind, so wird die elektromotorische Kraft $E = ex$,

der innere Widerstand je eines der $\frac{n}{x}$ fachen Elemente wegen der Verkleinerung des Gesamtplattenquerschnittes x mal so groß, somit in den x mal so vielen Elementen x^2 mal so groß; an dem äußeren Widerstand W_a ändere sich nichts. Daher ist jetzt die Stromstärke $J' = \frac{ex}{W_i x^2 + W_a} = \frac{e}{W_i x + \frac{W_a}{x}}$. Hier

J' das Maximum, wenn der Nenner das Minimum erreicht, was bei Gleichheit der Summanden eintritt, weil das Produkt der Summanden $W_i x \cdot \frac{W_a}{x} = W_i W_a$ eine konstante Größe ist (Zusatz im math. Anh. Nr. 14, Beispiel 2). Für gegebene Werte von W_a und n ist also $x = \sqrt{\frac{W_a}{W_i}} = \sqrt{n \cdot \frac{W_a}{W_i}}$. Die maxi-

Stromstärke ist dann: $J_{max} = \frac{E}{W_a + W_i} = \frac{e \sqrt{n \frac{W_a}{W_i}}}{2 W_a} = \frac{e}{2} \sqrt{\frac{n}{W_a W_i}}$.

§ 155.

201. Messende Versuche zum Ohmschen Gesetz an galvanischen Elementen.

Beispiele: 1. Ein Daniellelement sei durch Drähte, deren Widerstand vernachlässigt werden kann, mit einem Hartmann-Braunschen Ampèremeter 0,668 Ohm Widerstand verbunden. Der Widerstand des ganzen Stromkreises w , die Stromstärke i , die elektromotorische Kraft e ; es werden dann $w_1 = w_2 = 2$ Ohm u. s. f. eingeschaltet und die Stromstärken $i_1, i_2 \dots$ beobachtet.

Ist $i w = e$, $i_1 (w + w_1) = e \dots$, woraus $w = \frac{w_1 i_1}{i - i_1} = \frac{w_2 i_2}{i - i_2}$ u. s. f. Der Mittelwert dieser nahezu übereinstimmenden Werte von w ergibt (nach Abzug des Ampèremeterwiderstandes) den inneren Widerstand des Elementes.

Z. B.: Es war abgelesen $i = 1,32$ Amp., $w_1 = 1$ Ohm, $i_1 = 0,61$.

Ferner $w = 0,859$ Ohm, innerer Widerstand $w_0 = 0,191$ Ohm.

2. Aus denselben Versuchen folgt die elektromotorische Kraft des Elementes $e = i \cdot w = 1,32 \cdot 0,859 = 1,134$ Volt.

3. Ähnliche Versuche für Reihen- und Parallelschaltung von Elementen.

4. Man benutze das Ampèremeter als Galvanometer ($w_i = 74$ Ohm), schalte neben 1 Daniell soviel Rheostatenwiderstand (273 Ohm), daß der Ausschlag 18 Skalenteile beträgt. Verdoppelt man den Gesamtwiderstand von 347 Ohm, sinkt der Ausschlag auf 9° u. s. f. — Schaltet man ein zweites Element hinzu, verdoppelt sich der Ausschlag.

§ 156.

202. Zu zeigen, daß die Beziehungen für den inneren und äußeren Widerstand der Elemente (LA 200) auch bei Thermosäulen, Dynamomaschinen u. s. w. (speziell auch bei Erregung eines Synchronstromes mittels Influenzmaschine, § 140, S. 438, Figg. 472 u. 473) gelten.

Anleitung: Bei einer Dynamomaschine herrscht an den Klemmen eine mit den Konstruktionsgrößen abhängige Potentialdifferenz, und es zeigt sich daher hier ein Potentialabfall, sobald der „äußere“ Stromkreis geschlossen wird, so daß ein Strom fließen kann. Derselbe Strom fließt jedoch auch im Innern

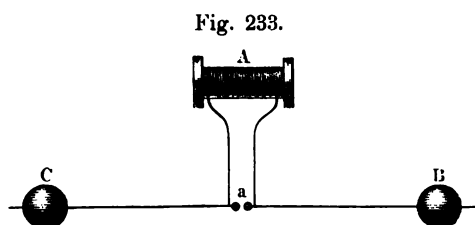


hine (durch die induzierten Ankerdrähte und durch die Magnetbewickelung): Ob ist auch dieser „innere Widerstand“ der Maschine in Betracht zu ziehen. Dieser innere Widerstand ließe sich beliebig klein machen, wenn die (Anker-Magnet-) Wicklungen beliebig kurz und dick gemacht werden könnten; stehen aber folgende Hindernisse entgegen: a) Je kürzer die induzierten sind, desto kleiner wird unter sonst gleichen Verhältnissen die induzierte (FARADAYS Regel, § 151, LA 194). b) Mit dem Drahtquerschnitt wächst Raumbedarf für diese Drähte sehr bedeutend, d. h. die Maschine wird unhältnismäßig groß und schwer, daher auch teuer, so daß es wirtschaftlicher, im Inneren der Maschine einen bestimmten Prozentsatz der Leistung durch Erwärmung zu verlieren (LA 205, 211). — Ähnlich für Thermosäulen.

Bei der Erregung eines Stromes mittels der Influenzmaschine (§ 140, auch a) ist zu bedenken, daß im äußeren Stromkreise nur dann ein Strom fließbar ist (durch die kleinen Pendel), wenn zwischen den beiden Polkugeln Potentialdifferenz herrscht; würden wir nun anstatt der halbleitenden Holzstangen, welche die Pendel tragen, gut leitende Drähte verwenden, so wäre der Widerstand w_a derselben verschwindend klein gegen den inneren Widerstand w_i ; Influenzmaschine, d. h. zwischen den beiden Polkugeln würde (nahezu!) keine Potentialdifferenz mehr herrschen, und die Maschine wäre „kurz“ geschlossen. Die Maschine erzeugte Potentialdifferenz würde dann ganz dazu verwendet, den inneren Widerstand w_i zu überwinden.

203. Die Schwingungsdauer elektrischer Schwingungen aus der Kapazität c und der Selbstinduktion L eines Leitersystems zu berechnen. § 157.

Vorbemerkung über das Maß der Selbstinduktion eines Leitersystems: Die Selbstinduktion aufgefaßt werden kann als die Summe der wechseligen Induktionen aller Stromfäden, die wir uns in dem System bei Verengung seines Ladungsgrades (z. B. bei rascher disruptiver Entladung) auf den zu denken haben, so gilt auch für die Selbstinduktion die nach FARADAYS Regel bestehende Proportionalität $N = L i$. . (1) zwischen der Zahl N Kraftlinien eines Primärstromes oder Magnetes, die seitens des Sekundärstromes geschnitten werden, und der Stärke i des induzierten Stromes; der Proportionalitätsfaktor L heißt der Selbstinduktionskoeffizient des Leitersystems. Speziell hat die Selbstinduktion wesentlichen Einfluß auf den Verlauf der Entladung in den sehr jähen Änderungen bei disruptiver Entladung in einer Funkenstrecke Leydener Flasche, Induktorium, zwar hier nicht nur in den Induktionen der Sekundärspule, sondern auch in den mit den Polkugeln a verbundenen großen Leitern BC , Fig. 233). —



Daß der Verlauf der Entladung im einfachsten Falle analog sei einer Sinusschwingung $s = a \cdot \sin(\omega t)$ mit der periodischen Beschleunigung $w = -\omega^2 s$ und daher mit der Schwingungsdauer $\frac{2\pi}{\omega}$, ergibt sich so: das Leitersystem BC habe die Kapazität c und zu einem bestimmten Zeitpunkt t durch die Ladungsmenge E auf das Potential ϕ geladen. Physik.

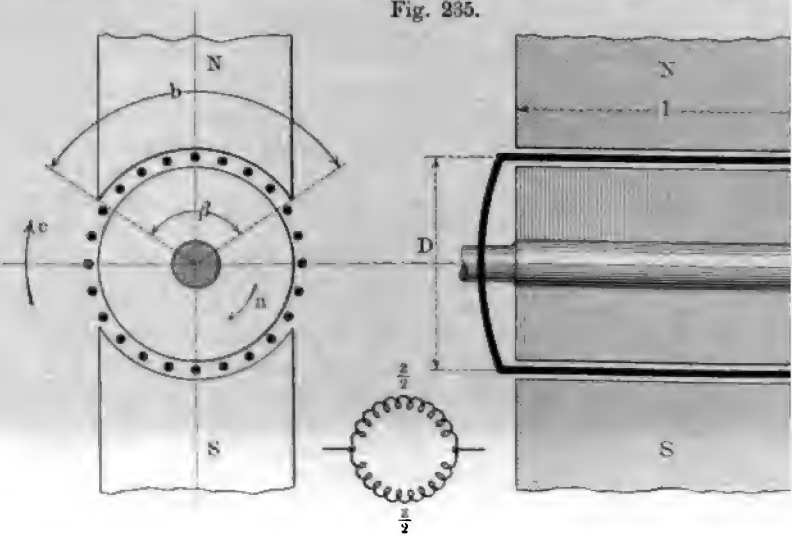
Die Zahl der hintereinander geschalteten induzierten Drähte ist $(\frac{1}{2} \cdot Z)$, der Anker einer zweipoligen Dynamomaschine aus zwei parallel geschalteten Zweigen besteht; es wird daher die in allen Drähten induzierte EMK $E = \frac{1}{2} \cdot e_0 \cdot Z \cdot 10^{-8}$.

— Nun ist $2b : D\pi = Z_i : Z$, daher $Z_i = \frac{2b \cdot Z}{D\pi}$, somit:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{H \cdot l \cdot D \pi n}{60} \cdot \frac{2b \cdot Z}{D\pi} \cdot 10^{-8} = \frac{H \cdot l \cdot b \cdot n \cdot Z}{60 \cdot 10^8}.$$

Hier ist $(l \cdot b)$ die Fläche des Nordpols (in cm^2) des Feldmagnetes, aus der Kraftlinien in den Anker eintreten, resp. gleich der Fläche des Südpoles, in

Fig. 235.



die Kraftlinien wieder aus dem Anker ihren Rückweg finden: es ist $N = H \cdot l \cdot b$ die Kraftlinienzahl per Polpaar (zugehörig zu einem geschlossenen magnetischen Kreis). Es wird demnach $E = \frac{N \cdot n \cdot Z}{60 \cdot 10^8}$ Volt.

b) Für mehrpolige Maschinen gilt die allgemeine Beziehung $E = \frac{N \cdot n \cdot Z}{60 \cdot 10^8}$.

Dabei bedeutet p die Anzahl der Polpaare, p_1 die Anzahl der Bürstenpaare, $2p_1$ die Zahl der parallel geschalteten Stromzweige im Anker.

Man ersieht aus diesen Grundgleichungen, daß die EMK einer Maschine größer wird, wenn

1. das Magnetfeld stärker gemacht wird (N),
2. die Tourenzahl erhöht wird (n),
3. die Zahl der Ankerdrähte vergrößert wird (Z),
4. die Zahl der Pole vermehrt wird (p),
5. die Schaltung im Anker so gewählt wird, daß die Zahl der parallel geschalteten Stromkreise kleiner wird (p_1).

206. Zu zeigen, daß die in einem Elektromotor auf elektromotorische Gegenkraft (EMGK) dessen Nutzeffekt, d. h. dessen Wirkungsgrad in günstigem Sinne beeinflusst.

Anleitung: Bezeichnen wir die EMGK mit E , die Spannungsdifferenz, an der der Motor angeschlossen wird (Klemmenspannung) mit E_k , die ihm zugeführte Stromstärke mit J , den Widerstand der Magnetwicklung und des Ankers zusammengenommen mit w , so muß die Gleichung bestehen: $E_k = E + J \cdot w$. Multiplizieren wir diese Gleichung mit J , so erhalten wir $E_k \cdot J = E \cdot J + J^2 \cdot w$. Bei ist $(E_k \cdot J) = A$ der zugeführte elektrische Effekt (Gesamteffekt in Watt), $J^2 \cdot w$ der Verlust durch Stromwärme, so daß also $(E \cdot J) = a$ den Nutz-
 effekt (in Watt) darstellt. Der Wirkungsgrad η wird daher um so größer, je näher sich E dem E_k nähert, weil $\eta = \frac{a}{A} = \frac{E \cdot J}{E_k \cdot J} = \frac{E}{E_k}$ ist, d. h. also der Wirkungsgrad steigt mit der EMGK. Der ideale Fall $E = E_k$, also $\eta = 1 = 100$ Proz., natürlich niemals ganz zu erreichen, weil es einen widerstandslosen Motor ($w = 0$) nicht gibt, so daß stets $E < E_k$ bleibt.

Warum ist es auch beim Elektromotor günstig, die Bürsten (aber gegen die Drehrichtung) zu verschieben, wenn der Motor „belastet“ ist? (Vergl. Ankerreaktion und Bürstenverschiebung bei den Generatoren, § 162, Fig. 601 bis 603).

Wenn man zwei ganz gleichgebaute Dynamomaschinen miteinander durch Leitungen verbindet, so daß die eine als Generator, die andere als Motor wirkt, ist bei Hauptstrommaschinen (Fig. 597, S. 537) die Drehrichtung des Motors entgegengesetzte von der des Generators, bei Nebenschlussmaschinen (Fig. 598, S. 537) jedoch beim Motor und Generator dieselbe; warum?

207. Charakteristische Eigenschaften der Hauptstrom-, Nebenschluss- und Compound-Generatoren und der entsprechenden Motoren. § 162, 163.

Anleitung: Wir bezeichnen im folgenden mit:

- E die EMK der Maschine (des Generators, bzw. Motors),
- E_k die Klemmenspannung,
- W_a den Ankerwiderstand,
- W_m den Widerstand der Magnetwickelungen,
- J_a den Ankerstrom,
- J_m den Magnetisierungsstrom,
- J den Strom im äußeren Kreise,
- n die Tourenzahl per Minute.

Für die Praxis ist das Verhalten der Dynamomaschinen bei konstanter Tourenzahl n und variabler Belastung wichtig; bei den Motoren handelt es sich um den Betrieb mit konstanter Klemmenspannung E_k und variabler Belastung.

A. Dynamomaschinen (Generatoren).

Die Eigenschaften im Betriebe werden durch die sogenannte „Charakteristik“ zum Ausdruck gebracht; man versteht darunter die graphische Darstellung des Zusammenhanges zwischen der Stromstärke J im äußeren Kreise (Nutzstrom) und der Klemmenspannung E_k ; die Stromstärken J werden dabei als Abszissen, die Klemmenspannungen E_k als Ordinaten angenommen.

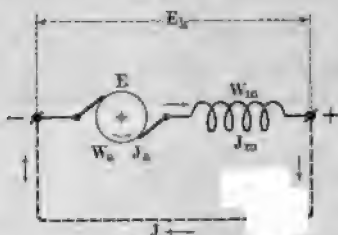
a) Hauptstrommaschine (Fig. 236).

Vor allem ist $J = J_a = J_m$ und nach der Grundgleichung der Dynamomaschinen (LA 205) $E = \frac{N \cdot n \cdot Z}{60 \cdot 10^8} \cdot \frac{p}{p_1} = K \cdot N \cdot n$, worin K konstant ist, da Z Leiterzahl, die Polpaarzahl p und die Zahl der Bürstenpaare p_1 für eine

Leitaufgaben.

maschine konstant sind; wenn nun auch die Tourenzahl n konstant so ergibt sich $E = (K \cdot n) \cdot N = K_1 \cdot N$, d. h. die EMK ist der Kraftlinienzahl N per Polpaar; letztere wird aber durch den Magnetstrom J_m (hier $= J$) bestimmt und verläuft ähnlich der Kurve für Eisen (Fig. 237); durch Änderung des Ordinatenmaßstabs

Fig. 236.



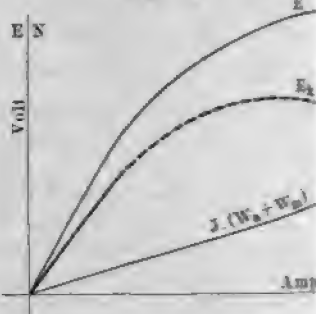
also die Kurve für diese Kurve heißt „in die Maschine belastet...“ d. erzeugte EMK E liefern, andererseits $e = J \cdot (W_a + W_m)$ zu durch den Ursprung. $E_k = E - e = E - J \cdot (W_a + W_m)$ von der EMK E den Spannungsverlust durch den „inneren“ Widerstand der Maschine $W_i = W_a + W_m$ ver wird, so ergibt sich eine zweite Kurve, die „äußere Charakteristik“, welche die Klemmenspannung E_k in Abhängigkeit vom Strom J darstellt.

Die Form dieser Kurve für E_k läßt erkennen, daß die Hauptstrommaschine bei konstanter Tourenzahl n durchaus nicht eine konstante Klemmenspannung bei verschiedenen Belastungen zu liefern vermag, weshalb sie auch in stationen mit konstanter Netzspannung nicht brauchbar ist und überhaupt für spezielle Zwecke Verwendung finden kann.

b) Nebenschlußmaschine (Fig. 238).

Es ist $E_k = E - J_a \cdot W_a = J_m \cdot W_m$ und $J_a = J + J_m$; wenn die Maschine einen hohen elektrischen Wirkungsgrad ($\eta_e = \frac{\text{Nutzeffekt}}{\text{Gesamteffekt}} = \frac{E_k \cdot J}{E \cdot J_a}$) soll, so darf der Spannungsverlust im Anker ($= J_a \cdot W_a$), sowie der Strom der Magnetwindung (W_m groß! dünne Drähte!) („im Nebenschluß“) nur klein sein. Dann ist aber in allererster roher Annäherung $J_a \cdot W_a \neq 0$, also J und ebenso $J_a \neq J$ wegen $J_m \neq 0$, d. h. gegenüber J (bzw. J_a) spielt keine Rolle und deshalb ist auch E (bzw. angenähert auch E_k) konstant für J (vgl. Fig. 239), sobald die Tourenzahl n konstant bleibt; es verursacht der Spannungsverlust im Anker, sowie die Ankerreaktion ein unbedeutendes Sinken der Klemmenspannung E_k bei steigendem Strom J ; das Magnetfeld bleibt fast ganz konstant, da J_m konstant bleibt, im Gegensatz zur Hauptstrommaschine bei welcher die Stärke des Magnetfeldes mit J für jede Belastung sich ändert.

Fig. 237.



Zusammenhang zwischen J und E der Hauptstrommaschine. Wenn die Maschine $E_k \cdot J$ Watt liefert, so verwendet, um die Klemmenspannung E_k (in Prozente betragenden) Spannung E ist die graphische Darstellung eines Zusammenhangs an nun (graphisch) nach der Gleichung $E_k = E - J \cdot (W_a + W_m)$ von der EMK E den Spannungsverlust durch den „inneren“ Widerstand der Maschine $W_i = W_a + W_m$ ver wird, so ergibt sich eine zweite Kurve, die „äußere Charakteristik“, welche die Klemmenspannung E_k in Abhängigkeit vom Strom J darstellt.

Die Nebenschlussmaschine liefert also fast konstante Spannung für alle Belastungen; der geringe Spannungsabfall kann leicht durch teilweises Ausschalten Regulierwiderstandes (vor der Magnetwicklung) aufgehoben werden.

Fig. 238.

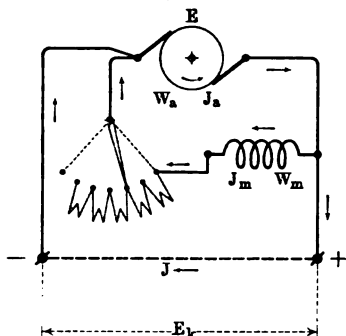
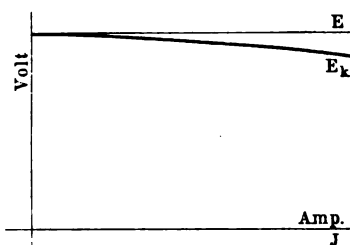


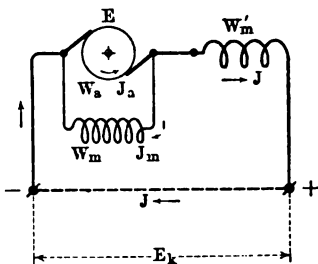
Fig. 239.



c) Compoundmaschine (Fig. 240).

Wenn man bei einer Nebenschlussmaschine auf die Feldmagnete noch Windungen (dicken Drahtes) aufwickelt, die vom Nutzstrome J durchflossen werden, wird der geringe Spannungsabfall, der bei allein wirksamer Nebenschlussung mit steigendem Strome auftreten würde, durch die gleichzeitige Wirkung der neu hinzukommenden Hauptstromwindungen, die bei steigendem J das Magnetfeld verstärken, wieder kompensiert, so daß bei zweckmäßiger Konstruktion der Nebenschluss- und Hauptstromwicklungen bei jeder Belastung dieselbe Klemmenspannung E_k erzielt wird. Verstärkt man die Wirkung der Hauptstromwicklung noch mehr, dann steigt sogar die Klemmenspannung mit steigendem Strome J (übercompoundede Maschine, Bahngenerator!); es läßt sich durch den Spannungsverlust auf der Fernleitung kompensieren, d. h. also die Spannung an einem fern gelegenen Punkte ohne Erhöhung konstant halten.

Fig. 240.



B. Elektromotoren.

Bei den Elektromotoren stellt die „Charakteristik“ den Zusammenhang zwischen Drehzahl n und Stromstärke J bei konstanter Klemmenspannung E_k dar; außerdem ist das Drehmoment, das der Motor abgeben kann, von Wichtigkeit.

a) Hauptstrommotor.

Die EMGK ist $E = \frac{N \cdot n \cdot Z}{60 \cdot 10^8} \cdot \frac{p}{p_1} = K \cdot N \cdot n$ und ist $E = E_k - J \cdot (W_a + W_m)$; nun hierbei der Wirkungsgrad groß werden, dann muß der Spannungsverlust $W_a + W_m$ klein bleiben, d. h. in erster Annäherung $J \cdot (W_a + W_m) \neq 0$, ist $E \neq E_k$ konstant, gemäß unserer Voraussetzung; dann wird aber n nahezu konstant, d. h. wenn die Kraftlinienzahl N wächst, so fällt die Drehzahl n nahezu verkehrt proportional; N wächst aber nur bei steigendem

Strome J , und zwar bei geringerer „Sättigung“ der Feldmagnete fast direkt proportional dem Strome J ; folglich ist auch das Produkt $J \cdot n$ konstant (seitige Hyperbel, bezogen auf die Asymptoten); der Einfluss des Span-

Fig. 241.

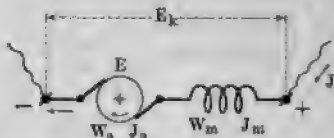
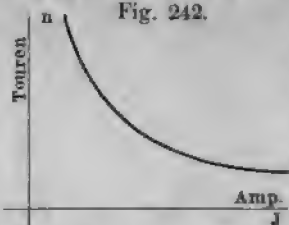


Fig. 242.

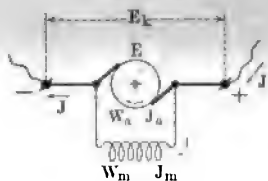


stärker belastet wird (Steigungen bei Straßenbahnen!). Das Drehmoment ab von der Kraftlinienzahl N und vom Strome im Anker $J_a = J$; bei steigendem Strome J nimmt auch N zu, so daß die Vergrößerung des Drehmomentes dieser beiderseitigen Einflüsse sehr bedeutend ist (kräftiges Anlaufen bei Motoren, sowie bei Aufzügen und Kranen).

b) Nebenschlußmotor.

Da die Magnetwicklung an der konstanten Klemmenspannung geschlossen ist, so bleibt J_m konstant für jede Motorbelastung, also $N = 1$ für $E_k = \text{konstant}$; es ist nun die EMGK $E = (K \cdot N) \cdot n = K' \cdot n$; da $E = E_k - J_a \cdot W_a$ und $J_a \cdot W_a$ sehr klein gegen E_k sein soll, so wird auch E konstant, so daß $E = K' \cdot n \neq \text{konstant}$, also:

Fig. 243.



Tourenzahl $n \neq \text{konstant}$ bleibt für alle Belastungen das Drehmoment ist nicht so groß, wie beim Strommotor, weil sich das Magnetfeld nicht vergrößert, sondern nur der Ankerstrom (vorausgesetzt $E_k = \text{konstant}$ bleibt). Wegen seiner nahezu bleibenden Tourenzahl wird der Nebenschlußmotor besonders für Transmissionsantrieb (Fabriken, etc.) verwendet.

c) Der Compoundmotor

wird verhältnismäßig selten verwendet und ermöglicht durch die gleichzeitige Wirkung einer Nebenschluß- und einer (schwächenden!) Hauptstromwicklung die vollständige Konstanz der Tourenzahl.

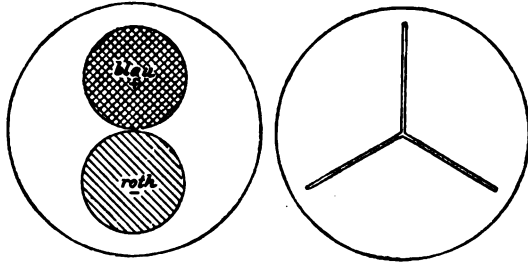
- § 164. 208. Die den Dreiphasenmaschinen zu Grunde liegende metrische Gleichung $\sin \varphi + \sin (\varphi - 120^\circ) + \sin (\varphi - 240^\circ)$ zu beweisen.

Anleitung: $\sin (\varphi - 120^\circ) + \sin (\varphi - 240^\circ) = 2 \sin (\varphi - 180^\circ) \cos 60^\circ = -\sin \varphi$
 Oder: $\sin \varphi + \sin \varphi \cdot \cos 120^\circ - \cos \varphi \cdot \sin 120^\circ + \sin \varphi \cdot \cos 240^\circ - \cos \varphi \cdot \sin 240^\circ$
 $= \sin \varphi + \sin \varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos \varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin \varphi \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \cos \varphi \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

- § 164. 209. Die den Dreiphasenmaschinen zu Grunde liegende metrische Beziehung (LA 208) graphisch zu versinnlichen.

Anleitung: Über die mit dem blauen und roten Kreis (Fig. 244) bemalte Scheibe wird die mit dem dreifachen Schlitz versehene Scheibe gelegt. Stellt dann eine vom Berührungspunkt der beiden farbigen Kreise durch sie gezogene

Fig. 244.



Sehne die Stärke des positiven, bzw. negativen Stromes dar, so läßt sich zuerst zeigen, daß bei einer Drehung aus einer tangentialen Stellung des Schlitzes um 180° die Sehnen nach der Funktion Sinus wachsen; denn $s = d \sin \varphi$. Wird dann z. B. für $\varphi = 90^\circ$, d. i. die Maximalstärke des positiven Stromes $J = d$ gesetzt, so kommen zu ihr noch die negativen Stromstärken $-(J \sin 30^\circ + J \sin 150^\circ) = -(\frac{1}{2}J + \frac{1}{2}J) = -J$, so daß im ganzen $+J + (-J) = 0$. Aber auch allgemein stellen die drei durch Schlitz sichtbaren Sehnen zusammen immer wieder die Summe $J = 0$ dar, und bei gleichmäßiger Drehung der geschlitzten Scheibe ist daher das An- und Abschwellen der drei einzelnen Ströme stetig mit dem Blick zu verfolgen.

210. Betriebsgrößen einer 16kerzigen Glühlampe.

§ 171.

Anleitung: Die gebräuchlichen Glühlampen konsumieren etwa 3 Watt per Hefnereinheit; diese Zahl (welche ökonomischer Koeffizient oder minder korrekt Ökonomie der Glühlampe heißt) ist empirisch gefunden (theoretisch wäre sie abzuleiten aus den elektrischen und optischen Konstanten des Kohlenfadens). — Eine Glühlampe zu 16 Hefnereinheiten (gewöhnlich bezeichnet als „16kerzige“ Glühlampe) verbraucht daher $3 \times 16 = 48$ Watt. Brennt die Lampe im Anschluß an ein Leitungsnetz von 100 Volt Spannung, so fließt durch die Lampe ein Strom von der Stärke J Amp. $= \frac{48 \text{ Watt}}{100 \text{ Volt}} = 0,48 \text{ Amp.} \neq \frac{1}{2} \text{ Amp.}$

Während einer Stunde ist also der Lampe die Arbeit: $48 \text{ Watt} \times 1 \text{ Stunde} = 48 \text{ Wattstunden} = \text{nahezu } \frac{1}{2} \text{ Hektowattstunde}$ zuzuführen. Diese Arbeitseinheit „Hektowattstunde“ (event. die zehnmal so große Einheit „Kilowattstunde“) wird bei der Eichung der Elektrizitätsmesser (Elektrizitätszähler) zu Grunde gelegt. — Da nun 1 PS (Pferdestärke) = 736 Watt (§ 22), so entspricht dem in der Glühlampe aufgewendeten elektrischen Effekt von 48 Watt ein mechanischer Effekt von $\frac{48}{736} \text{ PS} = \frac{3}{46} \neq \frac{1}{15} \text{ PS}$. Somit ist während einer Brennstunde für eine 16kerzige Glühlampe eine Arbeit von nahezu $\frac{1}{15}$ Pferdestärkestunde erforderlich.

Man berechne den Effektverbrauch einer Glühlampe zu 10, 25, 32 Hefnereinheiten, sowie die Stromstärke bei 110, 150, 220 Volt Spannung!

Die sogenannten „Spar“-Glühlampen brauchen nur etwa 2,5 Watt (eventuell nur 2 Watt) per Hefnereinheit, dafür ist aber ihre Lebensdauer viel geringer; dieselbe beträgt (je nach der Güte des Fabrikates) bei

3 Watt per Hefnereinheit	ungefähr	800 bis 1000 Stunden,
$2\frac{1}{2}$ „ „ „	„	400 „ 500 „
2 „ „ „	„	300 „ 400 „

Die „Sparglühlampen“ sparen daher zwar an Stromkosten, dafür müssen aber häufiger neue Lampen eingesetzt werden.

Spannung $e = e \cdot J$ erfordern, man bezeichnet dieselbe als „Verlust auf der Leitung“; die Bezeichnung „Verlust“ erklärt sich sofort, J multiplizieren; wir erhalten dann: $e \cdot J = J^2 \cdot w$, d. i. je welche nach dem Gesetze von Joule (§ 152) im Widerstande w b Wärme verwandelt, also für die Übertragung nutzlos aufgewend Wird nun im Orte B ein Nutzeffekt $E' \cdot J$ Watt verlangt, so da Spannung E' Volt und ein Strom J Amp. zur Verwendung komm in A eine Spannung $E = (E' + e)$ Volt herrschen und dabei die Strc durch die Leitung nach B , dort durch die Lampen, Motoren usw. die Rückleitung wieder nach A zurückfließen. Es ergibt sich also fol

$$\begin{array}{ll} A \text{ Watt} = E \cdot J & \dots \dots \dots \text{erforderliche Wattleist} \\ a \quad \quad = e \cdot J = J^2 \cdot w & \dots \dots \dots \text{Wattverlust auf der L} \\ A' \quad \quad = E' \cdot J & \dots \dots \dots \text{Nutzleistung in } B. \end{array}$$

Es geht also auf der Leitung ein bestimmter Prozentsatz der Nutzleistung A' „verloren“; dieser Verlust hängt nur von de und vom Leitungswiderstande w ab, da $a = e \cdot J = J^2 \cdot w$. Nun ist

$$\text{daher wird: } a = \frac{J^2 \cdot L}{K \cdot q} = J \cdot e, \text{ also der Spannungsverlust } e =$$

Diese Gleichung (1) bildet die Grundlage für alle Leitungsbe J , L , K und e gegebene Größen sind. — Ist insbesondere der Querschnitt“ (siehe unten) bekannt, so läßt sich für jede Anlage der „wirtschaftliche Spannungsverlust“ ermitteln.

Von größter Wichtigkeit ist die Höhe der Spannung E' in orte B . Wir nehmen an, daß wir einmal in B die Spannung E'_1 , die m mal höhere Spannung E'_2 verwenden wollen; in beiden Fäll leistung A' in B , sowie der Wattverlust a auf der Leitung dersell die Betriebskosten dieselben bleiben; es wird also $A'_1 = A'_2$ und , folgt wegen $A = A' + a$ sofort auch $A_1 = A_2$. Wir finden dah

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = J_1 \cdot E_1 \quad \dots \quad A_2 = J_2 \cdot E_2 \quad \dots \quad \\ a_1 = J_1 \cdot e_1 \quad \dots \quad a_2 = J_2 \cdot e_2 \quad \dots \quad \end{array} \right\} E'_2 = m \cdot E'_1,$$

Die Leitungslänge L und das spezifische Leistungsvermögen K bleibt in beiden Fällen ungeändert, so daß nur der Querschnitt q_1 bzw. q_2 noch zu bestimmen ist; wir finden: $q_1 = \frac{J_1 \cdot L}{K \cdot e_1}$ und $q_2 = \frac{J_2 \cdot L}{K \cdot e_2}$, somit:

$$\frac{q_2}{q_1} = \frac{\frac{J_2 \cdot L}{K \cdot e_2}}{\frac{J_1 \cdot L}{K \cdot e_1}} = \frac{J_2 \cdot e_1}{e_2 \cdot J_1} = \frac{J_2 \cdot e_1}{m \cdot e_1 \cdot m \cdot J_2} = \frac{1}{m^2} \text{ oder } q_2 = \frac{1}{m^2} q_1,$$

d. h. wenn man die Spannung m mal so groß annimmt, wird der Leitungsquerschnitt $\frac{1}{m^2}$ mal so klein.

Dadurch ist es aber möglich, mit dünnen, billigen Leitungen Kraftübertragungen auf große Entfernungen auszuführen. Hohe Spannungen lassen sich aber mit Hilfe der Wechselstrom- und Drehstrom-Transformatoren sehr leicht erzielen (§ 166), und dies ist auch der Grund, warum bei großen Entfernungen besonders der Drehstrom dem Gleichstrom überlegen ist. — Da sich nun bei jeder Anlage vor allem die Frage aufdrängt, einen wie dicken Draht man für die Leitung wählen soll, so ist grundlegend der folgende Satz von THOMSON:

Der „wirtschaftliche Querschnitt“ ist dann vorhanden, wenn der Geldwert der in der Leitung nutzlos in Wärme verwandelten Stromenergie gleich ist den Kosten für die jährliche Verzinsung der Leitungsanlage. — Beweis: Aus Gl. (1) folgt der Wattverlust auf der Leitung

$a = e \cdot J = \frac{J^2 \cdot l}{K \cdot q}$ Watt, daher während der T Betriebsstunden eines Jahres ein Energieverlust von $\frac{T \cdot J^2 \cdot l}{K} \cdot \frac{1}{q}$ Wattstunden. Kostet dann in der Zentrale eine Wattstunde m_1 Mark (Kronen), so ist der Geldwert des Energieverlustes gleich

$$M_1 = \frac{T \cdot J^2 \cdot l \cdot m_1}{K} \cdot \frac{1}{q} = \frac{C_1}{q} \text{ Mark (Kronen).}$$

Andererseits sind die Kosten für Verzinsung (einschließlich Amortisation) der Leitung $M_2 = l \cdot q \cdot m_2 \cdot z = C_2 \cdot q$, wobei m_2 die Anlagekosten für die Längen- und Querschnittseinheit der Leitung und z die Jahresprozente der Verzinsung sind. Der „wirtschaftliche Querschnitt“ ist dann derjenige, für welchen $M_1 + M_2$

$= \frac{C_1}{q} + C_2 \cdot q$ ein Minimum wird. Da auch diese Summe (vgl. LA 200) eine solche ist, für die das Produkt der Summanden M_1 und M_2 den konstanten Wert $C_1 \cdot C_2$ hat, so tritt das Minimum ein für $q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \sqrt{\frac{T \cdot J^2 \cdot l \cdot m_1}{K \cdot l \cdot m_2 \cdot z}} = J \cdot \sqrt{\frac{T \cdot m_1}{K \cdot m_2 \cdot z}}$.

Hierfür wird $M_1 = \frac{T \cdot J^2 \cdot l \cdot m_1}{K} \cdot \frac{\sqrt{K \cdot m_2 \cdot z}}{J \cdot \sqrt{T \cdot m_1}} = J \cdot l \cdot \sqrt{\frac{T \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot z}{K}}$

und $M_2 = l \cdot m_2 \cdot z \cdot J \cdot \sqrt{\frac{T \cdot m_1}{m_2 \cdot K \cdot z}} = J \cdot l \cdot \sqrt{\frac{T \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot z}{K}} = M_1$.

XXV. Zur Astronomie.

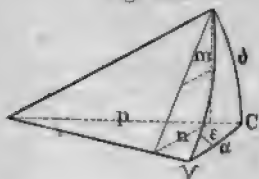
212. Den Wert der Schiefe der Ekliptik aus gegebenen Rekt- §§ 177, 178, aszensionen und Deklinationen der Sonne zu berechnen.

Anleitung: In dem bei C rechtwinkligen sphärischen Dreieck (Fig. 245, math. Anh. Nr. 18) seien die Katheten α und δ die Rektaszensionen und Deklina-

tionen der Sonne an irgend einem Tage des Jahres; die Schiefe der Ekliptik ist dann der der Kathete d gegenüberliegende Winkel, somit $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\operatorname{tg} d}{\sin \alpha}$. — Man waren z. B. beobachtet worden in:

Berlin, 18. Jan. 1882	Paris, 2. Sept. 1882	Greenwich, 6. April 1882
$\alpha = 300^{\circ} 26' 25,95''$	$\alpha = 161^{\circ} 24' 51,0''$	$\alpha = 15^{\circ} 3' 29,5''$
$d = - 20^{\circ} 30' 28,1''$	$d = + 7^{\circ} 52' 21,5''$	$d = + 6^{\circ} 25' 51,0''$
somit $\varepsilon_1 = 23^{\circ} 27' 11,8''$	$\varepsilon_2 = 23^{\circ} 27' 10,1''$	$\varepsilon_3 = 23^{\circ} 27' 12,1''$

Fig. 245.



Da also aus den drei voneinander unabhängigen Dreiecken sich (sehr annähernd) gleiche Werte von ε ergeben haben, so kommen die Orte der Sonne auf einer Linie zu liegen, die (ebenso wie der gleichfalls als Abszissenachse zu Grunde gelegte Äquator) den Hauptkreis bildet; d. h. die Ekliptik (im geometrischen Sinne) ist ein größter Kreis am Himmel, in dessen Ebene die Erde liegt. Dementsprechend

liegen die Schnittpunkte von Äquator und Ekliptik am Himmel um 180° voneinander ab, wie sich ebenfalls aus direkten Messungen ergibt (von der Präzessionsbewegung des Äquators hier abgesehen).

§ 177.

213. Geht die Sonne am Tag des Frühlingsanfanges immer und überall genau im Ostpunkte auf? Warum ist im Kalender als Zeitpunkt des Frühlingsanfanges keineswegs etwa immer 6 Uhr morgens (weder Sternzeit noch Sonnenzeit), sondern eine bestimmte Stunde, Minute und Sekunde bald des Tages, bald der Nacht angegeben?

Antwort: Frühlingsanfang ist der Zeitpunkt, in dem der Mittelpunkt der Sonnenscheibe mit dem Frühlingspunkt zusammenfällt, so daß die Sonne vorher und nachher südliche, bzw. nördliche Deklination hat, also schon nicht mehr im Äquator steht. Ostpunkt ist aber ein Durchschnittspunkt des Äquators mit dem Horizont. Es kann daher die Sonne nur für einen bestimmten Meridian der Erde genau im Ostpunkt aufgehen, und zwar dort um 6^h morgens Ortszeit (vermehrt bzw. vermindert um die Zeitgleichung = wahre Sonnenzeit — mittlere Sonnenzeit). Für einen westlich von jenem Meridian gelegenen Ort hat sie bis zum Aufgang schon nördliche Deklination angenommen. Der Aufgangspunkt hat sich also gegen Norden etwas verschoben. Hierdurch hat sich auch der Zeitpunkt des Aufgehens etwas verfrüht, was aber durch den Unterschied der Ortszeiten für unsere Breiten mehr als ausgeglichen wird.

§ 178.

214. Inwiefern ist keiner der sogenannten populären „Beweise für die Kugelgestalt der Erde“ für sich einwurfsfrei?

Andeutungen: 1. **Der überall kreisförmige Horizont:** Auch auf einer unendlich sich ausdehnenden Ebene würden wir von jedem Punkte oberhalb derselben wegen der begrenzten Sehkraft unseres Auges nur kreisförmige Stücke überblicken. (Freilich würde dann der Umfang des Kreises sich ins Unendliche zu verlieren scheinen, während auf dem Meere der Horizont scharf abgeschnitten erscheint — zur Überraschung eines jeden, der dies zum erstenmal sieht). — 2. **Zunahme der Größe des Gesichtskreises bei größerer Höhe des Beobachtungsortes:** Diese Zunahme folgt zwar aus der schon angenommenen

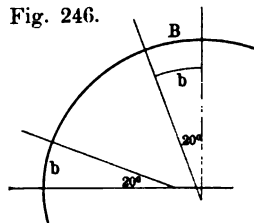


Kugelgestalt der Erde. Wer aber von dieser noch nichts wüßte, würde auf den direkten Anblick hin, der (wegen der irdischen Strahlenbrechung) nicht nur eine Ebene, sondern sogar die schwachkonvexe Erdoberfläche konkav („wie ein riesiges Waschbecken“) zeigt, die Konvexität keineswegs direkt sehen können. — Auch das von Türmen, Schiffen bei zunehmendem Abstand vom Auge zuerst die unteren Teile verschwinden, die höheren noch sichtbar bleiben, könnte von der geringeren Durchsichtigkeit der unteren Luftschichten herrühren. — **3. Krumme Begrenzung des Erdschattens bei Mondesfinsternissen:** Da die Mondoberfläche selbst gekrümmt ist, so würde ein krummer Rand des Schattens sich auch erzeugen können, wenn an dem schattenwerfenden Körper (der Erde) ein gerader Rand wäre. — **4. Reisen um die Erde:** Das in der Theorie angenommene „Reisen“ nach derselben Richtung, bis man zum Ausgangspunkt zurückkommt, ist trotz Schiffen und Wagen noch nie wirklich ausgeführt worden. Wohin das Umschiffen von Kontinenten führt, kann richtig nur beschrieben werden, wenn die Kugelgestalt der Erde schon vorausgesetzt ist. — **5. Analogie zur Kugelgestalt der übrigen Weltkörper:** Diese ist höchstens von Mond und Sonne direkt zu beobachten (übrigens erscheinen auch diese wegen der mit der Entfernung sehr rasch abnehmenden Genauigkeit der Tiefenlokalisation als Ebenen). — Alle hier angedeuteten Einwendungen sind freilich durch näheres Eingehen auf die quantitativen Einzelheiten der Beobachtung (wodurch sie aber dann aufhören, populäre Beweise zu sein) selbst wieder zu entkräften und bilden also nicht etwa wirkliche Widerlegungen des Satzes von der Kugelgestalt der Erde. In Wirklichkeit aber ist der Satz eben nur durch die Verbindung von Längen- und Winkelmessungen streng zu beweisen, und es finden sich dann die sonstigen Beobachtungen mit ihm (sowie dem Gesetz der Strahlenbrechung zu 1 und 2, der Projektionslehre zu 3 usf.) in vollem Einklang.

215. Zu zeigen, daß die Breitengrade von Süden gegen Norden § 179. hin an Länge zunehmen müssen, wenn sich als Gestalt der Erde die des abgeplatteten Rotationsellipsoids ergeben soll.

Anleitung: Man denke sich die „Abplattung“ sehr stark (unmißverständlich: den Krümmungshalbmesser an den Polen groß, Fig. 246), so daß man nächst den Polen sehr lange Strecken im Meridian wandern muß, bis sich eine kleine Änderung der Lotrichtung (desgleichen der Polhöhe, also der graphischen Breite) ergibt (für den Grenzfall einer ebenen Erdoberfläche würden die Lote sogar bei beliebigen Abständen parallel). Dann entspricht auch je einem Winkelgrad Unterschied in höheren Breiten ein längerer Kreis-(Ellipsen-)bogen als nahe dem Äquator. Da man nun in der Tat die je einem Breitenunterschied von 1° entsprechende Bogenlänge bei der französischen Gradmessung 1735 in Peru ($1^\circ 31' 0''$ s. Br.) 56753 Toisen, in Lappland ($66^\circ 20' 10''$ n. Br.) 57437 Toisen fand, so war das abgeplattete Ellipsoid als Gestalt der Erde erwiesen, übereinstimmend mit der theoretischen Voraussicht von HUYGENS und NEWTON; das verlängerte Ellipsoid (die Pflaumengestalt der Erde) war widerlegt.

Fig. 246.



216. Welche Winkelstellungen der Zeiger an derselben Uhr entsprechen dem Unterschiede der Orts-, Zonen- und Weltzeit? § 181.

Anleitung: Vergleichen wir zuerst nur Orts- und Weltzeit, so scheiden sie sich für je einen Ort um eine bestimmte Zeitstrecke, der dann ganz bestimmte Winkel zwischen den Minuten- und Stundenzeigern entspricht. Z. B. für Wien (neue Universitätssternwarte) unter $16^{\circ}20'22.3''$ östl. v. Gr. bilden an der zwölfstündigen Uhr die Stundenzeiger $32^{\circ}40'44.6''$, die Minutenzeiger $(32^{\circ}40'44.6'' \times 12) - 360^{\circ} = 32^{\circ}8'55.2''$. — Wäre also für den internationalen Verkehr nach Weltzeit der Zeiger etwa weiß, für die Ortszeit blau, so würde Eisenbahnzug um „*wh*“ weiße Zeit“ abfahren, eine Theatervorstellung um „*y*“ Zeit“ beginnen. — Für die Zonenzeit sind dann je 1, 2, 3 . . . Stunden zur Zeit zu addieren bzw. zu subtrahieren.

§ 182. 217. Den Abstand Erde-Mond $R \neq 60 r$ aus Beobachtungen berechnen.

Anleitung: Für zwei Orte von den geographischen Breiten φ und φ' desselben Meridian werden bei demselben Durchgang des Mondes durch den Meridian seine Zenitdistanzen z und z' bestimmt. Dann gilt nach Fig. 247.



$$R : r = \sin z : \sin x \dots (1), \quad R : r = \sin z' : \sin y \dots (2),$$

woraus $(\sin z' + \sin z) : (\sin z' - \sin z) = (\sin y + \sin x) : (\sin y - \sin x)$

$$\text{oder} \quad \operatorname{tg} \frac{z' + z}{2} : \operatorname{tg} \frac{z' - z}{2} = \operatorname{tg} \frac{y + x}{2} : \operatorname{tg} \frac{y - x}{2} \dots$$

Da hier $(x + y) + (180^{\circ} - z) + (\varphi + \varphi') + (180^{\circ} - z') = 360^{\circ}$, so ist $x = z' + z - (\varphi + \varphi')$, so daß sich aus (3) auch $x - y$ und somit sowohl x als y ergibt; hiernach aus (1) oder (2) auch $R : r$. — So war z. B. für Stockholm ($\varphi = 59^{\circ}31'13''$ nördlich) und Kapstadt ($\varphi' = 33^{\circ}56'3''$ südlich) bei gleichzeitigen Beobachtungen $z = 32^{\circ}4'48''$ und $z' = 55^{\circ}42'48''$, woraus $R : r = 60.2778$. Diese Zahl ändert sich zwischen den Grenzwerten 56,9681 und 63,5875, wenn man die elliptische Gestalt der Mondbahn; mittlerer Wert = große Halbachse = 60.2778 mittlere Erdradien (vgl. LA 34).

218. Wie ergeben sich aus den größten östlichen und westlichen Elongationen von Merkur und Venus die Abstände dieser Planeten von der Sonne?

Anleitung: Werden die Bahnen von Merkur, Venus und Erde als konzentrische Kreise in derselben Ebene mit der Sonne als Mittelpunkt angenommen und das Verhältnis der Bahnhalbmesser z. B. für Venus und Erde $= \frac{1}{2}$ schon als bei allen angenommen, so ist $\sin(\angle VES) = \frac{1}{2}$ (Fig. 664, S. 593). Daher folgt umgekehrt aus dem zu beobachtenden Winkel das Verhältnis der Bahnhalbmesser. — In Wirklichkeit ist aus den veränderlichen größten Elongationen (bei Merkur zwischen 21° und 27° , bei Venus zwischen 44° und 47°) auf die nicht kreisförmigen Ba-



und aus den wechselnden nördlichen und südlichen Breiten (Abweichungen aus der Ekliptik) auf die Neigung der Bahnebenen zu schließen; vgl. Tafel VII.

219. Nach Analogie a) der „Uhrzeigeraufgabe“ die Beziehung § 168, 184. zwischen siderischer und synodischer Umlaufszeit, b) für äußere Planeten, c) für innere Planeten, d) für den Mond aufzustellen.

Anleitung: a) Dafs Minuten- und Stundenzeiger sich um $1^h 5\frac{5}{11}^m$, $2^h 10\frac{10}{11}^m$ usf. decken, ergibt sich schon daraus, dafs binnen 12 Stunden 11 Deckungen in gleichen Zeitabständen erfolgen, weshalb die Anzahl der Minutenstriche z. B. für die nach 1 Uhr erfolgende Deckung $60^m : 11 = 5\frac{5}{11}^m$ betragen muß. — Dieses Resultat ergibt sich auch durch Gleichungsansatz so:

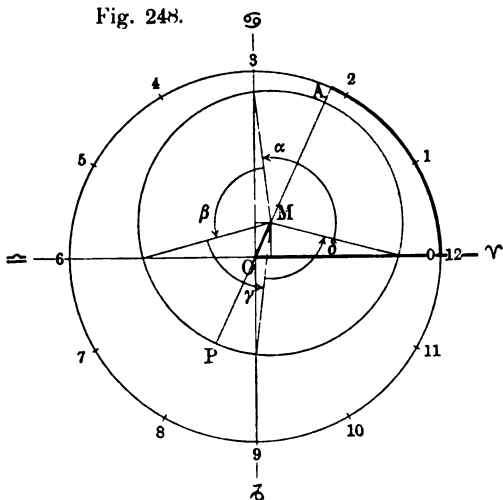
a) Binnen derselben Zeit von t^m legt der Minutenzeiger den Bogen $U + u$ mit der Geschwindigkeit C , der Stundenzeiger den Bogen u mit der Geschwindigkeit c zurück, wo $U = 60^m$ und $C = 12c$. Somit $\frac{U+u}{C} = \frac{u}{c} \dots 1$; $U + u = 12u$; $u = 60 : 11 = 5\frac{5}{11}^m$.

b) Für einen äußeren Planeten sei T die siderische Umlaufszeit, S die synodische Umlaufszeit, α der Winkel, um den der Planet während einer synodischen Periode von der Sonne aus gesehen, fortschreitet, J die Dauer eines Erdjahres, so ist (analog zu Gl. 1) $\frac{360^\circ + \alpha}{\alpha} = \frac{T}{J} \dots (2)$ oder $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{T}{J} - 1$, und wegen $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{T}{S}$ wird $\frac{T}{S} = \frac{T}{J} - 1$ oder $\frac{1}{S} = \frac{1}{J} - \frac{1}{T}$.

c) Ähnlich findet man für einen inneren Planeten $\frac{1}{S} = \frac{1}{J} + \frac{1}{T}$ (wie auch durch Vertauschung aus der vorhergehenden Gleichung folgt).

d) Sind T_s und T_m die siderischen Umlaufzeiten von Sonne und Mond, S die synodische Umlaufszeit des Mondes, so ist $\frac{360^\circ + \alpha}{\alpha} = \frac{T_s}{T_m}$ oder $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{T_s}{T_m} - 1$, ferner $\frac{360^\circ}{\alpha} = \frac{T_s}{S}$, folglich $\frac{T_s}{S} = \frac{T_s}{T_m} - 1$ oder $\frac{1}{S} = \frac{1}{T_m} - \frac{1}{T_s}$.

Fig. 248.



§§ 174, 177, 1

220. Wie hat HIPPARCH aus der ungleichen Dauer der Jahreszeiten die Lage der Apsiden und die Größe der Exzentrizität der als Kreis vorausgesetzten Sonnenbahn in Bezug auf die Erde ermittelt?

Anleitung: Es sei in Fig. 248 O der Mittelpunkt der Erde und zugleich der der Himmelssphäre, also auch der Mittelpunkt der Ekliptik als eines größten Kreises am Himmel, an welcher die 12 Tierzeichen, $0 = \gamma$ (Widder), $1 = \delta$ (Stier) . . . ,

somit auch Mars einen anderen scheinbaren Ort am Himmel hat. Für das so entstehende Dreieck MSE_2 ergeben sich die Winkel aus der heliozentrischen Länge λ_1 des Mars, der geozentrischen Länge λ der Sonne (oder der heliozentrischen Länge der Erde E_2) und der geozentrischen Länge λ_2 des Mars; nämlich

$$\angle SE_2M = \lambda + \lambda_2 \text{ und } \angle SME_2 = \gamma = \lambda_1 - \lambda_2.$$

Hiernach ergibt sich mittels des Sinussatzes der Abstand SE_2 , ausgedrückt durch den Abstand SM (als Längeneinheit). — Ebenso lassen sich für ein drittes, viertes . . . Eintreffen des Mars in M weitere Örter E_3, E_4 . . . in Bezug auf die Sonne nach Abstand und Richtung festlegen, indem immer die Radienvektoren in derselben Längeneinheit SM ausgedrückt und die Richtung jedes Radiusvektors auf dieselbe Richtung $S\Upsilon$ bezogen wird. — So legte KEPLER zuerst eine Tafel der Erdörter an, gleichsam als Material für eine Polargestaltung der Kurve, in der die Richtung $S\Upsilon$ die Polarachse, die heliozentrischen Längen der Erde die Polarwinkel und die Abstände SE die Radienvektoren darstellen. — Bei der auf diese Tafel sich gründenden Induktion, daß diese Kurve eine Ellipse sei, von der S der Brennpunkt ist, und daß die Radienvektoren in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume durchstreichen, ging KEPLER sehr kühn zu Werke, indem er zuerst nur für Perihel und Aphel die Beziehung $\mathcal{E} \cdot r = \sigma \cdot R$ bemerkte und dies sogleich zum Flächensatz verallgemeinerte. Auf die Ellipsengestalt geriet er erst nach langem, vergeblichem Probieren. — Vorstehendes ist eine nähere Ausführung der auf S. 596 nur angedeuteten Überlegung „Zu 2“. — Ebenso „Zu 1“. In ebensolchen Dreiecken $SM'E_2$. . . ist nunmehr die Seite SE_2 bekannt, und es kann SM' . . . (ebenso SM'' , SM''' . . .) nach Länge und Richtung berechnet werden, wodurch die Bahn des Mars in Bezug auf die Sonne festgelegt ist. — Dabei werden möglichst viele aufeinander folgende Oppositionen, und wo für diese selbst keine Beobachtungen vorliegen, interpolierte Werte benutzt. Das Beobachtungsmaterial entnahm KEPLER zum bei weitem größeren Teile den Aufzeichnungen TYCHOS, der den Mars durch mehr als 20 Jahre beobachtet hatte.

222. Für OLAF RÖMERS Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit ist es wesentlich, daß die wirkliche Zeit zwischen je zwei Verfinsterungen des Trabanten beobachtet wird, während Jupiter und Sonne in Konjunktion bzw. Opposition stehen. Denn nur hier ist die relative Geschwindigkeit von Erde und Jupiter gleich Null. Diese relative Geschwindigkeit ist dagegen am größten nahe den Quadraturen. Dies läßt schon in allgemeinen Zügen vermuten, daß jene relative Geschwindigkeit nach dem Gesetze des Sinus sich ändere; es ist dies durch genauere Rechnung zu prüfen.

Anleitung: Nehmen wir zunächst an, Jupiter stehe unbewegt in J (Fig. 250), die Sonne in S , die Erde bewege sich gleichförmig in einem Kreise mit dem Mittelpunkte S .

Aus $r^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \varphi$
 und $r'^2 = a^2 + \varrho^2 - 2a\varrho \cos \varphi'$
 folgt $r'^2 - r^2 = -2a\varrho (\cos \varphi' - \cos \varphi)$
 oder $(r' + r)\delta = 4a\varrho \sin \frac{\varphi' + \varphi}{2} \cdot \sin \frac{\varphi' - \varphi}{2}.$

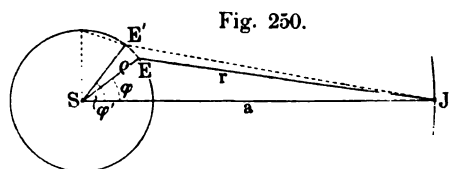


Fig. 250.

Stab EJ sei um E drehbar und schleife in einer Hülse bei wie sich Jupiter in Bezug auf die Erde bewegt (entspre von der Erde aus). — Numerische Werte für $\varrho = 0, \pi/2, \pi, 3$ Gröfse (goniometrische Funktion) stellt den Faktor a/r spezie dar? Phoronomische Bedeutung? — Nehmen wir auf die Be in Bezug auf die Sonne Rücksicht, so tritt an die Stelle vor nur $T_{e,i}$ (Bedeutung? — numerischer Wert für $T_i \neq 11$ Jah

XXVI. Zur Meteorologie.

§ 192. 223. Wie stellen die Thermoisoplethen den täglichen Gang der Temperatur eines Ortes dar?

Anleitung: Man denke sich in Fig. 251 das Rechteck, an Seiten die Tagesstunden (z. B. $3a = 3$ Uhr *ante meridiem* [v morgens; $9p = 9$ Uhr *post meridiem* = 9 Uhr abends), an Seiten die Monate verzeichnet sind, als Grundebene eines dreia systems, so daß in jedem Punkte dieser Koordinatenebene an die Temperatur für die betreffende Stunde aufgetragen ist (für jedes Jahr eigens oder das Mittel für eine bestimmte A Die durch alle oberen Endpunkte dieser Temperaturordinaten g dann die Temperaturfläche. Werden auf ihr die Niveauli $2\frac{1}{2}^{\circ}$ C. fortschreitend verzeichnet und wieder in die Grunde ergibt sich ein Überblick über den täglichen und jährlichen Ga (Die punktierten Kurven *S.-A.* und *S.-U.* geben die Zeiten d und Sonnenunterganges für die verschiedenen Monate an).

Aus dem Anblicke der Fig. 251 kann man vor allem w Tatsachen herauslesen, daß die höchste Temperatur nicht u erst gegen 3 Uhr Nachmittag, bzw. nicht im Juni, sondern e

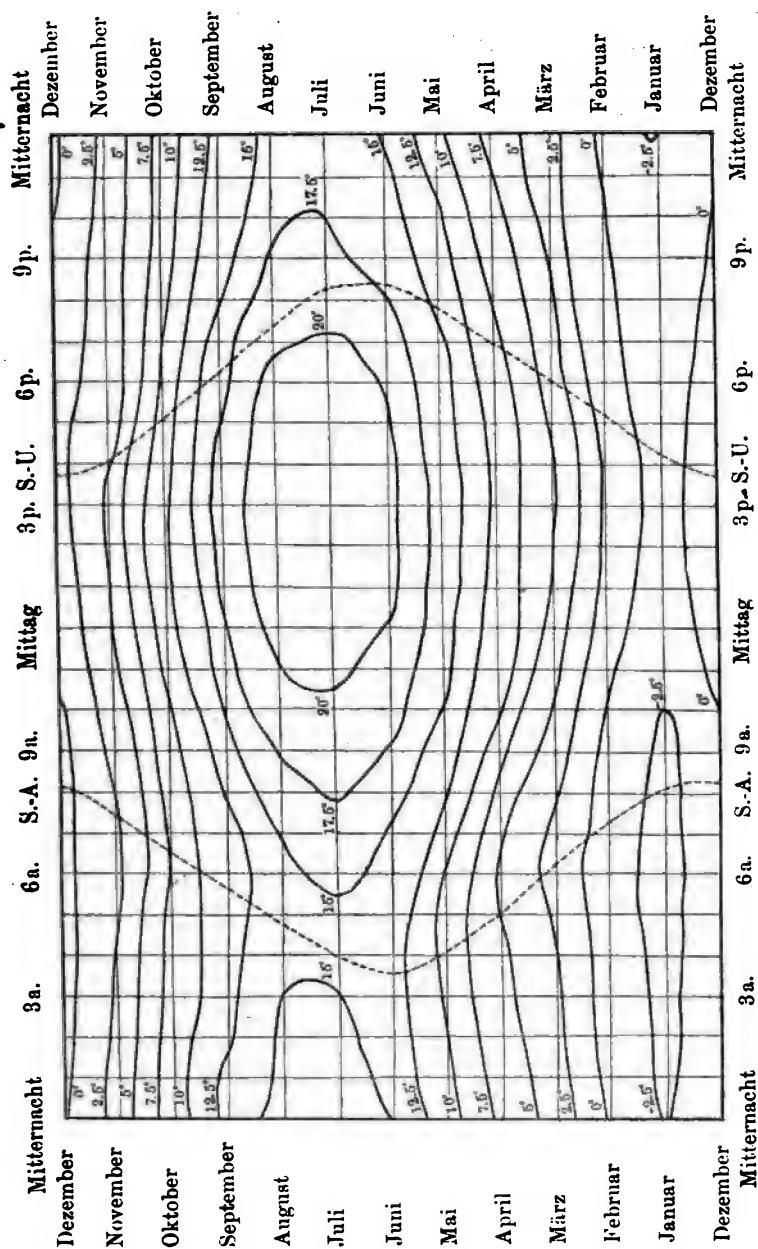
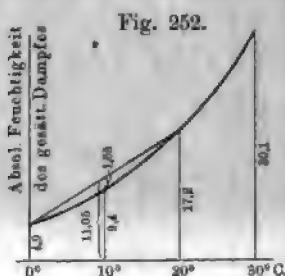


Fig. 251. Thermoisoplethen (Schnitte der Temperaturfläche) für Berlin.

§ 186. 224. Inwieweit vermochte die ältere Theorie von HUTTON atmosphärische Niederschläge aus der Mischung ungleich warmer, Wasserdampf gesättigter Luftmengen zu erklären?

Anleitung: Der Grundgedanke jener Erklärung knüpfte daran an, daß die Kurve (Fig. 252) für die den verschiedenen Temperaturen entsprechenden Feuchtigkeiten eine nach oben konkave ist. Z. B. Der Mischung gleicher Raumteile Luft von 0° und von 20° entspricht die Mittellinie des Trapezes, dessen Seite die Sehne ist; der Mischungstemperatur von 10° entsprechen also

11,05 g. Es müßten daher $11,05 - 9,4 = 1,65$ g Wasser kondensiert zu Wolken oder als Regen ausgeschieden werden. — Gleichwohl spricht gegen die Theorie, daß 1. wohl nur höchst selten Luftmengen von so sehr verschiedenen Temperaturen überhaupt zur Mischung kommen, 2. daß gleiche Raumteile von 0° und 20° nur dann ein Gemisch von 10° geben, wenn die Luft trocken oder vom Sättigungspunkte entfernt war. Waren dagegen die gleichen Raumteile Luft von 0° und 20° schon gesättigt, so wird die Mischungstemperatur 10° sein, indem bei der Kondensation von 1 g Wasser ungefähr ebenso viel Wärme



wird, als bei 76 cm Druck zur Erwärmung 1 m³ Luft um 2° C. erforderlich ist. Hiernach entspricht sich statt 10° als Mischungstemperatur 11, und da für diese um 1,6° höhere Mischungstemperatur schon wieder ein höherer Sättigungspunkt ist, so fielen (wie die eingehendere Rechnung nur mehr 1,05 g Wasser heraus, d. i. nur etwas des in den gemischten Luftmengen ursprünglich vorhandenen Wassers. Dies erklärt aber in den meisten Fällen nur einen ganz kleinen Teil der tatsächlichen Niederschlagsmengen.

Da die ganzen Mengen mit der neueren Erklärung der atmosphärischen Niederschläge aus der mechanischen Wärmetheorie in bestem Einklange stehen, ist jene ältere Theorie durch diese neuere wohl endgültig besiegt.

§§ 77. 195.

225. Durch annähernde Rechnungen zu zeigen, daß in aufsteigenden Luftströmen die Abkühlung infolge der geleisteten mechanischen Arbeit a) bei trockener Luft rund 1° C. für 100 m, dagegen b) feuchter (bis zur Kondensation der Wasserdünste gesättigter) rund 1° auf 200 m Erhebung beträgt.

Anleitung: Die Aufgabe a) erfordert die Gleichung $\left(\frac{v}{v_0}\right)^k = \frac{p}{p_0} \dots (I)$, das Poissonsche (oder das potenzierte Mariottesche) Gesetz heißt und an dem sich Druck und Volumen „adiabatisch“, d. h. in einem Raume ändern, wie sich bei der Komprimierung gewonnenen (und beim Ausdehnen verloren) Wärmemengen undurchlässig ist; darin bedeutet $k = c_p : c_v$ das Verhältniß der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen, das die (meisten) Gase denselben Wert $k = 1,41$ hat (§§ 72, 82). — Behufs Ableitung von Gl. (I) nehmen wir an: Eine bestimmte Menge eines vollkommenen Gases aus seinem Anfangszustande, für den $p_0 v_0 = R(a + t_0)$, durch Zufuhr einer Wärmemenge Q bei konstantem Druck p_0 übergeführt in einen Zustand

den $p_0 v_1 = R(a + t')$. Dann ist $p_0 v_1 - p_0 v_0 = R(t' - t_0)$, ferner

$$Q = c_p(t' - t_0) = \frac{c_p \cdot p_0}{R} (v_1 - v_0).$$

Den zweiten Zustand ändern wir in einen dritten durch Abfuhr derselben Wärmemenge bei konstantem Volumen v_1 . Dann wird $p_1 v_1 = R(a + t_1)$

also $p_0 v_1 - p_1 v_1 = R(t' - t_1)$; und weil jetzt $Q = c_v(t' - t_1) = \frac{c_v v_1}{R} (p_0 - p_1)$ so ergibt sich aus Gleichstellung der beiden Werte von Q

$$\frac{c_p p_0}{R} (v_1 - v_0) = \frac{c_v v_1}{R} (p_0 - p_1) \text{ oder } \frac{p_0 - p_1}{p_0} = k \cdot \frac{v_1 - v_0}{v_1} \dots (1).$$

Es besteht also zwischen den Größen p und v eine Beziehung der gleichen Art wie zwischen p und h bei der barometrischen Höhenmessung (§ 46). — Denken wir uns also der ersten adiabatischen Zufuhr einer Wärmemenge Q eine zweite, dritte . . . solcher Wärmemengen $Q', Q'' \dots$ so folgend, daß für sie

$\frac{p_0 - p_1}{p_0} = \frac{p_1 - p_2}{p_1} = \dots = \frac{p_{n-1} - p_n}{p_{n-1}} = \frac{q}{n}$, so wird $p_n = p_0 \left(1 + \frac{q}{n}\right)^n$, und dies geht (nach Anh. Nr. 17 und LA 124) für $n = \infty$ über in $p_n = p_0 \cdot e^q \dots (2)$.

Wegen Gl. (1) ist aber auch $k \frac{v_1 - v_0}{v_1} = k \frac{v_2 - v_1}{v_2} = \dots = k \cdot \frac{v_n - v_{n-1}}{v_n} = \frac{q}{n}$,

aber $v_n = v_0 \cdot e^{\frac{q}{k}} \dots (3)$; aus (2) und (3) folgt sofort Gl. (1).

Wird also z. B. Luft von 15° C. aus einer Stelle von $p = 76 \text{ cm}$ Barometerstand auf eine von $p = 75 \text{ cm}$ gehoben (nämlich um rund 100 m), so ist $T_0 = 273^\circ + 15^\circ = 288^\circ$ absoluter Skala. Aus Gl. (1) folgt dann

$T = 283 \times \left(\frac{75}{76}\right)^{0,41} = 287,16$ absoluter Skala $= 14,16^\circ \text{ C.}$ Also ist die Temperaturverminderung $288^\circ - 287,16^\circ = 15^\circ - 14,16^\circ \text{ C.} = 0,84^\circ \neq 1^\circ \text{ C.}$ —

Die Aufgabe b) ist elementar nicht in allgemeinen Formeln zu lösen. — Um aber wenigstens zu erkennen, daß und warum bei feuchter Luft einer Erhebung um 100 m eine geringere Temperaturverminderung als $0,84^\circ$ entspricht, ist zu beachten, daß, wenn sich die Dünste kondensieren, aus ihnen selbst wieder eine Wärmemenge „frei“ wird, die zu einer weiteren Erhebung ausreicht, bis die gleiche Abkühlung wie bei trockener Luft erreicht ist. — Ist z. B. Luft von 15° mit Wasserdampf gesättigt, so enthält 1 kg des Gemenges $10,43 \text{ g}$ Wasserdampf, bei 14° noch $9,78 \text{ g}$. Bei dieser Temperaturerniedrigung um 1° C. müßten also $0,65 \text{ g}$ Wasser herausfallen, bei der mit der Erhebung um 100 m verbundenen Abkühlung um nur $0,84^\circ$ also etwa $0,55 \text{ g}$ Wasser. Aus diesem sich kondensierenden Dampf werden $540 \times 0,55 = 297 \text{ cal}$ frei. Diese reichen aus, 1 kg Luft um mehr als 1° zu erwärmen, da die spezifische Wärme der Luft nur 237 cal (für den beigemengten Dampf 481 cal) beträgt. Man sieht aber, daß die vorausgesetzte Wasserausscheidung zum größeren Teil noch nicht zustande kommt.

Eine andere (aber nur sehr angenäherte) Methode zur Erläuterung der für die Meteorologie so sehr wichtigen Zahlen „ 1° C. Abkühlung für 100 m , bzw. 200 m Erhebung“ ist die folgende: Zu a) Es werden $h \text{ tgm} = \frac{h}{424} \text{ Cal}$ verbraucht, wenn 1 kg Luft um $h \text{ m}$ gehoben wird. Für $h = 100 \text{ m}$ entspricht

$$h' = 424 \times 0,453 = 192 \text{ m} \neq 200 \text{ m} \text{ sein.}$$

226. Zu zeigen, daß die jährliche Strahlung einen 200 m dicken Eishimmel (mit der Sonne als M mit 1 Erdweite = $2 \cdot 10^7$ Meilen Halbmesser) oder daß dicke Eisdecke auf der Erde abzuschmelzen vermöchte.

Anleitung: Nach LANGLEY erhält 1 cm^2 im Abstand von der Sonne bei senkrechter Einstrahlung 3 cal per Minute $3 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365 \text{ cal}$. Da 1 cm^3 Eis annähernd 1 g Masse hat und a 80 cal erfordert, so berechnet sich die Dicke $x \text{ cm}$ der durch die jährliche zu schmelzenden Eisschicht wegen $1 \text{ cm}^2 \cdot x \text{ cm} = x \text{ cm}^3$ aus $80 x$ also $x = 19710 \text{ cm} \neq 200 \text{ m}$.

Denken wir uns ferner einen Eispanzer von $y \text{ cm}$ Dicke auf der Erdoberfläche gebreitet, so ist das Volumen dieser Kugelschale annähernd (wo der Erdradius $R = 6370 \cdot 10^3 \text{ cm}$). Der Querschnitt fängt per Minute $R^2 \pi \cdot 3 \text{ cal}$ auf. Es ist also per Jahr

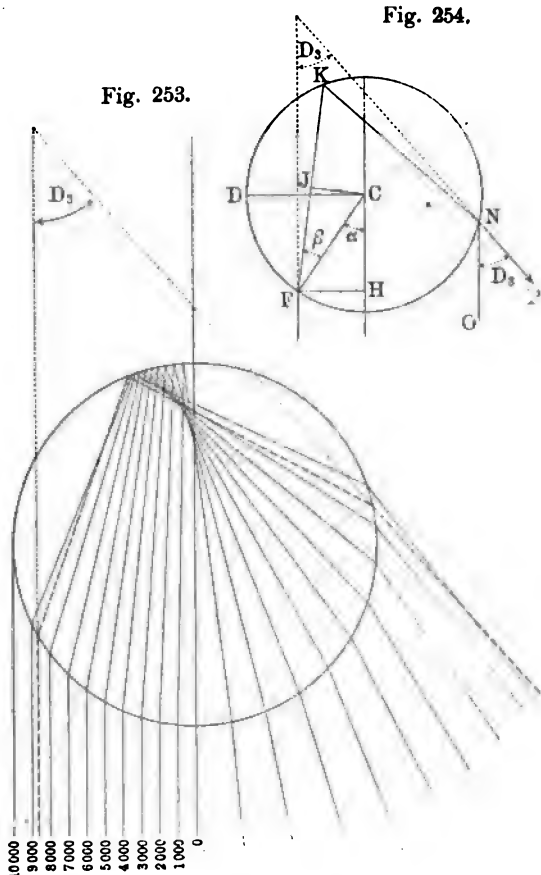
Wärmebedarf $80 \times 4 R^2 \pi \cdot y = 3 \times 60 \cdot 24 \cdot 365 R^2 \pi W$ somit $y = \frac{1}{4} x = 50 \text{ m}$.

199. 227. Der Grundgedanke von DESCARTES' Theorie der Ablenkung ist rechnerisch zu erläutern.

Anleitung: In Fig. 253 seien für einige Strahlen, die in gegenseitiger Entfernung durch den größten Kreis eines kugelförmigen Regens gehen, die Strahlen konstruiert, die eine Brechung, eine Reflexion und eine Ablenkung erfahren haben. Die punktierte Gerade bedeutet dann den Strahl, den die Nachbarstrahlen am dichtesten geschart sind und Maximum der Ablenkung erfahren hat.

Dies bewies DESCARTES, indem er nachstehende Tabelle 1 aufstellte, die sich auf einen zur Richtung der Sonnenstrahlen normalen

	D_s	Zunahme
100	5° 40'	
100	11° 19'	5° 39'
100	16° 57'	5° 35'
100	22° 30'	5° 33'
100	27° 52'	5° 22'
100	32° 56'	5° 4'
100	37° 26'	4° 30'
100	40° 44'	3° 18'
100	40° 58'	0° 14'
100	41° 10'	0° 12'
100	41° 20'	0° 10'
100	41° 26'	0° 6'
100	41° 30'	0° 4'
100	41° 30'	0°
100	41° 28'	- 0° 2'
100	41° 22'	- 0° 6'
100	41° 12'	- 0° 16'
100	40° 57'	- 0° 15'
100	13° 40'	+ 0° 9'



Diese halb empirische Methode lässt sich rechnerisch so ausgestalten: Jeder Strahl, der an der Kugel gebrochen, reflektiert und wieder gebrochen wird, erleidet eine Ablenkung D_s , für die $\beta = \alpha - \beta + \frac{D_s}{2}$, also $D_s = 4\beta - 2\alpha$. Es sei nun derjenige Winkel α zu berechnen, bei dem einer Änderung in α' doch keine Änderung der Ablenkung D_s entspricht; also $D_s' = D_s$ oder $4\beta' - 2\alpha' = 4\beta - 2\alpha$ oder $\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \frac{1}{2}$. Da aber nach LA 166, 1. allgemein $\frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha} = \sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{n^2 - \sin^2 \alpha}}$,

folgt $\sqrt{\frac{1 - \sin^2 \alpha}{n^2 - \sin^2 \alpha}} = \frac{1}{2}$ oder $\sin \alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$.

B. Für $n = \frac{4}{3}$ wird $\sin \alpha = \sqrt{\frac{20}{27}}$, also $\alpha = 59^\circ 23' 29''$.

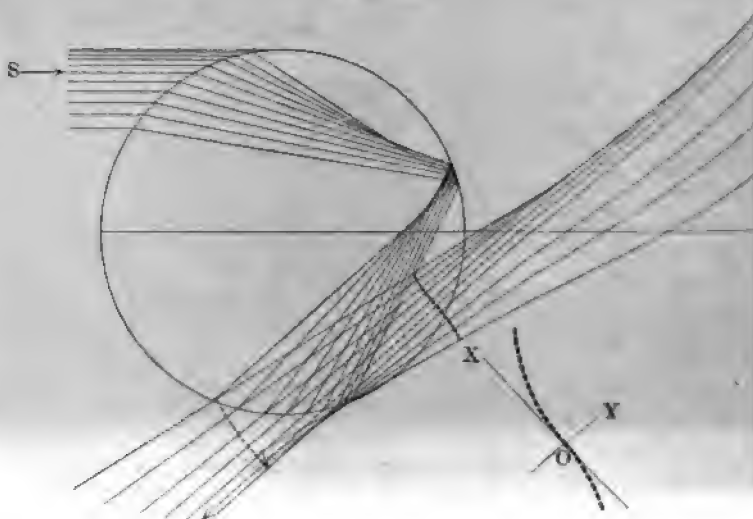
DESCARTES hatte $n = \frac{250}{187}$ angenommen, ohne schon die Verschiedenheit der Brechungsquotienten für verschiedene Farben zu kennen; erst NEWTON hat die Farbenfolge gemäß seiner Dispersionstheorie erklärt. Nach unseren gegenwärtigen Zeichnungen ergibt sich also z. B. für das

Rot	der Linie B	$n = 1,330$, also $\alpha = 59^\circ 35'$, $\beta = 40^\circ 25'$, $D = 42$
Gelb	" "	$n = 1,334$, also $\alpha = 59^\circ 20'$, $\beta = 40^\circ 10'$, $D = 42$
Violett	" "	$n = 1,344$, also $\alpha = 58^\circ 50'$, $\beta = 39^\circ 30'$, $D = 40$

§ 199. 228. Der Grundgedanke von AIRYS Theorie des Regenbogens graphisch zu erläutern.

Anleitung: Beachten wir, daß in Fig. 255 die oberhalb des punktierten Strahles austretenden Strahlen divergieren, die unterhalb konvergieren, wie sich namentlich an den Rückwärtsverlängerungen der Strahlen deutlich zeigt.

Fig. 255.



austretenden konvergieren, wie sich namentlich an den Rückwärtsverlängerungen der Strahlen deutlich zeigt. Dies hat zur Folge, daß, wenn wir uns durch beliebigen Punkt des punktierten Strahles das zu ihm normale Element der Wellenfläche und zu allen übrigen Strahlen die an jenes Element anschließenden Elemente der Wellenfläche konstruiert denken, diese Wellenfläche (nicht wie den meisten anderen optischen Erscheinungen angenommen werden durfte, kugelig oder ellipsoidisch, sondern) derart gekrümmt ist, daß sie jenseit punktierten Strahles konkav, diesseits konvex ist. [Die Gleichung der Wellenfläche hat die Form $y = cx^3$ (math. Anh., Fig. 30, S. 728), wie sich aus den verschiedenen Zeiten ergibt, die die Strahlen zum Durchsetzen verschiedener Strecken innerhalb und außerhalb des Tropfens brauchen]. Solchen asymmetrischen Wellenflächen aber entsprechen Interferenzen des gebrochenen Lichtes, die um so beträchtlicher sind, je stärker die Wellenfläche gekrümmt ist; und zwar wird die Krümmung um so stärker, je kleiner die Tropfen sind.

§ 200. 229. Aus der Zunahme des positiven Potentials der Luftpole nach oben das negative Potential der Erdkugel abzuleiten.

Anleitung: Die tatsächlich beobachteten Werte des Potentialgefälles pro Meter Höhendifferenz (deren allgemeines Mittel etwa 130 Volt per Meter ist) ;



für die in Wirklichkeit immer mehr oder weniger feuchte Luft. FRANZ EXNER hat gezeigt, daß für die Abhängigkeit des Potentialgefälles von dem wechselnden Feuchtigkeitsgehalt sich (unter gewissen theoretischen Voraussetzungen) eine empirische Formel aufstellen läßt, aus der sich dann für den Grenzfall völlig trockener Luft ein Potentialgefälle von 1410 Volt per Meter nächst der Erdoberfläche ergibt. Unter der weiteren Annahme, dieses Potentialgefälle rühre bloß daher, daß an der Oberfläche der Erdkugel eine Ladungsmenge E gleichmäßig ausgebreitet sei, ergibt sich für das Potential unter und an der Erdoberfläche $V = \frac{E}{R}$ und 1 m über der Erdoberfläche $V + 1410 = \frac{E}{R + 1}$, wo der Erdradius $R = 63710000$ m ist. Durch Elimination von E folgt $V + 1410 = \frac{VR}{R + 1}$ und hieraus $V \neq -1410$, $R \neq 9 \cdot 10^8$ Volt. — Daß und inwieweit aber die dieser Berechnung zugrunde liegenden Annahmen durch neuere Messungen modifiziert sind, vergleiche § 200. — Man berechne außer dem Potential auch noch die übrigen Größen: elektrische Ladungsmenge, Energie, Dichte und Spannung (nach dem Vorbilde von LA 182) unter den obigen fiktiven Annahmen.

230. Zu zeigen, daß und wie sich beim Zusammenfließen elektrisch § 201. geladener Regentropfen das Oberflächenpotential (zu unterscheiden von der elektrischen Dichte, LA 182) der geladenen Wassermengen (nicht aber das Potential im äußeren Kraftfeld) erhöht.

Anleitung. 1. Stereometrische Hilfsaufgabe: Es seien n gleiche Kugeln vom Halbmesser r cm zu einer einzigen Kugel vom Halbmesser R cm vereinigt worden. In welchem Verhältnis $R : r$ wird der Radius größer, und in welchem Verhältnis $O : o$ hat sich dann die Gesamtoberfläche verringert? Antwort:

$o = \frac{4}{3}\pi r^3$; $V = n \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi n R^3$; $R = r \sqrt[3]{n}$. Ferner $n \cdot o = n \cdot 4\pi r^2$; $O = 4\pi R^2$

$= 4\pi r^2 \sqrt[3]{n^3} = o \sqrt[3]{n^3}$. (Z. B. Für $n = 1000$ ist $R = 10r$, dagegen $O : 1000o = \frac{1}{10}$.)

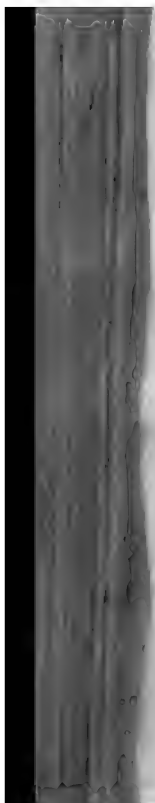
Es hat sich also z. B. beim Zusammenfließen von 1000 gleichen Regentropfen zu einem einzigen Tropfen die Gesamtoberfläche auf $\frac{1}{10}$ verkleinert.) — 2. Physikalische Anwendung: War das Potential je eines der kleinen Tropfen v (wo hier die Bezeichnung für das Potential v nicht zu verwechseln ist mit obiger für das Volumen v) und die Kapazität eines Tropfens $c = r$, und bleibt beim Zusammenfließen von n Tropfen die Ladungsmenge $E = ne = nvc = nvr$ unverändert,

so ist nun für den großen Tropfen das Potential $V = \frac{E}{R} = \frac{nvr}{r \sqrt[3]{n^3}} = v \sqrt[3]{n^2}$.

Es geben also z. B. 1000 Tröpfchen beim Zusammenfließen einen 100mal so großen Ladungsgrad. [Bei dieser Rechnung kamen also für die Kapazität nur die Kugelradien, nicht die Oberflächen in Betracht. — Dagegen für die elektrischen

Dichten $d = \frac{e}{o}$ und $D = \frac{E}{O} = \frac{ne}{o \sqrt[3]{n^3}} = d \sqrt[3]{n^2}$ ergibt sich für $n = 1000$ nur

$D = 10d$. — Für die atmosphärischen Entladungserscheinungen käme nicht dieses Verhältnis der Dichten, sondern obiges der Potentiale $V = 100v$ in Betracht. — Doch ist zu bemerken, daß sich diese Berechnung nur auf die Steigerung der Oberflächenpotentiale der einzelnen kleinen und des aus ihnen hervor-



Sachregister.

A.

3.
 es Lichtes 604.
 Einheiten 698.
 der Erde 584.
 vegung 23, 802.
 , absolutes Maßsystem 61.
 e Einheiten 423 ff., 772.
 ullpunkt, absolute Tempe-

 on Gasen 212, 214.
 es 366.
 15.
 ne Linsen, Prismen 367.
 Kräftepaares 116, 853.
 eines Kristalls 398.
 ng der Erde 571.
 7.
 2.
 Zustandsänderung 918.
 che Paradoxa 196.

 nen 155.
 ion des Auges 349.

 en 557.
 805.

 Schwere 77.
 36.
 7, 686.
 nheit der Stromstärke) 472,

 r 561.
 es elektrodynamisches Ge-

 e Theorie des Magnetismus
 egel 466.

Amplitude 33.
 Amylacetatlampe 371.
 Analysieren, Analysator, Analyseur 395.
 Anemometer 617.
 Aneroidbarometer 181.
 Angriffspunkt einer Kraft 58.
 Anion, Anode 499, 500.
 Anisotropie 205.
 Anker 453, 535.
 Anomale Dispersion 370.
 Anzahl der Moleküle 900.
 Anziehung einer Kugelschale, einer Ku-
 gel auf einen Punkt 83, 841.
 Äquator 575.
 Äquinoktium 580.
 Äquipotentialfläche 106.
 Äquivalent, kalorisches Arbeits- 286.
 Äquivalenz von Wärme und Arbeit 287.
 Aräometer 168.
 Arbeit, mechanische 87, 771, 845.
 – und Wärme, Äquivalenz 287.
 Arbeitsfähigkeit 95.
 Archimedes' Gesetz 164.
 Arm eines Kräftepaares 119.
 Astatistisches Nadelpaar 446.
 Astronomisches Fernrohr 352.
 Äther 219.
 Athermane Stoffe 376.
 Atmosphäre, Bestandteile der 686.
 Atmosphärendruck 63, 179, 880.
 Atmosphärische Elektrizität 649.
 Atom 662.
 Atomgewicht 671.
 Atome nach Thomson 218.
 Atomwärme 668.
 Atwoodsche Fallmaschine 54.
 Aufschlagende Zungen 306.
 Auftrieb 164, in Gasen 185.
 Auge 346, dessen Bau 346, reduziertes 348.

Augustsches Psychrometer 627.
 Ausbreitungsgeschwindigkeit elektrischer
 Wellen 516, des Lichtes 381, Schalles
 311.
 Ausdehnung, thermische 261.
 Ausdehnungskoeffizient, linearer, kubi-
 scher 263.
 Ausflußgeschwindigkeit 171.
 Ausflußgesetz Torricellis 171, 189, 877.
 Äußerer Widerstand eines Elementes 510.
 Ausserordentlicher Strahl 337, 399.
 Avogadros Hypothese 664, 900.
 Azimut 395, 575.

B.

Babinets Hahn 193.
 Ballistische Kurve 32.
 Bandspektrum 363.
 Barlowsches Rädchen 921.
 Barograph, Barogramm 181, 615, 652.
 Barometer 178.
 —, Aneroid- 181, Quecksilber- 180.
 Barometerkorrektur 181, 880.
 Barometerprobe 193.
 Barometrische Höhenmessung 188, 613,
 882.
 Batterie, galvanische 609.
 Bäume, Schwingungs-, 303.
 Becquerelstrahlen 523.
 Beharrungsgesetz 45.
 Bellisches Telefon 531.
 Beobachtungsfehler 700.
 Berganlaufender Doppelkegel 869.
 Berührungselektrizität, Fundamentalver-
 suche 499.
 Beschleunigung 14, 770, Normal-, 40,
 Winkel-, 141.
 Beugung des Lichtes 385.
 — des Schalles 314.
 Beugungsspektrum 389.
 Bewegung 3, 817.
 Bewegungsgesetze von Newton 45.
 Bewegungsgröße 58.
 Biegungelelastizität 198, 201.
 Bildpunkt 327.
 Bleiakkumulatoren 557.
 Bleibaum 500.
 Blinder Fleck 347.
 Blitz, Blitzableiter 652, 653.
 Bodendruck 159.
 Bodentemperatur 637.
 Bolometer 255, 257, 377, 635.
 Bordas Doppelwägung 132, 858.

Boyles Gesetz 156, 177, 181, 257,
 894.
 Brechung des Lichtes 335, 397, an
 Flächen 337, an Kugelflächen 340.
 Wellen und Strahlen 248.
 Brechungsquotient 336.
 —, Bestimmung mittels Spektra
 366.
 Brechungsspektrum 388.
 Brechungswinkel 324.
 Bremsdynamometer 140.
 Brennpunkt, Brennweite 332, 343.
 Brillen 345, 350.
 Bruchfestigkeit 202, 883.
 Brückenwaage 138.
 Bunsens Element 506.
 Bunsensches Eiskalorimeter 290.
 Büschelentladung 512.

C.

Camera lucida 340.
 — obscura 325, 314.
 Centrifugaleisenbahn 71.
 Centrifugalkraft 71.
 Centripetalkraft 70.
 Chemilumineszenz 379.
 Chemische Strahlung 378.
 Chemische Wirkungen des galva-
 nischen Stromes 499.
 Chladnis Klangfiguren 302.
 Chromatische Polarisation 400.
 — Tonleiter 296.
 Chronometer 708.
 Circularpolarisation des Lichtes 4.
 Cortische Fasern 320.
 Coulomb (Einheit der elekt-
 rischen Ladungsmenge) 424, 433, 773, 9.
 Coulombsches Gesetz 424, 447.
 Crookesche Versuche 521.
 C-S-G-System 53, 698.
 Cumuluswolken 629.
 Cylinderlinse 346.

D.

Daguerreotypie 379.
 Daltonsches Gesetz 213.
 Dampf, gesättigter und ungesi-
 üßter 276.
 Dampfdichte 279, 897.
 Dampfmaschine 290.
 Dampfspannung 277.

turbine 864.
 ung der Schwingungen von Gal-
 metermagneten 488.
 sches Element 506.
 rometer 627.
 eter 185.
 des Lichteindrucks 814.
 cher Lichtbogen 554.
 che Sicherheitslampe 283.
 ation 43.
 ation, astronomische 460, 579.
 gnetische 459.
 dlwage 38.
 gnetische Stoffe 455.
 rmanität 376.
 ische Tonleiter 294.
 63, 169.
 strische 415.
 Erde 86, 607.
 keitsmaximum des Wassers 266,

 rikum 405, 436, 514, 930.
 rische Verschiebung 519.
 rizitätskonstante 437.
 ntialflaschenzug 36, 861.
 ntialthermometer 256.
 nztöne 3 6.
 reflektierende Körper 369, 636.
 on von Gasen, Flüssigkeiten 212.
 eter 266, 893.
 ion 13, 712, 714.
 r 328.
 anz 296, 806.
 ation 502.
 r 318, 653.
 brechung des Lichtes 398.
 sterne 82, 609.
 erschtes Prinzip 310, 362, 609, 903.
 erschtes Gesetz 377.
 rom 548.
 rommotoren 547, 550.
 ig der Polarisationssebene d. Lichtes
 im magnetischen Felde 515.
 age 86.
 asenstrommotoren 546, 936.
 65, kritischer 279, 897, osmoti-
 c 213, 671.
 ische Theorie der elektrischen
 heinungen 403, 406, 412.
 g-Petits Regel 261, 668, 671.
 r Wärmestrahlen 375.
 273.
 chlagende Zungen 306.

Durdreiklang 296, -tonleiter 294.
 Dyn 53, 770, 834.
 Dynamik 43.
 Dynamisches Gleichgewicht 216, 885.
 Dynamomaschine 534, 928, 931, 933.
 Dynamometer 59.

E.

Ebener Spiegel 329.
 Ebene Welle 248.
 Echo 314.
 Einfallslot 324.
 Einfallswinkel 324.
 Einheiten 697, abgeleitete, absolute 61,
 698, der Lichtstärke 371.
 Eiskalorimeter 260.
 Eismaschinen 292.
 Eispunkt 254.
 Elastische Nachwirkung 200.
 Elastizität 197.
 Elastizitätsgrenze 197, -koeffizient, -mo-
 dul 198.
 Elektrische Energie 428, 917, Festigkeit
 520, Funken 513, Klingel 530, Kraft-
 übertragung 543, Schwingungen 516,
 Spannung 415, 481, 917, Wellen 515,
 531.
 Elektrischer Strom 438.
 Elektrisiermaschine 401, 419.
 Elektrizitätsgrad 425.
 Elektrizitätsmenge 422.
 Elektroden 499.
 Elektrodynamisches Prinzip 537.
 Elektrolumineszenz 512.
 Elektrolyse, Elektrolyte 499.
 Elektromagnetische Lichttheorie 515.
 Elektromagnetisches Maßsystem 471, 922.
 Elektromagnetismus 469.
 Elektrometer 407.
 Elektromotorische Kraft 477, 480.
 Elektrophor 418.
 Elektroskope 407.
 m Kondensator 410.
 Elektrostatische Maßsystem 423, 922.
 Elementarmagnete 453.
 Elementarwellen 247.
 Elemente, galvanische 439, 505.
 Emissionstheorie des Lichtes 382.
 Empfindlichkeit 800, der Wage 133.
 Empirische Gesetze 781.
 Endosmose 213.
 Energie, kinetische, aktuelle 95, 101.

- Energie der Lage, potentielle 101.
 —, Erhaltung der 100, 102, 793.
 —, Verwandlung der 102.
 Entladung, Arten der elektrischen 512.
 — in Gasen 512.
 Epizyklen 571, 595, 761.
 Erdfernröhr 353.
 Erdleitung 527.
 Erdmagnetismus 456.
 Erg 88, 771, 845.
 Erhaltung der Energie 100, 102, der Masse 657.
 Erstarrungstemperatur 272.
 Erster Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie 285, 292.
 Etalons 478, 699.
 Exosmose 213.
 Experiment 777.
 Experimentum crucis 359, 779.
 Extraordinärer Strahl 337, 399.
 Extrapolation 725.
 Extrastrom 487.

F.

- Facettenauge 348.
 Fallablenkung 875.
 Fallgesetze 6.
 Fallrinne 5, 17.
 Fallröhre 5.
 Farad 433, 773.
 Faradays Gesetze der Elektrolyse 500.
 Farben der Körper 368, der Strahlen 357, dünner Plättchen 392.
 Farbenempfindung 812.
 Farbentheorie von Young-Helmholtz 812.
 — — Hering 813.
 Farbenringe von Newton 392.
 Farbige Schatten 814.
 Fata morgana 642.
 Federwage 201.
 Federwolken 628.
 Fernrohre 352.
 Fernsichtigkeit 350.
 Feste Stoffe 155.
 Festigkeit 202.
 Fettfleckphotometer von Bunsen 372.
 Feuchtigkeitsgehalt der Atmosphäre 626.
 Feuerspritzen 191.
 Figuren von Lissajous 233, 303, 887.
 Fixieren 809.

- Flamme 692, manometrische 306, 306.
 Flaschenzug 134.
 Fluida, elektrische 403, 406.
 Fluoreszenz 379, 391.
 Flüssige Stoffe 155.
 Flüssigkeitsreibung 224.
 Föhnwind 631.
 Folgepunkte 456.
 Fortinsches Gefäßbarometer 180.
 Fortschreitende Welle 235.
 Foucaults, Fizeaus Methode zur Bestimmung der Lichtgeschwindigkeit 381, 382.
 Foucaults Pendelversuch 151.
 Foucaultsche Ströme 487.
 Fourierscher Satz 745.
 Franklinsche Tafel 416.
 Fraunhofersche Linien 362.
 Freie Achsen 144.
 Freie Ladung 412.
 Fritter, Frittröhre 529.
 Funken, elektrische 513.
 Funkeninduktoren 485, 516.
 Funkenmikrometer 514.

G.

- Galileis Fallgesetze 5, 17.
 — Fernrohr 353.
 — Prinzipien der Dynamik 44, 47.
 Galvanische Batterie 509.
 — Elemente 505.
 — Polarisation 502.
 Galvanischer Strom 438.
 Galvanometer 475.
 Galvanoplastik 556.
 Galvanostegie 556.
 Gase 155.
 —, elektrische Entladung durch 51.
 —, spezifische Wärme der 261, 267.
 Gasförmige Stoffe 155.
 Gasometer 189.
 Gasreibung 223.
 Gasverflüssigung 279.
 Gay-Lussacsches Gesetz 181, 267.
 Gebundene Ladung 412.
 Gedeckte Pfeifen 304.
 Gefäßbarometer 180.
 Gefrierpunkt 272.
 Gefrierpunktserniedrigung 273, 671.
 Geißlersche Röhre 512.
 Gehörknöchelchen 320.

Gelber Fleck 347, 809.
Geometrische Optik 323.
Geradlinig polarisiertes Licht 396.
Geradsichtiges Prisma 368.
Geräusch 293, 311, 805.
Gerichtete Größe, Vektorgröße 22, 717.
Gesättigter Dampf 276.
Geschosfablenkung 32.
Geschwindigkeit 12, 769.
 — der elektrischen Wellen 516.
 — des Lichtes 381, 604.
 — des Schalles 311.
Gesetz 780.
 — der Molekularkräfte 216.
 — von Douloung und Petit 261, 668.
Gesichtsfeld 356.
Gewicht, absolutes 53, 169, 185.
 —, spezifisches 63, 169, 186.
Geysir 897.
Gitterspektren 387.
Gleichförmige Bewegung 10.
Gleichgewicht 65, verschiedene Arten
 und deren Bedingungen 123.
Gleichschwebende Temperatur 296, 902.
Glimmentladung 512.
Glühlampe, elektrische 512, 552, 937.
Goldblattelektroskop 409.
Gramm 23, 709, 770.
Grammescher Ring 536.
Gravitation, irdische 75, 837, allgemeine
 78, 837.
Gravitationskonstante 86.
Grenzen der Hörbarkeit 297.
Grenzwinkel der totalen Reflexion 336.
Großer ganzer Ton 296.
Grundeinheiten 698.

H.

Haarhygrometer 627.
Haarröhrchen 207.
Hagel 630.
Halbschatten 326, 905.
Halo 643.
Harmonische Obertöne 300.
 — Tonreihe 295.
Härte 196.
Haufenwolken 628.
**Hauptsatz, erster, der mechanischen
 Wärmetheorie** 285, 292.
 —, zweiter, der mechanischen Wärme-
 theorie 292.
Hauptträgheitsachsen 796.

Hebel 131, 860.
Heber 190.
Heberbarometer 180.
Hefnerkerze, -lampe 371, 771.
Heliostat 331.
Helligkeit 321, 807.
Helmholtzsche Resonatoren 317.
Herings Farbentheorie 812.
Heronball 189.
Hintereinanderschaltung von Elementen
 439, 477, 509.
Höfe 643.
Holtzsche Elektrisiermaschine 420.
Höhenmessung, barometrische 188, 613,
 882.
Hörbarkeit, Grenzen der 297.
Horizontalintensität des Erdmagnetismus
 457, 460, 919.
Hörrohr 315.
Hughes Telegraph 528.
Huygensches Prinzip 247.
Hydraulische Presse 158.
Hydraulischer Widder 172.
Hydrostatischer Druck 160.
Hygrometer 627.
Hygrometrie 627.
Hyperbel 184, 601, 752, 756, 880.
Hypothesen 736.
Hysteresis 455.

I.

Ideale Flüssigkeiten 156, 196, Gase 156,
 196.
Induktionsstrom 483.
Influenzelektrisiermaschine 419, 928.
Influenzerscheinungen 411, 419.
Inklination 459.
Innendruck 162.
**Innere Reibung in Flüssigkeiten und
 Gasen** 223.
Innerer Widerstand eines Elementes 510.
Intensität des elektrischen Stromes 472.
 — — Erdmagnetismus 460.
 — — Lichtes 371.
 — — Schalles 293, 317, 806.
Interferenz des Lichtes 380, 391.
 — von Wellen 240.
Interpolation 725.
Ionen 500, 505.
Ionenwanderung 502.
Ionisierung der Luft 651.
Isobaren 614.

Isochimenen 624.
 Isochronismus 826.
 Isogonen 464.
 Isolator 405.
 Isomerie 667.
 Isomorph 674.
 Isotheren 624, Isothermen 624.

J.

Joule (Arbeitseinheit) 88, 94, 771, 845.
 Joulesches Gesetz 494.

K.

Kabeltelegraphie 526.
 Kaleidoskop 331.
 Kalmen 619.
 Kaloreszenz 380.
 Kalorie 258.
 Kalorimeter, Kalorimetrie 260.
 Kältemischungen 273.
 Kapazität, elektrische 433, 772.
 Kapillardepression 212.
 Kapillarscheinungen 207.
 Kapillaritätskonstante 884.
 Katakaustische Linie 327, 766.
 Kathethometer 705.
 Kathodenstrahlen 521.
 Kation, Kathode 499, 500.
 Kehlkopf 307.
 Keil 134, 137, 863.
 Keplers Fernrohr 352.
 Kernschatten 326, 905.
 Kilogramm 53, 709.
 Kinetische Energie 95, 101.
 — Gastheorie 287, 885.
 — Wirkungen der Kräfte 3, 66.
 Kirchhoffsches Gesetz über das Verhältnis von Emission und Absorption 364, 373.
 Kirchhoffsche Sätze der Stromverzweigung 480, 482.
 Klangfarbe 307, 805.
 Klangfiguren von Chladni 302.
 Kleistsche Flasche 416.
 Knoten, astronomische 599.
 —, Schwingungs- 300.
 Knotenlinien 302.
 Knotenpunkte 301.
 Koharer 529.
 Kohäsion 203.
 Kollimatorrohr 362.
 Kolloide 204.

Kometen 82, 601, 605.
 Komina 296.
 Kommunizierende Gefäße 162.
 Kommutator 565.
 Kompensationspendel 263.
 Komplementärfarben 360.
 Kompressibilität von Flüssigkeiten
 Kompressionspumpe 191.
 Kondensator an der Dampfmaschine
 Kondensator, elektrischer 433.
 Konsonanz 296, 806.
 Konstante Elemente 505.
 Konstanter Strom 440.
 Kontinuierliches Spektrum 382.
 Kontrastfarben 360.
 Konvektion 283, 626.
 Konvexspiegel 335, 346.
 Kopernikanische Theorie 571.
 Körper 60.
 Kraft, beschleunigende 47.
 —, elektromotorische 480.
 —, mechanische 43, 770.
 Krafteinheit 88.
 Kräftepaar 114, 119, 852.
 Kräftepolygon, -parallelepiped 63, 69.
 Kraftfeld 104, dessen Intensität 108,
 der Erdoberfläche 76, 456, homogen
 76.
 Kraftlinien 104, 109, 110, 768.
 Kraftmoment 128, 770.
 Kraftübertragung, elektrische 548.
 Kreisbewegung, Kreisung 35.
 Kreisel 142, 152.
 Kreisstrom 453, 466.
 Kristallisation 204.
 Kritischer Druck, — Punkt 279, 897.
 Kritische Temperatur 278, 897.
 Kritisches Volumen 279, 897.
 Krümme Lichtstrahlen 321.
 Krümmung einer Kurve 763.
 Krümmungskreis 763, -radius 341, 7.
 Kubischer Ausdehnungskoeffizient 263.
 Künstliche Magnete 452.
 Kupferdämpfung 487.
 Kupfervoltameter 504.
 Kurzsichtigkeit 350.

L.

Labiles Gleichgewicht 124.
 Labyrinth 318.
 Landwind 616, 639.
 Längenabweichung eines Hohlspiegels 3

chwingung 234.
 chwingungen der Saiten 298, der
 303.
 ige Kraft 96.
 nfrostsches Phänomen 278.
 der Elektrizität 401.
 er und zweiter Ordnung 504.
 igkeit, elektrische 479.
 g der Wärme 281, Erklärung aus
 kinetischen Gastheorie 290.
 er Flasche 416.
 5.
 Lichtempfindung 321.
 ktrisches 552.
 ogen, elektrischer 554.
 inheit 371.
 enbergsche Figuren 406.
 chwindigkeit im Wasser 382.
 chwindigkeitsbestimmung von
 Hely 604, von Fizeau 381, von
 cault 382, von Römer 604, 945.
 rahl 323.
 r Ausdehnungskoeffizient 263.
 atterie 527.
 pektrum 363.
 340.
 oussehe Figuren 233, 303, 887.
 ene 294.
 atterie 528.
 idinale Wellen 235.
 en 214.
 ick 179, 613.
 icht 185.
 ndensator 410, 436.
 npen 191.
 len, Schwingungen von 304.
 rmometer 255, 256, 268.
 eszenz 379, 391.
 45, 351.
 2, 771.

M.

urger Halbkugeln 178.
 ische Achse 467.
 hung der Polarisationssebene 515.
 ritter 465.
 flinien 444.
 isches Moment 447.
 isieren von Stahlstäben 452.
 isierungsarbeit 453.
 oinduktion 454, 483.
 steine 401.

ler, Physik.

Manometer 190.
 Manometrische Flammen 306.
 Marineleim 155.
 Mariottesches Gesetz 156, 177, 181, 267,
 883, 894.
 Mariotte-Gay-Lussacsches Gesetz
 267.
 — — — —, Erklärung aus der kine-
 tischen Gastheorie 216, 288.
 Maschinen, einfache, zusammengesetzte
 134.
 Masse 51, 59, 770.
 Maßsystem, absolutes 61.
 —, elektrostatisches und elektromagneti-
 sches 423, 471, 922.
 Materie 60.
 Mathematisches Pendel 32.
 Maximum- und Minimumthermometer
 256.
 Mechanik 3.
 Mechanische Wärmetheorie 284.
 Mechanisches Wärmeäquivalent 286.
 Megadyn 770, 834, 880.
 Mehrfachtelegraphie 526.
 Mehrphasenstrom 483.
 Meidingersches Element 506.
 Meldes Apparat 303.
 Membrana basilaris 320, 807.
 Meridian, astronomischer 578.
 —, magnetischer 458.
 Metallthermometer 264.
 Metazentrum 166, 876.
 Meter 11, 703, 769.
 Metronom 5, 149.
 Mikrofarad 433.
 Mikrometerschraube 705.
 Mikron 769.
 Mikrophon von Hughes 532.
 Mikroskop 351.
 Minimum der Ablenkung im Prisma 339.
 Mitschwingen 317, 807.
 Mittelpunkt paralleler Kräfte 122.
 Molekel, Molekül 215, mittlere Geschwin-
 digkeit der 900.
 Molekulargewicht 671.
 Molekulargewichtsbestimmung 671.
 Molekularkräfte 215.
 Molekularmechanik 196.
 Molltonleiter 295.
 Moment, statisches, Kraftmoment 123.
 Momentankraft 57.
 Mondbewegung 598.
 Monochord 299.

Nebelflecke 609.
 Nebeneinanderschaltung von Elementen 509.
 Nebensonnen 645.
 Negative Elektrizität 405.
 Netzhautbild 349, 808.
 Newtons Bewegungsgesetze 45, 47.
 — Dispersionsversuche 358.
 — Ringe 392.
 Nichtleiter der Elektrizität 405.
 Nicolsches Prisma 400.
 Niederdruckmaschinen 291.
 Niveauflächen 104, 163, -linien 104, 110 768.
 Nonius 705.
 Nordlicht 465, 653.
 Normalkerze 371, 771.
 Normalton 297.
 Nutation 153, 587.
 Nutzeffekt 140.

O.

Oberflächenfarben 369.
 Oberflächenspannung 209.
 Obertöne, harmonische 300, 308, 905.
 Objektiv 351.
 Offene Pfeifen 304.
 Ohm (Einheit des Widerstandes) 478, 773, 924.
 Ohmsches Gesetz 477, 928.

Partialtöne 300.
 Passatwinde 616.
 Peltiersches Phänom
 Pendel 32, 38, physisc
 Periodisches System d
 Perpetuum mobile 139
 Perturbation 82.
 Pfeifen 303.
 Pferdekraft, Pferdestär
 Phasendifferenz 230.
 Phonautograph 298.
 Phonograph 309.
 Phronomie 4, 44.
 Phosphoreszenz 379, 38
 Photographie 378.
 Photolumineszenz 379.
 Photometrie 370.
 Physikalische Größen 7
 Physiologische Akustik
 Physiologische Wirkun
 Ströme 524.
 Piezometer von Örsted
 Planetenbewegung 78, 1
 Planetoiden 598.
 Platten, Schwingungen
 Polarisation, elektrisch
 strom 502.
 — des Lichtes 394.
 Polarisationsapparat vo
 396.
 Polarisationssebene, Dreh

gefälle 110.
 e Energie 95.
 schenzung 136, 861.
 n 154, 586.
 ie 350.
 ydraulische 158.
 38.
 nsapparate 344.
 eter 627.
 191.
 aterieller 4, 21.
 ter 169.
 aeter von Pouillet 635.

Q.

elektrometer 408.
 una 378.
 erluftpumpe 194.
 raktion bei Zugelastizität 200.

R.

ler Welle 136.
 ivität 523.
 el an Flüssigkeiten 211.
 nsfaktor 472.
 e Pendellänge 149.
 der elektrischen Strahlen 516,
 ichtes 328, des Schalles 314,
 336.
 sgoniometer 331, -winkel 249,
 gen 646, 950, 952.
 sser 629.
 ren für elektrisches Bogenlicht
 viderstände 479, 567.
 7, 223.
 asser 501.
 8.
 Feuchtigkeit 626.
 317.
 r für elektrische Wellen 516.
 ren von Helmholtz 317.
 spendel 149, 872.
 n 478, 567.
 15.
 trahlen 522.
 el 263.
 n, elektromagnetische 919.
 dsche Gitter 388.
 beim Ausströmen von Flüssig-
 176.
 orffs Funkeninduktor 485.

S.

Saccharimeter 400.
 Saitenschwingungen 298, 902.
 Säkulare Änderungen des Erdmagnetismus
 465.
 Sammellinsen 341.
 Saturnring 598.
 Saugwirkung eines Luftstromes 178, 192.
 Schädlicher Raum bei Kolbenluftpumpen
 193.
 Schallgeschwindigkeit 311.
 Schalleitung 312.
 Schallquellen 293.
 Schallstärke 293, 317, 808, Abhängigkeit
 der — von der Entfernung 318.
 Schallwahrnehmung 318.
 Schaltung von Elementen 509.
 Schatten 325, 905.
 Schichtwolken 628.
 Schiebersteuerung 291.
 Schiefe Ebene 5, 67.
 Schmelzpunkt 272.
 Schmelzwärme 273.
 Schnecke 318, 320.
 Schnellwage 132.
 Schraube 138, 762.
 Schubelastizität 198.
 Schwebungen 316, 905.
 Schwellenwert der Empfindung 801.
 Schwerpunkt 21.
 Schwimmen 166.
 Schwingungen 32, 224, 887.
 —, elektrische 929, isochrone 37, longi-
 tudinale 235, transversale 234.
 Schwingungsdauer 33, 38, 149, 929.
 Schwingungsmittelpunkt 872.
 Schwingungszahl von einfachem Licht
 387.
 — von Tönen 294.
 Seewind 616, 639.
 Segnersches Wasserrad 176.
 Seifenblasen 208, 392, 415.
 Seilwellen 226.
 Seitendruck 61, 875.
 Sekundäre Zersetzungen 501.
 Sekunde 53, 698, 769.
 Sekundenpendel 39.
 Selbstinduktion 487, 929.
 Sextant 330, 906.
 Sicherheitslampe, Davysche 692.
 Sieden 273.
 Siedetemperatur, Siedepunkt 254, 276,
 Abhängigkeit vom Druck 277.

- Siemensseinheit der elektr. Widerstände 478.
 Siemens' elektrodynamisches Prinzip 537.
 Silbervoltmeter 504.
 Singende Flamme 306.
 Sinusbusssole 475, 921.
 Sirene 294, 297.
 Skioptikon 344.
 Snellius' Brechungsgesetz 335.
 Solenoid 442, 467.
 Sonnen-, Solarkonstante 634.
 Sonnenmikroskop 344.
 Sonnenspektrum 358, 362, 365.
 Sonnentag 587, 706.
 Spaltrohr 362.
 Spaltungsflächen 205.
 Spannkraft eines Dampfes, Abhängigkeit von der Temperatur 277.
 Spannung, elektrische 415, 481.
 Spannungskoeffizient von Gasen 268.
 Spektralanalyse 362.
 Spektralapparate 362.
 Spektrometer 361.
 Spektrum, Beugungs- 338.
 —, Prismen-, Brechungs- 339, 388.
 Spezifisches Gewicht 63, 169, 186.
 Spezifische Wärme 261.
 — — der Gase 261, 286.
 Spezifischer Widerstand 479.
 Sphärische Abweichung 334, 340, 345, 907.
 Sphärometer 706.
 Spiegelablesung 331, 702.
 Spiegelbild 320.
 Spiegelfernrohr 353.
 Spitzenwirkung 416.
 Sprachrohr 315.
 Sprechmaschinen 308.
 Spröde Stoffe 196.
 Stäbe, Schwingungen der 302.
 Stabiles Gleichgewicht 124.
 Stahlmagnete 452.
 Stationärer Gang 49, 846.
 Statisches Moment 128.
 Statische Wirkungen der Kräfte 3, 66.
 Stechheber 190.
 Stehende Wellen 236, deren Gleichung 889.
 Stereoskop 809.
 Sternschnuppen 602.
 Sterntag 571, 579, 587.
 Stimmgabel 303.
 Stimmorgan 307.
 Stimmritze 307.
 Stoffmenge 60.
 Stoß 57, 219, exzentrischer 221, 219, schiefer 221, zentraler 221, elastischer Kugeln 220, unelastischer Kugeln 221.
 Stoßheber (hydraulischer Wärmestrahlen, sichtbare und unsichtbare Strahlung der Wärme 375.
 Stratuswolken 629.
 Stromfäden, -linien 178.
 Superposition von Wellen 240, Synthese der Klänge 807.
- T.**
- Tangentenbusssole 472.
 Taupunkt 626, 630.
 Teilbarkeit 215.
 Telegraphie, elektrische 526.
 Telephonie 531.
 Temperatur 251.
 —, kritische 197, 278, 897.
 Temperaturskalen 252, 289.
 Temperierte Stimmung 286.
 Terrestrisches Fernrohr 354.
 Tesla's kaltes Licht 514.
 Thermochrose 376.
 Thermoelektrische Ströme 495.
 Thermolumineszenz 380.
 Thermometer 252, 255, 256.
 Thermosäule 495, 928.
 Thermoskop 252, 253, 256.
 Thomson's Quadrantelektromagnet Tiefendimension 808.
 Tierische Elektrizität 523.
 Ton, musikalischer 244.
 Tonhöhe 293, 295, 805.
 Tonleiter, Dur-, Moll- 294, 295.
 Tonreihe, harmonische 295.
 Tornados 620.
 Torricellische Leere 179.
 Torsionselastizität 198, 202.
 Totale Reflexion 336.
 Trabanten 600.
 Trägheit 44, 47.
 Trägheitsmoment 145, 770, 884.
 Transversale Wellen 234.
 Tropfen, Auflösung eines Wassertropfens in 172.
 Tropfenbildung 208.
 Turbinen 175.
 Turmalinzange 395.



U.

nitzter Dampf 276.
rote, -violette Strahlen 374.
lationstheorie des Lichtes 382.
sättigter Dampf 276.
rische Theorie der elektrischen Er-
einungen 403, 406.
glas 379.

V.

am 178.
der Waals Zustandsgleichung 288,
rgrößen 21, 109, 716.
l 191.
lluftpumpen 192.
ennungswärme 692.
mpfung 275, Erklärung aus der
stischen Gastheorie 289.
mpfungswärme 280.
ussigung von Gasen 279.
eichung von Stimmgabeln 297
st einer halben Wellenlänge 394.
gerung 16, 23.
analyse 304.
e 303.
126, 433, 480, 481, 773, 913.
neter 504.
ischer Fundamentalversuch 498.
ische Säule 498.
elastizität 205.

W.

a 132.
ierscher Hammer 565.
ngen, Reduktion auf den leeren
m 185.
ngsmethode von Borda 132, 858.
nehmung des Lichtes 346.
Schalles 318.
erung der Ionen 502.
e und Arbeit, Äquivalenz 287.
eausdehnung 261.
eeinheit 258.
efärbung (Thermochrose) 376.
ekapazität 260.
elehre 250, 892.
eleitung 281, Erklärung aus der
stischen Gastheorie 290.
estrahlung 375.
ewirkungen d. galvanischen Stromes
, Dichtigkeitsmaximum 266, 639.

Wasserdampf in der Atmosphäre 626.
Wasserluftpumpe 191, 195.
Wasserstoffthermometer 255.
Wasserwellen 224.
Wasserwert eines Kalorimeters 260.
Wasserzersetzung 501, 657.
Watt 94, 481, 771.
Wechselwirkung schwimmender Körper
212.
Welle 225.
Wellenbewegung in eindimensionalen
Punktreihen 234.
— in zwei- und dreidimensionalen Medien
245.
Wellenfläche des Lichtes 399.
Wellenlängen des Lichtes 387.
Wheatstonesche Brücke 480, 921, 922.
Widder, hydraulischer 172.
Widerstand, elektrischer 477, 772, 928.
—, spezifischer 479.
Widerstandskasten 478.
Wimshursts Influenzmaschine 420.
Wind, elektrischer 416.
Winkel, Maß der 701, Grenz- der totalen
Reflexion 336, Torsions- 202.
Winkelbeschleunigung 141.
Winkelgeschwindigkeit 140, 770.
Wirbelatome 218, -faden 878, -ring 175,
878.
Wirbelbewegung 175.
Wirbelring 175, 878.
Wogenwolken, Wolkenwogen 629.
Wurfbewegungen 18, 27, 820.

Y.

Young-Helmholtz' Farbentheorie 812.

Z.

Zambonische Säule 408, 500.
Zeit 10, 12, 706, 803.
Zeiteinheit 12.
Zerlegung von Kräften 64, der Schwin-
gungen 230, 888.
Zerreißen 202.
Zerstäuber 195.
Zerstreuungslinsen 341.
Zonen 585.
Zugelastizität 198, -festigkeit 202.
Zungenpfeifen 306.
Zweiachsige Kristalle 399.
Zweiter Hauptsatz der mechanischen
Wärmetheorie 292.

Berichtigungen.

Seite 31, Zeile 7 v. o.: anstatt *vertikalen* soll es heißen *schiefen*.

Seite 65, Zeile 4 bis 2 v. u.: anstatt r_1, r_2, r_3 soll es heißen k_1, k_2, k_3 .

Seite 107, Zeile 7 v. o.: anstatt Gl. 7 soll es heißen Gl. 4.

Seite 110, Zeile 12 v. o.: anstatt $\sum \frac{m}{r}$ soll es heißen $\sum \frac{m}{r}$.

Seite 117, Zeile 15 v. o.: anstatt $+H$ und $-H$ soll es heißen $(+H)$ und $(-H)$.

Seite 286, Zeile 20 v. u.: anstatt 0,08534 soll es heißen 0,089.

Seite 411, Zeile 13 v. o.: anstatt durch die soll es heißen durch Zwischen-
schaltung einer Trockensäule die.

Seite 495 ist in Fig. 547 im oberen Teile die Pfeilrichtung (und entsprechend die Färbung der beiden Hälften der Nadel) entsprechend der Richtung des unteren Pfeiles umzukehren.

Seite 504, Zeile 1 v. o.: anstatt *thermischen* soll es heißen *chemischen*.

Seite 547, Zeile 4 u. 5 v. u.: anstatt *sin a* u. *cos a* soll es heißen *sina* u. *cosa*.

Seite 548, Zeile 4 v. o.: anstatt J_x^2 soll es heißen J^2 .

Seite 557, Zeile 5 v. o.: anstatt Fig. 557 soll es heißen 558.

Seite 732, Zeile 5 v. o.: anstatt $\frac{y' - y}{x' - x}$ soll es heißen $\frac{y' - y}{x' - x}$.

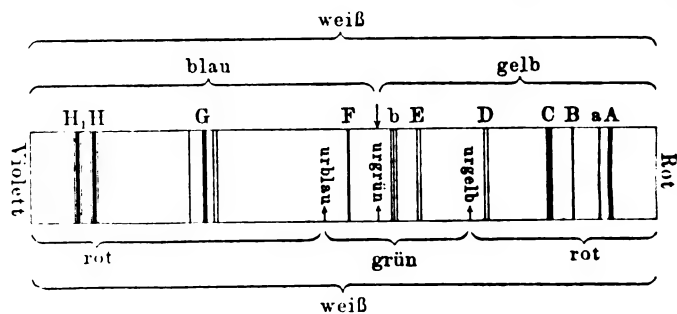
Seite 733, Zeile 4 v. o. ist oberhalb $\sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$ der Buchstabe C_2 zu tilgen.

Seite 746, Zeile 8 v. o. ist nach „alle erdenklichen Arten“ eine Anmerkung
zuschalten gleichlautend mit der Anmerkung zu S. 729.

Seite 749, Zeile 6 v. o.: anstatt $\left(\frac{n}{1}\right)x^2 + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^2$

soll es heißen $\left(\frac{n}{1}\right)x + \left(\frac{n}{2}\right)x^2 + \left(\frac{n}{3}\right)x^2$.

Seite 813, in Figur 93 hat sich zwischen „urblau“ und „urgelb“ die Bezeichnung
grün zu erstrecken, wonach die Figur richtig folgendermaßen



Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig.

2 plüches
2 plüches
1 map
L. M.

Dr. J. Frick's
Physikalische Technik

oder Anleitung zu Experimentalvorträgen sowie zur Selbsterstellung
einfacher Demonstrationsapparate.

Siebente vollkommen umgearbeitete und stark vermehrte Auflage
von **Dr. Otto Lehmann**,

Professor der Physik an der technischen Hochschule in Karlsruhe.

In zwei Bänden. Lexikon-Format.

Erster Band. Erste Abteilung. Mit 2003 in den Text eingedruckten
Abbildungen und einem Bildnis des Verfassers. Preis 16 *M.*, geb. 18 *M.*

Physikalisches Spielbuch für die Jugend.

Zugleich eine leichtfaßliche Anleitung zu selbständigem Experi-
mentieren und fröhlichem Nachdenken.

Von **Dr. B. Donath**.

Mit 156 Abbildungen. gr. 8. Preis geh. 5 *M.*, geb. 6 *M.*

Aufgaben aus der Physik
nebst einem Anhang, physikalische Tabellen enthaltend.

Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichts-
anstalten und besonders beim Selbstunterricht von

Professor Dr. C. Fliedner,

Gymnasialprorektor a. D., Inhaber des Rothen Adlerordens vierter Klasse.

Neunte verbesserte und vermehrte Auflage bearbeitet von
Professor Dr. G. Krebs

in Frankfurt a. M.

Nebst besonders gedruckten Auflösungen.

Mit 74 eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Preis geh. 2,40 *M.*, geb. 2,80 *M.*

Auflösungen
zu den Aufgaben aus der Physik.

Zum Gebrauche für Lehrer und Schüler in höheren Unterrichtsanstalten
und besonders beim Selbstunterricht von

Professor Dr. C. Fliedner,

Gymnasialprorektor a. D., Inhaber des Rothen Adlerordens vierter Klasse.

Neunte verbesserte und vermehrte Auflage bearbeitet von
Professor Dr. G. Krebs

in Frankfurt a. M.

Mit 131 eingedruckten Holzstichen. gr. 8. Preis geh. 4 *M.*

Leitfaden der Wetterkunde.

Gemeinverständlich bearbeitet von

Dr. R. Börnstein,

Professor an der Königl. landwirthschaftlichen Hochschule zu Berlin.

Mit 52 Abbildungen und 17 Tafeln. gr. 8. Preis geh. 5 *M.*, geb. 6 *M.*

Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn in Braunschweig

Das Buch der Natur,

die Lehren der Botanik, Zoologie und Physiologie, Paläontologie, Astronomie, Mineralogie, Geologie, Physik und Chemie umfassend
und allen Freunden der Naturwissenschaft, insbesondere den hiesigen
Lehranstalten gewidmet von

Dr. Friedrich Schoedler,

ehemal. Direktor der Hiesigen hoh. Realschule, 1843 in Stettin.

Dreizehntausendste vollständig neu bearbeitete Auflage von

Prof. Dr. B. Schwalbe, und Prof. Dr. O. W. Thomé.

Prof. Dr. B. Schwalbe, ord.
Professor an Bonn.

Prof. Dr. O. W. Thomé, ord.
Professor an Bonn.

In drei Theilen. gr. 8.

Erster Theil. Botanik, Zoologie, Physiologie und Paläontologie
von Prof. Dr. Otto Wilhelm Thomé. Mit 324 eingestrichelten Ab-
bildungen in 600 Holzschnitten. Preis geh. 2.00 M., geb. 4 M.

Zweiter Theil. Chemie, Mineralogie und Geologie. — Erste Ab-
theilung. Chemie, von Prof. Dr. H. Heringer. Mit 40 Abbildungen in Hol-
schnitt und 1 Tafel. Preis geh. 6 M., geb. 6 M. — Zweite Ab-
theilung. Mineralogie und Geologie, von Prof. Dr. B. Schwalbe mit
Mithilfe von Dr. F. Schmalzer, bearbeitet und herausgegeben von Prof.
Dr. H. Heringer. Mit 112 Abb. u. 2 Taf. Preis geh. 12 M., geb. 12 M.

Dritter Theil. Astronomie und Physik. — Erste Abtheilung. Astronomie
von Prof. Dr. B. Schwalbe, bearbeitet und herausgegeben von Prof. Dr.
H. Heringer. Mit einem Atlasband. Das Verzeichniss von Prof. Dr.
B. Schwalbe. Mit 170 Abb. u. 18 Tafeln. Preis geh. 6 M., geb. 7
M. 2. Abtheilung. Physik (im Pressen).

Physikalische Aufgaben

für die oberen Klassen höherer Lehranstalten

Aus den bei Entloosungsprüfungen gestellten Aufgaben ausgewählt und
mit Hinzufügung der Lösungen in einem Lösungs-buche veranlagt

von **Dr. Wilhelm Budde,**

Professor am Realgymnasium zu Duisburg

Dritte vermehrte Auflage. gr. 8. Preis geh. 2 M., geb. 2.40 M.

Anfangsgründe der Zahlenlehre

von **Gustav Wertheim.**

Mit den Beweisen von Fermat, Lagrange, Euler und Gauss.

gr. 8. Preis geh. 2 M., geb. 3 M.

Physikalisches Praktikum

von **Erhard Wiedemann** und **Hermann Ebert.**

Fünfte verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 366 Abbildungen

gr. 8. Preis geh. 10 M., geb. 11 M.

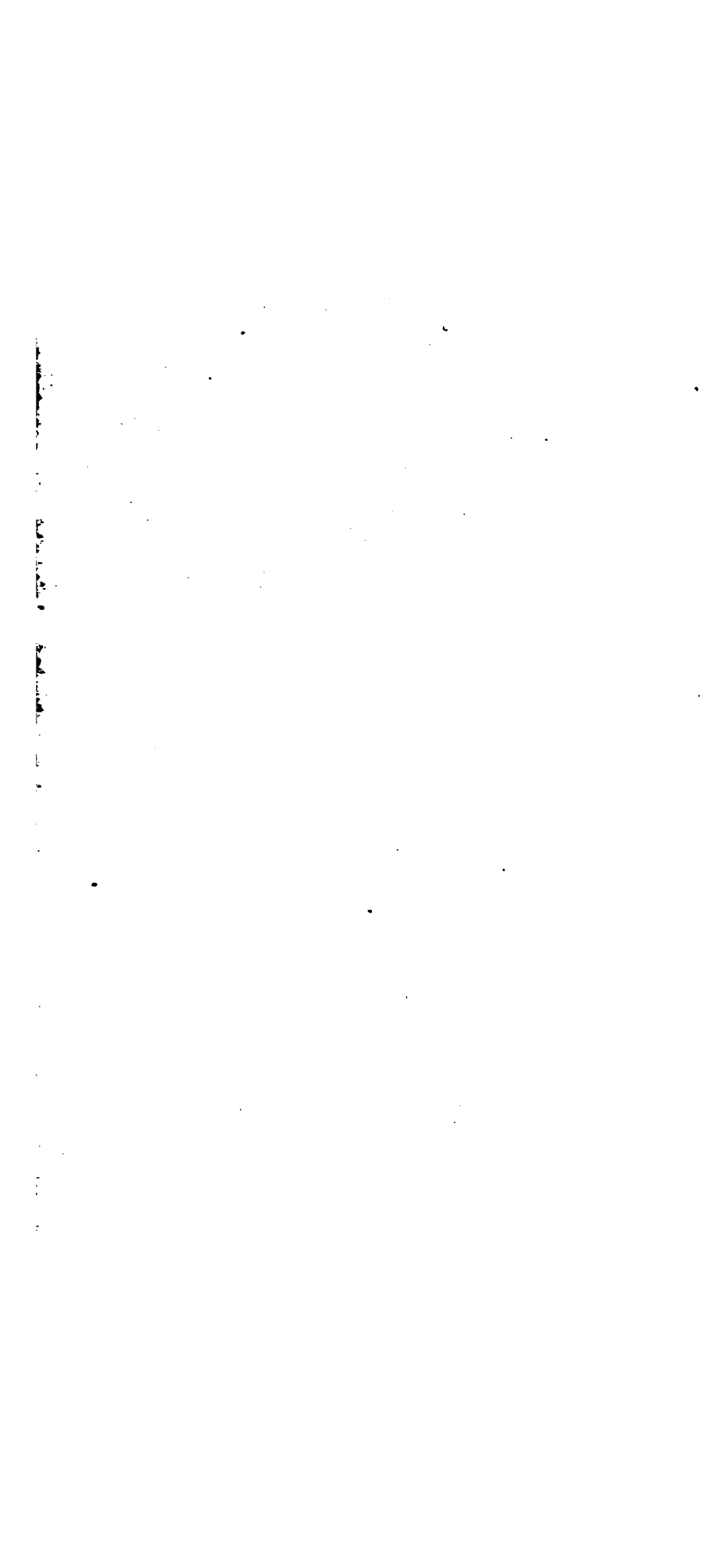
H. W. Vogel's Photographie

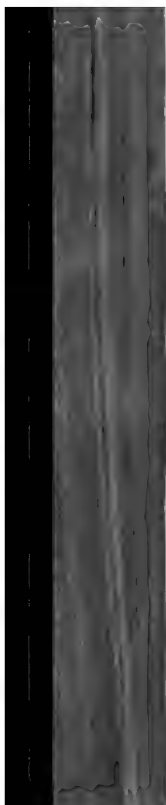
Ein kurzes Lehrbuch für Fachmänner und Liebhaber

bearbeitet von

Dr. E. Vogel.

Mit eingedruckten Abbildungen und Tafeln. gr. 8. Preis geh. 2.50 M.









111-4-224



178 47 1918